Numerical Analysis

Instructor: Zuoqiang Shi

Notes Taker: Zejin Lin

Tsinghua University.

linzj23@mails.tsinghua.edu.cn

lzjmaths.github.io

2025 年 3 月 4 日

目录

1 函数逼近

Theorem 1.1 (Weierstrass)**.** *$f(x) \in C([a,b])$，则对于 $\forall \varepsilon > 0$，存在一个 n 次多项式 $P_n(x)$ 使得 $\|f(x) - P_n(x)\|_\infty < \varepsilon$.*

证明. 令

$$B_n^f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \tag{1.1}$$

不妨设 $f(x) \in C([0,1])$。注意到

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1$$

$$\sum_{k=0}^{n} (nx-k)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x)$$

由于 f 在 $[0,1]$ 上一致连续，容易验证成立。 □

Theorem 1.2 (Weierstrass 第二定理)**.** *设 $f \in C_{2\pi}$，$\forall \varepsilon > 0$，存在三角多项式 $T(x)$ 使得 $\forall x \in \mathbb{R}$*

$$|T(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in [0, 2\pi]$$

Lemma 1.3. *设 $f \in C[0,\pi]$，$\forall \varepsilon > 0$，存在偶的三角多项式 $T(x)$ 使得 $\forall x \in \mathbb{R}$*

$$|T(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in [0, \pi]$$

证明. 考虑 $f(\arccos x) \in C[-1,1]$，则由 Theorem **??** 即得。 □

因此由 Theorem **??**和引理很容易得到 Theorem **??**是正确的。

第二定理推第一定理：设 $f(x) \in C([-\pi,\pi])$，令

$$g(x) = f(x) + \frac{f(-\pi) - f(\pi)}{2\pi} x, \; x \in [-\pi, \pi]$$

可延拓至 $\mathbb{R}$ 上的周期函数。

设 X 为紧距离空间，$A \subset C(X)$。称 A **分离** X 中的点，如果 $\forall x, y \in X$，$x \neq y$，存在 $f \in A$ 使得

$$f(x) \neq f(y)$$

Theorem 1.4 (Stone). *设 X 是紧距离空间，A 是 $C(X)$ 的子代数。若 $1 \in A$，且 A 分离 X 中的点，则 A 在 $C(X)$ 中稠密*

设 $p \in \mathbb{P}_n = \{$小于等于 n 次多项式全体$\}$。令

$$\Delta(p) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - p(x)|$$

$$E_n = \inf_{p \in \mathbb{P}_n} \Delta(p)$$

Theorem 1.5 (Borel). *对于 $\forall f(x) \in C[a,b]$，存在 $p^* \in \mathbb{P}_n$ 使得*

$$\Delta(p^*) = E_n$$

记 $\varepsilon(x) = p(x) - f(x)$，若

$$|\varepsilon(x_0)| = \Delta(p)$$

则称 x_0 为**偏离点**。

若 $\varepsilon(x_0) > 0$，则称为正偏离点，反之为负偏离点。

Lemma 1.6. *若 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的最佳逼近多项式，则正负偏离点必都存在*

只需作一定的微调。

Theorem 1.7 (Vallée-Poussin)**.** *设 $p(x) \in \mathbb{P}_n$，$\varepsilon(x)$ 在 $x_1 < x_2 < \cdots < x_N$ 上取值为非零的正负相间值 $\lambda_1, -\lambda_2, \cdots, (-1)^{N-1}\lambda_N$，$\lambda_j > 0$，$j = 1, \cdots, N$ 且 $N \geqslant n+2$。则 $\forall\ Q(x) \in \mathbb{P}_n$*

$$\Delta(Q) \geqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant N} \lambda_i$$

证明考虑 $P(x) - Q(x)$ 的正负性和零点的关系.

Theorem 1.8 (Chebyshev)**.** *对于任意 $f(x) \in C[a,b]$，$\mathbb{P}_n$ 中的最佳逼近多项式存在且唯一，且 $p(x)$ 为最佳逼近多项式当且仅当存在 $a \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_N \leqslant b$，$N \geqslant n+2$ 使得*

$$|\varepsilon(x_j)| = \Delta(p),\ \varepsilon(x_j) = (-1)^{j-1}\varepsilon(x_1),\ j = 1, \cdots, N$$

Definition 1.9 (连续模)**.** 设 $f(x)$ 定义于 $[a,b]$ 上，则

$$\omega(t) = \omega(t,f) = \sup_{|x-y| \leqslant t} |f(x) - f(y)|$$

称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**连续模**

Proposition 1.10.

1. *若 $f(x) \in C[a,b]$，则 $\omega(t)$ 是 t 的连续非减函数且 $\lim\limits_{t \to 0} \omega(t) = 0$.*
2. *（半可加性）$\forall t_1, t_2 \geqslant 0$，$\omega(t_1 + t_2) \leqslant \omega(t_1) + \omega(t_2)$。*
3. *若 $\omega(t) = o(t)$，$t \to 0$，则 $f(x) \equiv constant$.*

Definition 1.11. 若 $\omega(t,f) \leqslant Mt^{\alpha}$，$0 < \alpha \leqslant 1$，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 α 阶 Lipschitz 条件，记作 $f(x) \in \mathrm{Lip}\alpha$

Theorem 1.12 (Jackson)**.** 设 $f(x) \in C_{2\pi}$，则

$$E_n(f) \leqslant 12\omega(\frac{1}{n}, f)$$

证明. 证明考虑 $\Phi_n(t) = \frac{1}{A_n}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^4$，其在弱的意义下逼近 Δ 函数 □

Corollary 1.13. $f \in C_{2\pi}$ 且 $f' \in C_{2\pi}$，则

$$E_n(f) \leqslant \frac{12}{n}\|f'\|_\infty$$

Definition 1.14.

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{\infty} f(\frac{k}{n})\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

is called **Berstein polynomial** of f.

Theorem 1.15. 若 $f(x) \in C[0,1]$，则

$$|B_n(f) - f| \leqslant \omega(\frac{1}{\sqrt{n}})$$

Corollary 1.16. $f \in \mathrm{Lip}\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$，则

$$|B_n(f) - f| \leqslant \frac{3M}{2n^{\frac{\alpha}{2}}}$$

另一方面，令 $f(x) = x^2$，则有

$$B_n(f) = x^2 + \frac{1}{n}x(1-x)$$

该例子表明 $b_n(f)$ 的逼近阶不能高于 $\frac{1}{n}$

1.1 Lagrange 插值

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i} \frac{(x - x_j)}{x_i - x_j}$$

则有 $l_i(x) \in P_n$ 且

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}$$

让

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x)$$

Theorem 1.17. $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 为 $[a, b]$ 上不同的节点，$f \in C^{n+1}[a, b]$，L_n 为 n 次 *Lagrange* 插值多项式，则 $\forall x \in [a, b], \exists \zeta = \zeta(x) \in [a, b]$ 使得

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x)$$

1.2 均差与 Newton 插值多项式

定义 j 阶均差为

$$f[x_k, x_{k+1}, \cdots, x_{k+j}] = \frac{f[x_{k+1}, \cdots, x_{k+j}] - f[x_k, \cdots, x_{k+j-1}]}{x_{k+j} - x_k}$$

1.3 Hermite 插值

$x_0, x_1, \cdots, x_n \in [a, b]$ 互异，求 $2n+1$ 次多项式 H_{2n+1} 使得

$$H_{2n+1}(x_j) = f(x_k),\ H'_{2n+1}(X_j) = f'(x_j),\ j = 0, 1, \cdots, n$$

构造 $\alpha_j, \beta_j \in P_{2n+1}$, $j = 0, 1, \cdots, n$ 分别满足

$$
\begin{aligned}
\alpha_j(x_k) &= \delta_{jk} & \alpha_j'(x_k) &= 0 \\
\beta_j(x_k) &= 0 & \beta_j'(x_k) &= \delta_{jk}
\end{aligned}
$$

则

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_k)\alpha_j(x) + f'(x_k)\beta_j(x)$$

Theorem 1.18. $f \in C^{2n+2}[a,b]$, $x_0, x_1, \cdots, x_n \in [a,b]$ 互异，H_{2n+1} 为 $2n+1$ 次 *Hermite* 插值多项式，则 $\forall x \in [a,b]$，存在 $\zeta = \zeta(x) \in [a,b]$ 使得

$$R_{2n+1}(x) = f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\zeta)}{(2n+2)!}\omega_{n+1}^2(x)$$

Theorem 1.19 (Kharshiladze-Lozinski)**.** $\forall n \in \mathbb{N}$

Theorem 1.20. X, Y 为 *Banach* 空间，$\{L_\alpha\}$ 为 $X \to Y$ 的一族有界线性算子。若 $\forall f \in X$, $\sup_\alpha \|L_\alpha f\| < \infty$, 则 $\sup_\alpha \|L_\alpha\| < \infty$

索引

List of Theorems