第 4 章量子电路

姓名：胡力尹　　学号：2021K8009929027

本 章内容：

1. 量子计算的基础模型：量子电路模型。
2. 存在一部分通用的门，使得任意的量子计算可以用这些门表示。

Contents

4.3 受控操作 2
4.4 量子电路模型中测量的描述 6
4.5 通用性定理 7

4.3 受控操作

$0 \quad t \oplus 0 \to t$

$t \oplus 1 \to \bar{t}$

1. 受控非门是一个具有两输入量子比特的量子门，分别称为**控制量子比特**和**目标量子比特**。就计算基而言，受控非门的作用可由 $|c\rangle\,|t\rangle \to |c\rangle\,|t \oplus c\rangle$ 给出。描述为控制量子比特为 $|1\rangle$，则目标量子比特翻转，否则目标量子比特不变。在 $|$ 控制, 目标 $\rangle$ 基中，受控非门的矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$00 \to 00$

$01 \quad 01$

$10 \quad 11$

$11 \quad 10$

2. 更一般的，设 U 是任意单量子比特酉操作，则受控 U 操作是两量子比特操作，若控制比特被置为一定值，则 U 作用在目标比特上，否则目标比特不变。

即 $|c\rangle\,|t\rangle \to |c\rangle\,U^c\,|t\rangle$

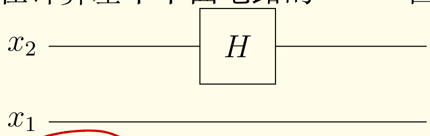
受控 U 门的电路图表示

$c \quad x_1$

$x_2 \quad U$

习题 4.16 （多量子比特门的矩阵表示）:

在计算基下下面电路的 4×4 酉矩阵是什么?



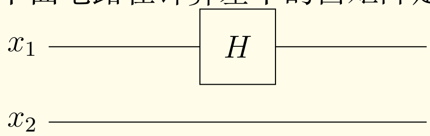
$|x_1\rangle \otimes |x_2\rangle$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\to |x_1\rangle \otimes H|x_2\rangle$

$I \otimes H$

下面电路在计算基下的酉矩阵是什么?

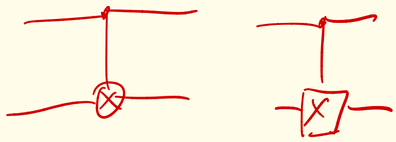


$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$H \otimes I$

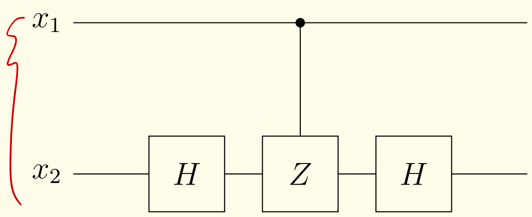
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

习题 4.17：
由受控 Z 门构造受控非门，使用一个在计算基上如下方酉矩阵表示的门和两个阿达玛门构建，并指定控制比特和目标比特



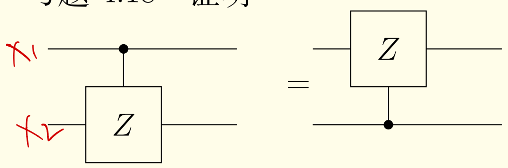
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$|x_1\rangle|x_2\rangle \to |x_1\rangle X^{x_1}|x_2\rangle.$



$H Z^{x_1} H$

习题 4.18：证明：



$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

证明： 矩阵表示均为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

习题 4.19：受控非门是一个简单的置换，它对密度矩阵 ρ 的作用是重新排列矩阵中的元素。请在计算基上明确的写出它的作用。

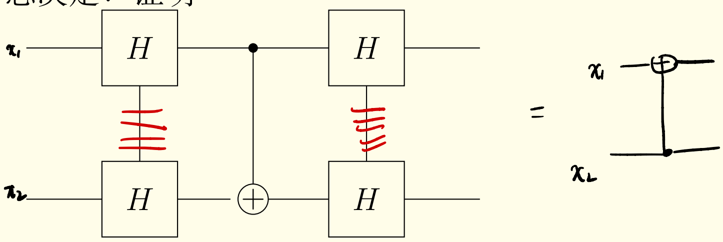
解：

密度矩阵表示为：$\rho \equiv \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix}$

则受控非门在密度矩阵上的作用为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} a & b & d & c \\ e & f & h & g \\ m & n & p & o \\ i & j & l & k \end{bmatrix}$$

习题 4.20：(受控非门基变换) 与理想的经典门不同，理想量子门没有 (正如电气工程师所说)“高阻抗”输入。事实上,“控制”和“目标”的角色是任意的–它们取决于你认为设备在什么基上运行。我们已经描述了受控非门相对于计算基的作用，在这个描述中控制量子比特的状态没有改变。但是，如果我们在不同的基上作用，那么控制量子比特确实会改变: 我们将展示它的相位翻转由“目标”量子比特的状态决定！证明



$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Left} = (H \otimes H)\ CNOT\ (H \otimes H)$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Right: $|01\rangle \to |11\rangle$

$|00\rangle \to |00\rangle$

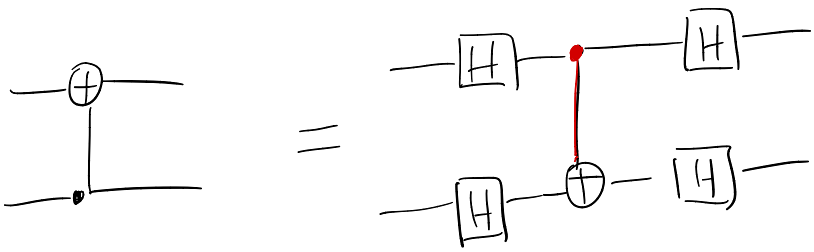
$|11\rangle \to |01\rangle$

$|10\rangle \to |10\rangle$

引入基 $|\pm\rangle \equiv (|0\rangle \pm |1\rangle)/\sqrt{2}$, 运用这组电路恒等关系证明受控非门在第一量子比特为控制比特，第二量子比特为目标比特时的作用如下: $\cancel{|+\rangle|+\rangle \to |+\rangle|+\rangle\ |-\rangle|+\rangle \to |-\rangle|+\rangle\ |+\rangle|-\rangle \to |-\rangle|-\rangle\ |-\rangle|-\rangle \to |+\rangle|-\rangle}$

因此对于这组新基，目标量子比特状态不会改变，而控制量子比特在目标量子比特为 $|-\rangle$ 时翻转，否则不变。

$$
\begin{aligned}
|+\rangle|+\rangle &\to |+\rangle|+\rangle \\
|-\rangle|+\rangle &\to |-\rangle|+\rangle \\
|+\rangle|-\rangle &\to |-\rangle|-\rangle \\
|-\rangle|-\rangle &\to |+\rangle|-\rangle
\end{aligned}
$$



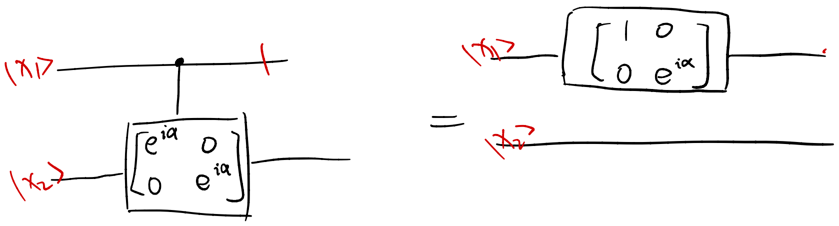
考虑

$$
\begin{aligned}
|+\rangle &\overset{H}{\Longrightarrow} |0\rangle \overset{H}{\Longrightarrow} |+\rangle \\
|-\rangle &\overset{H}{\Longrightarrow} |1\rangle \overset{H}{\Longrightarrow} |-\rangle
\end{aligned}
$$

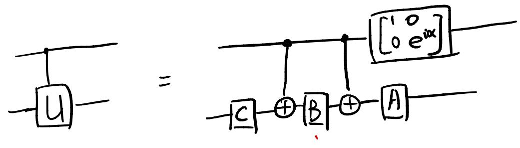
只用单量子比特运算和受控非门实现任意单量子比特U的受控U运算

理论基础: $U=e^{i\alpha}AXBXC$, $ABC=1$.

1. 相位移动



α.



多量子比特设定条件:

三个量子比特: Toffoli 门.

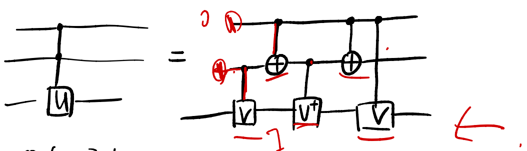
n+k个量子比特, U是k量子比特酉算子.

对受控操作 $C^n(U)$ 定义为

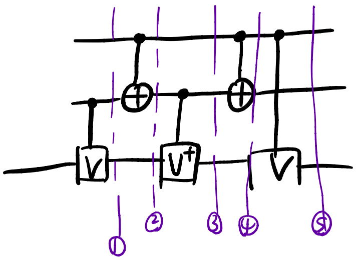
$$C^n(U)|x_1x_2\cdots x_n\rangle|\psi\rangle = |x_1x_2\cdots x_n\rangle U^{x_1x_2\cdots x_n}|\psi\rangle$$

例: U是单量子比特酉算子, V是酉且满足 $U=V^2$

则 $C^2(U)$ 可以实现为



Toffoli 门中 $V=(1-i)(1+iX)/2$



①: $|x_1\rangle|x_2\rangle|\psi\rangle \to |x_1\rangle|x_1\oplus x_1\oplus x_2\rangle V^{x_1}(V^\dagger)^{x_1\oplus x_2}V^{x_2}|\psi\rangle$

$$V^{x_1}(V^\dagger)^{x_1\oplus x_2}V^{x_2} = V^{x_1}(V^\dagger)^{x_1x_2'+x_1'x_2}V^{x_2}$$

$$= V^{x_1}V^{\dagger\, x_1x_2'}V^{\dagger\, x_1'x_2}V^{x_2}$$

$$= V^{x_1-x_1x_2'}V^{x_2-x_2x_1'}$$

$$= \cancel{V^{x_1+x_2-x_1\oplus x_2}}$$

$$= V^{x_1(x_2+x_2')+x_2(x_1+x_1')-(x_1x_2'+x_1'x_2)}$$

$$= V^{2x_1x_2} = U^{x_1x_2}$$