

题目一：求斐波那契数列的第 n 项。

写一个函数，输入 n ，求斐波那契（Fibonacci）数列的第 n 项。斐波那契数列的定义如下：

$$f(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ f(n-1) + f(n-2) & n > 1 \end{cases}$$

解法一 递归

时间： $O(2^n)$ ，空间 $O(n)$

```
int Fibonacci(int n)
{
    if(n<=0)
        return 0;
    if(n==1)
        return 1;
    if(n>1)
        return Fibonacci(n-1)+Fibonacci(n-2);
}
```

解法二 非递归 从下往上

时间 $O(n)$

```
int Fibonacci(int n)
{
    if(n<2)
        return n;
    int t1=0,t2=1;
    int res=0;
    while(--n)
    {
        res=t1+t2;
        t1=t2;
        t2=res;
    }
    return res;
}
```

解法三 利用数学公式

时间 $O(\log n)$

$$\begin{bmatrix} f(n) & f(n-1) \\ f(n-1) & f(n-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1}$$

$$a^n = \begin{cases} a^{n/2} \cdot a^{n/2} & n \text{ 为偶数} \\ a^{(n-1)/2} \cdot a^{(n-1)/2} \cdot a & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

从上面的公式中我们可以看出，我们想求得 n 次方，就要先求得 $n/2$ 次方，再把 $n/2$ 次方的结果平方一下即可。这可以用递归的思路实现。