

(知识点:平方差公式)

1. 阅读材料, 并回答问题

$$\text{已知: } a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$\text{令 } a = 3, b = 1$$

$$\text{原式} = 3^2 - 1^2 = (3 - 1)(3 + 1)$$

$$\therefore 3^2 = 1 + (3 - 1)(3 + 1)$$

$$3 = \sqrt{1 + (3 - 1)(3 + 1)}$$

$$3 = \sqrt{1 + 2 \times 4}$$

令 $a = 4, b = 1$, 同理可得:

$$4 = \sqrt{1 + 3 \times 5}$$

代入原式得:

$$3 = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3 \times 5}}$$

同理可得:

$$3 = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4 \times 6}}}$$

$$3 = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + 5\sqrt{1 + \cdots \sqrt{1 + n\sqrt{1 + \cdots}}}}}}}$$

则称原式为3的“神秘恒等式”

(1) 直接写出正整数 m 的“神秘恒等式”(写出前三个根号即可, 后面用省略号代替) _____.

(2) 已知分式 $\frac{x^2-1}{k(x-1)} = \sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)\sqrt{1+\cdots}}}}$, 且 $x = k$, 求 k 与分式的值.

(3) 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, 且 AB, BC 的长度都为整数, $4 < AC < 5$, 当 $C_{\triangle ABC} = 6 + 2\sqrt{5}$ 时, 设

$AB = x, BC = y$, 若满足

$$1 + x\sqrt{1 + (y-1)\sqrt{1 + y\sqrt{1 + (y+1)\sqrt{1 + \cdots}}} = \sqrt{1 + z\sqrt{1 + (z+1)\sqrt{1 + (z+2)\sqrt{1 + \cdots}}}}$$

求 z 的值.