PC-1. Sección 1

(1) $R_1 = \{ \underbrace{(-2,-2), (-1,-1), (0,0), (1,1), (2,2), (3,3)}_{a=b,\ 0 \leq a.b},$

$\underbrace{(-2,-1), (-2,0), (-1,0), (0,1), (0,2), (0,3), (1,2), (1,3), (2,3)}_{a<b,\ 0\leq a.b} \}$

a) R_1 no es C.P.O porque no es Transitiva:

$(-1,0) \in R_1$, $(0,1) \in R_1$ pero $(-1,1) \notin R_1$.

b) • R_2 es reflexiva porque $a \leq a$ y 3 es divisor de a^2+2a^2 entonces $(a,a) \in R_2$, $\forall a \in A$.

• R_2 es antisimétrica porque si $(a,b) \in R_2$ y $(b,a) \in R_2$ entonces $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a=b$.

- R_2 es Transitiva porque si $(a,b) \in R_2$ y $(b,c) \in R_2$:

$$a \leq b \,,\quad 3 \mid a^2+2b^2 \,,\quad b \leq c \,,\quad 3 \mid b^2+2c^2$$

de $a \leq b$ y $b \leq c \Rightarrow a \leq c$ ...(1)

de $3 \mid a^2+2b^2$ y $3 \mid b^2+2c^2 \Rightarrow 3 \mid (a^2+2b^2)+(b^2+2c^2) = a^2+2c^2+3b^2$

como $3b^2$ es múltiplo de 3, deducimos que $3 \mid a^2+2c^2$ ...(2)

De (1) y (2) Tenemos que $(a,c) \in R_2$.

$\therefore$ R_2 sí es CPO.

$-2, -1, 0, 1, 2, 3$

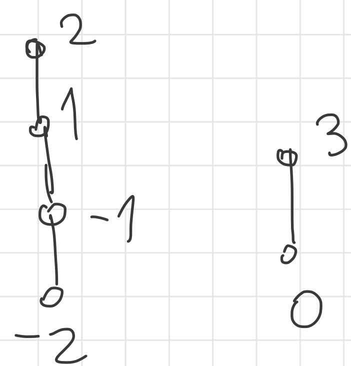


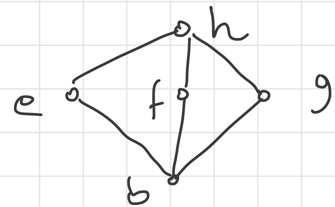
diagrama de Hasse

② a) $d \vee (e \wedge f) = d \vee b = g$

las cotas inferiores de e y f son a y b

las cotas superiores de d y b son g y h.

b) No, porque contiene como subretícula a:



→ Es subretícula porque en la retícula: $e \wedge f = b$, $e \wedge g = b$, $f \wedge g = b$, $e \vee f = h$,

Por el Teorema visto en clase, la retícula no es distributiva.

c) Complementos de e:

f no es complemento de e, porque $e \wedge f = b$.

g " " " " ", " $e \wedge g = b$

c sí es complemento de e, porque $c \wedge e = a$, $c \vee e = h$

d " " " " ", " $d \wedge e = a$, $d \vee e = h$

∴ Todos los complementos son c y d.

d) ¿es la retícula complementada?

No, porque b no tiene complemento.

- b es comparable con todos menos con c y d.

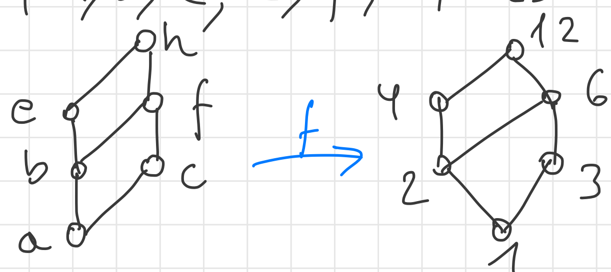
$$b \vee c = f$$
$$b \vee d = g.$$

$\Rightarrow$ ni c ni d son complementos de b

$\therefore$ b no tiene complemento.

e) dos subretículas isomorfas a $(D_{12}, |)$.

$X = \{a, b, c, e, f, h\}$ es subretícula



$f(a) = 1$, $f(e) = 4$

$f(b) = 2$, $f(f) = 6$

$f(c) = 3$, $f(h) = 12$

$Y = \{a, b, d, e, g, h\}$ es otra subretícula isomorfa a $(D_{12}, |)$

Es similar a la anterior, intercambiando $f \leftrightarrow g$, $c \leftrightarrow d$.

(3) C.P.O $(\{2, 3, 4, 5, 8, 20\}, |)$

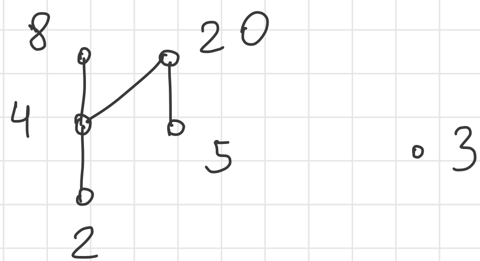
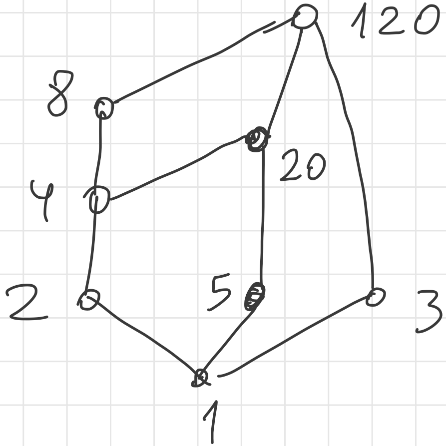


diagrama de Hasse

a) maximales: 8, 20 y 3 ; minimales: 2, 3 y 5.

b) 1 y 120.



no comparables :

2 y 5 $\quad 2 \wedge 5 = 1, \quad 2 \vee 5 = 20$

2 y 3 $\quad 2 \wedge 3 = 1, \quad 2 \vee 3 = 120$

5 y 3 $\quad 3 \wedge 5 = 1, \quad 3 \vee 5 = 120$

4 y 3 $\quad 3 \wedge 4 = 1, \quad 3 \vee 4 = 120$

3 y 20 $\quad 3 \wedge 20 = 1, \quad 3 \vee 20 = 120$

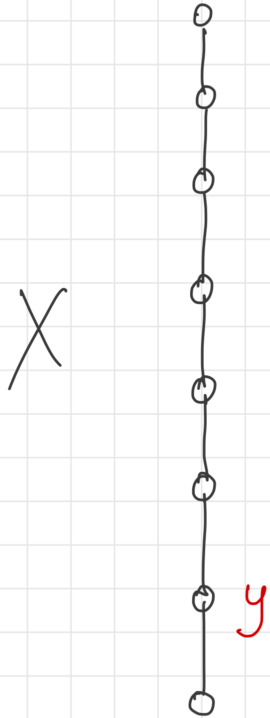
5 y 4 $\quad 4 \wedge 5 = 1, \quad 4 \vee 5 = 20$

8 y 3 $\quad 3 \wedge 8 = 1, \quad 3 \vee 8 = 120$

8 y 5 $\quad 8 \wedge 5 = 1, \quad 8 \vee 5 = 120$

8 y 20 $\quad 8 \wedge 20 = 4, \quad 8 \vee 20 = 120$

4



es distributiva porque no contiene como subretículas a:

porque todos los elementos de X son comparables.

No es complementada porque y no tiene complemento (porque es comparable con todos los otros)