CPO

Semana 01 - Clase 001

Relaciones

Una relación binaria (dos elementos) R, de un conjunto A a un conjunto B, es un subconjunto del producto cartesiano AxB. El producto cartesiano es un conjunto de todos los posibles pares ordenados, tal que $AxB = \{x \in a, y \in B\}$, donde se cumple que $(x, y) \neq (y, x)$.

Propiedades

Reflexividad

Si $(a, a) \in R$, para todo $a \in A$, entonces diremos que es reflexiva. De esta forma, si existe el elemento $1 \in A$, pero no existe $(1, 1)$, basta que suceda eso para decir que no es reflexiva (tienen que estar todos los elementos del conjunto A).

Simetría

Si para todo $a, b \in A$, decimos que si existe el par $(a, b) \in R$, entonces $(b, a) \in R$ debe pertenecer a la relación obligatoriamente, es decir si $(1, 3) \in R$, entonces $(3, 1) \in R$ (debe cumplirse para todos).

Antisimetría

Si para toda $a, b \in A$, si $(a, b) \in R$, entonces $(a, b) \in R$ y $a \neq b$, entonces $(b, a) \notin R$ no debe pertenecer a la relación (lo contrario a la simetría).

Transitividad

Si para todo $a, b, c \in A$, si $(a, b) \in R$, y $(b, c) \in R$, entonces por transitividad el par $(a, c) \in R$ debe existir en la relación.

Orden parcial

Una relación R en un conjunto X, se llama orden parcial si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Se denota como (A, R), donde A es el conjunto, se puede asociar con las siglas RAT (Reflexiva, Antisimétria y Transitiva) 🐀.

> Un CPO, un conjunto parcialmente ordenado es aquel conjunto (relación de pares ordenados) que cumple con las propiedades RAT. Por ejemplo $R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (c, c)\}$,

> con un conjunto $A = \{a, b, c\}$, es un CPO.

Divisibilidad

La relación de divisibilidad denotada como "|", es un orden parcial para el conjunto de enteros positivos $\mathbb{Z}^+$ (pues no cuenta con el cero). De tal forma para la expresión $m|n$, significa: m es divisor de n, m divide a n, n es múltiplo de m, y la podemos expresar como $\exists q \in \mathbb{Z}$, tal que $m \cdot q = n$.

> Será un orden parcial pues, a siempre se divide a si mismo (reflexividad), $(a, a) \in R$, siempre que $a \in \mathbb{Z}^+$. Será simétrica, pues si $a|b$ y se cumple $b|a$, entonces $b = a$. Por último si $a|b$ y $b|c$, entonces $b = a \cdot k$, y $c = b \cdot l$, entonces $c = a(k \cdot l) \equiv a(k \cdot l) = c$, por lo que $a|c$.