Álgebra booleana

Semana 02 - Clase 007

Introducción

El álgebra booleana nace de las propiedades de las proposiciones lógicas, el álgebra booleana se utiliza principalmente en compuertas lógicas y circuitos interruptores.

Definición

Un álgebra booleana tiene la forma $B = (S, +, \cdot, ', 0, 1)$, y consiste en un conjunto S que contiene elementos distintos, donde obligatoriamente está incluido el $0, 1$, que representan el bottom y top respectivamente. Los símbolos $+$ y $\cdot$ son operadores binarios en S . Mientras que $'$ es un operador unitario y representa el complemento de un $a \in S$.

PROPIEDADES	Conmutativa	x+y = y+x	x·y = y·x
	Elemento neutro	0+x = x	1·x = x
	Distributiva	x·(y+z) =(x·y)+(y·z)	x+(y·z) = (x+y)(x+z)
	Asociativa	x·(y·z) = (x·y)·z	x+(y+z) = (x+y)+z
	Complementario	$x + \overline{x} = 1$	$x \cdot \overline{x} = 0$

> Considerar que la mínima retícula S ("la más simple"), que cumple ser un álgebra de bool consta de dos elementos, de tal forma que $S = \{0, 1\}$, por lo que $B = \{S, +, \cdot, ', 0, 1\}$. De este modo $0' = 1, 1' = 0$.

Como ejemplo, $(P(S), \cup, \cap, ', \emptyset . S)$, es un álgebra booleana, pues podemos comprobar que cumple con todas las leyes (4 condiciones).

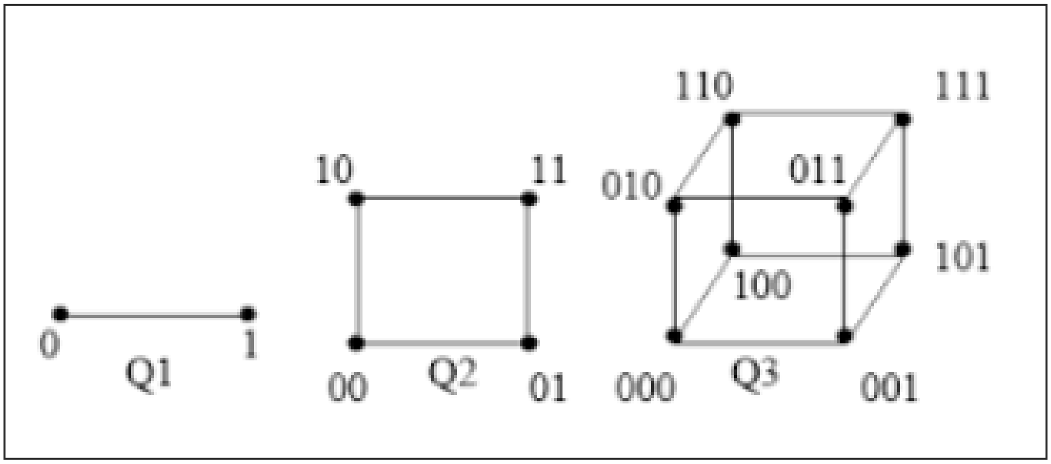
Propiedades

Existen dos propiedades principales, que utilizan los complementos, de tal forma que $(a + b)' = a' \cdot b'$. Mientras que su dual es $(a \cdot b)' = a' + b'$. Si nos damos cuenta, lo que cambia es el signo. Mientras que la bonus es $(a + b + c)' = a' \cdot b' \cdot c'$.

Para que sea considerada como álgebra booleana, una retícula debe ser acotada, distribuida y complementada. (Forma alternativa de definirla).

Retícula cubo n-dimensional

Si el diagrama de hasse de la retícula correspondiente a un conjunto con n elementos es etiquetado mediante sucesiones de ceros y unos de longitud n, entonces la retícula resultante se denota como B_n.



Para considerarse un álgebra de bool, su diagrama de hasse tiene que ser isomorfo al cubo n-dimensional. Además la cantidad de puntos tienen que ser una potencia de dos, tal que $|B_n| = 2^n, (P(S), \subseteq)$.

> Nota. Si una retícula finita L, no contiene 2^n elementos, para algún entero, no negativo n, se sabe que L, no puede ser un álgebra booleana.