Таласи октобар 90

2. Коначне једначине кретања наелектрисане честице $+q$ су $x(t) = a\cos\omega t$, $y(t) = b\sin\omega t$, $z(t) = 0$. Путања ове честице је елипса која лежи у XOY равни. Полуосе елипсе су a и b; ω је угаона брзина. У истој равни се креће и друга наелектрисана честица $-q$. Путања друге честице је елипса полуоса $2a$ и $2b$ док је угаона брзина 2ω. Наћи средњу снагу зрачења овог система.

<u>Решење:</u>

$$\left\langle -\frac{dW}{dt} \right\rangle = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \frac{1}{T}\int_0^T |\ddot{\vec{p}}(t)|^2 dt$$

где је $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

$\vec{p} = q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)$. По услову задатка је

$x_-(t) = 2a\cos(2\omega t + \delta)$; $y_-(t) = 2b\sin(2\omega t + \delta)$ $z_-(t) = 0$

(δ потиче од тога што q_- - честица не мора лежати на x-оси у $t = 0$).

$$\vec{p} = q\{[a\cos\omega t - 2a\cos(2\omega t + \delta)]\vec{e}_x + [b\sin\omega t - 2b\sin(2\omega t + \delta)]\vec{e}_y\}$$

$$\ddot{\vec{p}} = +q\omega^2\{[8a\cos(2\omega t + \delta) - a\cos\omega t]\vec{e}_x + [8b\sin(2\omega t + \delta) - b\sin\omega t]\vec{e}_y\}$$

$$|\ddot{\vec{p}}|^2 = q^2\omega^4\{a^2[64\cos^2(2\omega t + \delta) - 16\cos\omega t\cos 2\omega t + \cos^2\omega t] +$$

$$+ b^2[64\sin^2(2\omega t + \delta) - 16\sin\omega t + \sin^2\omega t]\}$$

ТАЛАСИ – ЈУНИ I 97.

2. На слободан електрон у миру пада линеарно поларизовани монохроматски електромагнетни талас фреквенце ω. Под дејством Лоренцове силе електрон врши принудне осцилације. Сматрајући да се овом приликом електрон понаша као дипол, израчунати колики део енергије упадног таласа електрон израчи у датом правцу и јединицу времена. Колики део енергије упадног таласа се укупно расеје на слободном електрону?

Решење: Ј-на кретања електрона гласи $m\ddot{\vec{r}} = -e(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$ и како је кретање нерелативистичко то је $m\ddot{\vec{r}} \approx -e\vec{E}$.

(Услед овога је $\vec{r}(t) = \frac{e}{m\omega^2}\vec{E}_0\cos\omega t + \vec{r}_0$ где је $\vec{r}_0$ вектор положаја осцилаторног центра; у даљем тексту, узећемо да је $\vec{r}_0 = 0$ тј. $\vec{r}(t) = \frac{e}{m\omega^2}\vec{E}_0\cos\omega t$ и $\vec{v}(t) = -\frac{e}{m\omega}\vec{E}_0\sin\omega t$

одакле се види да при високим фреквенцама ω кретање електрона заиста има осцилаторан облик и да је нерелативистичко

$\Rightarrow$ $\left(\vec{p} = -e\vec{r}(t) = -\frac{e^2}{m\omega^2}\vec{E}_0\cos\omega t\right)$ $\boxed{\ddot{\vec{p}}(t) = \frac{e^2\vec{E}_0}{m}\cos\omega t}$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3}\cdot\frac{\ddot{\vec{p}}(t-\frac{r}{c})\times\vec{e}_r}{r} = \frac{e^2E_0\cos\omega(t-\frac{r}{c})}{4\pi\varepsilon_0 m c^3 r}(\sin\theta\cos\varphi\,\vec{e}_y \cancel{-\cos\theta\sin\varphi\ldots})$$

$$\Rightarrow |\vec{B}| = \frac{e^2E_0}{4\pi\varepsilon_0 m c^3 r}\left|\cos[\omega(t-\tfrac{r}{c})]\sin\theta\right|$$ где је узето да је $\vec{E}_0 = E_0\vec{e}_z$. Густина израчене енергије је дата Pointing-овим вектором

$$\vec{P} = \vec{E}\times\vec{H} = \left|\frac{EB}{\mu_0}\right|\vec{e}_r = \frac{cB^2}{\mu_0}\vec{e}_r =$$

$$= \frac{c}{\mu_0}\cdot\frac{e^4E_0^2\sin^2\theta}{16\pi^2\varepsilon_0^2 m^2 c^6 r^2}\cos^2\omega(t-\tfrac{r}{c})$$ а енергија израчена по јединици времена и јединици просторног угла

$$-\frac{d^2W}{dt\,d\Omega} = \vec{P}\cdot\frac{d\vec{S}}{d\Omega} = \vec{P}\cdot r^2\vec{e}_r = \frac{e^4E_0^2\sin^2\theta}{16\pi^2\varepsilon_0 m^2c^3}\cos^2\omega(t-\tfrac{r}{c})$$

Таласи октобар 90

2. Коначне једначине кретања наелектрисане честице $+q$ су $x(t) = a\cos\omega t$, $y(t) = b\sin\omega t$, $z(t) = 0$. Путања ове честице је елипса која лежи у XOY равни. Полуосе елипсе су a и b; ω је угаона брзина. У истој равни се креће и друга наелектрисана честица $-q$. Путања друге честице је елипса полуоса $2a$ и $2b$ док је угаона брзина 2ω. Наћи средњу снагу зрачења овог система.

<u>Решење</u>:

$$\left\langle -\frac{dW}{dt}\right\rangle = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\,\frac{1}{T}\int_0^T |\ddot{\vec{p}}(t)|^2 dt$$

где је $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

$\vec{p} = q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)$. По услову задатка је

$x_-(t) = 2a\cos(2\omega t + \delta)$; $y_-(t) = 2b\sin(2\omega t + \delta)$ $z_-(t) = 0$

(δ потиче од тога што q_--честица не мора лежати на x-оси у $t=0$).

$$\vec{p} = q\left\{[a\cos\omega t - 2a\cos(2\omega t+\delta)]\vec{e}_x + [b\sin\omega t - 2b\sin(2\omega t+\delta)]\vec{e}_y\right\}$$

$$\ddot{\vec{p}} = +q\omega^2\left\{[8a\cos(2\omega t+\delta) - a\cos\omega t]\vec{e}_x + [8b\sin(2\omega t+\delta) - b\sin\omega t]\vec{e}_y\right\}$$

$$|\ddot{\vec{p}}|^2 = q^2\omega^4\left\{a^2[64\cos^2(2\omega t+\delta) - 16\cos\omega t\cos 2\omega t + \cos^2\omega t] + \right.$$

$$\left. + b^2[64\sin^2(2\omega t+\delta) - 16\sin\omega t + \sin^2\omega t]\right\}$$

$$\langle |\ddot{\vec{p}}|^2 \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T |\ddot{\vec{p}}|^2 dt = q^2\omega^4 \Big\{ a^2 \big[64 \langle \cos^2(2\omega t+\delta) \rangle -$$

$$16 \langle \cos\omega t \cos(2\omega t+\delta) \rangle + \langle \cos^2\omega t \rangle \big] +$$

$$b^2 \big[64 \langle \sin^2(2\omega t+\delta) \rangle - 16 \langle \sin\omega t \sin(2\omega t+\delta) \rangle + \langle \sin^2\omega t \rangle \big] \Big\}.$$ како је

$\langle \cos^2 n\omega t \rangle = \langle \sin^2 n\omega t \rangle = \frac{1}{2}$ $\langle \sin k\omega t \sin l\omega t \rangle =$

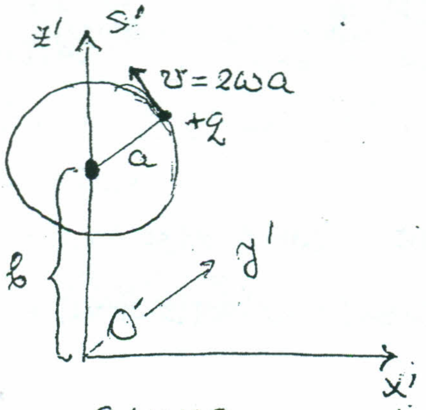
$\langle \cos k\omega t \cos l\omega t \rangle = 0$ (за $k \neq l$) то је

$$\langle |\ddot{\vec{p}}|^2 \rangle = q^2\omega^4 \Big\{ a^2 \big[\tfrac{64}{2} - 0 + \tfrac{1}{2} \big] + b^2 \big[\tfrac{64}{2} - 0 + \tfrac{1}{2} \big] \Big\} = \frac{65\, q^2\omega^4}{2}(a^2+b^2)$$

$$\boxed{\left\langle -\frac{dW}{dt} \right\rangle = \frac{65}{12} \cdot \frac{q^2\omega^4 (a^2+b^2)}{\pi\varepsilon_0 c^3}}$$

Таласи – јануар 91

3. Честица наелектрисања $+q$ се у покретном систему референце S' равномерно креће по кругу учестаношћу 2ω (види слику).



слика

Систем S' равномерно ротира угаоном брзином ω око z осе инерцијалног система S и у почетном тренутку $t=0$ се осе оба система поклапају. У координатном почетку O система S мирује честица наелектрисања $-q$. Нађи средњу снагу зрачења овог система.

Решење: Средња снага зрачења $\langle -\frac{dW}{dt} \rangle$ је дата са

$$\left\langle -\frac{dW}{dt} \right\rangle = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \langle |\ddot{\vec{p}}|^2 \rangle .$$

Нађимо прво $\vec{p}$; у систему S' ј-не кретања $+q$ честице су

$$x'_+(t) = a\cos(2\omega t+\alpha)$$
$$y'_+(t) = 0$$
$$z'_+(t) = b + a\sin(2\omega t+\alpha)$$

По услову задатка видимо да важи:

$$x = x'\cos\omega t - y'\sin\omega t$$
$$y = x'\sin\omega t + y'\cos\omega t$$
$$z = z'$$

па ј-не кретања $+q$ честице у систему S гласе:

$$x_+(t) = a\cos(2\omega t+\alpha)\cos\omega t$$
$$y_+(t) = a\cos(2\omega t+\alpha)\sin\omega t$$
$$z_+(t) = b + a\sin(2\omega t+\alpha)$$

или (због $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$ и $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)$)

$$x_+(t) = \frac{a}{2}\cos(\omega t+\alpha) + \frac{a}{2}\cos(3\omega t+\alpha)$$
$$y_+(t) = -\frac{a}{2}\sin(\omega t+\alpha) + \frac{a}{2}\sin(3\omega t+\alpha)$$ и $z_+(t) = b + a\sin(2\omega t+\alpha)$

одакле је $\vec{p} = q\vec{r}_+ - \cancel{q\vec{r}_-}^{\,0} = q\vec{r}_+ =$ $\qquad b + a\sin(2\omega t+\alpha)$

$$= \frac{qa}{2}\left[\cos(\omega t+\alpha)+\cos(3\omega t+\alpha)\right]\vec{e}_x + \frac{qa}{2}\left[\sin(3\omega t+\alpha)-\sin\omega t\right]\vec{e}_y + q\left[b+\cancel{\cos(2\omega t+\alpha)}\right]\vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\vec{p}} = -\frac{\omega^2 aq}{2}\left[\cos(\omega t+\alpha)+9\cos(3\omega t+\alpha)\right]\vec{e}_x - q\frac{\omega^2 a}{2}\left[9\sin(3\omega t+\alpha)-\sin(\omega t+\alpha)\right]\vec{e}_y$$
$$-4\omega^2 aq\sin(2\omega t+\alpha)\vec{e}_z \quad \Rightarrow$$

$$|\ddot{\vec{p}}|^2 = \frac{\omega^4 a^2 q^2}{4}\Big\{\cos^2(\omega t+\alpha)+81\cos^2(3\omega t+\alpha)+18\cos(\omega t+\alpha)\cos(3\omega t+\alpha)+$$
$$+\sin^2(\omega t+\alpha)+81\sin^2(3\omega t+\alpha)-18\sin(\omega t+\alpha)\sin(3\omega t+\alpha)+$$
$$+64\sin^2(2\omega t+\alpha)\Big\}$$

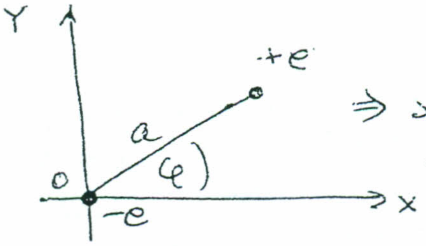
$$\langle|\ddot{\vec{p}}|^2\rangle = \frac{\omega^4 a^2 q^2}{4}(1+81+32) = \frac{57}{2}\cdot\omega^4 a^2 q^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\left\langle -\frac{dW}{dt}\right\rangle = \frac{19\,\omega^4 a^2 q^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3}}$$

ТАЛАСИ - ЈУНИ 91

2. Наћи средњу снагу зрачења система који се састоји из две наелектрисане честице наелектрисања $+e$ и $-e$, фиксиране на крајевима штапа дужине a. Негативна честица мирује у координатном почетку. Штап се креће у XOY равни по закону $\varphi(t)=\frac{\pi}{2}(1-\cos\omega t)$ где је φ угао који штап заклапа са X-осом.

Решење:



$$\varphi(t)=\frac{\pi}{2}(1-\cos\omega t)$$

$$\Rightarrow x(t)=a\cos\left[\frac{\pi}{2}(1-\cos\omega t)\right]$$

$$y(t)=a\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-\cos\omega t)\right]$$

$$z(t)\equiv 0$$

$$\Rightarrow p_x(t)=e\,x(t)=ea\cos\left[\frac{\pi}{2}(1-\cos\omega t)\right] \qquad \dot p_x=-\frac{ea\omega\pi}{2}\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-\cos\omega t)\right]\sin\omega t$$

$$p_y(t)=e\,y(t)=ea\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-\cos\omega t)\right] \qquad \dot p_y=\frac{ea\omega\pi}{2}\cos\left[\frac{\pi}{2}(1-\cos\omega t)\right]\sin\omega t$$

$$p_z(t)\equiv 0 \qquad \dot p_z=0$$

$$\ddot p_x=-ea\omega\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cos\left[\frac{\pi}{2}(1-\cos\omega t)\right]\sin^2\omega t+ea\omega^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-\cos\omega t)\right]\cos\omega t$$

$$\ddot p_y=-ea\omega^2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-\cos\omega t)\right]\sin^2\omega t+ea\omega^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left[\frac{\pi}{2}(1-\cos\omega t)\right]\cos\omega t$$

$$\ddot p_z\equiv 0 \qquad |\ddot{\vec p}|^2=\ddot p_x^2+\ddot p_y^2+\ddot p_z^2=$$

$$e^2a^2\omega^4\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\Big\{\frac{\pi^2}{4}\cos^2\left[\frac{\pi}{2}(1-\cos\omega t)\right]\sin^4\omega t+\pi\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-\cos\omega t)\right]\cos\left[\frac{\pi}{2}(1-\cos\omega t)\right]\sin^2\omega t\cos\omega t+$$

$$\sin^2\left[\frac{\pi}{2}(1-\cos\omega t)\right]\cos^2\omega t+\frac{\pi^2}{4}\sin^2\left[\frac{\pi}{2}(1-\cos\omega t)\right]\sin^4\omega t-\pi\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-\cos\omega t)\right]\cos\left[\frac{\pi}{2}(1-\cos\omega t)\right]\sin^2\omega t\cos\omega t+$$

$$\cos^2\left[\frac{\pi}{2}(1-\cos\omega t)\right]\cos^2\omega t\Big\}=e^2a^2\omega^4\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\left[\frac{\pi^2}{4}\sin^4\omega t+\cos^2\omega t\right]$$

$$\langle|\ddot{\vec p}|^2\rangle=\frac{e^2a^2\omega^4\pi^2}{4}\left[\frac{\pi^2}{4}\langle\sin^4\omega t\rangle+\langle\cos^2\omega t\rangle\right]$$

$$\langle\cos^2\omega t\rangle=\frac{1}{2} \qquad \sin^4\omega t=(\sin^2\omega t)^2=\left(\frac{1-\cos 2\omega t}{2}\right)^2=\frac{1-2\cos 2\omega t+\cos^2 2\omega t}{4}$$

$$=\frac{1-2\cos 2\omega t}{4}+\frac{1+\cos 4\omega t}{8}$$

$$\Rightarrow \quad \langle \sin^4 \omega t \rangle = \frac{3}{8} \quad \Rightarrow$$

$$\langle |\ddot{\vec{p}}|^2 \rangle = \frac{e^2 a^2 \omega^4 \pi^2}{4} \left(\frac{3}{8} \cdot \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{3\pi^2 + 16}{128} e^2 a^2 \omega^4 \pi^2$$

$$\left\langle -\frac{dW}{dt} \right\rangle = \frac{1}{6\pi \varepsilon_0 c^3} \langle |\ddot{\vec{p}}|^2 \rangle = \frac{(3\pi^2 + 16) \pi e^2 a^2 \omega^4}{768\, \varepsilon_0 c^3}$$

ама

ТАЛАСИ - ОКТОБАР 91

3. Честица наелектрисања $+e$ врши линеарне хармонијске осцилације око координатног почетка дуж осе z која се налази у xoY равни и заклапа угао од $30°$ са x осом. Амплитуда осциловања је a док је фреквенца $\frac{2}{3}\omega_0$. Честица наелектрисања $-e$ се равномерно креће по кругу радијуса b са фреквенцом ω_0. Центар круга је координатном почетку. Круг се налази у равни која је нормална на осу z. Наћи средњу снагу зрачења

$$\left\langle -\frac{dW}{dt}\right\rangle = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\langle|\ddot{\vec{p}}|^2\rangle$$

<u>РЕШЕЊЕ:</u> Средња снага зрачења је скаларна величина и зато можемо изабрати инерцијални референтни систем у којем су израчунавања најједноставнија. Тако, ако пређемо у ~~произ~~ било који систем који мирује у односу на полазни, са истим координатним почетком и z' осом која се поклапа са z осом, једначине кретања честица гласе:

$$x'_+(t)\equiv 0 \qquad x'_-(t) = b\cos\omega_0(t+t_-)$$
$$y'_+(t)\equiv 0 \quad \text{и} \quad y'_-(t) = b\cos\omega_0(t+t_-)$$
$$z'_+(t) = a\cos\frac{2}{3}\omega_0(t+t_+) \qquad z'_-(t)\equiv 0$$

С обзиром да ни почетак рачунања времена не игра никакву улогу можемо узети да је $t_+=0$. Тада, уколико је то потребно, можемо ротирати систем око z-осе и прећи у систем у којем ј-не кретања честица гласе:

$$x'_+(t)\equiv 0 \qquad x'_-(t) = b\cos\omega_0 t$$
$$y'_+(t)\equiv 0 \quad \text{и} \quad y'_-(t) = b\sin\omega_0 t$$
$$z'_+(t) = a\cos\frac{2}{3}\omega_0 t \qquad z'_-(t)\equiv 0.$$

Узимајући још да је $\omega_0 = 3\omega$ добијамо коначно

$$x'_+(t)\equiv 0 \qquad x'_-(t) = b\cos 3\omega t$$
$$y'_+(t)\equiv 0 \quad \text{и} \quad y'_-(t) = b\sin 3\omega t$$
$$z'_+(t) = a\cos 2\omega t \qquad z'_-(t)\equiv 0$$

Одавде за $\vec{p} = e_+\vec{r}_+ + e_-\vec{r}_- = e(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)$ налазимо

$$p_x = -eb\cos 3\omega t \qquad \ddot{p}_x = 9e\omega^2 b\cos 3\omega t$$
$$p_y = -eb\sin 3\omega t \quad \Rightarrow \quad \ddot{p}_y = 9e\omega^2 b\sin 3\omega t$$
$$p_z = ea\cos 2\omega t \qquad \ddot{p}_z = -4e\omega^2 a\cos 2\omega t$$

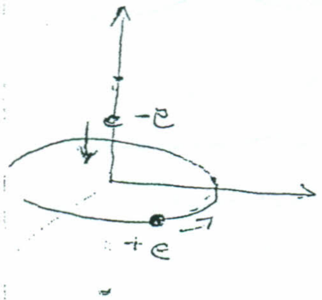
$$\Rightarrow \quad |\ddot{\vec{p}}|^2 = e^2\omega^4\left[81b^2\cos^2 3\omega t + 81b^2\sin^2 3\omega t + 16a^2\cos^2 2\omega t\right]$$
$$= e^2\omega^4\left[81b^2 + 16a^2\cos^2 2\omega t\right]$$

$$\Rightarrow \quad \langle|\ddot{\vec{p}}|^2\rangle = e^2\omega^4\left[81b^2 + 16a^2\langle\cos^2 2\omega t\rangle\right] = e^2\omega^4\left[81b^2 + 8a^2\right]$$
$$= \frac{e^2\omega_0^4}{81}\left(81b^2 + 8a^2\right) = e^2\omega_0^4\left(b^2 + \frac{8}{81}a^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\left\langle -\frac{dW}{dt}\right\rangle = \frac{e^2\omega_0^4}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\left(b^2 + \frac{8}{81}a^2\right)}$$

Таласи – Јуни 93.

2. Електронеутралан систем се састоји од две тачкасте наелектрисања $+e$ и $-e$. Прво од њих се креће по кругу полупречника a константном угаоном брзином ω а друго хармонијски дуж праве (која нормално продире кроз центар круга) са амплитудом a и угаоном ~~брзином~~ фреквенцом ω. Наћи расподелу интензитета зрачења овог дипола по угловима, усредњену по периоду кретања $\left(I = |\vec{P}| = \frac{1}{\mu_0}|\vec{E}\times\vec{B}| = \frac{c}{\mu_0}B^2 = \right)$



$$I = \frac{1}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3 r^2}\left\langle\left(\ddot{\vec{p}}(t)\times\vec{e}_r\right)^2\right\rangle.$$

Решење: Коначна ј-на кретања негативног наелектрисања (са погодно одабраним почетком рачунања времена) гласи:
$\vec{r}_- = a\sin\omega t\,\vec{e}_z$ а позитивног (погодним избором оса x и y)

$$\vec{r}_+ = a(\cos\omega t\,\vec{e}_x + \sin\omega t\,\vec{e}_y) \Rightarrow$$

$$\vec{p}(t) = ea(\cos\omega t\,\vec{e}_x + \sin\omega t\,\vec{e}_y - \sin\omega t\,\vec{e}_z) \Rightarrow$$

$$\ddot{\vec{p}}(t) = -ea\omega^2(\cos\omega t\,\vec{e}_x + \sin\omega t\,\vec{e}_y - \sin\omega t\,\vec{e}_z)$$ те како је

$$\vec{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{e}_y + \cos\theta\,\vec{e}_z \Rightarrow$$

$$\ddot{\vec{p}}\times\vec{e}_r = -ea\omega^2\left[(\cos\theta\sin\omega t + \sin\theta\sin\varphi\sin\omega t)\vec{e}_x + \right.$$
$$+ (-\sin\theta\cos\varphi\sin\omega t + \cos\theta\cos\omega t)\vec{e}_y +$$
$$\left.(\sin\theta\sin\varphi\cos\omega t - \sin\theta\cos\varphi\sin\omega t)\vec{e}_z\right] \Rightarrow$$

$$(\ddot{\vec{p}}\times\vec{e}_r)^2 = e^2a^2\omega^4\Big[(\cos^2\theta + \sin^2\theta\sin^2\varphi + 2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi)\sin^2\omega t +$$

$$\sin^2\theta\cos^2\varphi\sin^2\omega t + \cos^2\theta\cos^2\omega t - 2\sin\theta\cos\theta\cos\varphi\,\underline{\sin\omega t\cos\omega t} +$$

$$+\sin^2\theta(\sin^2\varphi\cos^2\omega t + \cos^2\varphi\sin^2\omega t - 2\sin\varphi\cos\varphi\,\underline{\sin\omega t\cos\omega t})\Big]$$

Kako je $\langle\cos^2\omega t\rangle = \langle\sin^2\omega t\rangle = \frac{1}{2}$ i $\langle\sin\omega t\cos\omega t\rangle = 0$

$$\langle(\ddot{\vec{p}}\times\vec{e}_r)^2\rangle = \frac{e^2a^2\omega^4}{2}\Big[\cos^2\theta + \sin^2\theta\sin^2\varphi + 2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi + \sin^2\theta\cos^2\varphi +$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \sin^2\theta\cos^2\varphi\Big] = e^2a^2\omega^4\big[1 + \sin\theta\cos\theta\sin\varphi\big] \Rightarrow$$

$$I = \frac{1}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3 r^2}\langle(\ddot{\vec{p}}(t')\times\vec{e}_r)^2\rangle \Rightarrow$$

$$\boxed{I = \frac{e^2a^2\omega^4}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3 r^2}(1 + \sin\theta\cos\theta\sin\varphi)}$$

FACULTY OF PHYSICS
UNIVERSITY OF BELGRADE, STUDENTSKI TRG 12
P. O. BOX 550
11001 B E O G R A D
YUGOSLAVIA

Beograd, ... 19..........

Таласи - септембар 93 (II рок)

2. Равномерно запремински наелектрисана капљица пулсира тако да је једначина њене граничне површине у тренутку t дате са

$$R(\theta,t) = R_0\sqrt{2+\cos\omega t\cos\theta}$$

док јој густина наелектрисања ρ остаје константна. Наћи укупну енергију израчену по јединици времена усредњену по периоду пулсације.

Решење: Како је $\left\langle -\frac{dW}{dt}\right\rangle = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\langle|\ddot{\vec{p}}|^2\rangle$ нађимо $\vec{p}(t) = \int\limits_{V(t)} \rho\vec{r}\,dV$. Овај интеграл је могуће наћи преласком на сферне координате: $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$ и $z = r\cos\theta$

$$dV = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi.$$

$$\vec{p}(t) = \rho\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^{R(\theta,t)} r^2dr\, r\sin\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x +$$

$$\rho\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^{R(\theta,t)} r^2dr\cdot r\sin\theta\sin\varphi\,\vec{e}_y +$$

$$+\rho\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^{R(\theta,t)} r^2dr\cdot r\cos\theta\,\vec{e}_z = \rho\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^{R(\theta,t)} r^3dr\cos\theta\,\vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \vec{p} = p_z\vec{e}_z \quad \text{и}$$

$$p_z = 2\pi\rho\int_0^{\pi}\cos\theta\sin\theta\,d\theta\int_0^{R(\theta,t)} r^3dr = 2\pi\rho\int_0^{\pi}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\,\frac{r^4}{4}\Big|_0^{R(\theta,t)} =$$

$$= \frac{\pi\rho R_0^4}{2}\int_0^{\pi}(4+4\cos\omega t\cos\theta+\cos^2\omega t\cos^2\theta)\cos\theta\sin\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{\pi\rho R_0^4}{2}\cdot 4\cos\omega t\left(-\frac{\cos^3\theta}{3}\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{4\pi\rho R_0^4}{3}\cos\omega t$$

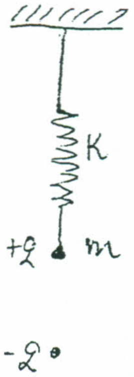
$$\ddot{\vec{P}} = -\omega^2 \frac{4\pi\rho R_0^4}{3} \cos\omega t \, \vec{e_z}$$

$$|\ddot{\vec{P}}|^2 = \frac{16\pi^2\rho^2 R_0^8 \omega^4 \cos^2\omega t}{9} \Rightarrow \langle |\ddot{\vec{P}}|^2 \rangle = \frac{8\pi^2\rho^2 R_0^8 \omega^4}{9}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left\langle -\frac{dW}{dt} \right\rangle = \frac{4\pi\rho^2 R_0^8 \omega^4}{27 \varepsilon_0 c^3}}$$

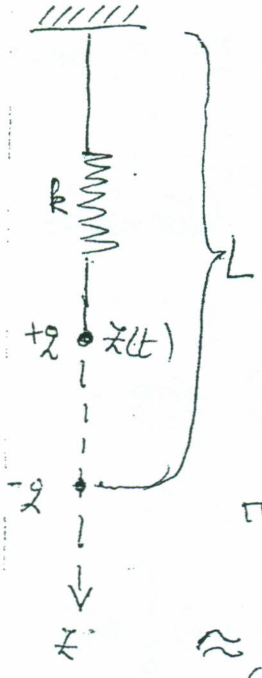
ТАЛАСИ - ЈАНУАР 94 (II РОК)

3. Вертикално изнад фиксиране негативно наелектрисане



куглице се налази супротно наелектрисана куглица масе m обешена о опругу константе еластичности k. У равнотежном стању је издужење опруге Δl једнако трећини растојања између куглица. Затим је позитивна куглица изведена из равнотежног положаја вертикално наниже и пуштена да осцилује. Приликом осциловања се јавља сила трења $\vec{F}_{tr} = -\alpha\vec{v}$. Ако се диполни момент мења по закону $\vec{p}(t) = \vec{p}_0 + \vec{p}_1 e^{-\gamma t}\cos\omega t$, наћи средњу снагу зрачења $\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\langle|\ddot{\vec{p}}|^2\rangle$ у функцији времена t и изразити је преко α, k, m и p_1.

Решење: Уведимо координатни систем као на слици. Тада једначина кретања куглице гласи:



$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -k(z-l_0) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2}{(L-z)^2} - \alpha\frac{dz}{dt}$$

где је l_0 дужина опруге у неистегнутом стању. У стању равнотеже је $z_R - l_0 = \Delta l$ и $L - z_R = 3\Delta l$ па је

$$k\Delta l = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(3\Delta l)^2}$$

Уведимо нову координату $\xi \overset{def}{=} z - z_R \Rightarrow z - l_0 = \xi + \Delta l$, $L - z = 3\Delta l - \xi$

па је

$$\frac{1}{(L-z)^2} = \frac{1}{(3\Delta l - \xi)^2} = \frac{1}{(3\Delta l)^2\left(1-\frac{\xi}{3\Delta l}\right)^2} = \frac{1}{(3\Delta l)^2\left(1-\frac{2\xi}{3\Delta l}+\frac{\xi^2}{9\Delta l^2}\right)}$$

$$\approx \frac{1}{(3\Delta l)^2}\left(1+\frac{2\xi}{3\Delta l}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(L-z)^2} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(3\Delta l)^2}\left(1+\frac{2\xi}{3\Delta l}\right) = k\Delta l + \frac{2}{3}k\xi \Rightarrow$$

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} = -k(\Delta l + \xi) + k\Delta l + \frac{2}{3}k\xi - \alpha\frac{d\xi}{dt} \Rightarrow$$

$$m\ddot{\xi} = -\frac{1}{3}k\xi - \alpha\dot{\xi} = -k'\xi - \alpha\dot{\xi} \quad \text{где је} \quad k' = \frac{1}{3}k$$

Решење ове ј-не има облик $\xi(t) = Ae^{-\gamma t}\cos\omega t$

$\dot{\xi} = -\gamma Ae^{-\gamma t}\cos\omega t - \omega Ae^{-\gamma t}\sin\omega t$

$\ddot{\xi} = (\gamma^2 - \omega^2)Ae^{-\gamma t}\cos\omega t + 2\omega\gamma Ae^{-\gamma t}\sin\omega t$

$$\Rightarrow \quad 0 = Ae^{-\gamma t}\left[\left(\gamma^2 - \omega^2 + \frac{k'}{m} - \frac{\alpha\gamma}{m}\right)\cos\omega t + 2\omega\left(\gamma - \frac{\alpha}{2m}\right)\sin\omega t\right]$$

$$\Rightarrow \quad \gamma = \frac{\alpha}{2m} \quad \text{и} \quad \omega^2 = \frac{k'}{m} - \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2. \quad \text{Облик } \xi(t) = Ae^{-\gamma t}\cos\omega t$$

даје $\vec{p}(t) = \vec{p}_0 + \vec{p}_1 e^{-\gamma t}\cos\omega t \Rightarrow \dot{\vec{p}} = -\vec{p}_1 e^{-\gamma t}(\gamma\cos\omega t + \omega\sin$

$\ddot{\vec{p}} = \vec{p}_1 e^{-\gamma t}\left[(\gamma^2 - \omega^2)\cos\omega t + 2\omega\gamma\sin\omega t\right] \Rightarrow$

$|\ddot{\vec{p}}|^2 = p_1^2 e^{-2\gamma t}\left[(\gamma^2 - \omega^2)\cos^2\omega t + 4\omega^2\gamma^2\sin^2\omega t + 4\omega\gamma(\gamma^2 - \omega^2)\sin\omega t\cos\omega t\right]$

Због $\langle\cos^2\omega t\rangle = \langle\sin^2\omega t\rangle = \frac{1}{2}$ и $\langle\sin\omega t\cos\omega t\rangle = 0$ за усредњавање по периоду $T = \frac{2\pi}{\omega}$ да је члан $e^{-2\gamma t}$ за које се сматра константан то је

$$\langle|\ddot{\vec{p}}|^2\rangle = \frac{1}{2}p_1^2 e^{-2\gamma t}\left[(\gamma^2 - \omega^2) + 4\omega^2\gamma^2\right] = \frac{p_1^2}{2}e^{-2\gamma t}(\gamma^2 + \omega^2)^2 =$$

$$= \frac{k'^2 p_1^2}{2m^2}e^{-\frac{\alpha}{m}t} = \frac{p_1^2}{18m^2}e^{-\frac{\alpha}{m}t} \Rightarrow$$

$$\left\langle -\frac{dW}{dt}\right\rangle = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\langle|\ddot{\vec{p}}|^2\rangle$$

$$\left\langle -\frac{dW}{dt}\right\rangle = \frac{k^2 p_1^2 e^{-\frac{\alpha}{m}t}}{108\pi\varepsilon_0 c^3 m^2}$$

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
OOUR ODSEK ZA FIZIČKE I METEOROLOŠKE NAUKE
11001 BEOGRAD
pošt. fah 550
Tel. 011/630-152

Beograd, ... 19......

ТАЛАСИ – ЈУНИ 94, (I-РОК)

2. Равномерно запремински наелектрисана капљица пулсира тако да је једначина њене граничне површине у тренутку t дата са

$$R(\theta,t) = R_0\sqrt{2+\cos\omega t\cos\theta}$$

а густина наелектрисања ρ са

$$\rho(t) = \rho_0\,(1+\cos\omega t).$$

Наћи укупну енергију израчену по јединици времена усредњену по периоду пулсације.

Решење: Нађимо прво $\vec{p} = \int_V \rho\vec{r}\,dV$. У том циљу пређимо на сферне координате
$x = r\sin\theta\cos\varphi$
$y = r\sin\theta\sin\varphi$ $\qquad dV = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$
$z = r\cos\theta$

$$\vec{p} = \int_V \rho\vec{r}\,dV = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^{R(\theta,t)} r^2 dr\,\rho(t)\,r\,(\sin\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{e}_y + \cos\theta\,\vec{e}_z)$$

Вршећи прво интеграцију по φ, због $\int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi = 0$ добијамо:

$$\vec{p} = 2\pi\rho(t)\vec{e}_z\int_0^{\pi}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\int_0^{R(\theta,t)} r^3 dr = 2\pi\rho(t)\vec{e}_z\int_0^{\pi}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\,\frac{r^4}{4}\Big|_0^{R(\theta,t)} =$$

$$= \frac{\pi\rho(t)\vec{e}_z}{2}\int_0^{\pi} R^4(\theta,t)\cos\theta\sin\theta\,d\theta = \frac{\pi\rho(t)\vec{e}_z}{2}\int_0^{\pi} R_0^4\,(2+\cos\omega t\cos\theta)^{\frac{4}{2}}\cos\theta\sin\theta\,d\theta$$

$$= \vec{a}\,J \qquad \text{где је} \qquad \vec{a} = \frac{\pi\rho(t)R_0^4\vec{e}_z}{2}$$

$$J = \int_0^{\pi}(4 + 4\cos\omega t\cos\theta + \cos^2\omega t\cos^2\theta)\cos\theta\sin\theta\,d\theta$$

Увести смену $u = \cos\theta \implies$

$$J = \int_{-1}^{1}[4u + 4(\cos\omega t)u^2 + (\cos^2\omega t)u^3]\,du = 4(\cos\omega t)\frac{u^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{8\cos\omega t}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{p} = aJ = \frac{\pi \rho(t) R_0^4 \vec{e}_z}{2} \cdot \frac{8}{3} \cos\omega t = \frac{4}{3}\pi \rho_0 R_0^4 (1+\cos\omega t)\cos\omega t\, \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \quad \vec{p} = \vec{b}(1+\cos\omega t)\cos\omega t$$ где је $\vec{b} = \frac{4}{3}\pi \rho_0 R_0^4 \vec{e}_z$.

$$\vec{p} = \vec{b}(\cos\omega t + \cos^2\omega t) = \vec{b}\left(\cos\omega t + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\omega t\right)$$

$$\dot{\vec{p}} = -\omega \vec{b}(\sin\omega t + \sin 2\omega t) \qquad \boxed{\ddot{\vec{p}} = -\omega^2 \vec{b}(\cos\omega t + 2\cos 2\omega t)}$$

$$|\ddot{\vec{p}}|^2 = \omega^4 b^2(\cos^2\omega t + 4\cos\omega t\cos 2\omega t + 4\cos^2 2\omega t)$$

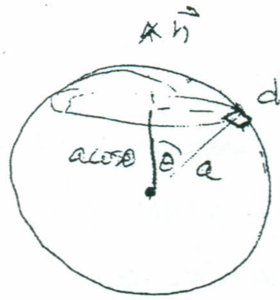
$$\langle|\ddot{\vec{p}}|^2\rangle = \omega^4 b^2\left(\langle\cos^2\omega t\rangle + 4\langle\cos\omega t\cos 2\omega t\rangle + 4\langle\cos^2 2\omega t\rangle\right).$$

Како је $\langle\cos^2\omega t\rangle = \langle\cos^2 2\omega t\rangle = \frac{1}{2}$ и $\langle\cos\omega t\cos 2\omega t\rangle = 0 \Rightarrow$

$$\langle|\ddot{\vec{p}}|^2\rangle = \frac{5}{2}\omega^4 b^2 = \frac{5}{2}\omega^4 \cdot \frac{16\pi^2}{9}\rho_0^2 R_0^8 = \boxed{\frac{40}{9}\pi^2 \rho_0^2 R_0^8 \omega^4 = \langle|\ddot{\vec{p}}|^2\rangle}$$

$$\Rightarrow \left\langle -\frac{dW}{dt}\right\rangle = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\langle|\ddot{\vec{p}}|^2\rangle = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \cdot \frac{40}{9}\pi^2 \rho_0^2 R_0^8 \omega^4 = \frac{20\pi \rho_0^2 R_0^8 \omega^4}{27\varepsilon_0 c^3}$$

$$\boxed{\left\langle -\frac{dW}{dt}\right\rangle = \frac{20\pi \rho_0^2 R_0^8 \omega^4}{27\varepsilon_0 c^3}}$$



$d^2S = a^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$

уз рачунање $\vec{p}$

Ако узмемо x-осу у правцу равнотежног положаја вектора $\vec{p}$ $\Rightarrow$

$$\vec{p} = p_0(\cos\alpha \, \vec{e}_x + \sin\alpha \, \vec{e}_y).$$

За мале осцилације је

$$\vec{p} \approx p_0 \vec{e}_x + \alpha p_0 \vec{e}_y$$

$$= p_0 \vec{e}_x + A p_0 \cos\omega t \, \vec{e}_y; \Rightarrow \ddot{\vec{p}} = -\omega^2 p_0 A \cos\omega t \, \vec{e}_y$$

$$\Rightarrow |\ddot{\vec{p}}|^2 = \omega^4 p_0^2 A^2 \cos^2\omega t \Rightarrow \langle |\ddot{\vec{p}}|^2 \rangle = \frac{\omega^4 p_0^2 A^2}{2} \Rightarrow$$

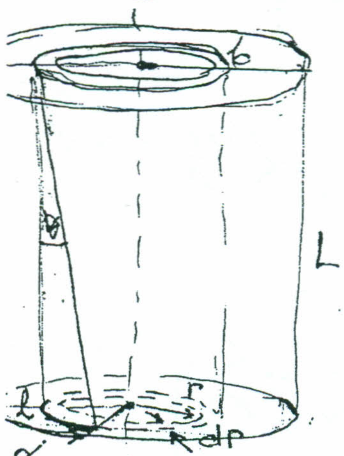
$$\left\langle -\frac{dW}{dt} \right\rangle = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \cdot \frac{\omega^4 p_0^2 A^2}{2} = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \cdot \frac{A^2}{2} \cdot \frac{9\pi^2 G^2 b^8}{16 m^2 a^4 L^2} \cdot \frac{16\pi^2 \sigma_0^2 a^6}{9}$$

$$\boxed{\left\langle -\frac{dW}{dt} \right\rangle = \frac{\pi^3 G^2 b^8 \sigma_0^2 a^2}{12 \varepsilon_0 c^3 m^2 L^2} A^2}$$

? Таласи – јануар I (98)

2. Диелектрична сферна љуска масе m и полупречника a је површински наелектрисана са $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$ где је θ угао са правцем диполног момента $\vec{p}$ сферне љуске. Затим је љуска окачена о лак конац дужине L, полупречника b и модула торзије G тако да $\vec{p}$ лежи у хоризонталној равни. Нађи $\left\langle -\frac{dW}{dt} \right\rangle$ приликом малих торзионих осцилација амплитуде A.

Решење: J-на торзионих осцилација је $I\ddot{\alpha} = M$ где је α угао увртања конца, I – момент инерције сферне љуске ($I = \frac{2}{3}ma^2$) а M торзиони момент; M налазимо на следећи начин: по Хуковом закону $\tau = G\theta$ где је тангенц. напон а θ угао торзије. Са слике 1 је $\theta \approx tg\theta = \frac{l}{L}$ и $l = r\alpha$ где је α угао увртања конца $\Rightarrow$ $\theta = \frac{r\alpha}{L}$. Зато је инф. сила d^2F на елемент површ. $d^2S = r\,dr\,d\varphi$ дата са $d^2F = \tau dS = G\frac{r\alpha}{L} \cdot r\,dr\,d\varphi$ $= \frac{G\alpha}{L} r^2 dr\,d\varphi$ а њен момент силе $d^2M = r\,d^2F = \frac{G\alpha}{L} r^3 dr\ldots$

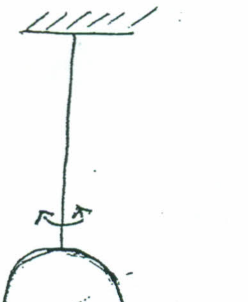


слика 1

$$\Rightarrow M = \int d^2M = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^b dr \frac{G\alpha}{L} r^3 = \frac{2\pi G\alpha}{4L} \cdot b^4 = \boxed{\frac{\pi G\alpha b^4}{2L} = M}$$

$\Rightarrow$ J-на торзионих осцилација је $\frac{2}{3}ma^2\ddot{\alpha} = -\frac{\pi G b^4}{2L}\alpha$

тј: $\ddot{\alpha} + \frac{3\pi G b^4}{4mLa^2}\alpha = 0$ одакле је фрекв. торзионих осцилац. $\alpha(t) = A\cos\omega t$ дата са $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{3\pi G b^4}{4mLa^2}}}$ – слика 2.



слика 2.

$$\left\langle -\frac{dW}{dt} \right\rangle = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \langle |\ddot{\vec{p}}|^2 \rangle$$

Диполни момент $\vec{p}$ рачунамо овако: Нека је $\vec{p} = p_0 \ldots$

Сада је $p_0 = \int a\cos\theta\, d^2q = \int a\cos\theta \cdot \sigma_0 \cos\theta \cdot a^2 \sin\theta\, d\ldots$

$$= \sigma_0 a^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta = (\text{уз смену } \cos\theta = u) =$$

$$= 2\pi\sigma_0 a^3 \int_{-1}^{1} u^2 du = \frac{4\pi\sigma_0 a^3}{3} \Rightarrow \boxed{p_0 = \frac{4\pi\sigma_0 a^3}{3}}$$

$$\ddot{\vec{P}} = -\omega^2 \cdot \frac{4\pi\rho R_0^4}{3} \cos\omega t \, \vec{e}_z$$

$$|\ddot{\vec{P}}|^2 = \frac{16\pi^2\rho^2 R_0^8 \omega^4 \cos^2\omega t}{9} \Rightarrow \langle |\ddot{\vec{P}}|^2 \rangle = \frac{8\pi^2\rho^2 R_0^8 \omega^4}{9}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left\langle -\frac{dW}{dt} \right\rangle = \frac{4\pi\rho^2 R_0^8 \omega^4}{27\varepsilon_0 c^3}}$$

ТАЛАСИ - СЕПТЕМБАР 95 (II РОК)

2. Равномерно запремински наелектрисана капљица пулсира тако да је једначина њене граничне површине у тренутку t дата са

$$R(\theta,t) = R_0\sqrt{2+\cos\omega t\cos\theta}$$

док јој густина наелектрисања ρ остаје константна. Наћи укупну енергију израчену по јединици времена усредњ. по периоду пулсације.

<u>Решење:</u> Како је $\left\langle -\frac{dW}{dt}\right\rangle = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\langle|\ddot{\vec{p}}|^2\rangle$ наћићемо прв. $\vec{p}(t) = \int\limits_{V(t)}\rho\vec{r}\,dV$. Овај интеграл је могуће наћи преласком на сферне координате $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$ и $z = r\cos\theta$

$dV = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$.

$$\vec{p}(t) = \rho\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int\limits_0^{R(\theta,t)}r^2dr\cdot r\sin\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x +$$

$$+\rho\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int\limits_0^{R(\theta,t)}r^2dr\cdot r\sin\theta\sin\varphi\,\vec{e}_y +$$

$$+\rho\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int\limits_0^{R(\theta,t)}r^2dr\cdot r\cos\theta\,\vec{e}_z = \rho\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int\limits_0^{R(\theta,t)}r^3dr\cos\theta\,\vec{e}_z$$

$\vec{p} = p_z\vec{e}_z$ и

$$p_z = 2\pi\rho\int\limits_0^{\pi}\cos\theta\sin\theta\,d\theta\int\limits_0^{R(\theta,t)}r^3dr = 2\pi\rho\int\limits_0^{\pi}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\,\frac{r^4}{4}\Big|_0^{R(\theta,t)} =$$

$$= \frac{\pi\rho R_0^4}{2}\int\limits_0^{\pi}(2+4\cos\omega t\cos\theta+\cos^2\omega t\cos^2\theta)\cos\theta\sin\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{\pi\rho R_0^4}{2}\cdot 4\cos\omega t\left(-\frac{\cos^3\theta}{3}\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{4\pi\rho R_0^4}{3}\cos\omega t$$

$$\Rightarrow \langle |\ddot{\vec{p}}|^2 \rangle = 4q^2 l^2 \omega^4 A^4 \langle \cos^2 2\omega t \rangle = 2q^2 l^2 \omega^4 A^4$$

Одавде је $\quad \dfrac{dE}{dt} \approx + \dfrac{1}{2}\left\langle \dfrac{dW}{dt} \right\rangle = -\dfrac{1}{12\pi\varepsilon_0 c^3} \cdot 2q^2 l^2 \omega^4 A^4 = -\dfrac{q^2 l^2 \omega^4 A^4}{6\pi\varepsilon_0 c^3}$

Како је $\quad E = \frac{1}{2} m l^2 A^2 \omega^2 \Rightarrow$

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2q^2}{3\pi\varepsilon_0 c^3 m^2 l^2} E^2 \Rightarrow \quad -\frac{dE}{E^2} = d\left(\frac{1}{E}\right) = \frac{2q^2\,dt}{3\pi\varepsilon_0 c^3 m^2 l^2} \Rightarrow$$

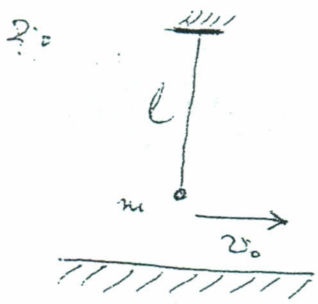
$$\frac{2}{E_0} - \frac{1}{E_0} = \frac{1}{E_0} = \frac{2q^2 t_{1/2}}{3\pi\varepsilon_0 c^3 m^2 l^2} \Rightarrow$$

$t_{1/2} = \dfrac{3\pi\varepsilon_0 c^3 m^2 l^2}{2q^2 E_0}$. Како је $\quad E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 \Rightarrow$

$$\boxed{t_{1/2} = \frac{3\pi\varepsilon_0 c^3 m l^2}{q^2 v_0^2}}$$

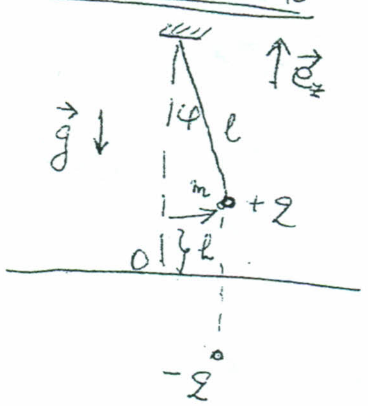
ТАЛАСИ – ЈУНИ 95 (I рок)

2:



Изнад проводне равни је, о нерастегљиву нетежину нит дужине l, обешена куглица масе m. Куглица је затим наелектрисана количином електрицитета q и саопштена јој је мала почетна брзина v_0 паралелно са проводном равни. Наћи време $t_{1/2}$ за које се енергија куглице смањи 2 пута. Сматрати да је проводност равни врло велика.

Решење:



Под условима задатка куглица ће вршити мале слабо амортизоване осцилације изнад проводне равни. Како је фреквенција тих осцилација мала, може се сматрати да је у сваком тренутку t формиран електростатички лик наелектрисане куглице и да нема џулових губитака услед пре наелектрисавања проводне равни. Куглица и њен лик образују променљиви дипол и сматраћемо да губици енергије система настају услед овог квази диполног зрачења (квази – јер је испод проводне равни $\vec{E} = 0$ па се зрачи само половина енергије). Ови губици су мали Тако да је кретање куглице описано са $\varphi(t) = A(t)\sin\omega t$ где је $A(t)$ споро променљива амплитуда. Са слике се види да је $\vec{p}(t) = q \cdot 2z(t)\vec{e}_z \Rightarrow \vec{p}(t) = 2q[h + l(1-\cos\varphi)]$

$$\Rightarrow \dot{\vec{p}}(t) = 2ql\sin\varphi \cdot \dot\varphi\,\vec{e}_z \Rightarrow \ddot{\vec{p}}(t) = 2ql\left[\dot\varphi^2\cos\varphi + \ddot\varphi\sin\varphi\right]\vec{e}_z.$$

Како је реч о малим осцилацијама $\Rightarrow \cos\varphi \approx 1$ a $\sin\varphi \approx \varphi$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{p}}(t) \approx 2ql\left(\dot\varphi^2 + \varphi\ddot\varphi\right)\vec{e}_z.$$

Како су осцилације слабо амортизоване

$$\dot\varphi = \dot{A}\sin\omega t + \omega A\cos\omega t \approx \omega A\cos\omega t$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{p}}(t) = 2ql\left(\omega^2A^2\cos^2\omega t - \omega^2A^2\sin^2\omega t\right)\vec{e}_z = 2ql(\cos 2\omega t)\omega\ldots$$

$$\Rightarrow |\ddot{\vec{p}}(t)|^2 = 4q^2l^2\omega^4A^4\cos^2 2\omega t$$

Одавде је $\vec{p} = q_+\vec{r}_+ + q_-\vec{r}_-\overset{\to 0}{=} q\vec{r}_+ =$

$$= \frac{qa}{2}\left[\cos(\omega t+\alpha)+\cos(3\omega t+\alpha)\right]\vec{e}_x + \frac{qa}{2}\left[\sin(3\omega t+\alpha)-\sin(\omega t+\alpha)\right]\vec{e}_y +$$

$$q\left[b+a\sin(2\omega t+\alpha)\right]\vec{e}_z \quad \Rightarrow$$

$$\ddot{\vec{p}} = -\frac{\omega^2 a q}{2}\left[\cos(\omega t+\alpha)+9\cos(3\omega t+\alpha)\right]\vec{e}_x - \frac{q\omega^2 a}{2}\left[9\sin(3\omega t+\alpha)-\sin(\omega t+\alpha)\right]$$

$$-4\omega^2 a q\sin(2\omega t+\alpha)\vec{e}_z =$$

$$|\ddot{\vec{p}}|^2 = \frac{\omega^4 a^2 q^2}{4}\Big\{\cos^2(\omega t+\alpha)+81\cos^2(3\omega t+\alpha)+18\cos(\omega t+\alpha)\cos(3\omega t+\alpha)+$$

$$+\sin^2(\omega t+\alpha)+81\sin^2(3\omega t+\alpha)-18\sin(\omega t+\alpha)\sin(3\omega t+\alpha)+$$

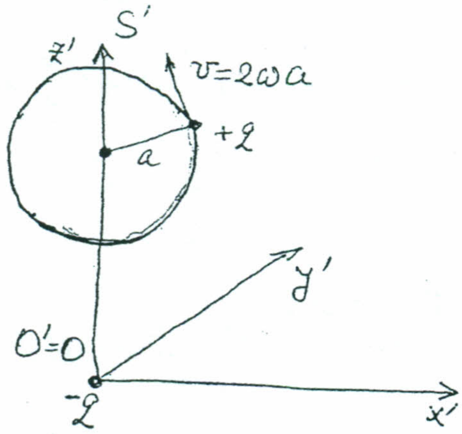
$$+64\sin^2(2\omega t+\alpha)\Big\} \quad \Rightarrow$$

$$\langle|\ddot{\vec{p}}|^2\rangle = \frac{\omega^4 a^2 q^2}{4}(1+81+32) = \frac{57}{2}\omega^4 a^2 q^2 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\left\langle -\frac{dW}{dt}\right\rangle = \frac{19\,\omega^4 a^2 q^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3}}$$

ТАЛАСИ – ЈАНУАР 95 (II РОК)

2.



Честица, наелектрисања $+q$, се у покретном систему референце S' равномерно креће по кругу учестаношћу 2ω (види слику). Систем S' равномерно ротира угаоном брзином ω око z осе инерцијалног система S и у почетном тренутку $t=0$ се осе оба система поклапају. У координатном почетку O система S мирује честица наелектрисања $-q$. Наћи средњу снагу зрачења овог система.

<u>Решење</u>: Средња снага зрачења $\langle -\frac{dW}{dt} \rangle$ је дата са

$$\langle -\frac{dW}{dt} \rangle = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \langle |\ddot{\vec{p}}|^2 \rangle.$$

Нађимо прво $\vec{p}$; у систему S' ј-не кретања $+q$ честице су:

$$x'_+(t) = a\cos(2\omega t + \alpha)$$
$$y'_+(t) = 0$$
$$z'_+(t) = b + a\sin(2\omega t + \alpha).$$

По услову задатка видимо да важи:

$$x = x'\cos\omega t - y'\sin\omega t$$
$$y = x'\sin\omega t + y'\cos\omega t$$
$$z = z',$$

па ј-не кретања $+q$ честице у систему S гласе:

$$x_+(t) = a\cos(2\omega t+\alpha)\cos\omega t$$
$$y_+(t) = a\cos(2\omega t+\alpha)\sin\omega t$$
$$z_+(t) = b + a\sin(2\omega t+\alpha)$$

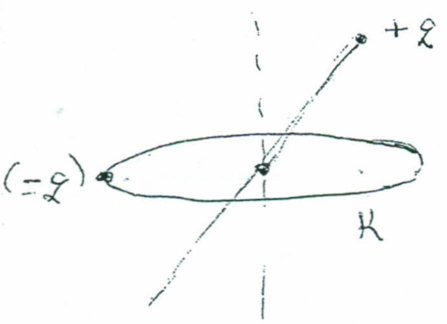
па због $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$ и $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)$ $\Rightarrow$

$$x_+(t) = \frac{a}{2}\cos(\omega t+\alpha) + \frac{a}{2}\cos(3\omega t+\alpha)$$
$$y_+(t) = -\frac{a}{2}\sin(\omega t+\alpha) + \frac{a}{2}\sin(3\omega t+\alpha)$$
$$z_+(t) = b + a\sin(2\omega t+\alpha)$$

$$\Rightarrow \langle |\ddot{\vec{p}}|^2 \rangle = (qa\omega^2)^2 \left\{ 1 + \frac{1}{2} - 2\,\frac{\sin\alpha \cos\varphi}{2} \right\} = \left(\frac{3}{2} - \sin\alpha\cos\varphi\right)(qa\omega^2)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\left\langle -\frac{dW}{dt} \right\rangle = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \langle |\ddot{\vec{p}}|^2 \rangle = \frac{(qa\omega^2)^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\left(\frac{3}{2} - \sin\alpha\cos\varphi\right).}$$

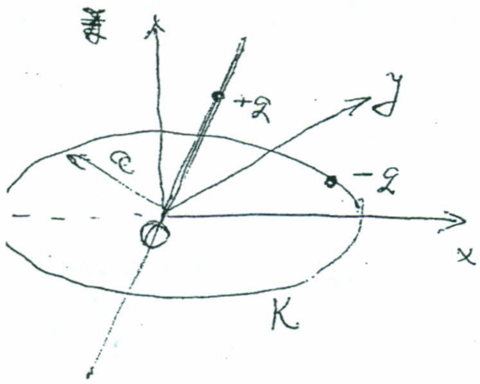
Овај израз постаје максималан за $\cos\varphi = -1$ тј за $\varphi = \pi$ (види слику) тј. када су, при амплитудном положају $+q$, $+q$ и $-q$ најудаљенији а диполни момент највећи.



Таласи - септембар 94 (II рок)

2. Систем се састоји из негативног наелектрисања $-q$ које равномерно кружи по кружници радијуса кружном фреквенцом ω и позитивног наелектрисања $+q$ које се креће по правој која пролази кроз центар кружнице K и заклапа угао α са нормалом на кружницу K. Кретање позитивног наелектрисања је хармонијско са кружном фреквенцом ω и амплитудом a. Наћи средњу силу зрачења овог система као и почетни положај (при коме је $+q$ у амплитудном положају) за који ће ова снага бити максимална.

Решење: Нека се кружница K налази у xOy равни и нека се $+q$ креће у xOz равни. Имајући на уму могућност избора координатних оса (x и y) и почетног тренутка времена можемо узети да је



$$\vec{r}_- = a(\cos\omega t\,\vec{e}_x + \sin\omega t\,\vec{e}_y)$$
$$\vec{r}_+ = a\cos(\omega t+\varphi)(\sin\alpha\,\vec{e}_x + \cos\alpha\,\vec{e}_z)$$

$\Rightarrow$ диполни момент система $\vec{p} = q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)$ је дат са

$$\vec{p} = qa\left\{[\cos(\omega t+\varphi)\sin\alpha - \cos\omega t]\vec{e}_x - \sin\omega t\,\vec{e}_y + \cos(\omega t+\varphi)\cos\alpha\,\vec{e}_z\right\} \Rightarrow$$

$$\ddot{\vec{p}} = -qa\omega^2\left\{[\cos(\omega t+\varphi)\sin\alpha - \cos\omega t]\vec{e}_x - \sin\omega t\,\vec{e}_y + \cos(\omega t+\varphi)\cos\alpha\,\vec{e}_z\right\} \Rightarrow$$

$$|\ddot{\vec{p}}|^2 = (qa\omega^2)^2\left\{[\cos(\omega t+\varphi)\sin\alpha - \cos\omega t]^2 + \sin^2\omega t + \cos^2(\omega t+\varphi)\cos^2\alpha\right\}$$

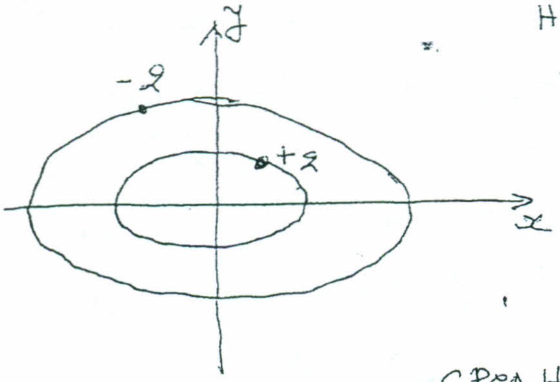
$$= (qa\omega^2)^2\left\{\sin^2\alpha\cos^2(\omega t+\varphi) - 2\sin\alpha\cos\omega t\cos(\omega t+\varphi) + \cos^2\omega t + \sin^2\omega t + \cos^2\alpha\cos^2(\omega t+\varphi)\right\}$$

$$= (qa\omega^2)^2\left\{\cos^2(\omega t+\varphi) - 2\sin\alpha\cos\omega t(\cos\omega t\cos\varphi - \sin\omega t\sin\varphi) + 1\right\}$$

$$= (qa\omega^2)^2\left\{1 + \cos^2(\omega t+\varphi) - 2\sin\alpha\cos\varphi\cos^2\omega t + 2\sin\alpha\sin\varphi\sin\omega t\cos\omega t\right\}$$

Таласи и оптика – јуни I (98)

1. У xOy равни се у истом смеру крећу 2 наелектрисане честице наелектрисања $+q$ и $-q$. Честица наелектрисања $+q$ се креће по елипс полуоса a и b угаоном брзином ω а честица наелектрисања $-q$ по елипси полуоса $2a$ и $2b$ угаоном брзином 2ω. Наћи средњу снагу зрачења овог система.



Решење: $\left\langle -\frac{dW}{dt} \right\rangle = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \langle |\ddot{\vec{p}}|^2 \rangle = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \cdot \frac{1}{T}\int_0^T |\ddot{\vec{p}}(t)|^2 dt$

где је $T = \frac{2\pi}{\omega}$ период кретања система

Диполни момент система је $\vec{p} = q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)$, при чему је

$x_+(t) = a\cos\omega t$, $y_+(t) = b\sin\omega t$ $\quad (z_+ \equiv 0)$

$x_-(t) = 2a\cos(2\omega t + \delta)$, $y_-(t) = 2b\sin(2\omega t + \delta)$ $\quad (z_- \equiv 0)$

и где је δ фазна разлика. (Наведене ј-не кретања следе на основу "слободе" за почетак рачунања време.

$\Rightarrow \vec{p} = q\{[a\cos\omega t - 2a\cos(2\omega t + \delta)]\vec{e}_x + [b\sin\omega t - 2b\sin(2\omega t + \delta)]\vec{e}_y\}$.

$\ddot{\vec{p}} = q\omega^2\{[8a\cos(2\omega t + \delta) - a\cos\omega t]\vec{e}_x + [8b\sin(2\omega t + \delta) - b\sin\omega t]\vec{e}_y\}$

$|\ddot{\vec{p}}|^2 = q^2\omega^4\{a^2[64\cos^2(2\omega t + \delta) - 16\cos\omega t\cos(2\omega t + \delta) + \cos^2\omega t] +$
$+ b^2[64\sin^2(2\omega t + \delta) - 16\sin\omega t\sin(2\omega t + \delta) + \sin^2\omega t]\}$

$\langle|\ddot{\vec{p}}|^2\rangle = q^2\omega^4\{a^2[64\langle\cos^2(2\omega t + \delta)\rangle - 16\langle\cos\omega t\cos(2\omega t + \delta)\rangle +$
$+ \langle\cos^2\omega t\rangle] + b^2[64\langle\sin^2(2\omega t + \delta)\rangle - 16\langle\sin\omega t\sin(2\omega t + \delta)\rangle +$
$+ \langle\sin^2\omega t\rangle]\}$

Kako je $\langle \sin^2(m\omega t+\alpha)\rangle = \langle \cos^2(n\omega t+\alpha)\rangle = \frac{1}{2}$ и

$\langle \sin n\omega t \sin(m\omega t+\alpha)\rangle = \langle \cos n\omega t \cos(m\omega t+\alpha)\rangle = 0 \Rightarrow$

$$\langle |\ddot{\vec{p}}|^2\rangle = q^2\omega^4\left\{a^2\left[\frac{64}{2}-0+\frac{1}{2}\right]+b^2\left[\frac{64}{2}-0+\frac{1}{2}\right]\right\} =$$

$$= \frac{65}{2} q^2\omega^4(a^2+b^2) \Rightarrow$$

$$\boxed{\left\langle -\frac{dW}{dt}\right\rangle = \frac{65}{12}\cdot\frac{q^2\omega^4(a^2+b^2)}{\pi\varepsilon_0 c^3}}$$

+

?! слика   Таласи и оптика – јуни II (уж.)

1. Честица наелектрисања $+e$ врши линеарне хармонијске осцилације око координатног почетка дуж осе u која се налази у xOy равни и заклапа угао од 30° са x-осом. Амплитуда осциловања је a док је кружна фреквенца (угаона) $\frac{2}{3}\omega_0$. Честица наелектрисања $-e$ се равномерно креће по кругу радијуса b са фреквенцом ω_0. Центар круга је у координатном почетку. Круг се налази у равни која је нормална на осу u. Наћи средњу снагу зрачења $\langle -\frac{dW}{dt} \rangle = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \langle |\ddot{\vec{p}}|^2 \rangle$

Решење: Средња снага зрачења је "независна" од оријентације оса те зато осе оријентишемо тако да су израчунавања што једноставнија. Тако ако осу u узмемо за z' осу с обзиром на слободу избора почетка рачунања времена и оријентацију x'-осе исте можемо одабрати тако да ј-не кретања честица гласе:

$$x'_+(t) = 0 \qquad x'_-(t) = b\cos\omega_0 t$$
$$y'_+(t) = 0 \qquad \text{и} \qquad y'_-(t) = b\sin\omega_0 t$$
$$z'_+(t) = a\cos\frac{2}{3}\omega_0 t \qquad z'_-(t) = 0$$

Узимајући да је $\omega_0 = 3\omega$ ове ј-не постају

$$x'_+(t) = 0 \qquad x'_-(t) = b\cos 3\omega t$$
$$y'_+(t) = 0 \qquad \text{и} \qquad y'_-(t) = b\sin 3\omega t$$
$$z'_+(t) = a\cos 2\omega t \qquad z'_-(t) = 0$$

Одавде, за $\vec{p} = e_+\vec{r}_+ + e_-\vec{r}_- = e(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)$, налазимо

$$p_x = -eb\cos 3\omega t \qquad \ddot{p}_x = 9e\omega^2 b\cos 3\omega t$$
$$p_y = -eb\sin 3\omega t \quad \Rightarrow \quad \ddot{p}_y = 9e\omega^2 b\sin 3\omega t$$
$$p_z = ea\cos 2\omega t \qquad \ddot{p}_z = -4e\omega^2 a\cos 2\omega t$$

$$|\ddot{\vec{p}}|^2 = e^2\omega^4\left[81 b^2\cos^2 3\omega t + 81 b^2 \sin^2 3\omega t + 16 a^2\cos^2 2\omega t\right]$$

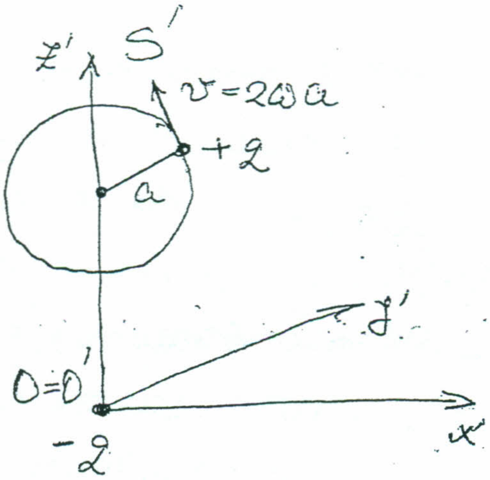
$$= e^2\omega^4\left[81 b^2 + 16 a^2\cos^2 2\omega t\right]$$

$$\langle|\ddot{\vec{p}}|^2\rangle = e^2\omega^4\left[81 b^2 + 16 a^2\langle\cos^2 2\omega t\rangle\right] = e^2\omega^4\left[81 b^2 + 8 a^2\right]$$

$$= \frac{e^2\omega_0^4}{81}\left(81 b^2 + 8a^2\right) = e^2\omega_0^4\left(b^2 + \frac{8}{81}a^2\right)$$

$$\boxed{\left\langle -\frac{dW}{dt}\right\rangle = \frac{e^2\omega_0^4}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\left(b^2 + \frac{8}{81}a^2\right)}$$

Таласи и оптика – јуни III (98)



Честица наелектрисања $+q$, се у покретном систему референце S' равномерно креће по кругу учестаношћу 2ω (види слику). Систем S' равномерно ротира угаоном брзином ω око z осе инерцијалног система S и у почетном тренутку $t=0$ се осе оба система поклапају. У координатном почетку O система S мирује честица наелектрисања $-q$. Наћи средњу снагу зрачења овог система.

Решење: Средња снага зрачења је $\left\langle -\frac{dW}{dt}\right\rangle = \frac{\langle|\ddot{\vec p}|^2\rangle}{6\pi\varepsilon_0 c^3}$

У систему S' ј-не кретања позитивне честице су:

$$x'_+(t) = a\cos(2\omega t+\alpha)$$
$$y'_+(t) = 0$$
$$z'_+(t) = a\sin(2\omega t+\alpha).$$

По услову задатка је веза између координата инерцијалног и ротирајућег система облика

$$x = x'\cos\omega t - y'\sin\omega t$$
$$y = x'\sin\omega t + y'\cos\omega t$$
$$z = z'$$

На основу чега ј-не кретања $+q$ честице у систему S гласе:

$$x_+(t) = a\cos(2\omega t+\alpha)\cos\omega t$$
$$y_+(t) = a\cos(2\omega t+\alpha)\sin\omega t$$
$$z_+(t) = b + a\sin(2\omega t+\alpha)$$

па због $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$ и

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)$ $\Rightarrow$

$$x_+(t) = \frac{a}{2}\cos(\omega t+\alpha) + \frac{a}{2}\cos(3\omega t+\alpha)$$

$$y_+(t) = -\frac{a}{2}\sin(\omega t+\alpha) + \frac{a}{2}\sin(3\omega t+\alpha)$$

$$z_+(t) = b + a\sin(2\omega t+\alpha).$$

Одавде је $\vec{p} = q_+\vec{r}_+ + \cancel{q_-\vec{r}_-}^{\,0} = q_+\vec{r}_+ =$

$$= \frac{qa}{2}[\cos(\omega t+\alpha) + \cos(3\omega t+\alpha)]\vec{e}_x + \frac{qa}{2}[\sin(3\omega t+\alpha) - \sin(\omega t+\alpha)]\vec{e}_y$$

$$+ q[b + a\sin(2\omega t+\alpha)]\vec{e}_z \Rightarrow$$

$$\ddot{\vec{p}} = -\frac{\omega^2 aq}{2}[\cos(\omega t+\alpha) + 9\cos(3\omega t+\alpha)]\vec{e}_x - \frac{\omega^2 aq}{2}[9\sin(3\omega t+\alpha) - \sin(\omega t\ldots$$

$$-4\omega^2 aq\sin(2\omega t+\alpha)\vec{e}_z \Rightarrow$$

$$|\ddot{\vec{p}}|^2 = \frac{\omega^4 a^2 q^2}{4}\{\cos^2(\omega t+\alpha) + 81\cos^2(3\omega t+\alpha) + 18\cos(\omega t+\alpha)\cos(3\omega t\ldots$$

$$+ 81\sin^2(3\omega t+\alpha) - 18\sin(\omega t+\alpha)\sin(3\omega t+\alpha) + \sin^2(\omega t+\alpha) +$$

$$+ 64\sin^2(2\omega t+\alpha)\},$$ због $\langle\cos^2(\omega t+\alpha)\rangle = \langle\cos^2(3\omega t+\alpha)\rangle =$

$$= \langle\sin^2(3\omega t+\alpha)\rangle = \langle\sin^2(\omega t+\alpha)\rangle = \langle\sin^2(2\omega t+\alpha)\rangle = \frac{1}{2}$$ и

$$\langle\cos(\omega t+\alpha)\cos(3\omega t+\alpha)\rangle = \langle\sin(\omega t+\alpha)\sin(3\omega t+\alpha)\rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\langle|\ddot{\vec{p}}|^2\rangle = \frac{\omega^4 a^2 q^2}{4}\left\{\frac{1}{2} + \frac{81}{2} + \frac{81}{2} + \frac{1}{2} + \frac{64}{2}\right\} = \frac{57}{2}\omega^4 a^2 q^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\left\langle -\frac{dW}{dt}\right\rangle = \frac{19\omega^4 a^2 q^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3}}$$

Таласи – септембар I 98

1. Равномерно запремински наелектрисана капљица пулсира тако да је једначина њене граничне површине у тренутку t дата са

$$R(\theta,t)=R_0\sqrt{2+\cos\omega t\cos\theta}$$

док јој густина наелектрисања ρ остаје константна. Наћи укупну енергију израчену по јединици времена усредњену по периоду пулсације.

<u>Решење:</u> Како је $\left\langle -\frac{dW}{dt}\right\rangle=\frac{1}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\langle|\ddot{\vec p}|\rangle^2$ нађимо прво $\vec p(t)=\int\limits_{V(t)}\rho\vec r\,dV$. Овај интеграл је могуће наћи преласком на сферне координате

$$x=r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y=r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z=r\cos\theta$$

$dV=r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$.

$$\vec p(t)=\rho\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^{R(\theta,t)}r^2dr\cdot r[\sin\theta\cos\varphi\,\vec e_x+\sin\theta\sin\varphi\,\vec e_y+\cos\theta\,\vec e_z]$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^{R(\theta,t)}r^3\cos\theta\,dr\,\vec e_z$$

(јер је $p_x=p_y=0$, како се лако види пошто се изврши интеграција по φ). $\vec p=p_z\vec e_z$ и

$$p_z=2\pi\rho\int_0^{\pi}\cos\theta\sin\theta\,d\theta\int_0^{R(\theta,t)}r^3dr=2\pi\rho\int_0^{\pi}\cos\theta\sin\theta\,d\theta\cdot\frac{r^4}{4}\Big|_0^{R(\theta,t)}=$$

$$=\frac{\pi\rho R_0^4}{2}\int_0^{\pi}(2+4\cos\omega t\cos\theta+\cos^2\omega t\cos^2\theta)\cos\theta\sin\theta\,d\theta=$$

$$=\frac{\pi\rho R_0^4}{2}\cdot4\cos\omega t\left(-\frac{\cos^3\theta}{3}\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{4\pi\rho R_0^4}{3}\cos\omega t$$

$$\Rightarrow\ \ddot{\vec p}=-\omega^2\cdot\frac{4\pi\rho R_0^4}{3}\cos\omega t\,\vec e_z$$

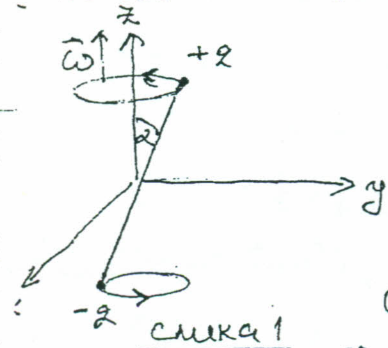
$$|\ddot{\vec p}|^2=\frac{16\pi^2\rho^2R_0^8\omega^4\cos^2\omega t}{9}\ \Rightarrow\ \langle|\ddot{\vec p}|^2\rangle=\frac{8\pi^2\rho^2R_0^8\omega^4}{9}$$

$$\Rightarrow\ \boxed{\left\langle-\frac{dW}{dt}\right\rangle=\frac{4\pi\rho^2R_0^8\omega^4}{27\varepsilon_0c^3}}$$

Таласи - септембар 99

Два тачкаста ~~дипол~~ наелектрисања, q и $-q$, фиксирана су на крајевима штапа дужине $2a$ који ротира константном угаоном брзином ω око осе која пролази кроз његову средину и са правцем штапа заклапа константан угао α. Наћи расподелу интензитета зрачења овог дипола по угловима, усредњену по периоду кретања.

Решење: Вектор положаја $\vec r_+$ позитивног наелектрисања је облика $\vec r_+ = a(\sin\alpha\cos\omega t\,\vec e_x + \sin\alpha\sin\omega t\,\vec e_y + \cos\alpha\,\vec e_z)$ уколико ~~је~~ z-оса поклапа са осом ротације а x и y оса су изабране тако да се за $t=0$ q налази у xOz равни — види слику 1. Тада је $\vec r_- = -\vec r_+$ па је диполни момент система једнак



слика 1

$$\vec p = q\vec r_+ + (-q)\vec r_- = 2q\vec r_+ \quad \text{односно}$$

$$\vec p(t) = 2qa(\sin\alpha\cos\omega t\,\vec e_x + \sin\alpha\sin\omega t\,\vec e_y + \cos\alpha\,\vec e_z).$$

Одавде је

$$\ddot{\vec p}(t') = -2qa\omega^2\sin\alpha(\cos\omega t'\,\vec e_x + \sin\omega t'\,\vec e_y) \quad \text{где је } t' = t - \frac{|\vec r|}{c}$$

У тачки посматрања $\vec r = r(\sin\theta\cos\varphi\,\vec e_x + \sin\theta\sin\varphi\,\vec e_y + \cos\theta\,\vec e_z)$ је

$\vec e_r = \frac{\vec r}{r} = \sin\theta\cos\varphi\,\vec e_x + \sin\theta\sin\varphi\,\vec e_y + \cos\theta\,\vec e_z$ па је

$$\ddot{\vec p}(t')\times\vec e_r = -2qa\omega^2\sin\alpha[\cos\theta\sin\omega t'\,\vec e_x - \cos\theta\cos\omega t'\,\vec e_y + \sin\theta(\sin\varphi\cos\omega t' - \cos\varphi\sin\omega t')\,\vec e_z].$$

На основу тога је:

$(\ddot{\vec p}(t')\times\vec e_r)^2 = 4q^2a^2\omega^4\sin^2\alpha[\cos^2\theta + \sin^2\theta(\sin^2\varphi\cos^2\omega t' - 2\sin\varphi\cos\varphi\sin\omega t'\cos\omega t' + \cos^2\varphi\sin^2\omega t')]$ због чега је, на основу $\langle\sin^2\omega t'\rangle = \langle\cos^2\omega t'\rangle = \frac{1}{2}$ и $\langle\sin\omega t'\cos\omega t'\rangle = 0$,

$$\langle(\ddot{\vec p}(t')\times\vec e_r)^2\rangle = 2q^2a^2\omega^4\sin^2\alpha\,(1+\cos^2\theta).$$

Расподела зрачења по угловима је $I = |\vec E\times\vec H| = \frac{1}{\mu_0}|\vec E\times\vec B|$. За диполно зрачење је $\vec B(t,\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3}\cdot\frac{\ddot{\vec p}(t-\frac{|\vec r|}{c})\times\vec e_r}{r}$, $\vec E(t,\vec r) = c\,\vec B(t,\vec r)\times\vec e_r$ те $\vec E$, $\vec B$ и $\vec e_r$ у свакој тачки $\vec r$ образују (локални) десни триједар и $E = cB$. Због тога је $I = \frac{c}{\mu_0}B^2$ односно $\langle I\rangle = \frac{c}{\mu_0}\langle B^2\rangle$

Како је $B^2 = \frac{(\ddot{\vec p}(t')\times\vec e_r)^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2c^6r^2}$, односно $\langle B^2\rangle = \frac{\langle(\ddot{\vec p}(t')\times\vec e_r)^2\rangle}{16\pi^2\varepsilon_0^2c^6r^2}$ то је

$$\langle I \rangle = \frac{c}{\mu_0} \cdot \frac{2 q^2 a^2 \omega^4 \sin^2 \alpha (1+\cos^2 \theta)}{16 \pi^2 \varepsilon_0^2 c^6 r^2}$$, и конечно:

$$\boxed{\langle I \rangle = \frac{q^2 a^2 \omega^4 \sin^2 \alpha (1+\cos^2 \theta)}{8 \pi^2 \varepsilon_0 c^3 r^2}}$$

ТАЛАСИ И ОПТИКА – ЈУН 2000

1. Електромагнетни талас је суперпозиција два линеарно поларизована равна и монохроматска електромагнетна таласа $\vec{E}_1(\vec{r},t)=\vec{E}_{01}\cos(\omega_1 t-\vec{k}_1\cdot\vec{r})$ и $\vec{E}_2(\vec{r},t)=\vec{E}_{02}\cos(\omega_2 t-\vec{k}_2\cdot\vec{r})$, код којих је $\vec{E}_{01}\cdot\vec{E}_{02}=0$, $E_{01}=E_{02}=A$, $\omega_1<\omega_2$, $\vec{n}=\frac{\vec{k}_1}{k_1}=\frac{\vec{k}_2}{k_2}$ и $|\omega_1-\omega_2|\ll\omega_1+\omega_2$, док $\vec{E}_{01}$, $\vec{E}_{02}$ и $\vec{n}$ образују десни триедар. Наћи израз за електрично поље $\vec{E}(\vec{r},t)$ резултујућег таласа.

Решење: $\vec{E}=\vec{E}_{01}\cos(\omega_1 t-\vec{k}_1\cdot\vec{r})+\vec{E}_{02}\cos(\omega_2 t-\vec{k}_2\cdot\vec{r})$. У комплексној форми имамо:

$$\vec{E}=\vec{E}_{01}e^{i(\omega_1 t-\vec{k}_1\cdot\vec{r})}+\vec{E}_{02}e^{i(\omega_2 t-\vec{k}_2\cdot\vec{r})}$$

Уведимо $\omega_M\equiv\frac{\omega_2-\omega_1}{2}$ – фреквенција модулације и $\omega_s\equiv\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ – средња фреквенција. Узимо, поред тога да се z-оса поклапа са $\vec{n}$. Тада је

$$\vec{E}=\vec{E}_{01}e^{i(\omega_1 t-k_1 z)}+\vec{E}_{02}e^{i(\omega_2 t-k_2 z)}=$$

$$=\vec{E}_{01}e^{i\omega_1(t-\frac{z}{c})}+\vec{E}_{02}e^{i\omega_2(t-\frac{z}{c})}=\left[\vec{E}_{01}e^{-i\omega_M(t-\frac{z}{c})}+\vec{E}_{02}e^{i\omega_M(t-\frac{z}{c})}\right]e^{i\omega_s(t-\frac{z}{c})}$$

$$=\left[\vec{E}_{01}e^{-i(\omega_M t-\vec{k}_M\cdot\vec{r})}+\vec{E}_{02}e^{i(\omega_M t-\vec{k}_M\cdot\vec{r})}\right]e^{i(\omega_s t-\vec{k}_s\cdot\vec{r})}$$

где су $\vec{k}_M\equiv\frac{\omega_M}{c}\vec{n}$ и $\vec{k}_s=\frac{\omega_s}{c}\vec{n}$. У складу са стандардном процедуром треба наћи "нове" реалне векторе $\vec{\mathcal{E}}_1$ и $\vec{\mathcal{E}}_2$ $(\vec{\mathcal{E}}_1\cdot\vec{\mathcal{E}}_2)$ и угао α тако да важи:

$$\vec{E}=(\vec{\mathcal{E}}_1+i\vec{\mathcal{E}}_2)e^{i\alpha}\cdot e^{i(\omega_s t-\vec{k}_s\cdot\vec{r})}$$

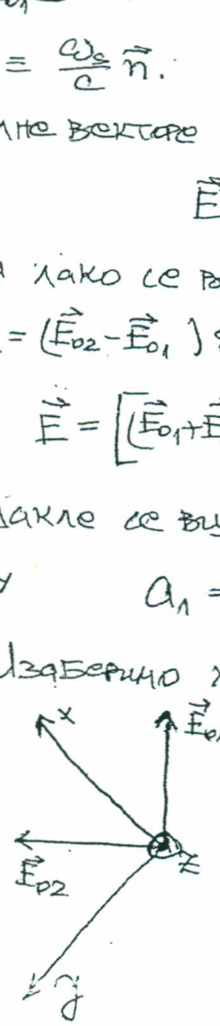
и лако се види да се може узети $\vec{\mathcal{E}}_1=(\vec{E}_{01}+\vec{E}_{02})\cos(\omega_M t-\vec{k}_M\cdot\vec{r})$ и $\vec{\mathcal{E}}_2=(\vec{E}_{02}-\vec{E}_{01})\sin(\omega_M t-\vec{k}_M\cdot\vec{r})$, док је $\alpha=0$ $\Rightarrow$

$$\vec{E}=\left[(\vec{E}_{01}+\vec{E}_{02})\cos(\omega_M t-\vec{k}_M\cdot\vec{r})+i(\vec{E}_{02}-\vec{E}_{01})\sin(\omega_M t-\vec{k}_M\cdot\vec{r})\right]e^{i(\omega_s t-\vec{k}_s\cdot\vec{r})}$$

одакле се види да је талас елиптички поларизован. Осе елипсе су

$$a_1=\sqrt{2}A\,|\cos(\omega_M t-\vec{k}_M\cdot\vec{r})| \quad и \quad a_2=\sqrt{2}A\,|\sin(\omega_M t-\vec{k}_M\cdot\vec{r})|$$

Изаберимо x и y осу као на слици:



Са овим избором имамо:

$$E_y=\left[\sqrt{2}A\cos(\omega_M t-k_M z)\right]\cos(\omega_s t-k_s z)$$

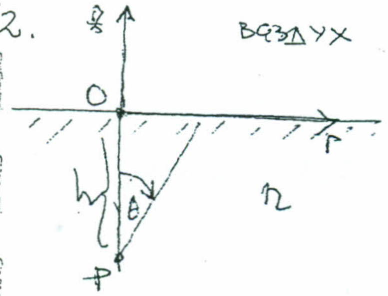
$$E_y=-\left[\sqrt{2}A\sin(\omega_M t-k_M z)\right]\sin(\omega_s t-k_s z).$$

Талас је линеарно поларизован за ($\chi \equiv \omega_n t - k_n z$)
$\chi = 0$ и $\chi = \pi$ дуж - x осе и $\chi = \frac{\pi}{2}$ и $\chi = \frac{3\pi}{2}$ - дуж y осе.
При $\chi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ талас је елиптички поларизован.
(За остале вредности χ, талас је елиптички поларизован)
Поларизација је десна за $0 < \chi < \frac{\pi}{2}$ и $\pi < \chi < \frac{3\pi}{2}$ док је за $\frac{\pi}{2} < \chi < \pi$ и $\frac{3\pi}{2} < \chi < 2\pi$ поларизација лева.

Таласи и оптика – јануар 2001

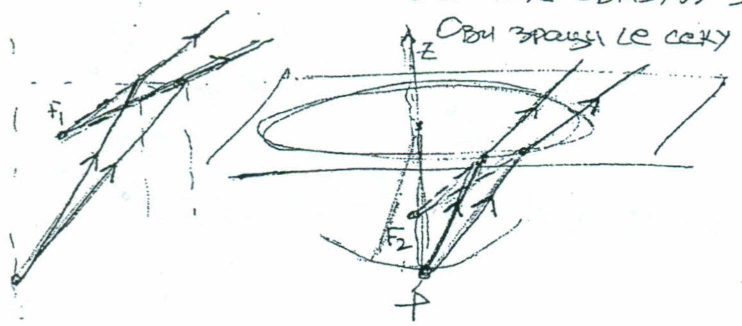
1. Таласни пакет је добијен суперпозицијом монохроматских таласа $\vec{e}E_0\cos(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})$ исте поларизације $\vec{e}$ и правца простирања $\frac{\vec{k}}{k}$ са фреквенцијама у интервалу $[0,\infty)$. Број таласа са фреквенцијама из интервала $(\omega,\omega+d\omega)$ је $dn=\frac{2}{\Delta\sqrt{\pi}}e^{-\left(\frac{\omega}{\Delta}\right)^2}d\omega$ где је $\Delta=\text{const}$. Наћи $\vec{E}(\vec{r},t)$.

2.

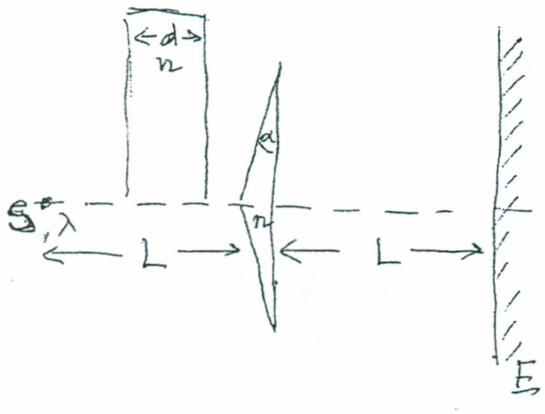


Тачкасти извор P монохроматске светлости се налази на дубини h – види слику – у провидној средини индекса преламања n изнад које је ваздух. Наћи једначини каустичне површи $r=r(\theta)$ и $z=z(\theta)$.

(Упутство: Издвојити светлосни сноп на елементарне снопове које образују зраци унутар просторног угла $d\Omega$. Сви зраци се секу у 2 жиже. Каустична површ је дводелна површ која представља геометријско место тачака ових жижа)



3.



У области у којој долази до интерференције наћи расподелу интензитета светлости на екрану E у уређају са Френеловом бипризмом (индекса преламања n и угла α) и план паралелном плочицом (истог индекса преламања и дебљине d, која је много већа од дебљине бипризме). S је извор монохроматске светлости таласне дужине λ на растојању L од бипризме и $2L$ од екрана.

Таласи и ОПТИКА – Јануар 2001

1. Таласни пакет је добијен суперпозицијом монохроматских таласа $\vec{l}E_0\cos(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})$ исте поларизације $\vec{l}$ и правца простирања $\vec{n}_0=\vec{k}/k$ са фреквенцијама у интервалу $[0,\infty)$. Број таласа са фреквенцијама из интервала $(\omega,\omega+d\omega)$ је $n=\frac{2}{\Delta\sqrt{\pi}}e^{-\left(\frac{\omega}{\Delta}\right)^2}d\omega$, где је $\Delta=const$. Наћи $\vec{E}(\vec{r},t)$.

Решење: $\vec{E}(\vec{r},t)=\int d\vec{E}=\int \vec{l}E_0\cos(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})\,dn=$

$$\int_0^{\infty}\vec{l}E_0\cos(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})\frac{2}{\Delta\sqrt{\pi}}e^{-\left(\frac{\omega}{\Delta}\right)^2}d\omega .$$

Узмимо z-осу дуж $\vec{n}_0$; тада је $\vec{k}\cdot\vec{r}=\omega z/c \Rightarrow$

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\int_0^{\infty}\vec{l}E_0\cos\left[\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)\right]\frac{2}{\Delta\sqrt{\pi}}e^{-\left(\frac{\omega}{\Delta}\right)^2}d\omega=$$

(због парности подинтегралне ф-је) $=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\vec{l}E_0}{\Delta\sqrt{\pi}}e^{-\left(\frac{\omega}{\Delta}\right)^2}\cos\left[\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)\right]d\omega$. С обзиром на

$\cos\alpha=\frac{1}{2}\left(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}\right)\Rightarrow$

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\frac{\vec{l}E_0}{2\Delta\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[e^{-\left(\frac{\omega}{\Delta}\right)^2+i\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)}+e^{-\left(\frac{\omega}{\Delta}\right)^2-i\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)}\right]d\omega .$$

Како је

$$-\left(\frac{\omega}{\Delta}\right)^2\pm i\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)=\ldots=-\frac{\left(t-\frac{z}{c}\right)^2\Delta^2}{4}-\frac{\left[\omega\mp i\left(t-\frac{z}{c}\right)\frac{\Delta^2}{2}\right]^2}{\Delta^2}$$

$$\Rightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(\frac{\omega}{\Delta}\right)^2\pm i\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)}d\omega=e^{-\frac{\left(t-\frac{z}{c}\right)^2\Delta^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\left[\omega\mp i\left(t-\frac{z}{c}\right)\frac{\Delta^2}{2}\right]^2}{\Delta^2}}d\omega=$$

$$=\Delta\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{\left(t-\frac{z}{c}\right)^2\Delta^2}{4}}\quad\left(\text{зато што је }\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha x^2}dx=\sqrt{\pi/\alpha}\right).$$

Коначно је:

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{l}E_0e^{-\frac{\left(t-\frac{\vec{k}\cdot\vec{r}}{c}\right)^2\Delta^2}{4}}}$$