Retículas / Látices II

Semana 02 - Clase 006

Propiedades

Dentro de las retículas tenemos distintas propiedades que nos permiten resolver fácilmente distintos escenarios, como determinar si es distributiva o no. Se define la cota superior como ($a \vee b$), y la inferior ($a \wedge b$).

- $a \leq (a \vee b)$ y $b \leq (a \vee b)$
- Si ($a \leq c$) y ($b \leq c$), entonces ($a \vee b) \leq c$; $a \vee b$ es la mínima cota superior.
- Si ($a \wedge b) \leq a$ y ($a \wedge b) \leq b$; $a \wedge b$ es una cota inferior.
- Si $c \leq a$ y $c \leq b$, entonces $c \leq (a \wedge b)$; $a \wedge b$ es la máxima cota inferior de a, b.
- Si $a|c$ y $b|c$, entonces $mcm(a, b)|c$.
- Si $A \subseteq C$ y $B \subseteq C$, entonces $(A \cup B) \subseteq C$.

Teoremas

Sea L una retícula, entonces para todo $a, b \in L$, se cumplen los siguientes teoremas:

- $a \vee b = b$, si y sólo si $a \leq b$.
- $a \wedge b = a$, si y sólo si $a \leq b$.
- $a \wedge b = a$, si y sólo si $a \vee b = b$.

Por definición dado un conjunto linealmente ordenado (orden total). Si $a, b \in L$, entonces $a \leq b$ ó $b \leq a$. De esta forma se implica que L es una retícula, ya que cada pareja de elementos tiene una MCS y MCI.

Propiedades

Existen 4 propiedades principales: Ley de idempotencia, conmutativa, asociativa y de absorció; que permiten reducir una expresión, es así que a partir de esta definición salen conceptos tales como retícula distributiva, acotada.

Idempotent Properties
- $a \vee a = a$
- $a \wedge a = a$

Commutative Properties
- $a \vee b = b \vee a$
- $a \wedge b = b \wedge a$

Associative Properties
- $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$
- $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$

Absorption Properties
- $a \vee (a \wedge b) = a$
- $a \wedge (a \vee b) = a$
- $a \vee b = b$ if and only if a R b.
- $a \wedge b = a$ if and only if a R b.
- $a \wedge b = a$ if and only if $a \vee b = b$.

Retícula acotada

Una retícula L se denomina acotada, si tiene un elemento máximo y un elemento mínimo, donde el máximo se denomina top (1), y el mínimo bottom (0).

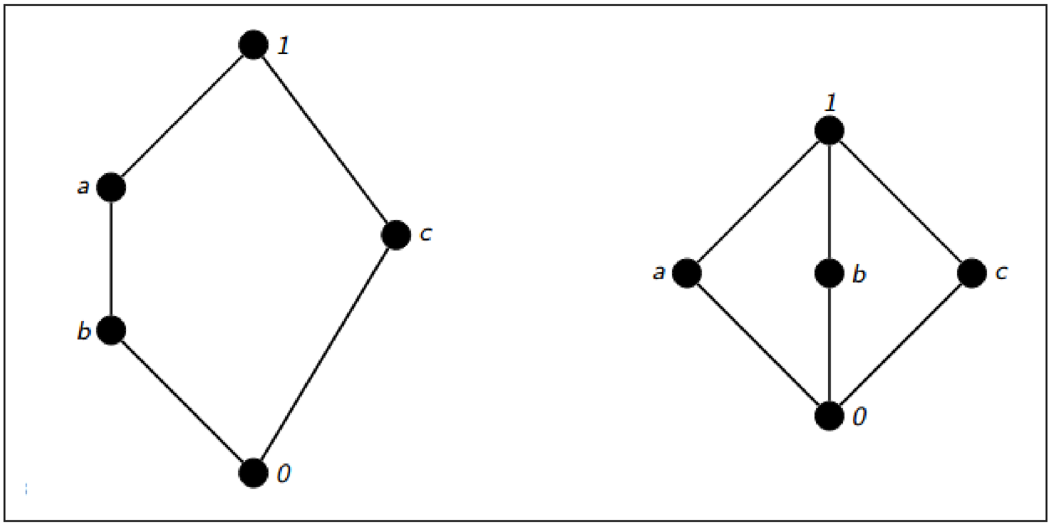
> Por ejemplo la retícula ($\mathbb{Z}^+$, |), NO es una retícula acotada, pues no tiene máximo, el mínimo sería el 1 (divide a todos). Al igual que ($\mathbb{Z}$, $\leq$), pues siempre se cumple que $a - 1 \leq a$.

Retícula distributiva

Una retícula será distributiva si para cualesquiera elementos a, b y $c \in L$, se cumplen las siguientes propiedades distributivas:

- $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
- $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

Además por las propiedades de retículas, si $b \leq c$, entonces se cumple que $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$. De este modo, si a / b sean el mínimo ó máximo se cumple.



Además si dada una retícula L, será no distributiva si y sólo si contiene una subretícula isomorfa a alguna de las dos retículas mostradas anteriormente.