



Álgebra booleana

Semana 02 - Clase 07

Introducción

El álgebra booleana nace de las propiedades de las proposiciones lógicas, el álgebra booleana se utiliza principalmente en compuertas lógicas y circuitos interruptores.

Definición

Un álgebra booleana tiene la forma $B = (S, +, \cdot, ', 0, 1)$, y consiste en un conjunto S que contiene elementos distintos, donde obligatoriamente está incluido el $0, 1$, que representan el bottom y top respectivamente. Los símbolos $+$ y \cdot son operadores binarios en S . Mientras que $'$ es un operador unitario y representa el complemento de un $a \in S$.

PROPIEDADES	Conmutativa	$x+y = y+x$	$x \cdot y = y \cdot x$
	Elemento neutro	$0+x = x$	$1 \cdot x = x$
	Distributiva	$x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$	$x+(y \cdot z) = (x+y)(x+z)$
	Asociativa	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$	$x+(y+z) = (x+y)+z$
	Complementario	$x + \overline{x} = 1$	$x \cdot \overline{x} = 0$

Considerar que la mínima retícula S ("la más simple"), que cumple ser un álgebra de bool consta de dos elementos, de tal forma que $S = \{0, 1\}$, por lo que $B = \{S, +, \cdot, ', 0, 1\}$. De este modo $0' = 1, 1' = 0$.

Como ejemplo, $(P(S), \cup, \cap, ', \emptyset, S)$, es un álgebra booleana, pues podemos comprobar que cumple con todas las leyes (4 condiciones).

Propiedades

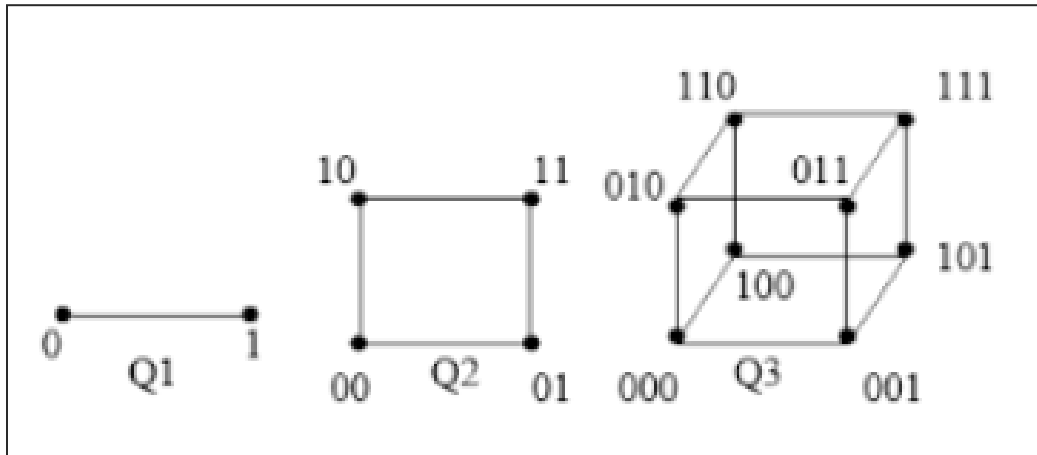
Existen dos propiedades principales, que utilizan los complementos, de tal forma que $(a + b)' = a' \cdot b'$. Mientras que su dual es $(a \cdot b)' = a' + b'$. Si nos damos cuenta, lo que cambia es el signo. Mientras que la bonus es $(a + b + c)' = a' \cdot b' \cdot c'$.

Para que sea considerada como álgebra booleana, una retícula debe ser acotada, distribuida y

complementada. (Forma alternativa de definirla).

Retícula cubo n-dimensional

Si el diagrama de hasse de la retícula correspondiente a un conjunto con n elementos es etiquetado mediante sucesiones de ceros y unos de longitud n , entonces la retícula resultante se denota como B_n .



Para considerarse un álgebra de bool, su diagrama de hasse tiene que ser isomorfo al cubo n-dimensional. Además la cantidad de puntos tienen que ser una potencia de dos, tal que $|B_n| = 2^n, (P(S), \subseteq)$.

Nota. Si una retícula finita L , no contiene 2^n elementos, para algún entero, no negativo n , se sabe que L , no puede ser un álgebra booleana.