对数均值不等式在高考题中的运用

2020-09-15

Table of Contents

[Intro 1](#_Toc179310344)

[证明 1](#_Toc179310345)

[套路 2](#_Toc179310346)

[推论 2](#_Toc179310347)

[实战演练 2](#_Toc179310348)

[小试牛刀 2](#_Toc179310349)

[大显身手 4](#_Toc179310350)

[总结 10](#_Toc179310351)

[参考资料 11](#_Toc179310352)

# Intro

对数均值不等式（Arithmetic-Logarithmic-Geometric mean inequalities，ALG不等式）

当时有：

$\color{grey}{b>\sqrt{\dfrac{a^{2}+b^{2}}{2}}>}$$\color{grey}{>\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}>a}$

其中为对数均值。

## 证明

**核心思路：令，构造关于的方程**

证明右半边 : 当, 且时 , 有.

证明：不妨设, 上不等式⇔.

令，

上不等式⇔ .

构造函数, 求导得 : .

当时 , 恒成立, 即可知在上单调递增 .

即有, 所以原不等式成立 .

左半边同理。

## 套路

1. 证明ALG不等式；
2. 根据联立2个等式；
3. 指数化对数，有的相减消；
4. 得到关系，代入具体题目分析。
5. \*如有需要，方程组可以相加，以得到与的关系。

## 推论

* 全部导数：已知，
* 则:
* 推论1：
* 推论2：

# 实战演练

## 小试牛刀

1. 已知 有两个零点.
   1. 求a的取值范围; (答案：)
   2. 求证 .

* 解析
* 设2个零点为. 则有
* ,

1. 证明: .

* 解析

1. 已知 ,对于都有恒成立，则正数的取值范围是().

* A. B. C. D.
* 解析
* D. 解析：

1. 已知 ,对于都有恒成立，则正数a的取值范围是().

* A. B. C.D.
* 解析
* A. 解析：
* 把 代入得：
* 时,

## 大显身手

1. (2016全国课标Ⅰ卷理科21题)已知函数有两个零点.

* (Ⅰ) 求的取值范围 ;
* (Ⅱ) 设是的两个零点 , 证明: .
* 解析
* 解析 : (Ⅰ)
* (Ⅱ) 由 (Ⅰ) 知
* 所以
* 取对数可得
* 相减可得$2 ( 1- x \_1 ) -2 ( x \_2-1 ) = ( 2- x \_1 ) -( 2- x \_2 ) ＋ x \_1- x \_2 $,
* 即,
* 所以,
* 若, 则,
* 所以,
* 所以,
* 所以, 即, 这与矛盾 , 所以.

1. 已知函数 .
   1. 求函数 的单调区间;
   2. 如果函数 有两个不同的零点 且证明:

* 解析
* 分析： (1) 单调递增区间为 , 单调递减区间为
  1. 证： ,
* 由题意得：,
* 两式相减得
* ,
* 欲证
* 只需证 ,
* 只需证： ,
* 只需证： ,
* 只需证：,
* 由对数均值不等式可得,
* 从而命题得证.

1. (2014南通二模)设函数 , 其图象与轴交于, 两点, 且 .
   1. 求实数a 的取值范围;
   2. 证明：

* 解析
* 解：(1) (过程略)
* 证：(2) 由知
* 由 题 意 得：
* 两 式 相 减 得
* 由ALG不等式得：
* 由
* 两式**相加**得：
* 即
* ,
* ,
* 又 由(1)知在 上单调递减,
* ,
* 则 得证.

1. （2014陕西理21(3)）设函数其中是的导函数. 设 , 比较与 的大小, 并加以证明.

* 解析
* 因为 ,
* 所以 ,
* 而 , 因此只需比较 与 的大小即可.
* 利用对数均值不等式: 当 时,有 [注1],
* 故可命
* 则 ,
* 故 ,
* 将以上各不等式左右两边分别相加得
* 即得
* 注1
* **【注1】**这里如果用可以很快推出. 但是如果使用常规（常用）的ALG不等式也可以分步推出相同结论。
* 令根据ALG不等式，有：

1. （2013 年全国大纲卷22II）设函数 . 设数列 的通项 , 证明 .

* 解析
* 证明: 当 时,有 (利用对数均值不等式),
* 即 ,
* 令 , 则
* 所以
* ,
* 将上式相加可得
* 故
* 所以得证

1. (2010天津理科21题) 已知函数. 如果, 且, 证明 .

* 解析
* 由 得
* 化简得 ,
* 两边同时取以 为底的对数, 得
* 也即
* 利用ALG不等式得
* 即证得.

1. (2018全国I卷21) 已知函数 . 若存在两个极值点 , 证明: .

* 解析
* 对函数 求导得: .
* 存在两个极值点 在上有两个解.
* 由韦达定理可得: .
* 两式相减得:
* 结合韦达定理得:
* 利用ALG不等式可得:
* 所以 成立.

1. (2016湖南高联预15) 已知函数 . 若 有两个极值点 , 且 求证: .

* 解析
* 对 求导得: .
* 因为 为的两个极值点,
* 所以
* 由(1)-(2)​得: .
* 根据对数均值不等式得：
* 由(1)+(2)​得:
* 将(3)式带入(4)式得: 成立。

1. (2018福建高联预14) 已知若是函数 的两个零点, 求证:.

* 解析
* 因为 是函数 的两个零点，
* 所以成立.
* 移项可得：
* 两边分别取对数可得:
* 上式相减可得: 利用ALG不等式 即可得: 成立.

1. 已知实数 函数 . 若 的图象与 轴交于 两点, 线段中点的横坐标为 证明: .

* 解析
* 由 知
* 故

## 总结

$\color{grey}{b>\sqrt{\dfrac{a^{2}+b^{2}}{2}}>}$$\color{grey}{>\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}>a}$

| 题号/来源 | 所用的不等式 | 方程组处理 |
| --- | --- | --- |
| **1**/2016国一21 |  | 相减、反证法 |
| **2** |  | 相减 |
| **3**/2014南通二模20 |  | 取对、相减、相加 |
| **4**/2014陕西21 | $\color{grey}{ b>\dfrac{b-a}{\ln b-\ln a}}$或 | 命, |
| **5**/2013全国大纲卷22II |  | 裂项 |
| **6**/2010天津理21 |  | 相减、取对 |
| 7/2018全国I卷21 |  | 相减、韦达 |
| **8**/2016湖南高联预15 |  | 相减 |
| **9**/2018福建高联预14 |  | 取对、相减 |
| **10** |  |  |

# 参考资料

* 《利用对数均值不等式破解极值点偏移问题》陈友镇
* 《巧用对数均值不等式解高考压轴题》彭耿铃
* 《对数均值不等式在高考及竞赛中的运用》陈纪刚
* 《妙用对数均值不等式解题》徐春艳