（1）
由题意得：$A(-1，0)$、$C(3，0)$
设$y=a(x+1)(x-3)$
整理可得：$y=ax^2-2ax-3a$
$\therefore \begin{cases} b=-2a \\ c=-3a \end{cases}$
$\because ax^2+(b-4)x+c+12\ge 0$
$\therefore \Delta=(b-4)^2-4a(c+12)=(2a+4)^2-4a(12-3a)=0$
解得：$a_1=a_2=1$
$\therefore y=x^2-2x-3$
（2）
对称轴：$x=\frac{-1+3}{2}=1$
设$P(1，t)$
由（1）易得：$C(0，-3)$
① $BC=PC$
$\because BC^2=OB^2+OC^2=3^2+3^2=18$
$\therefore PC^2=(0-1)^2+(-3-t)^2=18$
解得：$t_1=\sqrt{17}-3$，$t_2=-\sqrt{17}-3$
② $BC=BP$
同理可得：$BP^2=(3-1)^2+(0-t)^2=18$
解得：$t_1=\sqrt{14}$，$t_2=-\sqrt{14}$
③ $BP=CP$
易得：$BC:y=x-3$
作BC的垂直平分线l_1
易得：$l_1:y=-x+3$
令$x=1$，则$t=-1+3=2$
综上所述，当$\triangle BCP$为等腰三角形时，点P的坐标为$(1，\sqrt{17}-3)$或$(1，-\sqrt{17}-3)$或$(1，\sqrt{14})$或$(1，-\sqrt{14})$或$(1，2)$
（3）
作$l_2//DE$，且l_2与抛物线相切
当点Q运动到切点时，PQ取最大值
$\because l_2//DE$　　$\therefore k_{l_2}=k_{DE}=-3$
设$l_2:y=-3x+b$
联立得：$x^2+x-3-b=0$
$\therefore \Delta=1^2-4(-3-b)=0$
解得：$b=-\frac{13}{4}$
代入回原式得：$x^2+x-3+\frac{13}{4}=0$
解得：$x_1=x_2=-\frac{1}{2}$
代入$x=-\frac{1}{2}$可得：$y=-\frac{7}{4}$　　$\therefore Q(-\frac{1}{2}，-\frac{7}{4})$