

(出题人: 九(1)班 李泽锋)

【提出问题】已知 a 为正整数, 若要使 $\sqrt{a^2 + 100}$ 为整数, 求所有满足条件的 a .

【初步推导】

$$\text{令 } n = \sqrt{a^2 + 100}$$

$$\text{则 } n^2 = a^2 + 100$$

$$\therefore n^2 - a^2 = 100$$

$$\therefore (n - a)(n + a) = 100$$

...

【完善推导】请接着【初步推导】中已有的过程解答原题.

【小试牛刀】已知在关于 x 的二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ (a 、 c 均为有理数, b 为正整数)中,
 $ac = -10$, 若要使方程的所有根都为有理数, 求所有满足条件的 b .

【思考探究】已知 m 、 n 均为正整数.

- ① 当 n 为大于2的质数时, 求证: 当 $\sqrt{m^2 + n}$ 为整数时, 有且仅有一个满足条件的 m .
- ② 当 n 为合数时, 判断是否对于所有的 n , 都有当 $\sqrt{m^2 + n}$ 为整数时, 至少有一个满足条件的 m , 并说明理由.

注: 质数 (*prime number*) 是指在大于 1 的整数中, 除了 1 和它本身以外不再有其他因数的整数.

合数 (*composite number*) 是指在大于 1 的整数中除了能被 1 和本身整除外, 还能被其他数 (0 除外) 整除的整数.