

江门市 2024 年普通高中高一调研测试（二）

数学答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	A	D	B	C	C	B	D

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，有选错的得 0 分，部分选对的得部分分。

题号	9	10	11
答案	BD	AD	AC

三、填空题，本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

题号	12	13	14
答案	(2, 0)	59.4	1

四、解答题：共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. 解：（1）由题意得： $m^2 + 2m - 3 < 0$ ， $m + 1 > 0$ ，.....3 分

解得： $-3 < m < 1$ ， $m > -1$ ，

解得： $m \in (-1, 1)$ 。.....6 分

（2）由题意得： $m + 1 = m^2 + 2m - 3 + 2$ ，.....9 分

整理得： $m^2 + m - 2 = 0$ ，

解得： $m_1 = 1$ ， $m_2 = -2$ 。.....13 分

16. 解：（1） \because 点 E 、 F 、 G 分别是 CD 、 CP 、 BP 的中点，

$\therefore EF \parallel DP$ ， $GF \parallel BC$ ，.....2 分

又 \because 在矩形 $ABCD$ 中： $AD \parallel BC$ ，

$\therefore GF \parallel AD$ ，.....3 分

又 $\because AD \subset$ 平面 PAD ， $GF \not\subset$ 平面 PAD ，

$\therefore GF \parallel$ 平面 PAD ，.....4 分

同理可得： $EF \parallel$ 平面 PAD ，.....5 分

又 $\because EF \cap GF = F$ ， EF 、 $GF \subset$ 平面 EFG ，

\therefore 平面 $EFG \parallel$ 平面 PAD 。.....7 分

(2) $\because PA \perp$ 平面 $ABCD$, $BC \subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore BC \perp PA$,8 分

又 $\because BC \perp AB$, $PA \cap AB = A$, PA 、 $AB \subset$ 平面 PAB ,

$\therefore BC \perp$ 平面 PAB9 分

由 (1) 可得: $GF \parallel BC$,

$\therefore GF \perp$ 平面 PAB ,10 分

又 $\because PB \subset$ 平面 PAB ,

$\therefore GF \perp PB$12 分

$\because CG = 2$, $BC = \sqrt{3}$,

$\therefore BG = \sqrt{2^2 - \sqrt{3}^2} = 1$13 分

$\because BC = 2GF$,

$\therefore GF = \frac{\sqrt{3}}{2}$,14 分

$\therefore BF = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$15 分

17. 解: (1) $\frac{\sin C}{\cos A} - \frac{\cos C}{\sin A} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A} \right)$,1 分

$\sin C \sin A - \cos C \cos A = \frac{1}{2}(\sin^2 A + \cos^2 A)$ 3 分

$\cos C \cos A - \sin C \sin A = -\frac{1}{2}$,

$\cos(A + C) = -\frac{1}{2}$,5 分

$\because A + B + C = \pi$,

$\therefore \cos(A + C) = -\cos B = -\frac{1}{2}$,

$\because B \in (0, \pi)$

$\therefore B = \frac{\pi}{3}$7 分

(2) $\because B = \frac{\pi}{3}$,

$\therefore \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore \sin A + \sin B + \sin C = \sin A + \sin C + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin A + \sin\left(\frac{2\pi}{3} - A\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}$,11 分

$= \sin A + \sin \frac{2\pi}{3} \cos A - \cos \frac{2\pi}{3} \sin A + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} \sin A + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos A + \frac{\sqrt{3}}{2} \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$,

故 $\sin A + \sin B + \sin C$ 的取值范围为 $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$15 分

18. 解: (1) 如图, 延长 GD 至 H 使得 $GD = HD$.

\because 点 F 为 AD 中点,

$\therefore AD = 2AF$.

在矩形 $ABCD$ 中: $AD \parallel BC$, $AD = BC$,

$\therefore \triangle DFG \sim \triangle BCG$,

$$\therefore \frac{DG}{BG} = \frac{DF}{BC} = \frac{1}{2},$$

$\because GD = HD$,

$\therefore GH = 2DG = BG$,

\therefore 点 G 是 BH 中点,

又 \because 点 E 是 BD_1 的中点,

$\therefore D_1H = 2EG$.

.....2 分

在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中: $DD_1 \perp$ 平面 $ABCD$,

又 $\because BD \subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore DD_1 \perp BD$,

又 $\because GD = HD$,

$\therefore D_1G = D_1H = 2EG$,

$$\therefore \frac{EG}{D_1G} = \frac{1}{2}.$$

.....7 分

(2) 如图, 分别取 AD_1 、 BD 的中点 I 、 J , 作 $OI \perp OJ$, 垂足为点 O ,

由题意得: 点 I 为 $\triangle ADD_1$ 外接圆圆心, 点 J 为 $\triangle DAB$ 外接圆圆心,

又 $\because OI \perp OJ$,

\therefore 点 O 为三棱锥 $D_1 - ADB$ 外接球球心.

.....8 分

设 $AD = a$, $AB = b$, $AA_1 = c$, $\triangle ADD_1$ 外接圆半径为 r_1 , $\triangle DAB$ 外接圆半径为 r_2 ,

三棱锥 $D_1 - ADB$ 外接球半径为 r ,

$$\text{则 } r_1^2 = \frac{1}{4}(a^2 + c^2), r_2^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2).$$

.....10 分

易证四边形 $IOJF$ 为矩形,

又 \because 点 I 、 F 分别是 AD_1 、 AD 的中点,

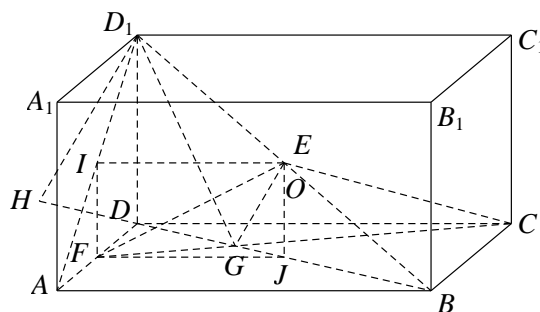
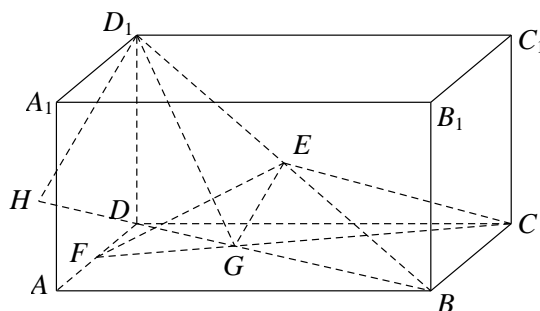
$\therefore IF \parallel OJ \parallel DD_1$,

又 \because 点 J 是 BD 中点,

\therefore 点 O 是 BD_1 中点.

$$\therefore r^2 = OB^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

.....12 分



$$\because EG = 1, \frac{EG}{D_1G} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore D_1G = 2.$$

$$\therefore DG^2 = \frac{1}{9}DB^2 = \frac{1}{9}(a^2 + b^2) = D_1G^2 - c^2 = 4 - c^2$$

$$\text{整理得: } c^2 = 4 - \frac{1}{9}a^2 - \frac{1}{9}b^2,$$

$$\therefore r^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + 4 - \frac{1}{9}a^2 - \frac{1}{9}b^2) = \frac{2}{9}(a^2 + b^2) + 1, \quad \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

$$\text{又 } \because AD + CD = 4,$$

$$\therefore a + b = 4, \text{ 即 } b = 4 - a,$$

$$\therefore r^2 = \frac{2}{9}(a^2 + (4 - a)^2) + 1 = \frac{4}{9}a^2 - \frac{16}{9}a + \frac{41}{9} = \frac{4}{9}(a - 2)^2 + \frac{25}{9} \geq \frac{25}{9}, \text{ (当且仅当 } a = 2 \text{ 时取等)}$$

$$\because a > 0, b > 0, a + b = 4,$$

$$\therefore a \in (0, 4),$$

$$\therefore r^2 \in [\frac{25}{9}, \frac{41}{9}), \quad \dots\dots\dots 16 \text{ 分}$$

$$\therefore r \in [\frac{5}{3}, \frac{\sqrt{41}}{3}),$$

$$\text{故三棱锥 } D_1 - ADB \text{ 外接球半径的取值范围为 } [\frac{5}{3}, \frac{\sqrt{41}}{3}). \quad \dots\dots\dots 17 \text{ 分}$$

19. 解: (1) 由题意得: $|\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle + |\vec{b}|^2 = 3(|\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle + |\vec{b}|^2) = 12,$

$$\because |\vec{a}| = |\vec{b}|,$$

$$\therefore 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}|^2\cos\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle = 6|\vec{a}|^2 - 6|\vec{a}|^2\cos\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle = 12, \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{整理得: } |\vec{a}| = 2, \cos\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle = \frac{1}{2},$$

$$\text{故 } F(1, 1) = |\vec{a}| + |\vec{b}| = 2|\vec{a}| = 4. \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$(2) \because \vec{a} \cdot \vec{b} = 0, |\vec{a} - \vec{b}| = 1,$$

$$\therefore |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle + |\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = 1. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{令 } |\vec{a}| = \sin t, |\vec{b}| = \cos t,$$

$$\text{则 } F(1, 2) = \sin t + 2\cos t = \sqrt{5}\sin(t + \theta) \leq \sqrt{5} \text{ (} \tan\theta = 2 \text{)},$$

$$\text{故 } F(1, 2) \text{ 的最大值为 } \sqrt{5}. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

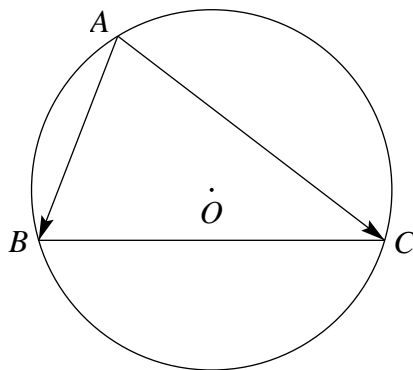
$$(3) \textcircled{1} \because \cos\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle = \frac{1}{4}, |\vec{a} - \vec{b}| = 1,$$

$$\therefore \sin\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle = \frac{\sqrt{15}}{4},$$

$$\therefore 2R = \frac{|\vec{a} - \vec{b}|}{\sin \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle} = \frac{4\sqrt{15}}{15},$$

$$\therefore R = \frac{2\sqrt{15}}{15},$$

$$\therefore \vec{a}, \vec{b} \text{ 的起点在半径为 } \frac{2\sqrt{15}}{15} \text{ 的圆上, } B \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$



如图所示, 设 $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$,

$$\text{则 } F(1, 2) = |\overrightarrow{AB}| + 2|\overrightarrow{AC}|$$

$$= 2R\sin C + 4R\sin B = 2R\sin(A + B) + 4R\sin B = 2R[\sin A\cos B + \sin B\cos A + 2\sin B]$$

$$= 2R\sqrt{\sin^2 A + (\cos A + 2)^2} \sin(B + \theta) = 2R\sqrt{4\cos A + 5} \sin(B + \theta) \quad (\tan \theta = \frac{\sin A}{\cos A + 2})$$

$$\leq 2R\sqrt{4\cos A + 5} = \frac{4\sqrt{15}}{15}\sqrt{1 + 5} = \frac{4\sqrt{10}}{5},$$

$$\text{故 } F(1, 2) \text{ 的最大值为 } \frac{4\sqrt{10}}{5}. \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$(3) \text{ ② 由①同理可得: } F(t, \frac{1}{t}) = t|\overrightarrow{AB}| + \frac{1}{t}|\overrightarrow{AC}|$$

$$= 2Rt\sin C + \frac{2R}{t}\sin B = 2Rt\sin(A + B) + \frac{2R}{t}\sin B = 2Rt[\sin A\cos B + \sin B\cos A] + \frac{2R}{t}\sin B$$

$$= 2Rt\sin A\cos B + (2Rt\cos A + \frac{2R}{t})\sin B = \sqrt{(2Rt\cos A + \frac{2R}{t})^2 + (2Rt\sin A)^2} \sin(B + \theta)$$

$$\leq \sqrt{4R^2t^2 + \frac{4R^2}{t^2} + 8R^2\cos A}, \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

$$\text{即 } S = \sqrt{4R^2t^2 + \frac{4R^2}{t^2} + 8R^2\cos A}.$$

$$\text{由基本不等式可得: } \sqrt{4R^2t^2 + \frac{4R^2}{t^2} + 8R^2\cos A} \geq \sqrt{8R^2 + 8R^2\cos A} = 2\sqrt{2}R\sqrt{1 + \cos A},$$

$$\because \cos A = \frac{1}{4}, \quad R = \frac{2\sqrt{15}}{15},$$

$$\therefore S \geq 2\sqrt{2} \times \frac{2\sqrt{15}}{15} \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{2\sqrt{6}}{3},$$

$$\text{故 } S \text{ 的最小值为 } \frac{2\sqrt{6}}{3}. \dots\dots\dots 17 \text{ 分}$$