Retículas / Látices

Semana 02 - Clase 05

Definición

Una retícula es un conjunto parcialmente ordenado (CPO), tal que cada subconjunto $\{a, b\}$ de dos elementos tiene una mínima cota superior (MCS) y máxima cota inferior (MCI).

- El MCS({a,b}) se denota como ($a \vee b$). Esta notación es denominada *unión/disyunción* de a y b.
- El MCI({a,b}) se denota como ($a \wedge b$). Esta notación es denominada *conjución/intersección* de a y b.

Es por ello que las reticulas son estructuras algebráicas que constan de dos operaciones binarias (unión y conjunción). Además podemos recalcar que un CPO linealmente ordenado es una retícula pues, cada elemento tiene un MCS y MCI ($\forall a, b \in S$).

> Recuerda que para considerarse retícula, todos los elementos deben ser comparables. Por eso si queremos verificar que sea una retícula, tenemos que comprobar para elementos no comparables. Además $A \vee B = A \cup B$.

Por otro lado, en caso que tengamos una retícula de la forma $(\mathbb{Z}^+, |)$ diremos que ella siempre será una retícula, recalcar que deben ser los enteros positivos.

Subretícula

Sea $(L, \leq)$ una retícula, un subconjunto no vacío S de L es una subretícula de L si $a \vee b \in S$ y además $a \wedge b \in S$ siempre que $a \in S$ y $b \in S$. Por ejemplo $X = \{1, 2, 4\}$ es subretícula de D_{12} , mientras que $Y = \{1, 2, 4, 6\}$ no, pues $4 \vee 6 = 12 \notin Y$.

> Para considerar subretícula los MCI, MCS deben de encontrarse dentro del conjunto de la subretícula, en caso no se encuentre no se considera, tal como es el caso mencionado en Y .

Isomorfismo

Sean L_1 y L_2 dos CPO, un isomorfismo es una función f tal que cumple ser biyectiva. De esta forma, concluimos que $a \leq_1 b, \iff f(a) \leq_2 f(b)$, siendo a, b elementos de L_1 .

$$f : L_1 \longrightarrow L_2$$

$$(L_1, \leq)(L_2, \leq)$$

> Se cumple también $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$. Mientras que $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$.

Complemento

Sea una retícula *acotada* con elemento máximo 1 y elemento mínimo 0, y sea $a \in L$. Un elemento $a' \in L$ es un complemento de a si y sólo si $a \wedge a' = 0$ y $a \vee a' = 1$.

> Recordar que el único complemento de $0' = 1$ y además $1' = 0$. Mientras que $\wedge = +, \vee = \cdot$. De esta forma decimos que el complemento es único si existe.

De igual forma, si L es una retícula acotada, si algún elemento tiene más de un complemento entonces la retícula no es distributiva. Entonces una retícula se denomina complementada si está acotada y si todo elemento en L tiene complemento.