几何法的妙用（不含圆锥曲线二级结论）

2021-10-23

Table of Contents

[中位线 1](#_Toc179291885)

[相似三角形 3](#_Toc179291886)

[等腰/等边三角形 4](#_Toc179291887)

[三角形内角平分线 5](#_Toc179291888)

[最值相关 7](#_Toc179291889)

[参考文献 9](#_Toc179291890)

#### 前言

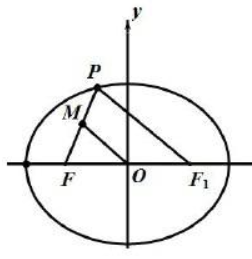
在高考数学的几何题中，几何法较难找出解决方法，但一旦找出，方法往往是最简洁的。本文节选了可以用几何法的部分解析几何题，且其所用几何法**均不涉及圆锥曲线的二级结论**，学生可在**仅掌握初中基本几何**知识和圆锥曲线基本定义的情况下，用几何法完成下列题目。

#### 圆锥曲线的光学性质

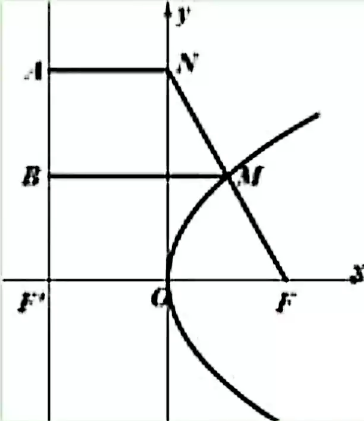
运用圆锥曲线的光学性质解题，也属于几何法。但这部分内容已单独成章，本文不再赘述。详见历史发文。

# 中位线

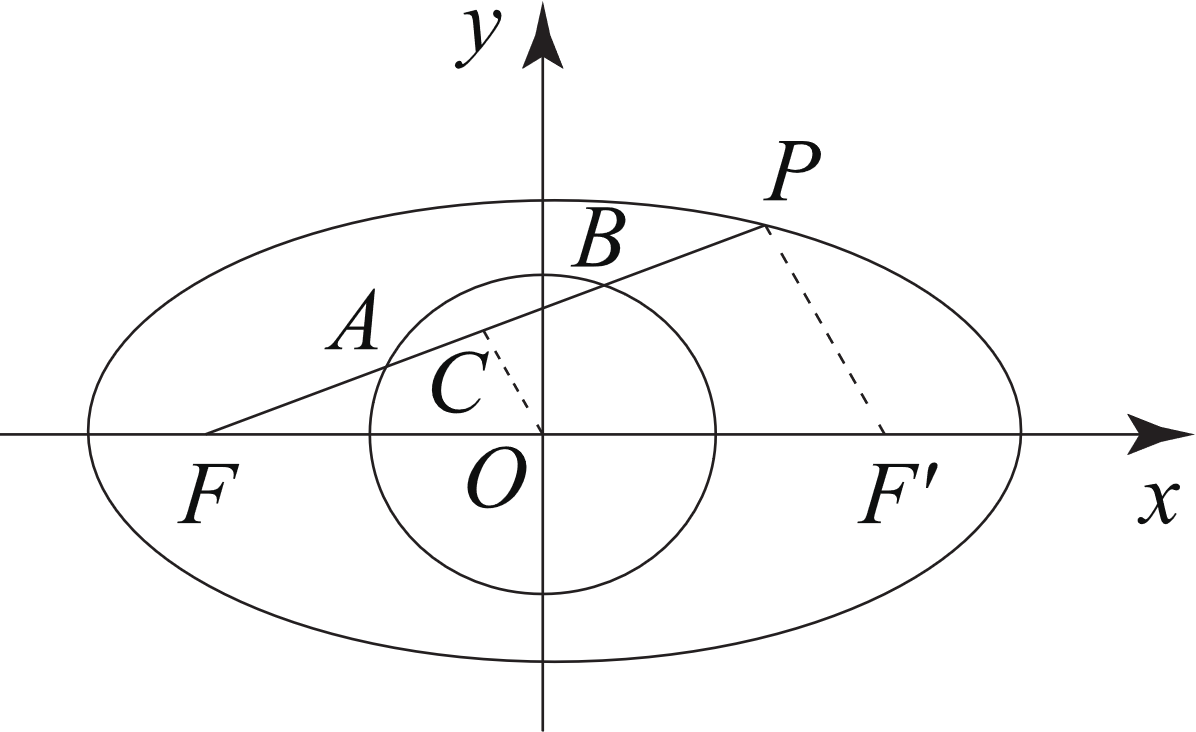
1. （2019年浙江卷理科第15题）已知椭圆的左焦点为，点在椭圆上且在轴的上方，若线段的中点在以原点为圆心，为半径的圆上，则直线的斜率是\_\_\_。

* **解析**
* 
* 答案：。
* 由题意可知，由中位线定理可得，
* 设，可得，联立方程，可解得，。
* 点在椭圆上且在轴的上方，求得，所以。

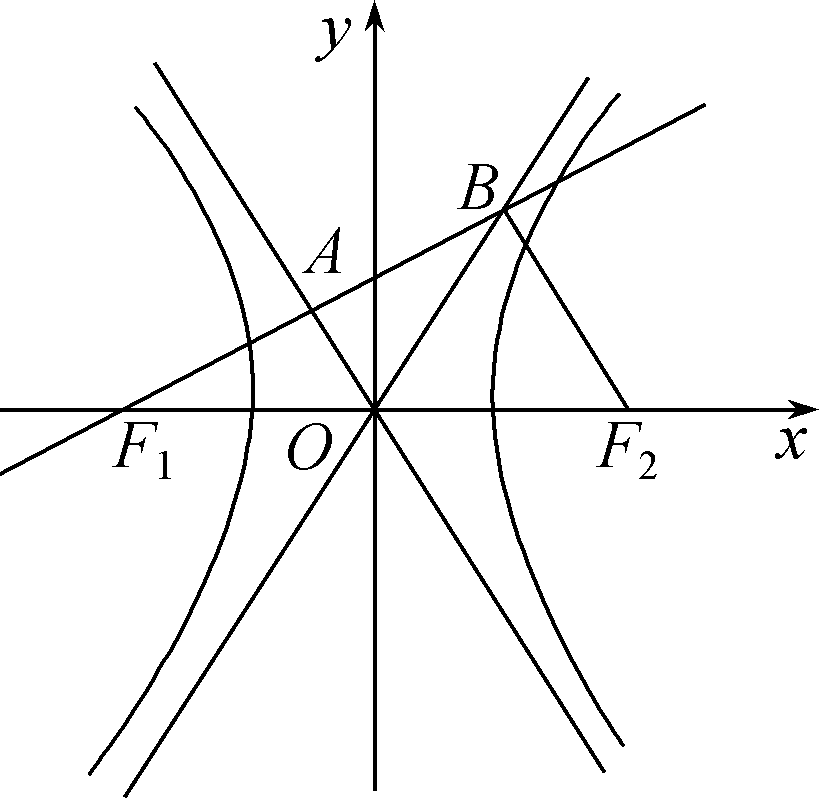
1. （2017年全国II卷第16题）已知是抛物线的焦点，是上一点，的延长线交轴于点。若为的中点，则\_\_\_。

* **解析**
* ****
* 如图所示，不妨设点位于第一象限，设抛物线的准线与轴交于点，作于点，于点，由抛物线的解析式可得准线方程为，则，。在直角梯形中，中位线，由抛物线的定义有，结合题意有，故。

1. 设椭圆的左焦点为，点在椭圆上且在第一象限，直线与圆相交于，两点，若，是线段的两个三等分点，则直线斜率为\_\_\_。

* 
* **解析**
* 如图所示，取的中点，连接，由，是线段的两个三等分点，可知为的中点，因为点，在圆上，所以。
* 设点为椭圆的右焦点，连接，根据三角形中位线性质可得，则有。
* 设，，结合，，，由椭圆的定义得。
* 在中，，结合，得。设点，则，即，可得，代入椭圆方程可得，则直线的斜率为。

1. (2019年全国I卷理科第16题)已知双曲线的左、右焦点分别为，，过的直线与的两条渐近线分别交于，两点。若，，则的离心率为\_\_\_。

* 
* **解析**
* 由，得为的中点，
* 又为的中点，则。
* ，得，，则。
* 结合双曲线的对称性得，所以渐近线的斜率为，
* 从而。

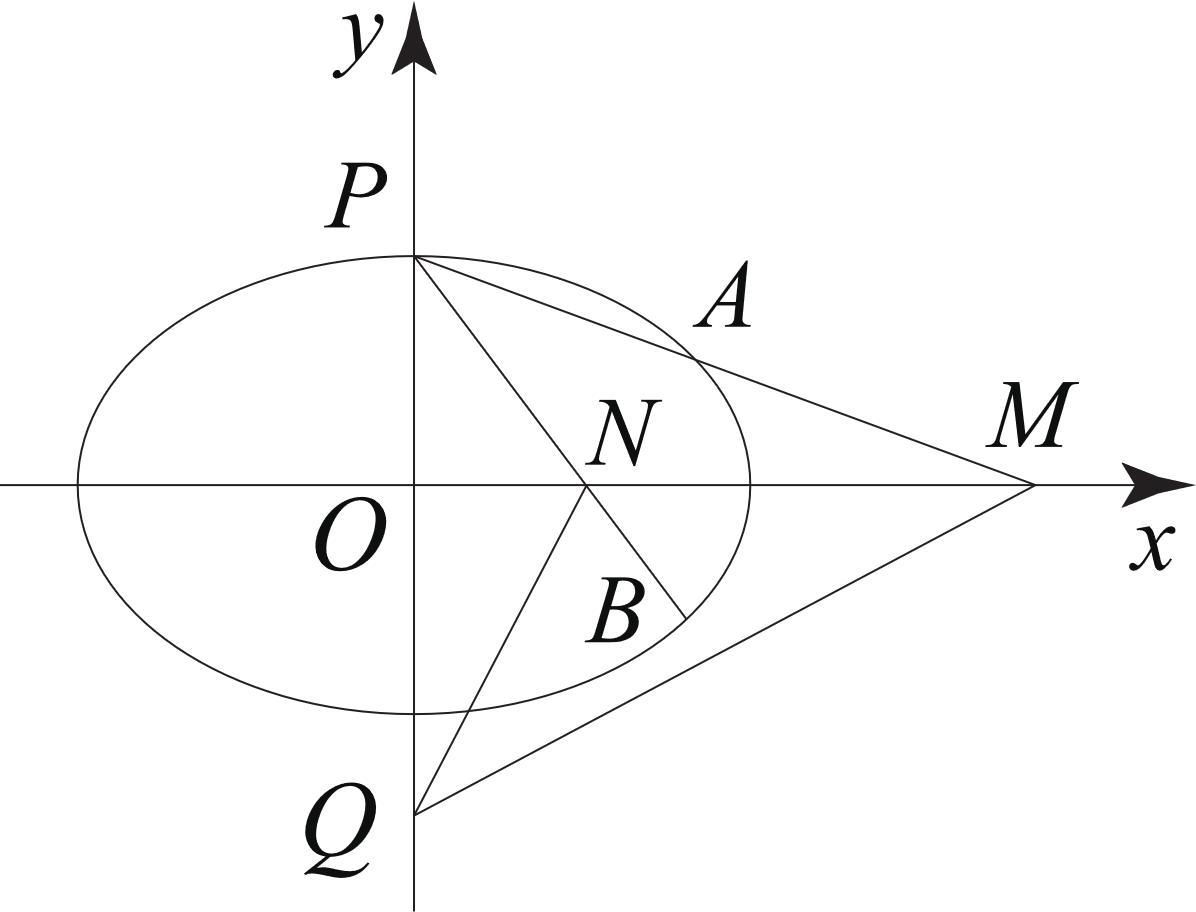
# 相似三角形

1. 若为过抛物线焦点的弦，为坐标原点，且，为抛物线准线与轴的交点，则的正切值为（ ）。

* A.；B.；C.；D.。
* 图示, 工程绘图

  描述已自动生成
* **解析法**
* 焦点，，方程，与抛物线方程联立，
* 解得，，
* 于是，，
* ，
* 答案 A。
* **几何法**
* ,

1. 如图所示，已知椭圆的离心率为，点和点都在椭圆上，直线交轴于点。

* 
* (1)求椭圆的方程和点的坐标(用，表示)；
* (2)设为原点，点与点关于轴对称，直线交轴于点，则轴上是否存在点，使？若存在，求出点坐标；若不存在，说明理由。
* **解析**
* (1)椭圆的方程为，点的坐标为（求解过程略）。
* (2)由题意可得，设点，
* 因为与共线，所以，
* 即点，
* 由题意可知等价于，
* 所以。
* 设点，由，
* 得，
* 所以或，
* 故点为或。

# 等腰/等边三角形

1. (2019年江苏卷第17题)如图，在平面直角坐标系中，椭圆的焦点为，。过作轴的垂线，在轴的上方，与⊙交于点，与椭圆交于点。联结并延长交⊙于点，联结交椭圆于点，联结。已知。

* 图示, 工程绘图

  描述已自动生成
* (I)求椭圆的标准方程；
* (II)求点的坐标。
* **解析**
* 由(1)知椭圆方程为。
* 如图，连接。由于，，所以，故。又，所以，故有，所以，故轴，所以点。

1. 如图所示，是椭圆的右焦点，直线与椭圆相交，交点为、且，求的离心率。

* 图示, 工程绘图

  描述已自动生成
* **解析**
* 设椭圆的左焦点为，连接、，则四边形为平行四边形。
* 因为，所以四边形为矩形。
* 因为直线的斜率是，所以。
* 在中，，所以为正三角形。
* 所以，。
* 在中，因为，，所以。
* 根据椭圆定义可得，则离心率。

# 三角形内角平分线

**三角形内角平分线定理**

如图，在中，交于点。平分。

图片包含 游戏机, 物体, 天线

描述已自动生成

正向证明：作交的延长线于点，所以，因为，所以，。又因为，所以，所以，因此。

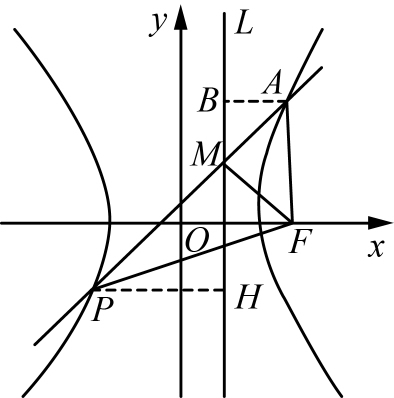
逆向证明同理。

1. 如图，直线经过双曲线的右焦点，且与两条渐近线分别交于，两点，，，求双曲线的离心率。

* 图片包含 物体, 天线, 游戏机, 钟表

  描述已自动生成
* **解析**
* 由双曲线的几何性质可得，在中，由内角平分线定理得。
* 又因为，所以，因为，为直角三角形。
* 所以，所以，所以在中，。
* 又因为，，所以，又因为，所以。

1. 如图，是双曲线的右焦点，直线是双曲线的右准线，直线分别交双曲线于，两点，交右准线于点。求证：平分。

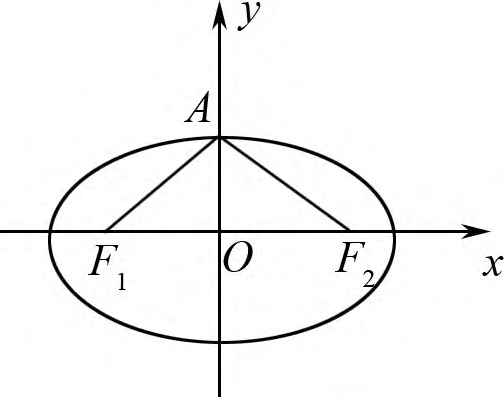
* 
* **证明**
* 作于，作于（如图），因为直线交准线于点，所以，则。①
* 由双曲线准线定义可知：，所以上式变形得。②
* 由①②得，由三角形内角平分线定理的逆定理可得：平分。

# 最值相关

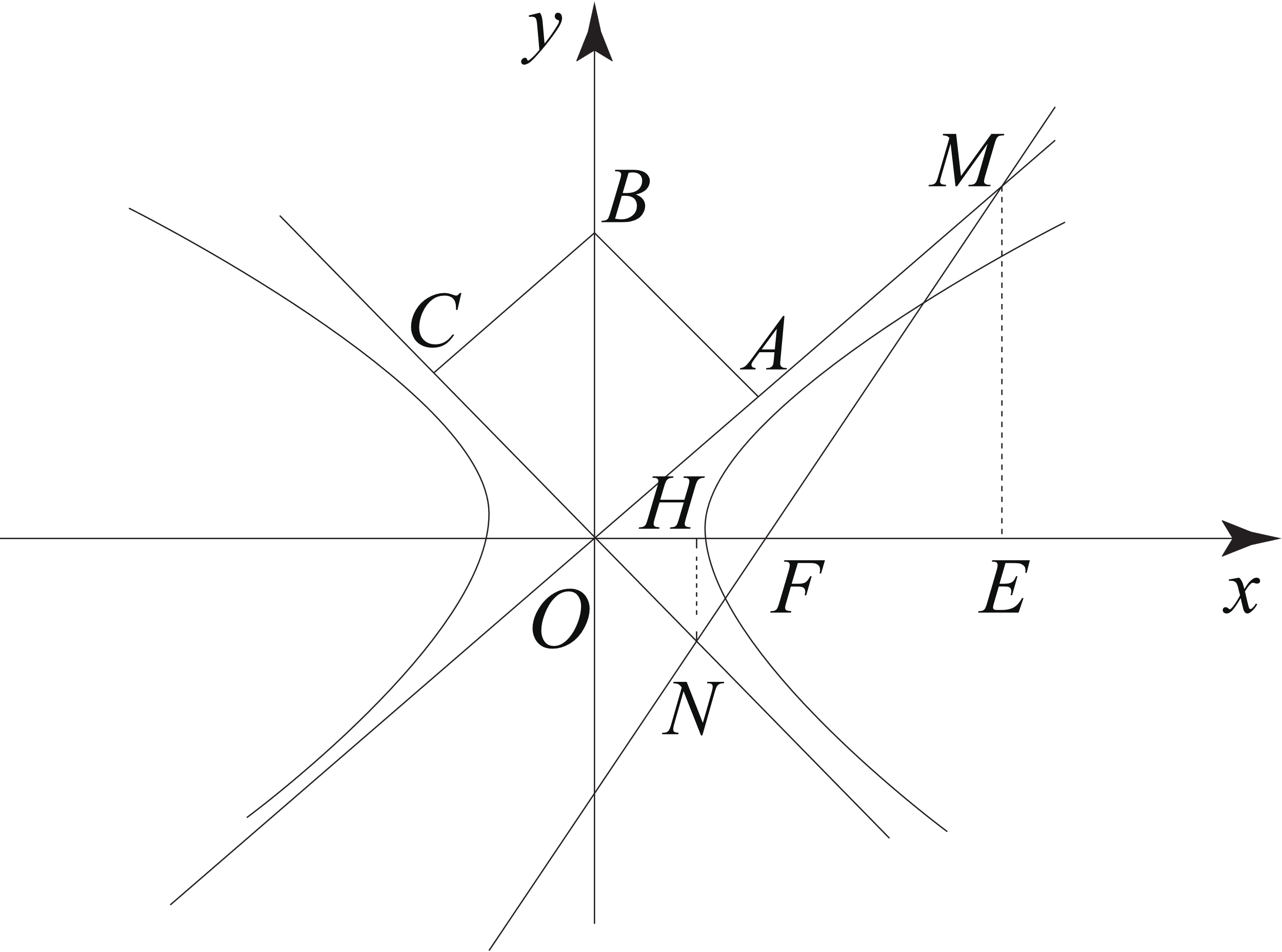
1. 已知，，是圆上的一个动点，则的最大值为（）。

* (A)。(B)。(C)。(D)。
* **解析**
* 在中，为的外接圆半径。
* 若要使最大，则要最小，又，两点在圆内，在圆上，所以当的外接圆和圆内切时，最小。
* 此时可设外接圆的圆心为，则，且，代入解得，所以。
* 所以的最大值为。

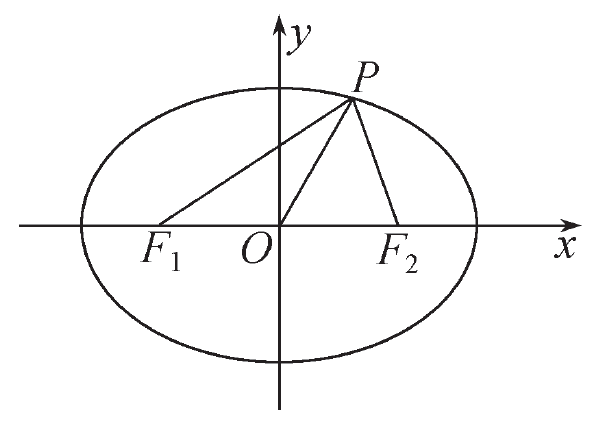
1. 已知是以，为左、右焦点的椭圆上一点，若，则该椭圆的离心率的取值范围是\_\_\_。

* ****
* **解析**
* 根据椭圆图形的几何性质，可知当点为椭圆的短轴顶点（不妨设上顶点为）时最大。
* 由于存在点为椭圆上的一点，使得，所以在中，，那么在中，。
* 结合三角函数的定义有：，又，则有，即该椭圆的离心率的取值范围是。

1. 双曲线的渐近线为正方形的边，所在的直线，点为该双曲线的右焦点，若过点的直线与直线，分别相交于，两点，则内切圆半径的最大值为\_\_\_。

* ****
* **解析**
* 如图所示，由题意得，过，向轴作垂线，垂足分别为，。
* 设，，所以，，
* 因为，所以，
* 又因为，所以（当且仅当时，等号成立）。的内切圆半径为，
* 令，，
* 则，
* 令，则在上单调递减，，
* 所以当时，取得最大值为。

1. (2019年全国II卷文科第20题)已知，是椭圆的两个焦点，为上一点，为坐标原点。

* (1)若为等边三角形，求的离心率；
* (2)如果存在点，使得，且的面积等于 16，求的值和的取值范围。
* 
* **解析**
* (1)如图，连结，由可知，，因此，
* 故的离心率是。
* (2)若满足条件的点存在，则在中，，，，得，，所以。
* 由椭圆的性质可知，当为椭圆短轴的端点时最大，由此可先预估答案，再详细证明：
* 在中，设，由椭圆的定义及勾股定理得，得，则关于的方程有大于零的实根当且仅当，可得。

# 参考文献

* 肖旭平.思想方法够丰富,解题思路才出众——以一道高三数学模拟题为例[J].数理天地(高中版),2023,(21):24-25.
* 高双云.离心率取值范围的破解策略[J].数理天地(高中版),2024,(17):2-3.
* 何荣.用平面几何性质解答圆锥曲线问题的应用思路分析[J].高中数理化,2022,(21):43-44.
* 吴志坚,童嘉森.巧用平面几何图形特征降低解析几何运算量——以2019年高考全国卷圆锥曲线试题为例[J].中学生数学,2020,(17):48-50.
* 陈秀群.用平面几何方法妙解圆锥曲线问题[J].中学数学教学参考,2020,(15):62-63.
* 秦桂芳.三角形内角平分线定理在圆锥曲线中的应用[J].高中数理化,2019,(18):10.