Tsinghua University

Numerical Analysis

Fall 2024

Homework 1

Lin Zejin 2025 年 4 月 15 日

- **Collaborators:** I finish this homework by myself.

Problem 2 (1) 由 (1) 得，在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上

$$s(x) = A_i(x - x_i)(x - x_{i+1}) + f(b)\frac{x-a}{b-a} + f(a)\frac{x-b}{a-b}$$

其中

$$A_i = s'(x_i) - \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}}$$

(2) 在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上，令 $s_i(x) = A_i'(x - x_i)(x - x_{i+1}) + f(b)\frac{x-a}{b-a} + f(a)\frac{x-b}{a-b}$，其中 $A_i' = f'(x_i) - \frac{f(x_i)-f(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}}$。则 $s_i(x_i) = f(x_i), s_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}), s_i'(x_i) = f'(x_i)$.

$$\|f(x) - s(x)\| \le \|f(x) - s_i(x)\| + \|s_i(x) - s(x)\| \le o(h^3) + \|s_i(x) - s(x)$$

$o(f^{(3)}h^3)$ 为第一题的估计，但是记不清了，$h = \frac{1}{n}$

而

$$\|s_i(x) - s(x)\| = \|(A_i - A_i')(x - x_i)(x - x_{i+1})\| \le |f'(x_i) - s'(x_i)| \cdot \frac{h^2}{4}$$

只需估计 $|f'(x_i) - s'(x_i)|$。

由 $s^+(x_{i+1}) = s^-(x_{i+1})$ 可得，

$$m_i + m_{i+1} = 2\delta_i$$

其中 $\delta_i = \frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}, m_i = s'(x_i), m_{i+1} = s'(x_{i+1})$.

令 $r_i = m_i - f'(x_i)$，则

$$r_i + r_{i+1} = 2\delta_i - f'(x_i) - f'(x_{i+1})$$

而

$$\begin{aligned}
2\delta_i - f'(x_i) - f'(x_{i+1}) &= 2\frac{hf'(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f''(t)(x_{i+1} - t)\,\mathrm{d}t}{h} - 2f'(x_i) - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f''(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x_i - t}{h} f''(x_i)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

故 $|2\delta_i - f'(x_i) - f'(x_{i+1})| \le \frac{h}{2} \cdot \|f''\|$.

由 $|r_{i+1}| \ge |r_i| + |2\delta_i - f'(x_i) - f'(x_{i+1})| \le \frac{h}{2} \cdot \|f''\|$ 可得

$$|r_i| \ge n\frac{h}{2} \cdot \|f''\| = \frac{1}{2}\|f''\|$$

于是

$$\|f - s\| \le o(\|f^{(3)}\|h^3) + \frac{h^2}{8}\|f''\|$$

Problem 3 (1)

$$\left|\binom{\frac{1}{2}}{k}\right| = \left|\binom{\frac{1}{2}}{k-1}\right| \cdot \left|\frac{\frac{1}{2}-k+1}{k}\right| < \left|\binom{\frac{1}{2}}{k-1}\right|$$

因为 $(x^2-1)^n$ 一致有界且单调，而

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}$$

对上述等式用莱布尼茨判别法知收敛（$\binom{\frac{1}{2}}{k}$ 正负性交错）。于是由 Abel 判别法，级数在 $[-1,1]$ 上一致收敛.
同时由泰勒展开,

$$\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}x^k, |x|<1$$

则等式在 $[-1,1]\setminus\{0\}$ 上成立。由连续性知等式在整个 $[-1,1]$ 是
(2) 考虑 $[a,b]$ 上剖分 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$, $x_i = a+\frac{i(b-a)}{n}$. 则对于 $[a,b]$ 上的连续函数 f, 以 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为点构造 f 上的折线 s_n, $s_n(x_i)=f(x_i)$, 则

$$|f(x)-s_n(x)| \le \omega(f,\frac{1}{n})$$

故 s_n 收敛到 f。
又对每一条折线，其可以写为

$$s_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i|x-x_i|$$

满足线性方程 $s_n(x_i)=f(x_i)$. 每一个 $|x-x_i|$ 由（1）知道可以被多项式函数逼近，故 s_n 可以被多项式函数逼近。进而 f 可以被多项式函数逼近。

Problem 5 e^x 的 Taylor 展开式为

$$e^x = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}x^j$$

若 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 是 Pade 逼近，则

$$p_0 = 1$$

$$q_1+1-p_1=0$$

$$q_2+q_1+\frac{1}{2}q_0-p_2=0$$

$$q_2+\frac{1}{2}q_1+\frac{1}{6}q_0=0$$

$$\frac{1}{2}q_2+\frac{1}{6}q_1+\frac{1}{24}q_0=0$$

不妨 $q_2=1$, 解得

$$q_1=-6, q_0=12, p_2=1, p_1=-5$$

故 Pade 逼近为

$$\frac{x^2-5x+1}{x^2-6x+12}$$