Informe de Trabajo Práctico 2

Aprendizaje Profundo con aplicación a Visión Artificial
Laura Zúñiga Osorio

22 de octubre de 2025

1. Funciones de activación y gradientes. Se consideran las entradas y pesos:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 8, \quad w_1 = 1{,}45, \quad w_2 = -0{,}35, \quad b = -4$$

La entrada total a la neurona es:

$$x = w_1 x_1 + w_2 x_2 + b$$

$$x = (1{,}45)(2) + (-0{,}35)(8) - 4 = 2{,}90 - 2{,}80 - 4 = -3{,}90$$

Por lo tanto:

$$\boxed{x = -3{,}900}$$

A continuación se calculan las funciones de activación $f(x)$ y sus gradientes $f'(x)$, manteniendo tres decimales.

a. Función Sigmoide

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} = \frac{1}{1 + e^{3{,}9}}$$

$$e^{3{,}9} \approx 49{,}402$$

$$f(x) = \frac{1}{50{,}402} = 0{,}020$$

$$f'(x) = f(x)\big(1 - f(x)\big) = 0{,}020(1 - 0{,}020) = 0{,}020$$

$$\boxed{f(x) = 0{,}020, \quad f'(x) = 0{,}020}$$

b. Función Tangente Hiperbólica

$$f(x) = \tanh(-3{,}9)$$

$$\tanh(3{,}9) \approx 0{,}999$$

$$f(x) = -0{,}999$$

$$f'(x) = 1 - \tanh^2(x) = 1 - (-0{,}999)^2 = 1 - 0{,}998 = 0{,}002$$

$$\boxed{f(x) = -0{,}999, \quad f'(x) = 0{,}002}$$

c. Función ELU (Exponential Linear Unit) La definición empleada es:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x < 0 \\ \alpha(e^x - 1), & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Para $\alpha = 1$ y $x = -3{,}9 < 0$:

$$f(x) = x = -3{,}9$$

$$f'(x) = 1$$

$$\boxed{f(x) = -3{,}900, \quad f'(x) = 1{,}000}$$

d. Función Leaky ReLU Se define como:

$$f(x) = \text{máx}\left(\frac{x}{10}, x\right)$$

Para $x = -3{,}9$ se cumple $\frac{x}{10} = -0{,}39 < x$, por lo tanto:

$$f(x) = -0{,}39$$

$$f'(x) = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

$$\boxed{f(x) = -0{,}390, \quad f'(x) = 0{,}100}$$

2. Perceptrón con dos neuronas. Los datos del problema son:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2) = (-3{,}1,\ 1{,}5), \qquad W = \begin{bmatrix} -0{,}2 & 2 \\ -0{,}5 & -0{,}3 \end{bmatrix}, \qquad b_1 = -4,\ b_2 = -1.$$

Forward pass Entrada a la función sigmoide:

$$z_1 = w_{11}x_1 + w_{12}x_2 + b_1 = (-0{,}2)(-3{,}1) + (2)(1{,}5) + (-4) = -0{,}380,$$

$$z_2 = w_{21}x_1 + w_{22}x_2 + b_2 = (-0{,}5)(-3{,}1) + (-0{,}3)(1{,}5) + (-1) = 0{,}100.$$

Funciones activación (sigmoide):

$$a_k = \frac{1}{1+e^{-z_k}} \quad \rightarrow \quad a_1 = 0{,}406,\ a_2 = 0{,}525.$$

Loss:

$$L = \tfrac{1}{2}\big(a_1^2 + a_2^2\big) = 0{,}220.$$

Backpropagation Derivadas de salida respecto al costo:

$$\frac{\partial C}{\partial a_1} = a_1 - t_1 = a_1 = 0{,}406, \qquad \frac{\partial C}{\partial a_2} = a_2 - t_2 = a_2 = 0{,}525.$$

Derivada de la sigmoide:

$$\sigma'(z_k) = a_k(1-a_k).$$

Valores:

$$\sigma'(z_1) = 0{,}406(1-0{,}406) = 0{,}098, \qquad \sigma'(z_2) = 0{,}525(1-0{,}525) = 0{,}131.$$

Gradientes de C respecto a las pre-activaciones z_k:

$$\frac{\partial C}{\partial z_k} = \frac{\partial C}{\partial a_k}\,\sigma'(z_k).$$

Números:

$$\frac{\partial C}{\partial z_1} = 0{,}406 \cdot 0{,}098 = 0{,}098, \qquad \frac{\partial C}{\partial z_2} = 0{,}525 \cdot 0{,}131 = 0{,}131.$$

Gradientes respecto a pesos y sesgos (regla de la cadena):

$$\frac{\partial C}{\partial w_{ij}} = \frac{\partial C}{\partial z_i}\,x_j, \qquad \frac{\partial C}{\partial b_i} = \frac{\partial C}{\partial z_i}.$$

Valores (redondeados a tres decimales):
Para la neurona 1 (fila 1 de W):

$$\frac{\partial C}{\partial w_{11}} = 0{,}098 \cdot x_1 = 0{,}098 \cdot (-3{,}1) = -0{,}304,$$

$$\frac{\partial C}{\partial w_{12}} = 0{,}098 \cdot x_2 = 0{,}098 \cdot 1{,}5 = 0{,}147,$$

$$\frac{\partial C}{\partial b_1} = 0{,}098.$$

Para la neurona 2 (fila 2 de W):

$$\frac{\partial C}{\partial w_{21}} = 0{,}131 \cdot x_1 = 0{,}131 \cdot (-3{,}1) = -0{,}406,$$

$$\frac{\partial C}{\partial w_{22}} = 0{,}131 \cdot x_2 = 0{,}131 \cdot 1{,}5 = 0{,}196,$$

$$\frac{\partial C}{\partial b_2} = 0{,}131.$$