同构思维在解析几何中的妙用

2021-10-21

#### 同构思维提高效率

圆锥曲线的有关问题变量多，运算量大，有时部分学生在考试过程中不易做对。同构思想在解决问题时能优化计算，比起以往联立直线与曲线方程的常规方法，显然简便许多。当题目中出现具有相同结构、相同式子时，或过某一点处的切线等相似结构时，可以考虑采用同构法（例如，两点均由同一双曲线和同一直线相交而得，或两点均是过同一定点所作的双曲线切线的切点，如此，两点坐标均遵循相同的方程组，化简该方程组得到的一元二次方程可使用韦达定理），从而达到提高解题效率的目的。

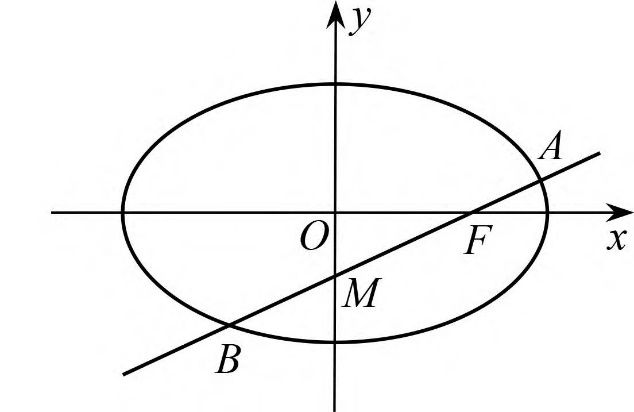
#### 不要刻意使用同构法

并不是所有的圆锥曲线大题都可以用同构法，相反，只有一小部分可以使用。尽管这部分题目的规律有迹可循（如上所述），但因同构思维并不是单独的考点，因此笔者仍建议考生见招拆招、顺其自然，而不要刻意凑同构，以免考场上因凑不出同构而白白浪费时间。

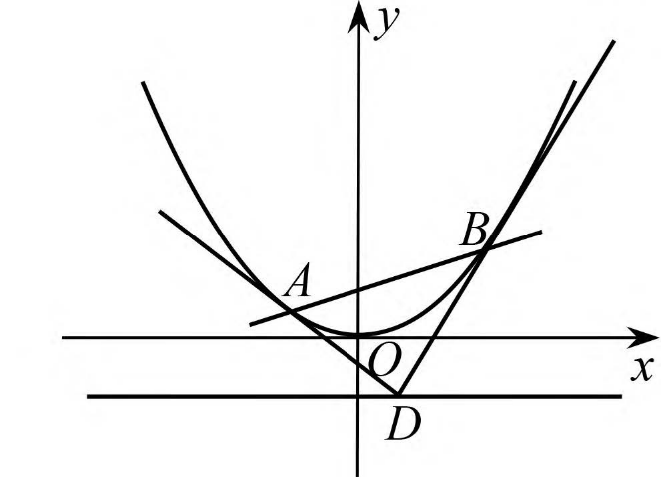
1. (2022年新高考I卷21题)已知点在双曲线:上，直线交双曲线于两点，直线的斜率之和为.求的斜率.

* **答案**
* 双曲线方程为
* **设而不求**
* 设直线 ：，，。
* 将条件坐标化消去，得
* 联立直线与双曲线方程，利用韦达定理化简得，
* 分类讨论得
* **设而求之**
* 易知直线，的斜率存在，设，。
* 联立双曲线方程，
* 求得，
* 。
* 结合条件得，
* 代入坐标得。

1. 已知椭圆的标准方程为，过椭圆的右焦点的直线交椭圆于，两点，交轴于点，若，，求证：为定值。

* 
* **解析**
* ，。
* 将，代入椭圆方程得
* 化简得
* 则，是方程的两根，
* 由韦达定理得。

1. （2019年全国卷III理21题）如图 2，曲线，为直线上的点，过作曲线的两条切线，切点分别为，。证明：直线过定点。

* 
* **解析**
* ，，，，，
* 则，。
* 点代入两切线方程得
* 化简，
* 由点，在抛物线上知，消，
* 得
* 从而，是方程的两根，
* 即点，在直线上，则，定点为。

1. 已知，分别为椭圆的左、右顶点，为直线上的动点，与的另一交点为，与的另一交点为。证明：直线过定点。

* **解析**
* 设，，，若，
* 则设直线的方程为，。
* 椭圆和直线联立得，
* 由韦达定理：①
* ②
* 因为，，三点共线，得，
* 所以，
* 等号两侧同时乘以得：，
* 又因为，，三点共线，得，所以，
* 等号两侧同时乘以，得，
* 所以，
* 可得，所以，
* 所以，
* 又因为点在椭圆上，所以，
* 即，所以，
* 即，所以，
* 又因为，，
* 代入化简整理得。
* 将①②代入得，
* 整理得，解得或（舍），
* 所以直线的方程为，所以直线过定点。若，则设直线的方程为，显然过定点，
* 综上，直线过定点。

1. (2018 年浙江卷 21，节选)如图所示，已知点是轴左侧（不含轴）一点，抛物线上存在不同的两点，满足，的中点均在上。设中点为，证明：垂直于轴。

* 图示, 工程绘图

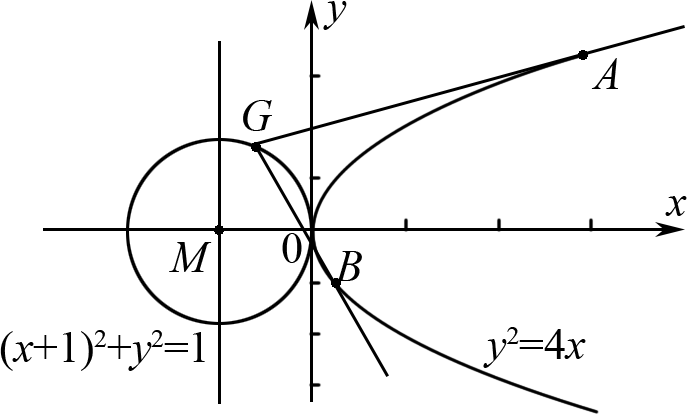
  描述已自动生成
* **解析**
* 设，，，
* 则，的中点分别是，。
* 因为点在抛物线上，
* 则
* 化简可得。
* 同理可得，
* 所以，是方程的两根，
* ，即。

1. 如图所示，过椭圆上一点作轴的垂线，垂足为，已知，分别为椭圆的左、右焦点，，分别是椭圆的右顶点、上顶点，且，。

* 图示, 工程绘图

  描述已自动生成
* (1)求椭圆的方程；
* (2)过点的直线交椭圆于，两点，记直线，，的斜率分别为，，，问：是否为定值？请说明理由。
* **解析**
* (1)椭圆的方程为（求解过程略）。
* (2)直线，具有形上的对等性，即直线与的相交过程与直线与的相交过程完全一致，点，的产生上也具有对等性，故而我们可用同构法选择其一进行研究。
* 设，，。
* 联立
* 得
* 故。
* 同理可得，
* 将代入椭圆得 ，
* 同理可得
* 即，是方程的两根，
* 所以，则。

1. 在直角坐标系中，抛物线与直线交于，两点，且。抛物线的准线与轴交于点，是以为圆心，为半径的圆上的一点（非原点），过点作抛物线的两条切线，切点分别为，。

* 
* (1)求抛物线的方程；
* (2)求面积的取值范围。
* **解析**
* (1)。
* (2)计算抛物线在点处的切线方程为，
* 对抛物线方程求导得，在点处的斜率为，
* 在点处的切线方程为，
* 整理得。
* 设，，，
* 则直线，的方程分别为，。
* 因为点在直线，上，所以，
* ①②两式相减得，
* 并由①得。直线的斜率为，
* 所以直线的方程为。

1. 已知椭圆，，是椭圆上关于原点对称的两点，设以为对角线的椭圆内接平行四边形的一组邻边，斜率分别为，，则。

* **解析**
* 因为，是椭圆上关于原点对称的两点，不妨设，
* 则，且。
* 又平行四边形是椭圆内接平行四边形，则点，关于原点对称，
* 不妨设，则，且。
* 直线，的斜率分别为：，，
* 因此。
* 而，
* 即，
* 所以。

# 参考文献

* 常梨君,金一鸣.“形”中挖“同”“数”中寻“构”——记“同构思想”在解析几何中的应用[J].中学数学月刊,2022,(11):69-72.
* 李声武.同构法在解题中的应用[J].数理天地(高中版),2023,(01):23-24.
* 刘群.同构思维在解析几何中的“妙用”[J].高中数理化,2021,(04):8-9.
* 杨科荣.同构方程视角下高中数学解题思考——以解析几何试题为例[J].数理天地(高中版),2024,(03):48-50.