第六章　特征值

复习题

1. 如果与 n 阶方阵 A 相似的矩阵只能是 A 本身，则 A 为数量矩阵 cE_n.

证明 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$. 由已知条件可知, 对于任意可逆矩阵 P, 都有 $P^{-1}AP=A$, 即 $AP=PA$. 取 $P=\mathrm{diag}\{1,2,3,\cdots,n\}$, 则 AP 的第 (i,j) 元为 ja_{ij}, 而 PA 的第 (i,j) 元为 ia_{ij}, 由 $AP=PA$, $ja_{ij}=ia_{ij}$, 得当 $i\neq j$ 时， $a_{ij}=0$, 所以 A 是对角阵. 再取 $P=\begin{pmatrix}0 & E_{n-1}\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, 则 $AP=(a_{nn}\varepsilon_n,a_{11}\varepsilon_1,\cdots,a_{n-1,n-1}\varepsilon_{n-1})$, $PA=(a_{11}\varepsilon_n,a_{22}\varepsilon_1,\cdots,a_{nn}\varepsilon_{n-1})$, 由 $AP=PA$, 进一步得 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}$, 即 A 为数量阵.

2. 如果任意非零向量都是 n 阶方阵 A 的特征向量，则 A 为数量矩阵 cE_n.

证明 (法一) 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 n 维标准单位列向量，由题设它们都是 A 的特征向量，即有特征值 λ_i 使得 $A\varepsilon_i=\lambda_i\varepsilon_i$. 从而 $A=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$. 由题设，知 $X=(1,1,\ldots,1)^T$ 也是 A 的特征向量，因此有特征值 c, 使得 $AX=cX$, 即 $(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)^T=c(1,1,\ldots,1)^T$, 从而 $A=cE$.

(法二) 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 n 维向量空间的标准单位列向量, 由题设它们都是 A 的特征向量, 即有特征值 λ_i 使得 $A\varepsilon_i=\lambda_i\varepsilon_i$. 而对任意 $1\leq i\neq j\leq n$, $\varepsilon_i+\varepsilon_j$ 也是特征向量, 故有特征值 μ 使得 $A(\varepsilon_i+\varepsilon_j)=\mu(\varepsilon_i+\varepsilon_j)$, 即 $A\varepsilon_i+A\varepsilon_j=\lambda_i\varepsilon_i+\lambda_j\varepsilon_j=\mu\varepsilon_i+\mu\varepsilon_j$. 因为 $\varepsilon_i,\varepsilon_j$ 线性无关, 故应有 $\lambda_i=\mu=\lambda_j$. 因此 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=c$, 从而

$$AE_n=A(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(A\varepsilon_1,\cdots,A\varepsilon_n)=(c\varepsilon_1,\cdots,c\varepsilon_n)=cE_n,$$

即 $A=cE_n$, 其中 c 是常数.

3. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵， B 是 $n\times m$ 矩阵，且 $m\geq n$. 求证：

(1)

$$f_{AB}(\lambda)=\lambda^{m-n}f_{BA}(\lambda);$$

(2)

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).$$

证明 (1) (法一) 构造 $m \times m$ 阶方阵 $A_1 = (A, 0)$ 和 $B_1 = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$, 由 6.1 节例 4 知

$$\det(\lambda E_m - A_1B_1) = \det(\lambda E_m - B_1A_1).$$

而

$$\det(\lambda E_m - A_1B_1) = \det(\lambda E_m - AB),$$

故

$$\det(\lambda E_m - B_1A_1) = \left|\lambda E_m - \begin{pmatrix} BA & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right| = \lambda^{m-n}\det(\lambda E_n - BA),$$

所以

$$\det(\lambda E_m - AB) = \lambda^{m-n}\det(\lambda E_n - BA).$$

(法二) 设 $r(A) = r$, 则存在可逆阵 $P \in F^{m\times m}, Q \in F^{n\times n}$, 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

令

$$Q^{-1}BP^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

其中 $B_{11} \in F^{r\times r}$. 这样,

$$PABP^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q^{-1}BAQ = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

因此

$$|\lambda E_m - AB| = \begin{vmatrix} \lambda E_r - B_{11} & -B_{12} \\ 0 & \lambda E_{m-r} \end{vmatrix} = \lambda^{m-r}|\lambda E_r - B_{11}|,$$

$$|\lambda E_n - BA| = \begin{vmatrix} \lambda E_r - B_{11} & 0 \\ -B_{21} & \lambda E_{n-r} \end{vmatrix} = \lambda^{n-r}|\lambda E_r - B_{11}|.$$

比较两个式子，命题成立.

(法三) 因为

$$\begin{pmatrix} E_m & A \\ B & \lambda E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda E_m & 0 \\ -B & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda E_m - AB & A \\ 0 & \lambda E_n \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} E_m & A \\ B & \lambda E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda E_m & -A \\ 0 & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda E_m & 0 \\ \lambda B & \lambda E_n - BA \end{pmatrix}.$$

两式取行列式，利用 Laplace 展开定理，即得到结论.

(法四) 因为

$$\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ -B & \lambda E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda E_m - AB & A \\ 0 & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ B & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda E_m & A \\ 0 & \lambda E_n - BA \end{pmatrix}$$

两边取行列式，利用 Laplace 展开定理，即得到结论.

(2) 因为 $\mathrm{tr}(AB)$ 是 $f_{AB}(\lambda)$ 的 λ^{n-1} 的系数, 所以由 (1) 知, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

4. 设 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, 且 $\alpha\alpha^T = 1$, 求 $E_n - 2\alpha^T\alpha$ 的特征值.

解 记 $A = E_n - 2\alpha^T\alpha$, 则 A 的特征多项式

$$f_A(\lambda) = \det(\lambda E_n - A) = \det((\lambda - 1)E_n + 2\alpha^T\alpha).$$

由已知条件知 $\alpha\alpha^T = 1$, 根据上题的结论,

$$f_A(\lambda) = (\lambda - 1)^{n-1}(\lambda - 1 + 2\alpha\alpha^T) = (\lambda - 1)^{n-1}(\lambda + 1).$$

因此, A 的特征值是 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = 1$, $\lambda_n = -1$.

5. 设 n 阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ b & 1 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) 求 A 的特征值和特征向量;

(2) 求可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

解 当 $b = 0$ 时, $A = E$. 所以 1 是 A 的所有特征值，而任意非零向量都是 A 的特征向量. 且任意可逆矩阵 P 都使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

当 $b \neq 0$ 时,

(1) 根据本复习题 3 的结论, A 的特征多项式为

$$f_A(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \left| (\lambda - 1 + b)E - b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}^T (1, 1, \cdots, 1) \right| = (\lambda - 1 + b)^{n-1}(\lambda - 1 + b - nb).$$

所以

$$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=1-b,\quad \lambda_n=1+(n-1)b.$$

对于 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=1-b$, 解线性方程组 $((1-b)E-A)X=0$, 得到一个基础解系 $X_1=(-1,1,0,0,\cdots,0)^T$, $X_2=(-1,0,1,0,\cdots,0)^T$, $\cdots$, $X_{n-1}=(-1,0,0,0,\cdots,1)^T$. 所以属于特征值 $1-b$ 的特征向量为 $a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_{n-1}X_{n-1}$, 其中 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ 是 F 中不全为零的数.

对于 $\lambda_n=1+(n-1)b$, 解线性方程组 $((1+(n-1)b)E-A)X=0$, 得到一个基础解系 $X_n=(1,1,1,1,\cdots,1)^T$. 所以属于特征值 $1+(n-1)b$ 的特征向量为 a_nX_n, 其中 a_n 为 F 中非零数.

(2) 由 (1) 可知，令

$$P=\begin{pmatrix} -1 & -1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

则有

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1-b & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1-b & \\ & & & 1+(n-1)b \end{pmatrix}.$$

6. 设 φ 是 $\mathbb{C}$ 上 n 维线性空间 V 的线性变换, 求证: 对于任意的 r, $1\le r\le n$, 存在 V 的 r 维 φ- 不变子空间.

证 因为 V 是 $\mathbb{C}$ 上 n 维线性空间, 根据定理 4.1.4, 存在 V 的一个基 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$, 使得

$$\varphi(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

对于 r, 记 $V_r=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r\}$, 则 V_r 是 V 的 r 维 φ- 不变子空间.

7. 设 A 是 n 阶矩阵， $X_1,X_2,\cdots,X_n\in F^n$, 且 $X_n\neq 0$. 若 $AX_1=X_2$,$AX_2=X_3$,$\cdots$, $AX_{n-1}=X_n$, $AX_n=0$.

(1) 证明 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 线性无关;

(2) 求 A 的特征值和特征向量;

(3) 问 A 可否对角化.

证明 (1) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in F$, 使得

$$a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n = 0.$$

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中第一个非 0 者为 a_i, 即 $a_iX_i + a_{i+1}X_{i+1} + \cdots + a_nX_n = 0$. $A^{n-i}(a_iX_i + a_{i+1}X_{i+1} + \cdots + a_nX_n) = 0$, 即 $a_iX_n = 0$. 由已知条件 $X_n \neq 0$, 则 $a_i = 0$, 矛盾. 所以 $a_i = 0$, $1 \leq i \leq n$. 故 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 线性无关.

(2) 令 $P = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$, 由 (1) 知 P 可逆, 且由已知条件得 $P^{-1}AP = B$, 其中

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

因为

$$\det(\lambda E - B) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^n,$$

因为相似矩阵有相同的特征值, 知 A 有特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

(法一) 因为 A, B 相似, 所以 $r(A) = r(B) = n - 1$, 从而 A 的属于特征值 0 的特征子空间 V_0 维数为 1. 注意到 $AX_n = 0$, $X_n \neq 0$, 因此 X_n 是 A 的属于特征值 0 的特征向量, 且是 V_0 的一个基. 故 A 的属于特征值 0 的所有特征向量为 cX_n, 其中 $0 \neq c \in F$.

(法二) 解线性方程组 $(0E - B)X = 0$, 得到一个基础解系 $X = (0, 0, \cdots, 0, 1)^T$, 因此 B 属于特征值 0 的特征向量是 cX, 其中 c 为 F 中非零数. 因为 $P^{-1}AP = B$, 所以 A 属于特征值 0 的特征向量是 $c(PX)$, 即 cX_n, 其中 c 为 F 中非零数.

(3) 由 (2) 可知, 特征值 0 的几何重数 1 小于代数重数 n, 故 A 不可对角化.

注：设 A, B 相似，即存在可逆矩阵 P, 使得 $B = P^{-1}AP$. 若 X 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量，即 $AX = \lambda X$, 则 $B(P^{-1}X) = P^{-1}APP^{-1}X = \lambda(P^{-1}X)$, 且 $PX \neq 0$, 从而 $P^{-1}X$ 是 B 的属于特征值 λ 的特征向量.

8. 设 $\mathbb{C}$ 上 n 阶方阵 A, B 满足 $AB = BA$, 则 A, B 至少有一个公共特征向量.

证明 将 A, B 看成是 n 维复向量空间 $\mathbb{C}^n$ 上的线性变换. 设 λ_0 是线性变换 A 的特征值， V_{λ_0} 是特征值 λ_0 的特征子空间，则 V_{λ_0} 是 A 的不变子空间. 另一方面，对任意的 $X \in V_{\lambda_0}$,

$$A(BX) = B(AX) = B(\lambda_0 X) = \lambda_0(BX),$$

即 $BX \in V_{\lambda_0}$. 因此 V_{λ_0} 也是 B 的不变子空间. 令 $B|_{V_{\lambda_0}}$ 是线性变换 B 在 V_{λ_0} 上的限制，由于 V_{λ_0} 是复数域上的线性空间，因此 $B|_{V_{\lambda_0}}$ 至少有一个复特征值 c 和相应特征向量 X. 因为 $X \in V_{\lambda_0}$, 所以 X 是 A 的特征向量. 因为 $B|_{V_{\lambda_0}}X = cX$, 即 $BX = cX$, 所以 X 也是 B 的特征向量.

9. 设 $\mathbb{C}$ 上 m 个 n 阶方阵 A_i 满足

$$A_iA_j = A_jA_i (i, j = 1, 2, \cdots, m),$$

则 A_1, A_2, $\cdots$, A_m 至少有一个公共特征向量.

证明 对 m 用归纳法. 当 $m = 2$ 时，由复习题 8 知结论成立. 归纳假设当 $m-1$ 个矩阵时命题成立，考虑 m 个矩阵的情形. 因 A_m 是 $\mathbb{C}$ 上 n 阶方阵， A_m 至少有个特征值 λ_m, 相应的特征子空间为 V_m. 由 $\{A_i | i = 1, \ldots, m\}$ 两两可交换，类似复习题 8 的证明知 V_m 是 A_i 的不变子空间 $(i = 1, 2, \cdots, m-1)$. 令 $A_i|_{V_m}$ 是 A_i 在 V_m 上的限制. 则

$$A_i|_{V_m}A_j|_{V_m} = A_j|_{V_m}A_i|_{V_m}, \quad (i, j = 1, 2, \cdots, m-1).$$

由归纳假设得，对 $i = 1, 2, \cdots, m-1$, 存在 $Y \in V_m$, 使得 $A_i|_{V_m}Y = \lambda_i Y$. 进而 $A_iY = \lambda_i Y$. 注意到 $Y \in V_m$, 因此 $A_mY = \lambda_m Y$.

10. 设 F 上 n 阶方阵 A, B 满足 $AB = BA$, 且 $f_A(\lambda), f_B(\lambda)$ 的根全在 F 上，则存在可逆阵 P, 使得 $P^{-1}AP$, $P^{-1}BP$ 同时为上三角矩阵.

证明 对矩阵的阶 n 用归纳法. 当 $n=1$ 时结论显然, 假定对 $n-1$ 阶矩阵结论成立, 现要对 n 阶矩阵证明结论也成立.

将 A,B 看成是 n 维数域 F 上向量空间 F^n 的线性变换. 由于 A,B 的特征值都在 F 上, 故可设 λ_0 是线性变换 A 的特征值, V_{λ_0} 是特征值 λ_0 的特征子空间, 则 V_{λ_0} 是 A 的不变子空间. 另一方面, 对任意的 $X\in V_{\lambda_0}$,

$$A(BX)=B(AX)=B(\lambda_0 X)=\lambda_0(BX),$$

即 $BX\in V_{\lambda_0}$. 因此 V_{λ_0} 也是 B 的不变子空间.

设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 是 V_{λ_0} 的一个基, 将其扩为 V 的一个基 $\xi_1,\cdots,\xi_r,\xi_{r+1},\cdots,\xi_n$, 则 $B(\xi_1,\cdots,\xi_r,\xi_{r+1},\cdots,\xi_n)=(\xi_1,\cdots,\xi_r,\xi_{r+1},\cdots,\xi_n)\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12}\\ 0 & B_{22}\end{pmatrix}$, 其中 B_{11} 为 r 阶方阵. 所以

$$f_B(\lambda)=\det(\lambda E-B_{11})\det(\lambda E-B_{22}). \tag{1}$$

令 $B|_{V_{\lambda_0}}$ 是线性变换 B 在 V_{λ_0} 上的限制, 则 B_{11} 恰为 $B|_{V_{\lambda_0}}$ 在 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 下的矩阵. 因此由 B 的特征值全在 F 上及 (1), 即得 $B|_{V_{\lambda_0}}$ 的特征值也全在 F 上. 所以 $B|_{V_{\lambda_0}}$ 至少有一个特征值 $\mu_0\in F$ 和相应特征向量 X_1. 因为 $X_1\in V_{\lambda_0}$, 所以 X_1 是 A 的特征向量. 因为 $B|_{V_{\lambda_0}}X=\mu_0 X$, 即 $BX_1=\mu_0 X_1$, 所以 X_1 也是 B 的特征向量.

将非零向量 X_1 扩为 F^n 的一个基 $X_1,X_2,\cdots,X_n$. 令 $Q=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$, 则 Q 可逆且

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}\lambda_0 & *\\ 0 & A_1\end{pmatrix},\quad Q^{-1}BQ=\begin{pmatrix}\mu_0 & *\\ 0 & B_1\end{pmatrix}.$$

因为 $AB=BA$, 所以

$$\begin{pmatrix}\lambda_0 & *\\ 0 & A_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_0 & *\\ 0 & B_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu_0 & *\\ 0 & B_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_0 & *\\ 0 & A_1\end{pmatrix},$$

故 $A_1B_1=B_1A_1$. 又因为 $f_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)f_{A_1}(\lambda)$, $f_B(\lambda)=(\lambda-\nu_0)f_{B_1}(\lambda)$, 所以 $f_{A_1}(\lambda)$, $f_{B_1}(\lambda)$ 的根全在 F 上. 因此由归纳假设, 存在 F 上 $n-1$ 阶可逆矩阵 R 使 $R^{-1}A_1R$ 及 $R^{-1}B_1R$ 同时为上三角矩阵. 令

$$P=Q\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & R\end{pmatrix},$$

则

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}^{-1} Q^{-1}AQ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & * \\ 0 & R^{-1}A_1R \end{pmatrix}$$

是个上三角阵. 同理,

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}^{-1} Q^{-1}BQ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_0 & * \\ 0 & R^{-1}B_1R \end{pmatrix}$$

也是上三角矩阵.

11. 设 F 上 n 阶方阵 A, B 满足 $AB = BA$, 且 A 有 n 个不同的特征值, 则 B 相似于对角矩阵.

证明 (法一) 设 A 的 n 个不同的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则存在可逆矩阵 P, 使得

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n).$$

由 $AB = BA$, 得

$$P\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)P^{-1}B = BP\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)P^{-1}.$$

令 $C = P^{-1}BP$, 则

$$C\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)C.$$

设 $C = (c_{ij})_{n\times n}$, 则由

$$C\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = (\lambda_j c_{ij})_{n\times n}, \qquad \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)C = (\lambda_i c_{ij})_{n\times n},$$

得

$$\lambda_i c_{ij} = \lambda_j c_{ij}.$$

由已知, 当 $i \neq j$ 时, $\lambda_i \neq \lambda_j$, 所以 $c_{ij} = 0$. 从而 $C = \mathrm{diag}(c_{11}, c_{22}, \cdots, c_{nn})$. 即 C 是对角阵. 因为 B 和 C 相似, 故 B 可对角化.

(法二) 因 A 有 n 个不同的特征值, 所以 A 的属于特征值 λ_i 的特征子空间 V_{λ_i} 的维数为 1, $i = 1, 2, \cdots, n$. 又因为 $AB = BA$, 类似复习题 10 的证明在每个 V_{λ_i} 中均存在 A, B 的公共特征向量 $X_i \in V_{\lambda_i}$, 使得 $AX_i = \lambda_i X_i$, $BX_i = \mu_i X_i$,

$i=1,2,\cdots,n$. 由于 A 的特征值 λ_i 两两互异，且不同特征值的特征向量是线性无关的，因此 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 线性无关，从而矩阵 $P=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 可逆，且 $P^{-1}BP=\mathrm{diag}\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n\}$.

12. 设 n 阶方阵 A,B 有 n 个公共的不同的特征值，则存在 n 阶方阵 P,Q, 使得

$$A=PQ,\quad B=QP.$$

证明 (法一) 因 A,B 有 n 个公共的不同的特征值，故矩阵 A,B 相似于同一个对角矩阵，因此 A 和 B 相似. 不妨设 $B=P^{-1}AP$. 令 $Q=P^{-1}A$, 则 $PQ=A, B=QP$.

(法二) 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A, B 的公共特征值. 因这些特征值两两互异，因此 A, B 均相似于对角阵 $D=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$. 即存在可逆矩阵 S 和 T, 使得 $S^{-1}AS=D=T^{-1}BT$, 则 $P=SDT^{-1}$, $Q=TS^{-1}$ 即为所求.

13. 设 n 阶方阵 $C=AB-BA$, 且满足 $AC=CA$, $BC=CB$, 求证 C 的特征值全为零.

证明 (法一) 将 A,B,C 看成是复 n 维列向量空间 $\mathbb{C}^n$ 上的线性变换. 设 λ_0 是 C 的一个特征值，V_{λ_0} 是 C 的属于特征值 λ_0 的特征子空间. 由 $AC=CA, BC=CB$ 可知，V_{λ_0} 是 A 及 B 作为线性变换的不变子空间. 将 A,B,C 限制在 V_{λ_0} 上，这时 $C|_{V_{\lambda_0}}$ 的迹等于 $r\lambda_0$, 其中 r 是 V_{λ_0} 的维数. 而 $A|_{V_{\lambda_0}}B|_{V_{\lambda_0}}-B|_{V_{\lambda_0}}A|_{V_{\lambda_0}}$ 的迹等于零. 因为 $C=AB-BA$, 所以

$$C|_{V_{\lambda_0}}=A|_{V_{\lambda_0}}B|_{V_{\lambda_0}}-B|_{V_{\lambda_0}}A|_{V_{\lambda_0}}.$$

因此 $r\lambda_0=0$, 故 $\lambda_0=0$.

(法二) 将 A, B, C 视为 $\mathbb{C}$ 上 n 阶方阵，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 C 的特征值，则 $\lambda_1^k,\lambda_2^k,\cdots,\lambda_n^k$ 是 C^k 的特征值，$k=1,2,\cdots,n$. 因为 $AC=CA$, 所以 $C^2=(AB-BA)C=A(BC-(BC)A$, $C^3=(A(BC-(BC)A)C=A(BC^2)-(BC^2)A$, $\cdots$, $C^n=A(BC^{n-1})-(BC^{n-1})A$, 从而 $\lambda_1^k+\lambda_2^k+\cdots+\lambda_n^k=\mathrm{tr}C^k=\mathrm{tr}(A(BC^{n-1})-(BC^{n-1})A)=0$. 由 Newton 公式得 $\sigma_1=\sigma_2=\cdots=\sigma_n=0$, 从而 $f_A(\lambda)=\lambda^n$, 因此 C 的特征值全为零.