

## PRIMER EXAMEN

Indicaciones:

- El examen es individual.
- Es muy importante que **justifique todas sus respuestas**.
- En el Gradescope se suben soluciones por pregunta.
- El plazo de entrega es 8:00 p. m. No se aceptará envíos por correo electrónico u otro medio.
- Este examen no tiene recuperación.

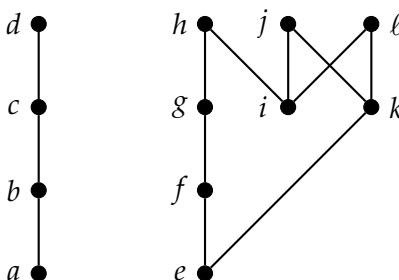
1. (4 pt.) Considere las relaciones  $R_1$  y  $R_2$  en el conjunto  $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ , definidas de la siguiente forma:

$$R_1 = \{(a, b) \in A \times A : a + b \leq 8\}.$$

$$R_2 = \{(a, b) \in A \times A : a - b \in \{0, 2, 3, 4\}\},$$

- a) Determine si  $R_1$  es un C.P.O. En caso que lo sea muestre el diagrama de Hasse.  
 b) Determine si  $R_2$  es un C.P.O. En caso que lo sea muestre el diagrama de Hasse.

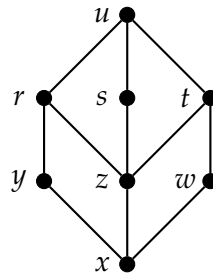
2. (4 pt.) Considere el siguiente diagrama de Hasse de un C.P.O.



- a) Determine los elementos minimales y maximales, en caso existan.  
 b) Halle las cotas inferiores de  $\{h, l\}$  y determine la máxima cota inferior, en caso exista.

- c) Halle las cotas superiores de  $\{i, e\}$  y determine la mínima cota superior, en caso exista.
- d) Dé un ejemplo de un conjunto de tres elementos en el CPO mostrado cuya mínima cota superior sea  $h$ .

3. (5 pt.) Considere la retícula cuyo diagrama de Hasse es el siguiente:



- a) Calcule  $y \wedge (z \vee w)$ .
- b) Determine todos los complementos de  $y$ , si los tuviera.
- c) ¿Es una retícula complementada?
- d) ¿Es una retícula distributiva?
- e) ¿Es un álgebra booleana?
4. (3 pt.) Para cada entero positivo  $n$ ,  $D_n$  denota al conjunto de todos los divisores positivos de  $n$ . Además, sabemos que  $(D_n, |)$  es una retícula para cualquier entero positivo  $n$ . ¿Es cierto que la retícula  $(D_{30}, |)$  contiene una subretícula isomorfa a  $(D_{12}, |)$ ?
5. (4 pt.) Un álgebra booleana  $(X, +, \cdot, ', 0, 1)$  tiene elementos  $a$  y  $b$  (no necesariamente son 0 o 1). Demuestre que  $a + b \cdot a' = a + b$ .