19.（17 分）

已知$\vec{a}$、$\vec{b}$为不共线的向量，定义：$F_{(m,n)}(\vec{a},\vec{b}) = m|\vec{a}| + n|\vec{b}|$.

（1）若$|\vec{a}| = |\vec{b}|$，$|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{3}|\vec{a}-\vec{b}| = 2\sqrt{3}$，求 $F_{(1,1)}(\vec{a},\vec{b})$的值；

（2）当$|\vec{a}-\vec{b}| = 1$ 时：

①若$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$，求 $F_{(1,2)}(\vec{a},\vec{b})$的最大值；

②若 $\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = \frac{1}{4}$，求 $F_{(1,2)}(\vec{a},\vec{b})$的最大值；

（3）若 $\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = \frac{1}{3}$，$|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{6}$，求$\frac{F_{(\sqrt{m^3 n},\sqrt{n^3 m})}(\vec{a},\vec{b})}{mn}$的最大值的最小值.

解析：

（1）由题意得：$|\vec{a}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle+|\vec{b}|^2=3(|\vec{a}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle+|\vec{b}|^2)=12$，

$\because |\vec{a}|=|\vec{b}|$，

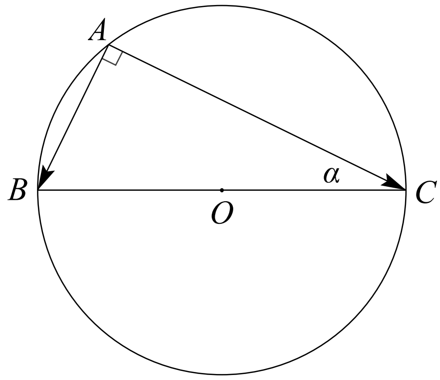
$\therefore 2|\vec{a}|^2+2|\vec{a}|^2\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=6|\vec{a}|^2-6|\vec{a}|^2\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=12$，

整理得：$|\vec{a}|=2$，$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\dfrac{1}{2}$，

故 $F_{(1,1)}(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|+|\vec{b}|=4$.

（2）①$\because \vec{a}\cdot\vec{b}=0$，$|\vec{a}-\vec{b}|=1$，

$\therefore \vec{a}$、$\vec{b}$的起点在半径为 1 的圆上，



如图所示，$OB=1$，设$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$，$\vec{b}=\overrightarrow{AC}$，

则 $F_{(1,2)}(\vec{a},\vec{b})=|\overrightarrow{AB}|+2|\overrightarrow{AC}|$，

设$\angle ACB=\alpha$，

则$|\overrightarrow{AB}|+2|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BC}|\sin\alpha+2|\overrightarrow{BC}|\cos\alpha=\sqrt{5}|\overrightarrow{BC}|\sin(\alpha+\theta)\leqslant 2\sqrt{5}$（$\tan\theta=2$），

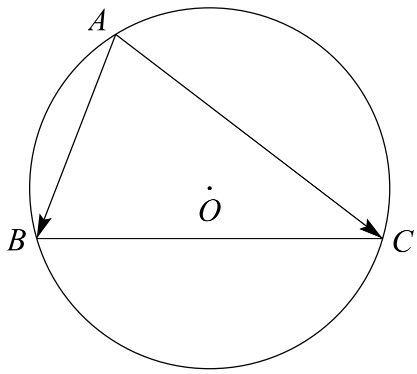
故 $F_{(1,2)}(\vec{a},\vec{b})$的最大值为 $2\sqrt{5}$.

②$\because \cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\dfrac{1}{4}$，$|\vec{a}-\vec{b}|=1$，

$\therefore \sin\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$，

$\therefore 2R=\dfrac{|\vec{a}-\vec{b}|}{\sin\langle\vec{a},\vec{b}\rangle}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore R=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，



$\therefore \vec{a}$、$\vec{b}$的起点在半径为$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$的圆上，

如图所示，设$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$，$\vec{b}=\overrightarrow{AC}$，

则 $F_{(1,2)}(\vec{a},\vec{b})=|\overrightarrow{AB}|+2|\overrightarrow{AC}|$

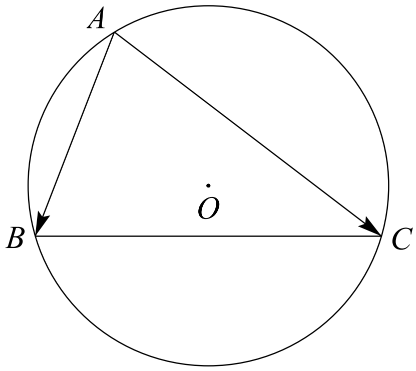
$=2R\sin C+4R\sin B=2R\sin(A+B)+4R\sin B=2R[\sin A\cos B+\sin B\cos A+2\sin B]$

$=2R\sqrt{\sin^2A+(\cos A+2)^2}\sin(B+\theta)=2R\sqrt{4\cos A+4}\sin(B+\theta)$（$\tan\theta=\dfrac{\sin A}{\cos A+2}$）

$\leqslant 2R\sqrt{4\cos A+4}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\sqrt{1+4}=4$，

故 $F_{(1,2)}(\vec{a},\vec{b})$的最大值为 4.

（3）$\because\cos<\vec{a}，\vec{b}>=\dfrac{1}{3}$，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{6}$，



$\therefore\sin<\vec{a}，\vec{b}>=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$,

$\therefore 2R=\dfrac{|\vec{a}-\vec{b}|}{\sin<\vec{a}，\vec{b}>}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore R=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$,

$\therefore\vec{a}$、$\vec{b}$的起点在半径为$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$的圆上，

如图所示，设$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$，$\vec{b}=\overrightarrow{AC}$，

则$\dfrac{F_{(\sqrt{m^3n}，\sqrt{n^3m})}(\vec{a}，\vec{b})}{mn}=\dfrac{\sqrt{mn}F_{(m，n)}(\vec{a}，\vec{b})}{mn}=\dfrac{F_{(m，n)}(\vec{a}，\vec{b})}{\sqrt{mn}}=\dfrac{m|\overrightarrow{AB}|+n|\overrightarrow{AC}|}{\sqrt{mn}}$

$=\dfrac{2R\sqrt{n^2+2mn\cos A+n^2}\sin(B+\theta)}{\sqrt{mn}}$（$\tan\theta=\dfrac{m\sin A}{m\cos A+n}$）

$\leqslant 2R\sqrt{2\cos A+\dfrac{m}{n}+\dfrac{n}{m}}$,

由基本不等式可得：$2R\sqrt{2\cos A+\dfrac{m}{n}+\dfrac{n}{m}}\geqslant 2R\sqrt{2\cos A+2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\sqrt{\dfrac{2}{3}+2}=3\sqrt{2}$，

故$\dfrac{F_{(\sqrt{m^3n}，\sqrt{n^3m})}(\vec{a}，\vec{b})}{mn}$的最大值的最小值为 $3\sqrt{2}$.