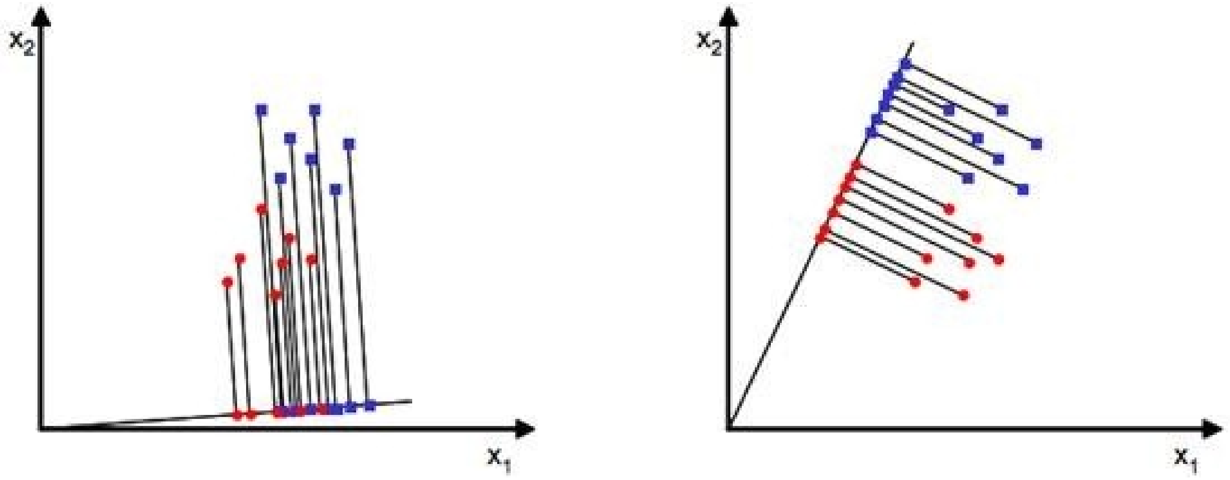
Fisherface是由Ronald Fisher发明的，想必这就是Fisherface名字由来。Fisherface所基于的LDA（Linear Discriminant Analysis，线性判别分析）理论和特征脸里用到的PCA有相似之处，都是对原有数据进行整体降维映射到低维空间的方法，LDA和PCA都是从数据整体入手而不同于LBP提取局部纹理特征。如果阅读本文有难度，可以考虑自学斯坦福公开课机器学习或者补充线代等数学知识。

同时作者要感谢cnblogs上的大牛JerryLead，本篇博文基本摘自他的线性判别分析（Linear Discriminant Analysis）[1]。

1、数据集是二类情况

通常情况下，待匹配人脸要和人脸库内的多张人脸匹配，所以这是一个多分类的情况。出于简单考虑，可以先介绍二类的情况然后拓展到多类。假设有二维平面上的两个点集x（x是包含横纵坐标的二维向量），它们的分布如下图（1）（分别以蓝点和红点表示数据）：



原有数据是散布在平面上的二维数据，如果想用一维的量（比如到圆点的距离）来合理的表示而且区分开这些数据，该怎么办呢？一种有效的方法是找到一个合适的向量w（和数据相同维数），将数据投影到w上（会得到一个标量，直观的理解就是投影点到坐标原点的距离），根据投影点来表示和区分原有数据。以数学公式给出投影点到到原点的距离：y=wTx。图（1）给出了两种w方案，w以从原点出发的直线来表示，直线上的点是原数据的投影点。直观判断右侧的w更好些，其上的投影点能够合理的区分原有的两个数据集。但是计算机不知道这些，所以必须要有确定的方法来计算这个w。

首先计算每类数据的均值（中心点）：

这里的i是数据的分类个数，Ni代表某个分类下的数据点数，比如u1代表红点的中心，u2代表蓝点的中心。

数据点投影到w上的中心为：

$$\widetilde{\mu_i} = \frac{1}{N_i}\sum_{y\in\omega_i} y = \frac{1}{N_i}\sum_{x\in\omega_i} w^T x = w^T \mu_i$$

如何判断向量w最佳呢，可以从两方面考虑：1、不同的分类得到的投影点要尽量分开；2、同一个分类投影后得到的点要尽量聚合。从这两方面考虑，可以定义如下公式：

$$J(w) = |\widetilde{\mu_1} - \widetilde{\mu_2}| = |w^T(\mu_1 - \mu_2)|$$

J(w)代表不同分类投影中心的距离，它的值越大越好。

$$\tilde{s_i}^2 = \sum_{y\in\omega_i} (y - \tilde{\mu}_i)^2$$

上式称之为散列值（scatter matrixs），代表同一个分类投影后的散列值，也就是投影点的聚合度，它的值越小代表投影点越聚合。

结合两个公式，第一个公式做分子另一个做分母：

上式是w的函数，值越大w降维性能越好，所以下面的问题就是求解使上式取最大值的w。

把散列函数展开：

$$\tilde{s_i}^2 = \sum_{y\in\omega_i} (y - \tilde{\mu}_i)^2 = \sum_{x\in\omega_i} (w^T x - w^T \mu_i)^2 = \sum_{x\in\omega_i} w^T (x - \mu_i)(x - \mu_i)^T w$$

可以发现除w和w^T外，剩余部分可以定义为：

$$S_i = \sum_{x\in\omega_i} (x - \mu_i)(x - \mu_i)^T$$

其实这就是原数据的散列矩阵了，对不对。对于固定的数据集来说，它的散列矩阵也是确定的。

另外定义：

Sw称为Within-class scatter matrix。

回到并用上面的两个定义做替换，得到：

$$\tilde{s}_1^2 + \tilde{s}_2^2 = w^T S_w w$$

展开J(w)的分子并定义SB，SB称为Between-class scatter。

$$(\tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_2)^2 = (w^T\mu_1 - w^T\mu_2)^2 = w^T \underbrace{(\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 - \mu_2)^T}_{S_B} w = w^T S_B w$$

这样就得到了J(w)的最终表示：

上式求极大值可以利用拉格朗日乘数法，不过需要限定一下分母的值，否则分子分母都变，怎么确定最好的w呢。可以令，利用拉格朗日乘数法得到：

$$c(w) = w^t S_B w - \lambda(w^t S_W w - 1)$$
$$\Rightarrow \frac{dc}{dw} = 2S_B w - 2\lambda S_W w = 0$$
$$\Rightarrow S_B w = \lambda S_W w$$

其中w是矩阵，所以求导时可以把当做。（这点我也不懂）

上式两边同乘以可以得到：

可以发现w其实就是矩阵的特征向量了对不对。

通过上式求解w还是有些困难的，而且w会有多个解，考虑下式：

$$S_B = (\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 - \mu_2)^T$$

将其带入下式：

$$S_B w = (\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 - \mu_2)^T w = (\mu_1 - \mu_2) * \lambda_w$$

其中λw是以w为变量的数值，因为(u1-u2)^T和w是相同维数的，前者是行向量后者列向量。继续带入以前的公式：

$$S_w^{-1} S_B w = S_w^{-1}(\mu_1 - \mu_2) * \lambda_w = \lambda w$$

由于w扩大缩小任何倍不影响结果，所以可以约去两遍的未知常数λ和λw（存疑）：

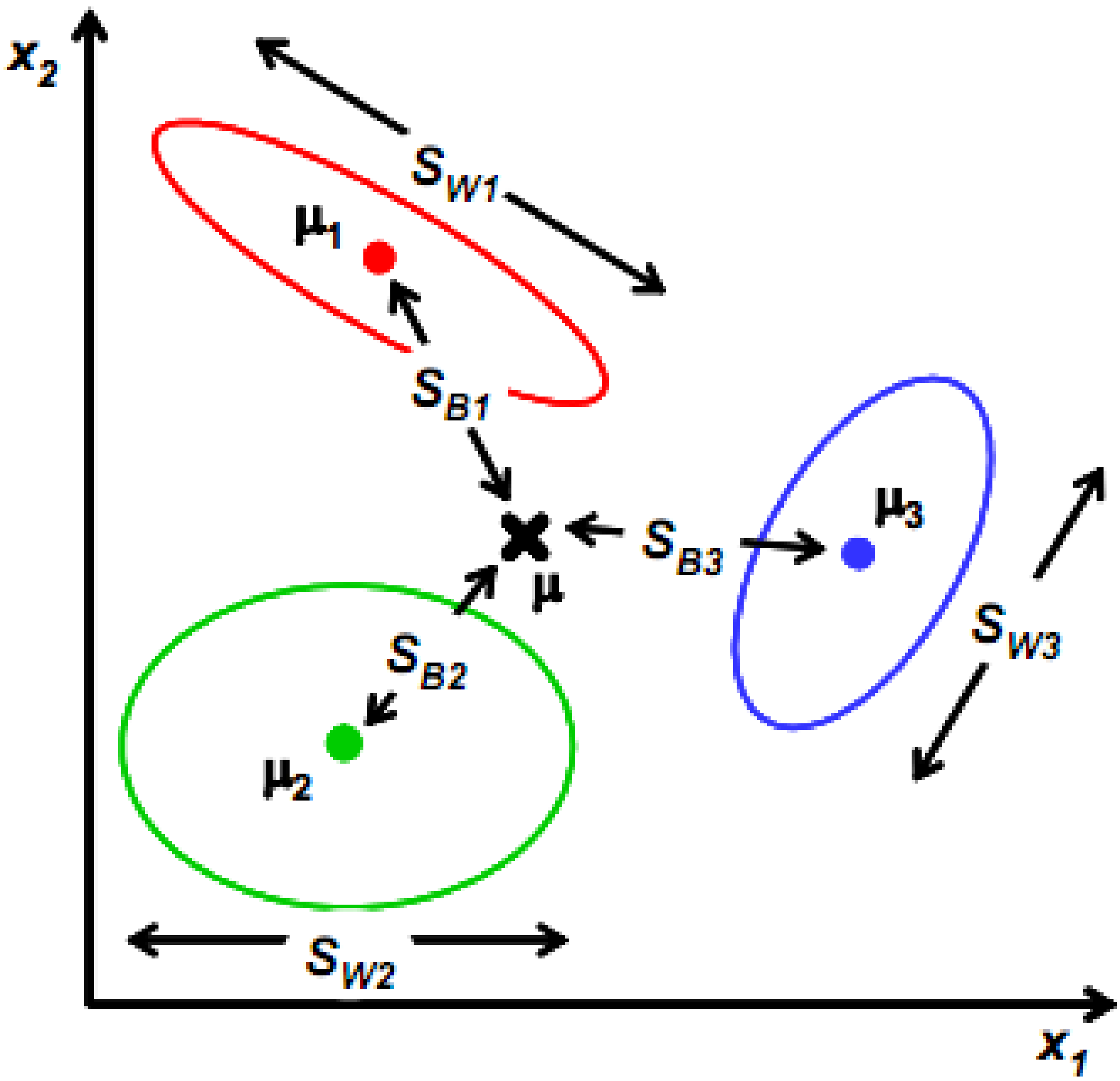
$$w = S_w^{-1}(\mu_1 - \mu_2)$$

到这里，w就能够比较简单的求解了。

2、数据集是多类的情况

这部分是本博文的核心。假设有C个人的人脸图像，每个人可以有多张图像，所以按人来分，可以将图像分为C类，这节就是要解决如何判别这C个类的问题。判别之前需要先处理下图像，将每张图像按照逐行逐列的形式获取像素组成一个向量，和第一节类似设该向量为x，设向量维数为n，设x为列向量（n行1列）。

和第一节简单的二维数据分类不同，这里的n有可能成千上万，比如100x100的图像得到的向量为10000维，所以第一节里将x投影到一个向量的方法可能不适用了，比如下图：



图（2）

平面内找不到一个合适的向量，能够将所有的数据投影到这个向量而且不同类间合理的分开。所以我们需要增加投影向量w的个数（当然每个向量维数和数据是相同的，不然怎么投影呢），设w为：

w1、w2等是n维的列向量，所以w是个n行k列的矩阵，这里的k其实可以按照需要随意选取，只要能合理表征原数据就好。x在w上的投影可以表示为：

所以这里的y是k维的列向量。

像上一节一样，我们将从投影后的类间散列度和类内散列度来考虑最优的w，考虑图（2）中二维数据分为三个类别的情况。与第一节类似，μi依然代表类别i的中心，而Sw定义如下：

其中：

$$S_{wi}=\sum_{x\in\omega_i}(x-\mu_i)(x-\mu_i)^T$$

代表类别i的类内散列度，它是一个nxn的矩阵。

所有x的中心μ定义为：

$$\mu=\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{\forall x}x=\frac{1}{N}\sum_{x\in\omega_i}N_i\mu_i$$

类间散列度定义和上一节有较大不同：

$$S_B=\sum_{i=1}^{c}N_i(\mu_i-\mu)(\mu_i-\mu)^T$$

代表的是每个类别到μ距离的加和，注意Ni代表类别i内x的个数，也就是某个人的人脸图像个数。

上面的讨论都是投影之间的各种数据，而J(w)的计算实际是依靠投影之后数据分布的，所以有：

$$\widetilde{S_w}=\sum_{i=1}^{c}\sum_{y\in\omega_i}(y-\widetilde{\mu_i})(y-\widetilde{\mu_i})^T$$

$$\widetilde{S_B} = \sum_{i=1}^{C} N_i(\widetilde{\mu_i} - \widetilde{\mu})(\widetilde{\mu_i} - \widetilde{\mu})^T$$

分别代表投影后的类别i的中心，所有数据的中心，类内散列矩阵，类间散列矩阵。与上节类似J(w)可以定义为：

回想我们上节的公式J(w)，分子是两类中心距，分母是每个类自己的散列度。现在投影方向是多维了（好几条直线），分子需要做一些改变，我们不是求两两样本中心距之和（这个对描述类别间的分散程度没有用），而是求每类中心相对于全样本中心的散列度之和。得到：

$$J(w) = \frac{|\widetilde{S_B}|}{|\widetilde{S_w}|} = \frac{|W^T S_B W|}{|W^T S_w W|}$$

最后化为：

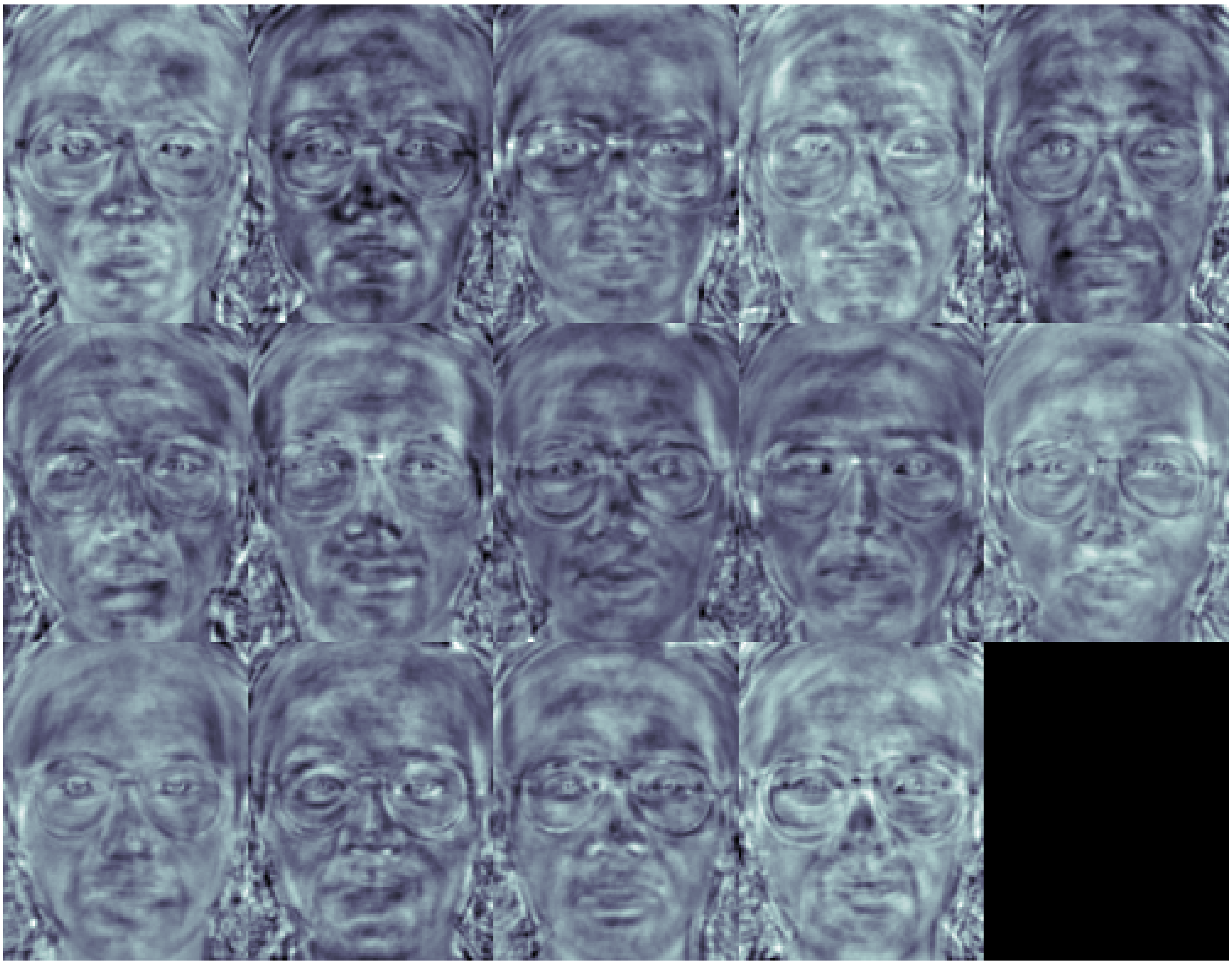
还是求解矩阵的特征向量，然后根据需求取前k个特征值最大的特征向量。

另外还需注意：

由于SB中的（μi-μ）秩为1，所以SB的至多为C（矩阵的秩小于等于各个相加矩阵的和）。又因为知道了前C-1个μi后，最后一个μc可以用前面的μi来线性表示，因此SB的秩至多为C-1，所以矩阵的特征向量个数至多为C-1。因为C是数据集的类别，所以假设有N个人的照片，那么至多可以取到N-1个特征向量来表征原数据。（存疑）

如果你读过前面的一篇文章PCA理论分析，会知道PCA里求得的特征向量都是正交的，但是这里的并不是对称的，所以求得的K个特征向量不一定正交，这是LDA和PCA最大的不同。

如前所述，如果在一个人脸集合上求得k个特征向量，还原为人脸图像的话就像下面这样：



得到了k个特征向量，如何匹配某人脸和数据库内人脸是否相似呢，方法是将这个人脸在k个特征向量上做投影，得到k维的列向量或者行向量，然后和已有的投影求得欧式距离，根据阈值来判断是否匹配。具体的方法在人脸识别经典算法一：特征脸方法（Eigenface）里有，可前往查看。需要说明的是，LDA和PCA两种方法对光照都是比较敏感的，如果你用光照均匀的图像作为依据去判别非均匀的，那基本就惨了。

参考文献：

[1]Jerry Lead线性判别分析（Linear Discriminant Analysis）（一）

[2]http://docs.opencv.org/modules/contrib/doc/facerec/facerec_tutorial.html