# Numerical Analysis

**Instructor:** Zuoqiang Shi

**Notes Taker:** Zejin Lin

Tsinghua University.

linzj23@mails.tsinghua.edu.cn

lzjmaths.github.io

2025 年 2 月 25 日

# 目录

# 1 函数逼近

**Theorem 1.1** (Weierstrass)**.** *$f(x) \in C([a,b])$，则对于 $\forall\varepsilon > 0$，存在一个 $n$ 次多项式 $P_n(x)$ 使得 $\|f(x) - P_n(x)\|_\infty < \varepsilon$.*

*证明.* 令

$$B_n^f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \tag{1.1}$$

不妨设 $f(x) \in C([0,1])$。注意到

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1$$

$$\sum_{k=0}^{n} (nx-k)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x)$$

由于 $f$ 在 $[0,1]$ 上一致连续，容易验证成立。 □

**Theorem 1.2** (Weierstrass 第二定理)**.** *设 $f \in C_{2\pi}$，$\forall\varepsilon > 0$，存在三角多项式 $T(x)$ 使得 $\forall x \in \mathbb{R}$*

$$|T(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in [0, 2\pi]$$

**Lemma 1.3.** *设 $f \in C[0,\pi]$，$\forall\varepsilon > 0$，存在偶的三角多项式 $T(x)$ 使得 $\forall x \in \mathbb{R}$*

$$|T(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in [0, \pi]$$

*证明.* 考虑 $f(\arccos x) \in C[-1,1]$，则由 Theorem **??** 即得。 □

因此由 Theorem **??**和引理很容易得到 Theorem **??**是正确的。

第二定理推第一定理：设 $f(x) \in C([-\pi,\pi])$，令

$$g(x) = f(x) + \frac{f(-\pi) - f(\pi)}{2\pi} x, \; x \in [-\pi, \pi]$$

可延拓至 $\mathbb{R}$ 上的周期函数。

设 $X$ 为紧距离空间，$A \subset C(X)$。称 $A$ **分离** $X$ 中的点，如果 $\forall x, y \in X$，$x \neq y$，存在 $f \in A$ 使得

$$f(x) \neq f(y)$$

**Theorem 1.4** (Stone). *设 $X$ 是紧距离空间，$A$ 是 $C(X)$ 的子代数。若 $1 \in A$，且 $A$ 分离 $X$ 中的点，则 $A$ 在 $C(X)$ 中稠密*

设 $p \in \mathbb{P}_n = \{$小于等于 $n$ 次多项式全体$\}$。令

$$\Delta(p) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - p(x)|$$

$$E_n = \inf_{p \in \mathbb{P}_n} \Delta(p)$$

**Theorem 1.5** (Borel). *对于 $\forall f(x) \in C[a,b]$，存在 $p^* \in \mathbb{P}_n$ 使得*

$$\Delta(p^*) = E_n$$

记 $\varepsilon(x) = p(x) - f(x)$，若

$$|\varepsilon(x_0)| = \Delta(p)$$

则称 $x_0$ 为**偏离点**。

若 $\varepsilon(x_0) > 0$，则称为正偏离点，反之为负偏离点。

**Lemma 1.6.** *若 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的最佳逼近多项式，则正负偏离点必都存在*

只需作一定的微调。

**Theorem 1.7** (Vallée-Poussin)**.** *设 $p(x) \in \mathbb{P}_n$，$\varepsilon(x)$ 在 $x_1 < x_2 < \cdots < x_N$ 上取值为非零的正负相间值 $\lambda_1, -\lambda_2, \cdots, (-1)^{N-1}\lambda_N$，$\lambda_j > 0$，$j = 1, \cdots, N$ 且 $N \geqslant n+2$。则 $\forall\ Q(x) \in \mathbb{P}_n$*

$$\Delta(Q) \geqslant \min_{1\leqslant i\leqslant N} \lambda_i$$

证明考虑 $P(x) - Q(x)$ 的正负性和零点的关系.

**Theorem 1.8** (Chebyshev)**.** *对于任意 $f(x) \in C[a,b]$，$\mathbb{P}_n$ 中的最佳逼近多项式存在且唯一，且 $p(x)$ 为最佳逼近多项式当且仅当存在 $a \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_N \leqslant b$，$N \geqslant n+2$ 使得*

$$|\varepsilon(x_j)| = \Delta(p), \varepsilon(x_j) = (-1)^{j-1}\varepsilon(x_1), j = 1, \cdots, N$$

**Definition 1.9** (连续模)**.** 设 $f(x)$ 定义于 $[a,b]$ 上，则

$$\omega(t) = \omega(t, f) = \sup_{|x-y|\leqslant t} |f(x) - f(y)|$$

称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**连续模**

**Proposition 1.10.**

*1. 若 $f(x) \in C[a,b]$，则 $\omega(t)$ 是 $t$ 的连续非减函数且 $\lim\limits_{t\to 0} \omega(t) = 0$.*

*2. （半可加性）$\forall t_1, t_2 \geqslant 0$，$\omega(t_1 + t_2) \leqslant \omega(t_1) + \omega(t_2)$。*

*3. 若 $\omega(t) = o(t)$，$t \to 0$，则 $f(x) \equiv constant$.*

**Definition 1.11.** 若 $\omega(t, f) \leqslant Mt^\alpha$，$0 < \alpha \leqslant 1$，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 $\alpha$ 阶 Lipschitz 条件，记作 $f(x) \in \mathrm{Lip}\alpha$

**Theorem 1.12** (Jackson)**.** 设 $f(x) \in C_{2\pi}$，则

$$E_n(f) \leqslant 12\omega(\frac{1}{n}, f)$$

证明. 证明考虑 $\Phi_n(t) = \frac{1}{A_n}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^4$，其在弱的意义下逼近 $\Delta$ 函数 $\square$

**Corollary 1.13.** $f \in C_{2\pi}$ 且 $f' \in C_{2\pi}$，则

$$E_n(f) \leqslant \frac{12}{n}\|f'\|_\infty$$

**Definition 1.14.**

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{\infty} f(\frac{k}{n})\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

is called **Berstein polynomial** of $f$.

**Theorem 1.15.** 若 $f(x) \in C[0,1]$，则

$$|B_n(f) - f| \leqslant \omega(\frac{1}{\sqrt{n}})$$

**Corollary 1.16.** $f \in \mathrm{Lip}\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$，则

$$|B_n(f) - f| \leqslant \frac{3M}{2n^{\frac{\alpha}{2}}}$$

另一方面，令 $f(x) = x^2$，则有

$$B_n(f) = x^2 + \frac{1}{n}x(1-x)$$

该例子表明 $b_n(f)$ 的逼近阶不能高于 $\frac{1}{n}$

## 1.1 Lagrange 插值

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i} \frac{(x - x_j)}{x_i - x_j}$$

则有 $l_i(x) \in P_n$ 且

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 1, & j = i \\ \\ 0, & j \neq i \end{cases}$$

让

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x)$$

## 1.2 均差与 Newton 插值多项式

定义 $j$ 阶均差为

$$f[x_k, x_{k+1}, \cdots, x_{k+j}] = \frac{f[x_{k+1}, \cdots, x_{k+j}] - f[x_k, \cdots, x_{k+j-1}]}{x_{k+j} - x_k}$$

# 索引

# List of Theorems