

# Numerical Analysis

**Instructor:** Zuoqiang Shi

**Notes Taker:** Zejin Lin

TSINGHUA UNIVERSITY.

linzj23@mails.tsinghua.edu.cn

[lzjmaths.github.io](https://lzjmaths.github.io)

2025 年 2 月 18 日

## 目录

# 1 函数逼近

**Theorem 1.1** (Weierstrass).  $f(x) \in C([a, b])$ , 则对于  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在一个  $n$  次多项式  $P_n(x)$  使得  $\|f(x) - P_n(x)\|_\infty < \varepsilon$ .

证明. 令

$$B_n^f(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \quad (1.1)$$

不妨设  $f(x) \in C([0, 1])$ 。注意到

$$\sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1$$

$$\sum_{k=0}^n (nx - k)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x)$$

由于  $f$  在  $[0, 1]$  上一致连续, 容易验证成立。 □

**Theorem 1.2** (Weierstrass 第二定理). 设  $f \in C_{2\pi}$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在三角多项式  $T(x)$  使得  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$|T(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in [0, 2\pi]$$

**Lemma 1.3.** 设  $f \in C[0, \pi]$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在偶的三角多项式  $T(x)$  使得  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$|T(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in [0, \pi]$$

证明. 考虑  $f(\arccos x) \in C[-1, 1]$ , 则由 Theorem ?? 即得。 □

因此由 Theorem ?? 和引理很容易得到 Theorem ?? 是正确的。

第二定理推第一定理: 设  $f(x) \in C([-\pi, \pi])$ , 令

$$g(x) = f(x) + \frac{f(-\pi) - f(\pi)}{2\pi} x, x \in [-\pi, \pi]$$

可延拓至  $\mathbb{R}$  上的周期函数。

设  $X$  为紧距离空间,  $A \subset C(X)$ 。称  $A$  分离  $X$  中的点, 如果  $\forall x, y \in X, x \neq y$ , 存在  $f \in A$  使得

$$f(x) \neq f(y)$$

**Theorem 1.4** (Stone). 设  $X$  是紧距离空间,  $A$  是  $C(X)$  的子代数。若  $1 \in A$ , 且  $A$  分离  $X$  中的点, 则  $A$  在  $C(X)$  中稠密

设  $p \in \mathbb{P}_n = \{\text{小于等于 } n \text{ 次多项式全体}\}$ 。令

$$\Delta(p) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - p(x)|$$

$$E_n = \inf_{p \in \mathbb{P}_n} \Delta(p)$$

**Theorem 1.5** (Borel). 对于  $\forall f(x) \in C[a, b]$ , 存在  $p^* \in \mathbb{P}_n$  使得

$$\Delta(p^*) = E_n$$

记  $\varepsilon(x) = p(x) - f(x)$ , 若

$$|\varepsilon(x_0)| = \Delta(p)$$

则称  $x_0$  为偏离点。

若  $\varepsilon(x_0) > 0$ , 则称为正偏离点, 反之为负偏离点。

**Lemma 1.6.** 若  $p(x)$  为  $f(x)$  的最佳逼近多项式, 则正负偏离点必都存在

只需作一定的微调。

**Theorem 1.7** (Vallée-Poussin). 设  $p(x) \in \mathbb{P}_n$ ,  $\varepsilon(x)$  在  $x_1 < x_2 < \cdots < x_N$  上取值为非零的正负相间值  $\lambda_1, -\lambda_2, \cdots, (-1)^{N-1}\lambda_N$ ,  $\lambda_j > 0$ ,  $j = 1, \cdots, N$  且  $N \geq n+2$ 。则  $\forall Q(x) \in \mathbb{P}_n$

$$\Delta(Q) \geq \min_{1 \leq i \leq N} \lambda_i$$

证明考虑  $P(x) - Q(x)$  的正负性和零点的关系。

**Theorem 1.8** (Chebyshev). 对于任意  $f(x) \in C[a, b]$ ,  $\mathbb{P}_n$  中的最佳逼近多项式存在且唯一, 且  $p(x)$  为最佳逼近多项式当且仅当存在  $a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_N \leq b$ ,  $N \geq n+2$  使得

$$|\varepsilon(x_j)| = \Delta(p), \varepsilon(x_j) = (-1)^{j-1}\varepsilon(x_1), j = 1, \cdots, N$$

**Definition 1.9** (连续模). 设  $f(x)$  定义于  $[a, b]$  上, 则

$$\omega(t) = \omega(t, f) = \sup_{|x-y| \leq t} |f(x) - f(y)|$$

称为  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的连续模

**Proposition 1.10.**

1. 若  $f(x) \in C[a, b]$ , 则  $\omega(t)$  是  $t$  的连续非减函数且  $\lim_{t \rightarrow 0} \omega(t) = 0$ .
2. (半可加性)  $\forall t_1, t_2 \geq 0$ ,  $\omega(t_1 + t_2) \leq \omega(t_1) + \omega(t_2)$ 。
3. 若  $\omega(t) = o(t)$ ,  $t \rightarrow 0$ , 则  $f(x) \equiv \text{constant}$ .

**Definition 1.11.** 若  $\omega(t, f) \leq Mt^\alpha$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ , 则称  $f(x)$  在  $[a, b]$  上满足  $\alpha$  阶 Lipschitz 条件, 记作  $f(x) \in \text{Lip}\alpha$

**Theorem 1.12** (Jackson). 设  $f(x) \in C_{2\pi}$ , 则

$$E_n(f) \leq 12\omega\left(\frac{1}{n}, f\right)$$

证明. 证明考虑  $\Phi_n(t) = \frac{1}{A_n} \left( \frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^4$ , 其在弱的意义下逼近  $\Delta$  函数 □

**Corollary 1.13.**  $f \in C_{2\pi}$  且  $f' \in C_{2\pi}$ , 则

$$E_n(f) \leq \frac{12}{n} \|f'\|_\infty$$

# 索引

偏离点, [3](#)

分离, [3](#)

连续模, [4](#)

# List of Theorems

1.1	Theorem (Weierstrass)	2
1.2	Theorem (Weierstrass 第二定理)	2
1.4	Theorem (Stone)	3
1.5	Theorem (Borel)	3
1.7	Theorem (Vallée-Poussin)	4
1.8	Theorem (Chebyshev)	4
1.10	Proposition	4
1.12	Theorem (Jackson)	4