



Elementos comparables

Semana 01 - Clase 002

Definición

Los elementos a, b de un CPO (S, R) , se denominarán comparables si aRb ó bRa . Es decir si están relacionados de alguna forma, mientras que en caso contrario serán elementos incomparables $(a, b) \in R$ ó $(b, a) \in R$.

Por ejemplo los elementos 3, 9 en el CPO $(\mathbb{Z}^+, |)$ son comparables, pues $(3, 9) \in R$, mientras que 5, 7 en el mismo CPO, no lo son.

Conjunto linealmente ordenado

También denominado conjunto totalmente ordenado, es un CPO (S, R) , donde cada par de elementos de S son comparables, puede denominarse totalmente ordenado ó linealmente ordenado.

Por ejemplo el CPO (\mathbb{Z}, \leq) es totalmente ordenado porque $a \leq b$ ó $b \leq a$, donde $a, b \in \mathbb{Z}$. Por ejemplo para el CPO D_{15} no es totalmente ordenado por que $(3, 5)$ son no comparables

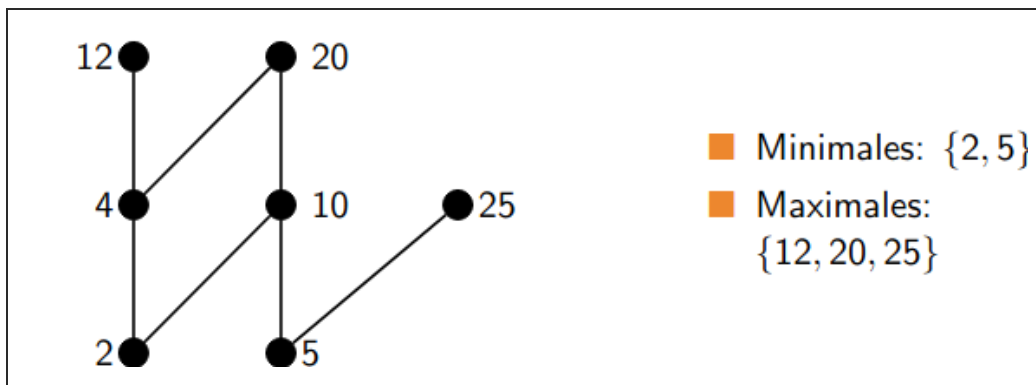
Elementos minimales y maximales

Maximal

Sea un CPO (S, \leq) , el elemento $a \in S$, se denomina maximal si $\nexists b \in S$, tal que $a \leq b \equiv aRb$, donde debe cumplirse que $b \neq a$. En otras palabras, un elemento de un CPO se denomina maximal si este elemento no es menor que cualquier elemento del CPO.

Minimal

Sea un CPO (S, \leq) , el elemento $a \in S$, se denomina minimal si $\nexists b \in S$, tal que $b \leq a \equiv bRa$, donde debe cumplirse que $b \neq a$. En otras palabras, un elemento de un CPO se denomina minimal si este elemento no es mayor que cualquier elemento del CPO.



Los elementos maximales y minimales son fáciles de identificar en los diagramas de hasse, pues son los top y bottom del diagrama. Por ejemplo en la relación $S = \{1, 2, 3\}$ en el CPO $(P(S), \subseteq)$, \emptyset es minimal pues es subconjunto de todo conjunto y S es maximal pues no hay nadie por debajo de él.

Máximo y mínimo

Máximo

Un elemento a será el máximo de un CPO (S, R) si $bRa, \forall b \in S$. El máximo es único pues tiene que estar relacionados, tienes que ser "mayor" que todos.

Mínimo

Un elemento a será el mínimo de un CPO (S, R) si $aRb, \forall b \in S$. El mínimo es único pues tiene que estar relacionados, tienes que ser "mayor" que todos.

Por ejemplo el CPO $([0, 1[, \leq)$ no tiene máximo, pues al tener un límite abierto existen infinitos números que cumplen con la relación.