

【完善推导】

$$\begin{cases} n - a = 1 \\ n + a = 100 \end{cases} \quad \text{解得: } \begin{cases} n = \frac{101}{2} \\ a = \frac{99}{2} (\text{舍去}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} n - a = 2 \\ n + a = 50 \end{cases} \quad \text{解得: } \begin{cases} n = 26 \\ a = 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n - a = 4 \\ n + a = 25 \end{cases} \quad \text{解得: } \begin{cases} n = \frac{29}{2} \\ a = \frac{21}{2} (\text{舍去}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} n - a = 5 \\ n + a = 20 \end{cases} \quad \text{解得: } \begin{cases} n = \frac{25}{2} \\ a = \frac{15}{2} (\text{舍去}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} n - a = 10 \\ n + a = 10 \end{cases} \quad \text{解得: } \begin{cases} n = 10 \\ a = 0 (\text{舍去}) \end{cases}$$

∴满足条件的 a 有: $a = 24$

【小试牛刀】

由题意得: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

当 x 为有理数时, $\sqrt{b^2 - 4ac}$ 为有理数

∵ b 、 $-4ac$ 均为正整数

∴ $b^2 - 4ac$ 为正整数

∴当 x 为有理数时, $\sqrt{b^2 - 4ac}$ 为整数

令 $k = \sqrt{b^2 + 40}$

∴ $k^2 = b^2 + 40$

整理可得: $(k - b)(k + b) = 40$

$$\begin{cases} k - b = 1 \\ k + b = 40 \end{cases} \quad \text{解得: } \begin{cases} k = \frac{41}{2} \\ b = \frac{39}{2} (\text{舍去}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k - b = 2 \\ k + b = 20 \end{cases} \quad \text{解得: } \begin{cases} k = 11 \\ b = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k - b = 4 \\ k + b = 10 \end{cases} \quad \text{解得: } \begin{cases} k = 7 \\ b = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k - b = 5 \\ k + b = 8 \end{cases} \quad \text{解得: } \begin{cases} k = \frac{13}{2} \\ b = \frac{3}{2} (\text{舍去}) \end{cases}$$

∴满足条件的 b 有: $b_1 = 9$ 、 $b_2 = 3$

【思考探究】

① 令 $t = \sqrt{m^2 + n}$

同理可得: $(t - m)(t + m) = n$

∵ n 为大于2的质数

$$\therefore \begin{cases} t - m = 1 \\ t + m = n \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} t = \frac{n+1}{2} \\ m = \frac{n-1}{2} \end{cases}$$

\because 对于所有大于2的质数 n , n 都为奇数

$\therefore n-1$ 为偶数

$\therefore \frac{n-1}{2}$ 为正整数

综上所述, 当 $\sqrt{m^2+n}$ 为整数时, 有且仅有一个满足条件的 m ($m = \frac{n-1}{2}$).

② 否.

当 $n=10$ 时, n 为合数

令 $p = \sqrt{m^2+10}$

同理可得: $(p-m)(p+m) = 10$

$$\begin{cases} p-m=1 \\ p+m=10 \end{cases} \quad \text{解得: } \begin{cases} p = \frac{11}{2} \\ m = \frac{9}{2} (\text{舍去}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} p-m=2 \\ p+m=5 \end{cases} \quad \text{解得: } \begin{cases} p = \frac{7}{2} \\ m = \frac{3}{2} (\text{舍去}) \end{cases}$$

\therefore 没有满足条件的 m .