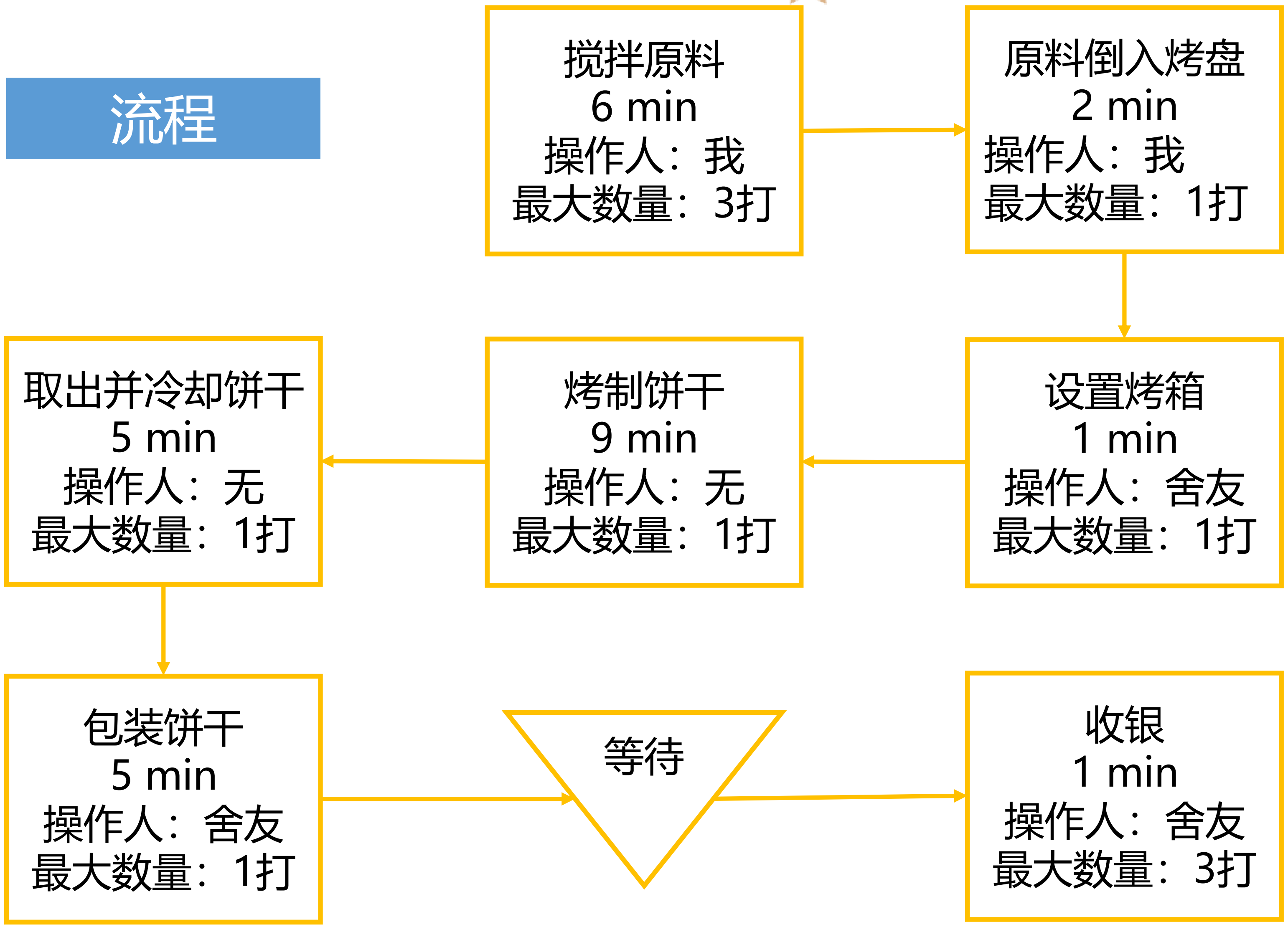
HW5 饼干公司

汇报人：张博文 李子天 黄骏轩

关键假设

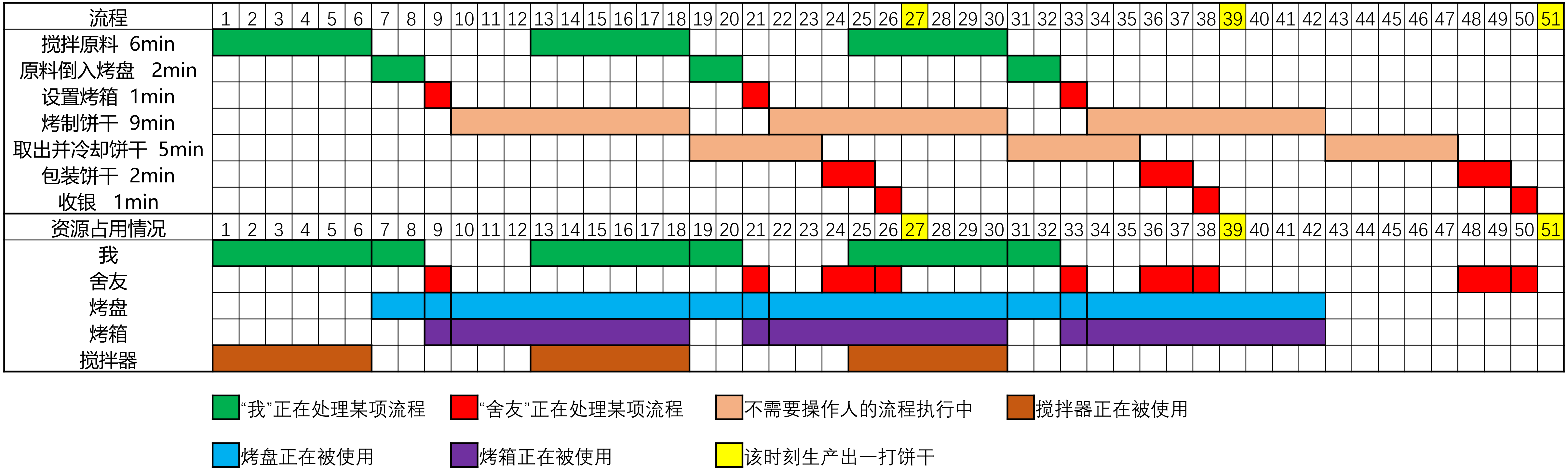
- 需要操作人的流程**不得暂停执行**
- 冷却饼干**不需要使用烤盘**
（若需要占用，分析过程类似）
- 公司如果不购置额外资源，则只拥有**一块烤盘**，**一个烤箱**，**一个搅拌器**，其余器具足够
- 每个流程对应的**操作人固定**

流程



最大化饼干产量的生产流程

根据流程图，容易得到**最大化饼干产量**生产流程的甘特图，其中**每次搅拌原料1打**



甘特图中的关键信息

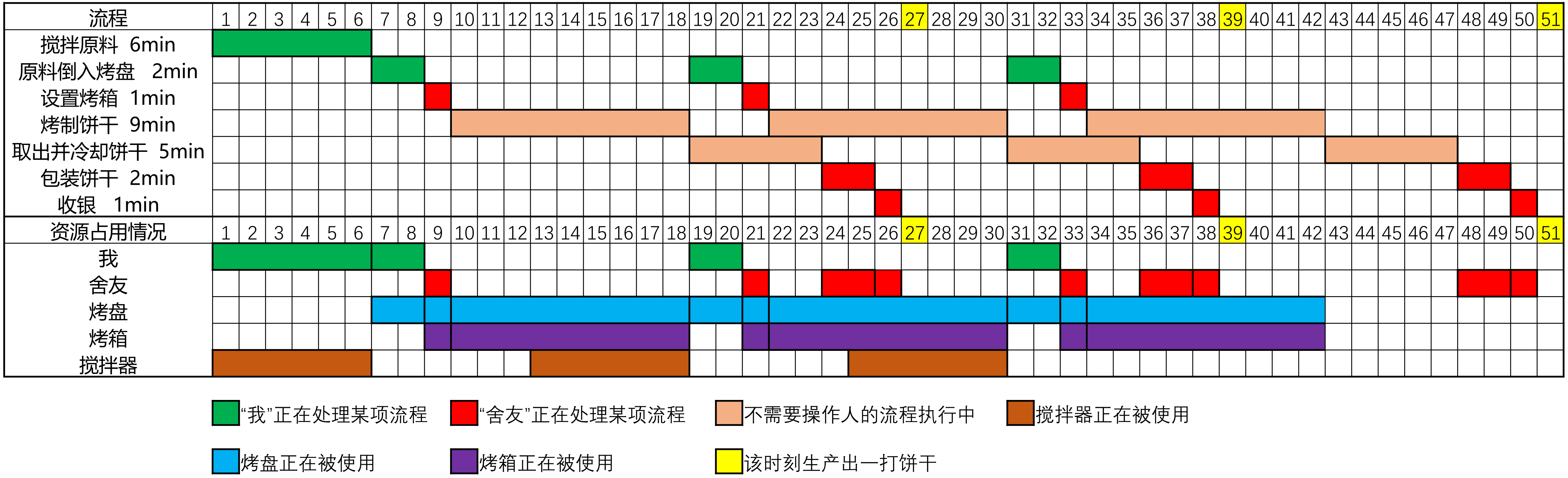
- 第一打饼干将于**第26分钟末**完成
- 瓶颈由“原料倒入烤盘-设置烤箱-烤制饼干”**三个流程共同组成**，共消耗时间**12分钟**，
- 之后至少需要12分钟才能完成新的饼干

Q1. 需要多长时间处理一个紧急订单?

- 如果订单要求为**1打**，需要**26分钟**
- 如果订单要求为**2打**，需要**38分钟**
- 如果订单要求为**3打**，需要**50分钟**
- 如果订单要求为**n打(n>3)**，需要**26+12(n-1)分钟**

订单要求的饼干数量与时间

如果要**最小化“我”工作的时间**，则应采取如下甘特图对应的流程



Q2.营业4小时可处理多少订单?

- 订单要求未知的情况下无法计算。此处假设每笔订单**需求为1打**
- 第一打饼干于**第26分钟末**完成，之后每隔**12分钟**完成一打饼干
- 4小时一共240分钟，则最多处理**18笔订单**

Q3. 处理一个订单，我和舍友的工作时间?

如果订单要求为**n打**，则一共只需结一次账

设$3k-2 \le n \le 3k$，则

我需要花的时间为$6k+2n$ min

室友需要花的时间为$3n+1$ min

订单要求的饼干数量与折扣

记“处理m个要求为n打的订单”为“处理m*n订单”
根据Q3的结果，我们容易计算得到以下表格：

	处理2*1订单	处理1*2订单	处理3*1订单	处理1*3订单	处理n*1订单	处理1*n订单
我的工作时间	16 min	10 min	24 min	12 min	8n min	6k+2n min
舍友的工作时间	8 min	7 min	12 min	10 min	4n min	3n+1 min

表格中的关键信息

- “处理n*1订单”与“处理1*n订单”所需**原料相同**，差别在于**时间**
- 由于瓶颈是“倒入原料-设置烤箱-烤制饼干”因此**总时间没有差别**
- 但处理1*n订单意味着更短的**结账时间**，更短的**搅拌时间**，即每个人的**工作时间**减少
- 我至少可以省下$8n-6k-2n \geq 4n-2$ min
- 舍友可以省下$4n-3n-1=n-1$ min

Q4. 购买多打饼干是否会有折扣？

- 不妨假设我的时间价值$\boldsymbol{p_1}$**美元/min**，舍友的时间价值$\boldsymbol{p_2}$**美元/min**
- 则1*n订单的成本要比n*1订单的成本少$(6\mathrm{n}-6k)\ p_1+(\mathrm{n}-1)\ p_2$美元
- 原材料成本和为$0.7n$，利润率为$r\%$，则折扣为

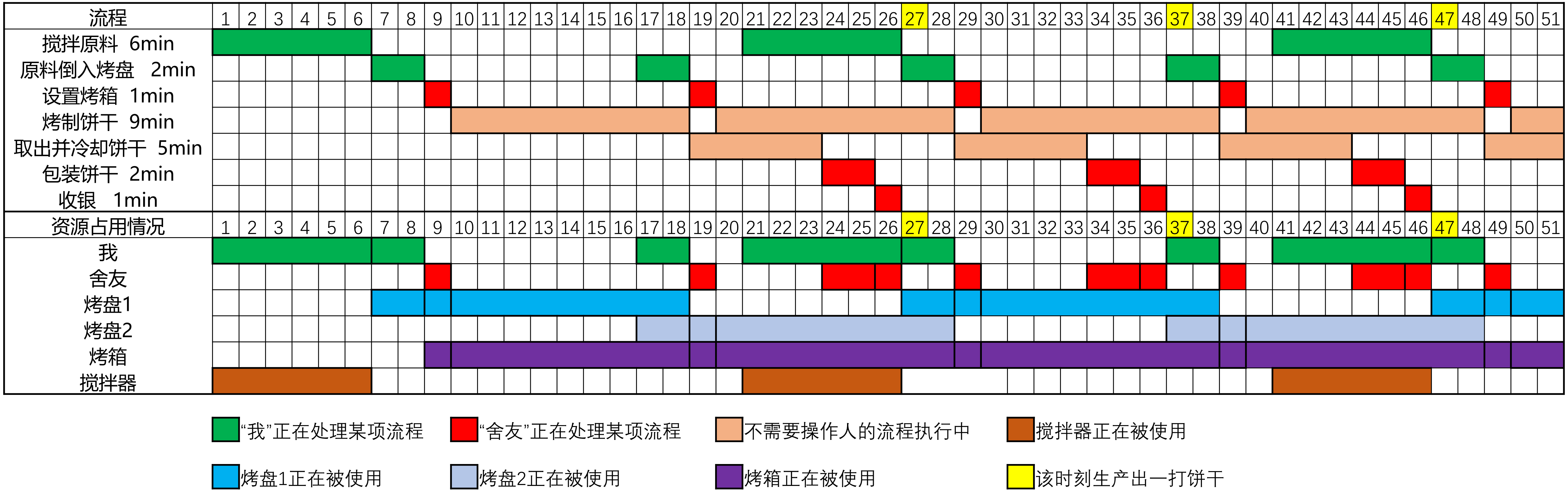
$$1-\frac{(0.7n+8np_1+4np_2)*(1+r\%)-(0.7n+(6k+2n)p_1+(3n+1)p_2)*(1+r\%)}{(t+8np_1+4np_2)*(1+r\%)}$$

$$=1-\frac{(6n-6k)p_1+(n-1)p_2}{0.7n+8np_1+4np_2}=\boldsymbol{\frac{0.7n+(2n+6k)p_1+(3n+1)p_2}{0.7n+8np_1+4np_2}}$$

需要的生产工具

搅拌流程并不在瓶颈中，因此显然**一个搅拌器**足够

如果多购买一个烤盘的话，给定时间内**最大化生产数**的流程如下，其中每次**搅拌2打原料**：



甘特图中的关键信息

- **第26分钟末**完成第一打饼干，之后**每10分钟**完成一打饼干，4个小时最多生产**22打饼干**
- 瓶颈由“**设置烤箱-烤制饼干**”两个流程组成

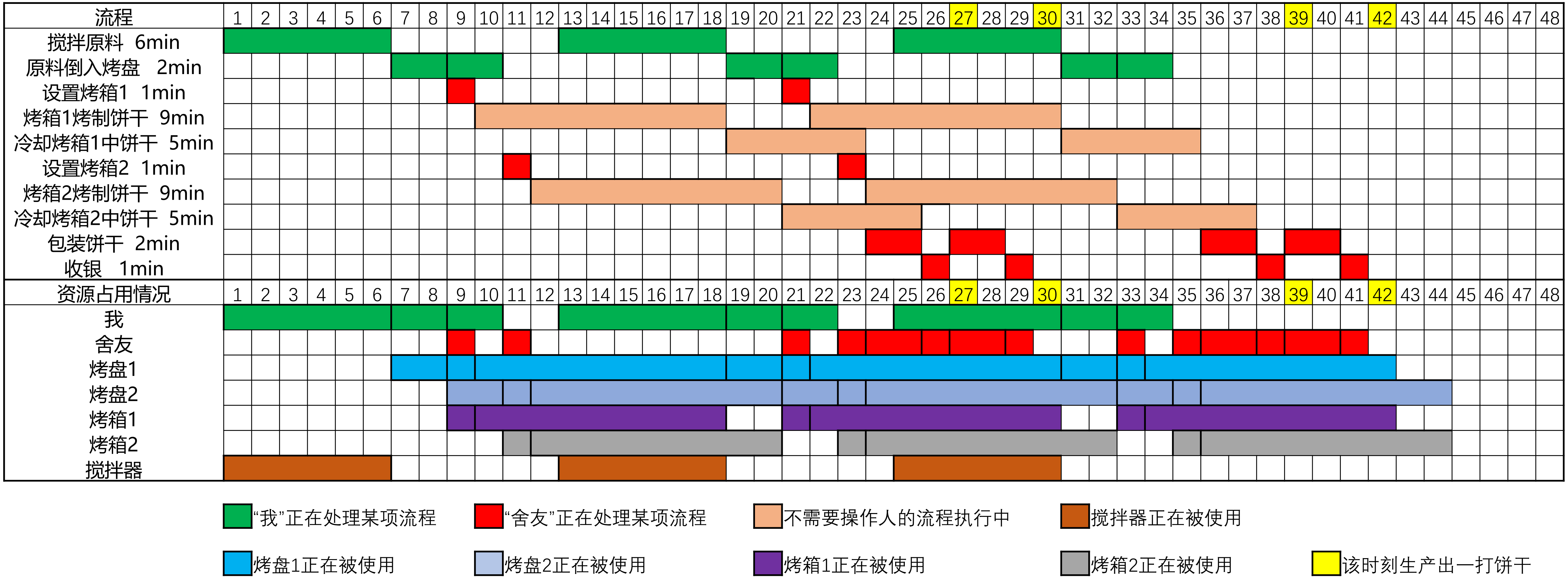
Q5.需要多少食物搅拌器和烤盘

- 需要**一个搅拌器**
- 如果有两个烤盘，可以**扩大产能**。此时更多烤盘不会影响瓶颈，因此最多需要两个烤盘
- 结合**实际需求**考虑是否要购置一个额外烤盘

Q5.改进生产流程

生产瓶颈是存在的，以下仅仅展示**新增一个烤箱与烤盘**的影响

在给定时间内**最大化生产数**的流程如下，其中每次**搅拌两打原料**



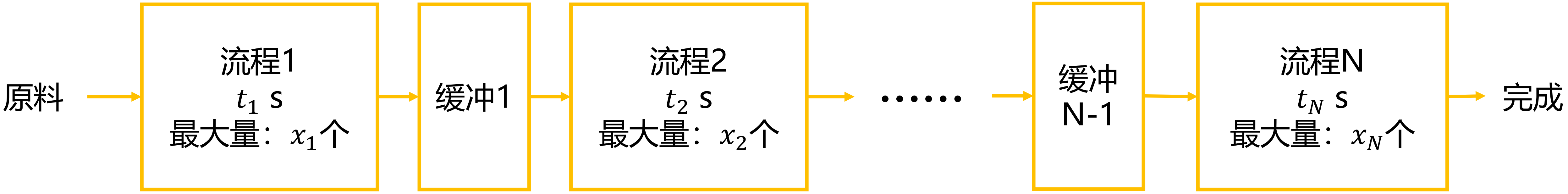
- 在**27+12(k-1)，30+12(k-1)**分钟末产出饼干
- 4个小时最多生产**36打饼干**
- 此时瓶颈为**"原料倒入烤盘-设置烤箱-烤制饼干"**
- 则4小时内最大产量相比原来**增加18打饼干**
- 烤箱租赁费用至少应小于销售**18打饼干**带来的**利润**
- 同时应考虑是否**需求**能否超过**36打每四小时**

情景推广与数值实验

以上的研究，大部分基于本问题数字的**特殊性**，寻找瓶颈、寻找最大化生产数目流程的工作基本由人工完成
在本案例中涉及**“重复执行流程”**，**“资源限制”**，**“无需操作人的流程”**，**“并行”**等概念，一般模型十分复杂
以下考虑尝试分析一种更一般，也更简单的生产流程，再尝试逐步增加各种条件

某种产品由无并行的线性流水线生产，特点包括

- 其流程一共包括N个流程
- 第n个流程需要时间t_n s完成，一次最多处理x_n个
- 相邻两个流程之间有缓冲区，则一共N-1个缓冲区
- 流程之间独立运行，只依靠缓冲区联系



以下是一种可能的方案，它不一定是最优的，但是可以基于它针对问题特殊性做进一步优化

①令$i = argmin\,\{\frac{x_i}{t_i}\}$，即求出瓶颈对应的编号

②如果$\frac{x_1}{t_1} = \frac{x_i}{t_i}$，则流程1一直运转

如果$\frac{x_1}{t_1} > \frac{x_i}{t_i}$，则流程1运转$\frac{lcm(x_1,x_i)}{t_1}$ s，暂停$t_i - \frac{lcm(x_1,x_i)}{t_1}$ s，一直循环（lcm为最小公倍数）

③对于流程$k(k \neq 1)$，只要缓冲区k-1的量大于等于x_k，流程k就运转，否则不运转

情景推广与数值实验

容易证明在上述方案下：

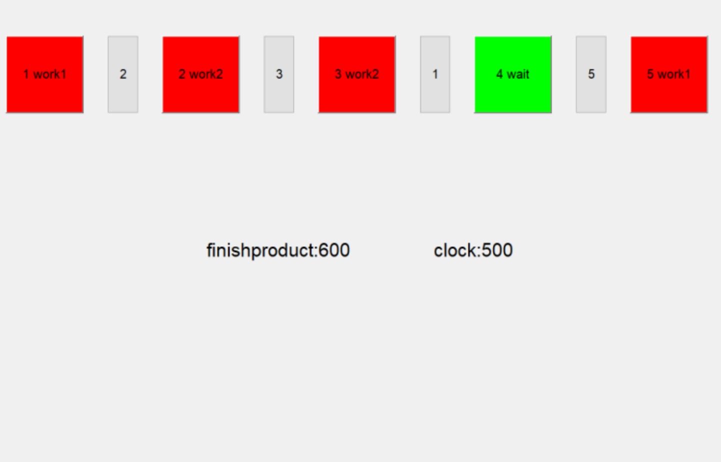
①第$k-1$个缓冲区的半成品数目不超过$2x_k$，即在途库存有限，不会出现堵塞

②记$f(t)$为在第t秒末生产的成品数量，那么 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{f(t)-t*\frac{x_i}{t_i}}{t}=0$，

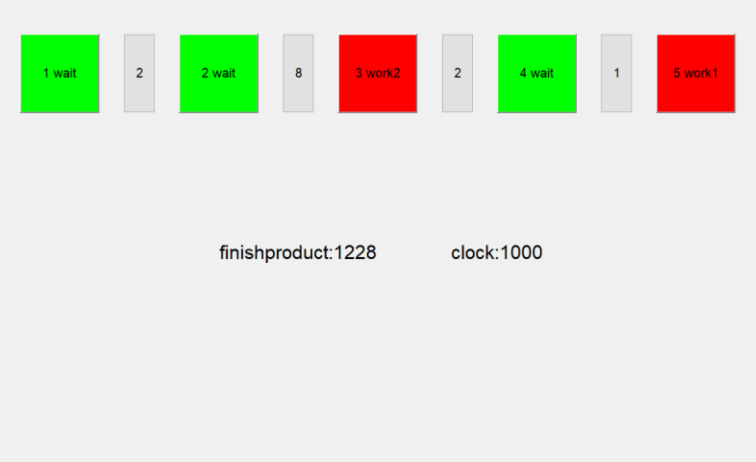
即当t足够大时，整个流水线的效率等于瓶颈处的效率，即流水线接近于满载

对于特殊问题，或许可以利用数字特殊性，使得流水线的效率**更快地逼近**瓶颈效率
因此该方案对于某些问题不一定是最优方案，但总能**保证不会太差**，效率不会太低

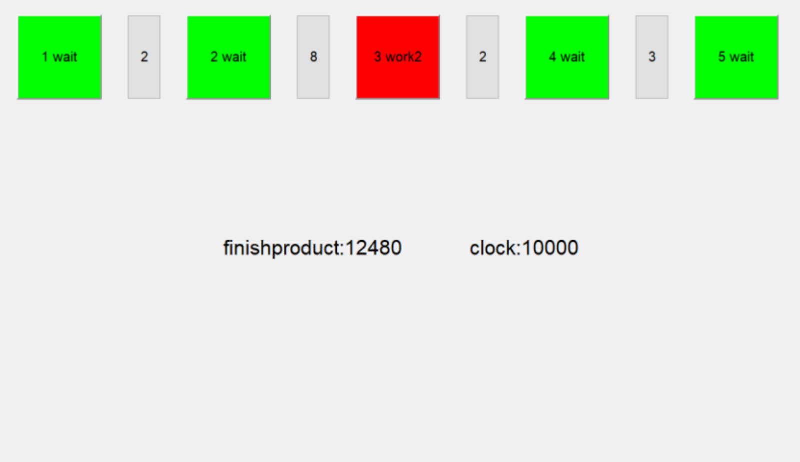
可使用matlab进行简单数值实验，设置一道包含5个流程，瓶颈效率为1.25个/s的流水线，并应用该方案



$t=500s$，效率1.2个/s



$t=1000s$，效率1.228个/s



$t=10000s$，效率1.248个/s

代码地址https://github.com/lzt68/kristen-cookie/tree/master

情景推广与数值实验

流程优化

- 在上述条件下，如果允许给流程提速（如增加人手、设备、维护等手段），那显然应当**给瓶颈提速**。最终整个流水线的效率会随着瓶颈效率提高而提高。
- 上述方案是针对一般化条件给出的，可能不是某些问题的最优解。但可以在该方案基础上进一步优化。例如**减小**缓冲区内半成品数量的**上界**，$2x_k$是很夸张的估计

被迫放慢

- 如果流程遭遇外部打击，例如在已有流程内减少一操作员，则瓶颈速度变慢。由于上述方案总能**保证整体效率逐渐与瓶颈一致**，我们只需考虑让新瓶颈速度尽可能快。
- 如果该流水线瓶颈效率变慢，仍可能通过其他优化手段**提高逼近速度**，减少效率的损失

万物皆需安排

- 对于非常一般的情况，例如某些流程只能**由指定操作员操作**，某些**资源**需要多个流程**共用**，操作员人数与流程人数不匹配
- 可以考虑启发式地合并流程，然后应用上述方案。这只是一个大概的思路，我们仍然没有找出给这类问题建模、求解的一般方法。
- “见缝插针”安排工作并结合上述方案，或许能提供“**不太差**”的解