江门市 2024 年普通高中高一调研测试（二）

数学答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	A	D	B	C	C	B	D

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，有选错的得 0 分，部分选对的得部分分。

题号	9	10	11
答案	BD	AD	AC

三、填空题，本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

题号	12	13	14
答案	(2，0)	59.4	1

四、解答题：共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. 解：（1）由题意得：$m^2+2m-3<0$，$m+1>0$， …………………3 分

解得：$-3<m<1$，$m>-1$，

解得：$m\in(-1,1)$. …………………6 分

（2）由题意得：$m+1=m^2+2m-3+2$， …………………9 分

整理得：$m^2+m-2=0$，

解得：$m_1=1$，$m_2=-2$. …………………13 分

16. 解：（1）∵点 E、F、G 分别是 CD、CP、BP 的中点，

∴$EF/\!/DP$，$GF/\!/BC$， …………………2 分

又∵在矩形 $ABCD$ 中：$AD/\!/BC$，

∴$GF/\!/AD$， …………………3 分

又∵$AD\subset$平面 PAD，$GF\not\subset$平面 PAD，

∴$GF/\!/$平面 PAD， …………………4 分

同理可得：$EF/\!/$平面 PAD， …………………5 分

又∵$EF\cap GF=F$，EF、$GF\subset$平面 EFG，

∴平面 $EFG/\!/$平面 PAD. …………………7 分

（2）$\because PA\perp$平面 $ABCD$，$BC\subset$平面 $ABCD$，

$\therefore BC\perp PA$， ……………………8 分

又$\because BC\perp AB$，$PA\cap AB=A$，PA、$AB\subset$平面 PAB，

$\therefore BC\perp$平面 PAB. ……………………9 分

由（1）可得：$GF/\!/BC$，

$\therefore GF\perp$平面 PAB， ……………………10 分

又$\because PB\subset$平面 PAB，

$\therefore GF\perp PB$. ……………………12 分

$\because CG=2$，$BC=\sqrt{3}$，

$\therefore BG=\sqrt{2^2-\sqrt{3}^2}=1$. ……………………13 分

$\because BC=2GF$，

$\therefore GF=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$， ……………………14 分

$\therefore BF=\sqrt{1^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$. ……………………15 分

17. 解：（1）$\dfrac{\sin C}{\cos A}-\dfrac{\cos C}{\sin A}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\cos A}{\sin A}\right)$， ……………………1 分

$\sin C\sin A-\cos C\cos A=\dfrac{1}{2}(\sin^2 A+\cos^2 A)$ ……………………3 分

$\cos C\cos A-\sin C\sin A=-\dfrac{1}{2}$，

$\cos(A+C)=-\dfrac{1}{2}$， ……………………5 分

$\because A+B+C=\pi$，

$\therefore\cos(A+C)=-\cos B=-\dfrac{1}{2}$，

$\because B\in(0,\pi)$

$\therefore B=\dfrac{\pi}{3}$. ……………………7 分

（2）$\because B=\dfrac{\pi}{3}$，

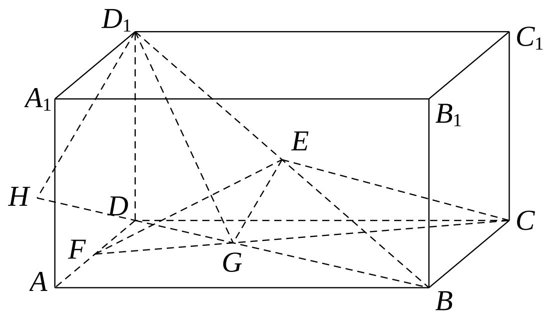
$\therefore\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore\sin A+\sin B+\sin C=\sin A+\sin C+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sin A+\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-A\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$， ……………………11 分

$=\sin A+\sin\dfrac{2\pi}{3}\cos A-\cos\dfrac{2\pi}{3}\sin A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3}{2}\sin A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\in\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right]$，

故 $\sin A+\sin B+\sin C$ 的取值范围为$\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right]$. ……………………15 分

18. 解：（1）如图，延长 GD 至 H 使得 $GD=HD$.



∵点 F 为 AD 中点，

∴$AD=2AF$.

在矩形 $ABCD$ 中：$AD\,/\!/\,BC$，$AD=BC$，

∴$\triangle DFG\backsim\triangle BCG$，

∴$\dfrac{DG}{BG}=\dfrac{DF}{BC}=\dfrac{1}{2}$, ……………………2 分

∵$GD=HD$，

∴$GH=2DG=BG$，

∴点 G 是 BH 中点，

又∵点 E 是 BD_1 的中点，

∴$D_1H=2EG$. ……………………4 分

在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中：$DD_1\perp$平面 $ABCD$，

又∵$BD\subset$平面 $ABCD$，

∴$DD_1\perp BD$，

又∵$GD=HD$，

∴$D_1G=D_1H=2EG$，

∴$\dfrac{EG}{D_1G}=\dfrac{1}{2}$. ……………………7 分

（2）如图，分别取 AD_1、BD 的中点 I、J，作 $OI\perp OJ$，垂足为点 O，

由题意得：点 I 为$\triangle ADD_1$ 外接圆圆心，点 J 为$\triangle DAB$ 外接圆圆心，

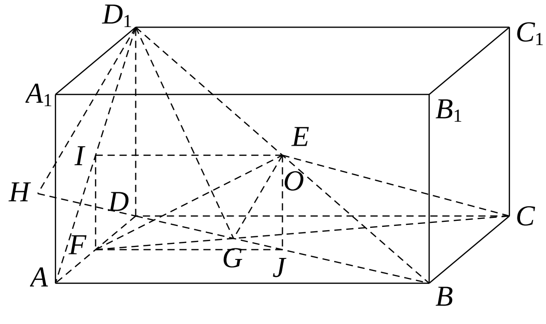
又∵$OI\perp OJ$,

∴点 O 为三棱锥 D_1-ADB 外接球球心. ……………………8 分

设 $AD=a$，$AB=b$，$AA_1=c$，$\triangle ADD_1$ 外接圆半径为 r_1，$\triangle DAB$ 外接圆半径为 r_2，

三棱锥 D_1-ADB 外接球半径为 r，

则 $r_1=\dfrac{1}{2}(a^2+c^2)$，$r_2=\dfrac{1}{2}(a^2+b^2)$. ……………………10 分



易证四边形 $IOJF$ 为矩形，

又∵点 I、F 分别是 AD_1、AD 的中点，

∴$IF\,/\!/\,OJ\,/\!/\,DD_1$，

又∵点 J 是 BD 中点，

∴点 O 是 BD_1 中点.

∴$r^2=OB^2=\dfrac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)$. ……………………12 分

$\because EG=1$，$\dfrac{EG}{D_1G}=\dfrac{1}{2}$,

$\therefore D_1G=2$.

$\therefore DG^2=\frac{1}{9}DB^2=\frac{1}{9}(a^2+b^2)=D_1G^2-c^2=4-c^2$

整理得：$c^2=4-\frac{1}{9}a^2-\frac{1}{9}b^2$,

$\therefore r^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2+4-\frac{1}{9}a^2-\frac{1}{9}b^2)=\frac{2}{9}(a^2+b^2)+1$，　　…………………14 分

又$\because AD+CD=4$，

$\therefore a+b=4$，即 $b=4-a$，

$\therefore r^2=\frac{2}{9}(a^2+(4-a)^2)+1=\frac{4}{9}a^2-\frac{16}{9}a+\frac{41}{9}=\frac{4}{9}(a-2)^2+\frac{25}{9}\geqslant\frac{25}{9}$，（当且仅当 $a=2$ 时取等）

$\because a>0$，$b>0$，$a+b=4$，

$\therefore a\in(0，4)$，

$\therefore r^2\in[\frac{25}{9}，\frac{41}{9})$，　　…………………16 分

$\therefore r\in[\frac{5}{3}，\frac{\sqrt{41}}{3})$，

故三棱锥 D_1-ADB 外接球半径的取值范围为$[\frac{5}{3}，\frac{\sqrt{41}}{3})$.　　…………………17 分

19. 解：（1）由题意得：$|\vec{a}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos<\vec{a}，\vec{b}>+|\vec{b}|^2=3(|\vec{a}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos<\vec{a}，\vec{b}>+|\vec{b}|^2)=12$，

$\because |\vec{a}|=|\vec{b}|$,

$\therefore 2|\vec{a}|^2+2|\vec{a}|^2\cos<\vec{a}，\vec{b}>=6|\vec{a}|^2-6|\vec{a}|^2\cos<\vec{a}，\vec{b}>=12$，　　…………………2 分

整理得：$|\vec{a}|=2$，$\cos<\vec{a}，\vec{b}>=\frac{1}{2}$,

故 $F(1，1)=|\vec{a}|+|\vec{b}|=2|\vec{a}|=4$.　　…………………3 分

（2）$\because \vec{a}\cdot\vec{b}=0$，$|\vec{a}-\vec{b}|=1$，

$\therefore |\vec{a}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos<\vec{a}，\vec{b}>+|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=1$.　　…………………4 分

令$|\vec{a}|=\sin t$，$|\vec{b}|=\cos t$，

则 $F(1，2)=\sin t+2\cos t=\sqrt{5}\sin(t+\theta)\leqslant\sqrt{5}$（$\tan\theta=2$），

故 $F(1，2)$的最大值为$\sqrt{5}$.　　…………………6 分

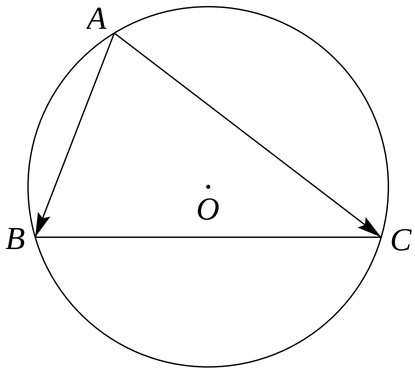
（3）①$\because \cos<\vec{a}，\vec{b}>=\frac{1}{4}$，$|\vec{a}-\vec{b}|=1$，

$\therefore \sin<\vec{a}，\vec{b}>=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$,

$\therefore 2R = \dfrac{|\vec{a}-\vec{b}|}{\sin\langle\vec{a},\vec{b}\rangle} = \dfrac{4\sqrt{15}}{15}$,

$\therefore R = \dfrac{2\sqrt{15}}{15}$,

$\therefore \vec{a}$、$\vec{b}$的起点在半径为$\dfrac{2\sqrt{15}}{15}$的圆上， ……………………8 分



如图所示，设$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$，$\vec{b}=\overrightarrow{AC}$，

则 $F(1，2)=|\overrightarrow{AB}|+2|\overrightarrow{AC}|$

$=2R\sin C+4R\sin B=2R\sin(A+B)+4R\sin B=2R[\sin A\cos B+\sin B\cos A+2\sin B]$

$=2R\sqrt{\sin^2 A+(\cos A+2)^2}\sin(B+\theta)=2R\sqrt{4\cos A+5}\sin(B+\theta)$（$\tan\theta=\dfrac{\sin A}{\cos A+2}$）

$\leqslant 2R\sqrt{4\cos A+5}=\dfrac{4\sqrt{15}}{15}\sqrt{1+5}=\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$,

故 $F(1，2)$的最大值为$\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$. ……………………11 分

（3）② 由①同理可得：$F(t，\dfrac{1}{t})=t|\overrightarrow{AB}|+\dfrac{1}{t}|\overrightarrow{AC}|$

$=2Rt\sin C+\dfrac{2R}{t}\sin B=2Rt\sin(A+B)+\dfrac{2R}{t}\sin B=2Rt[\sin A\cos B+\sin B\cos A]+\dfrac{2R}{t}\sin B$

$=2Rt\sin A\cos B+(2Rt\cos A+\dfrac{2R}{t})\sin B=\sqrt{(2Rt\cos A+\dfrac{2R}{t})^2+(2Rt\sin A)^2}\sin(B+\theta)$

$\leqslant\sqrt{4R^2t^2+\dfrac{4R^2}{t^2}+8R^2\cos A}$, ……………………15 分

即 $S=\sqrt{4R^2t^2+\dfrac{4R^2}{t^2}+8R^2\cos A}$.

由基本不等式可得：$\sqrt{4R^2t^2+\dfrac{4R^2}{t^2}+8R^2\cos A}\geqslant\sqrt{8R^2+8R^2\cos A}=2\sqrt{2}R\sqrt{1+\cos A}$,

$\because \cos A=\dfrac{1}{4}$，$R=\dfrac{2\sqrt{15}}{15}$,

$\therefore S\geqslant 2\sqrt{2}\times\dfrac{2\sqrt{15}}{15}\sqrt{1+\dfrac{1}{4}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$,

故 S 的最小值为$\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$. ……………………17 分