第八章 欧氏空间

1. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是欧式空间 V 中的 m 个向量，矩阵

$$G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=\begin{vmatrix} (\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_m) \\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_m) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\alpha_m,\alpha_1) & (\alpha_m,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_m,\alpha_m) \end{vmatrix}$$

称为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的 Gram 行列式. 证明：$G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=0$ 的充分必要条件是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关.

证明：(法一) 必要性. 设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$. 对 $i=1,2,\cdots,n$, 将 α_i 与该式做内积，得

$$\begin{cases} (\alpha_1,\alpha_1)k_1+(\alpha_1,\alpha_2)k_2+\cdots+(\alpha_1,\alpha_m)k_m=0 \\ (\alpha_2,\alpha_1)k_1+(\alpha_2,\alpha_2)k_2+\cdots+(\alpha_2,\alpha_m)k_m=0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ (\alpha_m,\alpha_1)k_1+(\alpha_m,\alpha_2)k_2+\cdots+(\alpha_m,\alpha_m)k_m=0 \end{cases}$$

若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，则 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$ 有非零解. 因此上述线性方程组有非零解，从而其系数矩阵的行列式为零，即 $G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=0$.

充分性. 若 $G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=0$, 则 $G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ 相应的矩阵的列向量必线性相关，不失一般性，不妨设第 m 个列向量可由其余 $m-1$ 个列向量线性组合表示，即

$$\begin{pmatrix} (\alpha_1,\alpha_m) \\ (\alpha_2,\alpha_m) \\ \vdots \\ (\alpha_m,\alpha_m) \end{pmatrix}=a_1\begin{pmatrix} (\alpha_1,\alpha_1) \\ (\alpha_2,\alpha_1) \\ \vdots \\ (\alpha_m,\alpha_1) \end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix} (\alpha_1,\alpha_2) \\ (\alpha_2,\alpha_2) \\ \vdots \\ (\alpha_m,\alpha_2) \end{pmatrix}+\cdots+a_{m-1}\begin{pmatrix} (\alpha_1,\alpha_{m-1}) \\ (\alpha_2,\alpha_{m-1}) \\ \vdots \\ (\alpha_m,\alpha_{m-1}) \end{pmatrix},$$

故

$$\begin{pmatrix} (\alpha_1,\alpha_m-a_1\alpha_1-a_2\alpha_2-\cdots-a_{m-1}\alpha_{m-1}) \\ (\alpha_2,\alpha_m-a_1\alpha_1-a_2\alpha_2-\cdots-a_{m-1}\alpha_{m-1}) \\ \vdots \\ (\alpha_m,\alpha_m-a_1\alpha_1-a_2\alpha_2-\cdots-a_{m-1}\alpha_{m-1}) \end{pmatrix}=0,$$

即

$$(\alpha_i,\alpha_m-a_1\alpha_1-a_2\alpha_2-\cdots-a_{m-1}\alpha_{m-1})=0, i=1,2,\cdots,m,$$

从而

$$(v_m-a_1\alpha_1-a_2\alpha_2-\cdots-a_{m-1}\alpha_{m-1},\alpha_m-a_1\alpha_1-a_2\alpha_2-\cdots-a_{m-1}\alpha_{m-1})=0,$$

由内积定义即得 $v_m-a_1\alpha_1-a_2\alpha_2-\cdots-a_{m-1}\alpha_{m-1}=0$, 即 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关.

(法二) 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是 n 维欧氏空间 V 的一个标准正交基，$X_1,X_2,\cdots,X_m$ 分别是 α_i 在 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 下的坐标，则 $(\alpha_i,\alpha_j)=X_i^TX_j$, $i,j=1,2,\cdots,m$. 令 $A=(X_1,X_2,\cdots,X_m)$, 则 $G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=A^TA$. 因 $A\in\mathbb{R}^{n\times m}$, 因此 $r(A^TA)=r(A)$, 进而 $G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=0$

的充分必要条件是 $r(A^TA) = r(A) < m$ 的充分必要条件是 A 的列向量线性相关的充分必要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关. $\square$

2. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是欧氏空间 V 的 n 个线性无关的向量, $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ 是这组向量经过正交化所得到的向量组. 求证: $G(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = G(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n) = (\gamma_1, \gamma_1)(\gamma_2, \gamma_2)\cdots(\gamma_n, \gamma_n)$.

证明: (法一) 首先, 因 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ 是正交向量组, 所以 $(\gamma_i, \gamma_j) = 0$, $i \neq j$, 从而

$$G(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n) = \begin{vmatrix} (\gamma_1, \gamma_1) & & & \\ & (\gamma_2, \gamma_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\gamma_n, \gamma_n) \end{vmatrix} = (\gamma_1, \gamma_1)(\gamma_2, \gamma_2)\cdots(\gamma_n, \gamma_n).$$

其次, 由 Schmidt 正交化方法知: $\alpha_1 = \gamma_1$, $\alpha_2 = a_{21}\gamma_1 + \gamma_2$, $\cdots$, $\alpha_n = a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + \cdots + \gamma_n$. 记 $A = (a_{ij})_{n\times n}$, 其中 $a_{ii} = 1, a_{ij} = 0, 1 \leq j < i \leq n$, 则 A 是单位上三角阵. 直接计算有

$$(\alpha_i, \alpha_j) = (\sum_{s=1}^{n} a_{is}\gamma_s, \sum_{t=1}^{n} a_{jt}\gamma_t) = \sum_{s=1}^{n} a_{is}a_{js}(\gamma_s, \gamma_s).$$

所以 $G(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\det A^T)G(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n)(\det A) = G(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n)$.

(法二) 设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是 V 的一个标准正交基, α_i 在该基下的坐标向量是 X_i, 则 $(\alpha_i, \alpha_j) = X_i^TX_j$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 因此 $G(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \det((X_1, X_2, \cdots, X_n)^T(X_1, X_2, \cdots, X_n))$.

记 γ_i 在 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 下的坐标向量为 Y_i. 从 Schmidt 正交化方法中可得到: $\gamma_1 = \alpha_1, \gamma_2 = a_{21}\alpha_1 + \alpha_2$, $\cdots$, $\gamma_n = a_{n1}\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. 因此

$$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n) = (X_1, X_2, \cdots, X_n)A,\ A = \begin{pmatrix} 1 & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ 0 & 1 & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

从而

$$\begin{aligned} G(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n) &= \det((Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)^T(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)) \\ &= \det(A^T(X_1, X_2, \cdots, X_n)^T(X_1, X_2, \cdots, X_n)A) \\ &= \det((X_1, X_2, \cdots, X_n)^T(X_1, X_2, \cdots, X_n)) = G(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n). \end{aligned}$$

又因 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots \gamma_n$ 是两两正交的, 则 $G(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n)$ 是对角阵, 故

$$G(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n) = (\gamma_1, \gamma_1)(\gamma_2, \gamma_2)\cdots(\gamma_n, \gamma_n).$$

$\square$

3. 设 V 是 n 维实列向量组成的欧氏空间 (内积取为标准内积), 设有 n 个未知数 n 个方程式的非齐次线性方程组 $AX = \beta$, 求证: 上述方程组有解的充分必要条件是向量 β 与齐次线性方程组 $A^TX = 0$ 的解空间正交.

证明: (法一) 充分性. 设 $r(A) = r$, $A^TX = 0$ 的解空间 U 的基为 η_1, η_2, $\cdots$, η_{n-r}. 令矩阵 $B = (\eta_1, \cdots, \eta_{n-r})$, 则 $A^TB = 0$, 进而 $B^TA = 0$, 结合 A 的秩为 r, 得 $U^\perp$ 为 A 的列向量生成的子空间. 由设 $\beta \in U^\perp$, 则 $r(A, \beta) = r(A)$, 所以 $AX = \beta$ 有解.

必要性. 若 $AX=\beta$ 有解, 则 $r(A,\beta)=r(A)$, 从而 β 属于 A 的列向量生成的子空间. 注意到 $U^{\perp}$ 为 A 的列向量生成的子空间, 所以 $\beta\in U^{\perp}$, 即 β 属于齐次线性方程组 $A^TX=0$ 的解空间的正交补空间.

(法二) 将矩阵 A 按列分块为 $A=(A_1,A_2,\cdots,A_n)$, $r(A)=r$. 设 η_1, η_2, $\cdots$, η_{n-r} 为 $U=\{X|A^TX=0\}$ 的一个基. 记 $W=\langle A_1,A_2,\cdots,A_n\rangle$, 可证 $U^T=W$. 事实上, 由 U 的定义知每个 A_i 均与 $\eta_j(j=1,2,\cdots,n-r)$ 正交, 因此 $W\subseteq U^T$. 又 $\dim U^T=r=r(A)=\dim W$, 故 $U^T=W$. 从而 $AX=\beta$ 有解的充分必要条件是 $\beta\in W$ 的充分必要条件是 $\beta\in U^T$. □

4. 设 U 是 n 维欧式空间 V 的子空间, 有 $V=U\bigoplus U^{\perp}$, 对于任意的 $\alpha\in V$, $\alpha=\beta+\gamma$, 其中 $\beta\in U$ 称为 α 在 U 的正投影, $\gamma\in U^{\perp}$, 求证: 对于 U 中任意的 $\beta'\neq\beta$, 有 $\mid\alpha-\beta\mid<\mid\alpha-\beta'\mid$.

证明: (法一) $V=U\bigoplus U^{\perp}$, 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 是 U 的一个标准正交基; $\xi_{r+1},\xi_{r+2},\cdots,\xi_n$ 是 $U^{\perp}$ 的一个标准正交基. 则对任意的 $\alpha\in V$,

$$\alpha=\beta+\gamma=\sum_{i=1}^{r}a_i\xi_i+\sum_{i=r+1}^{n}a_i\xi_i,\ a_i=(\alpha,\xi_i),\ \mid\alpha-\beta\mid^2=\sum_{i=r+1}^{n}a_i^2.$$

对任意的 $\beta=\beta'\in V$, $\beta'=b_1\xi_1+\cdots+b_r\xi_r$, 且至少有一个 $b_i\neq a_i$, 因此

$$\mid\alpha-\beta'\mid^2=\mid\sum_{i=1}^{r}(a_i-b_i)\xi_i\mid^2+\sum_{i=r+1}^{n}a_i^2=\sum_{i=1}^{r}(a_i-b_i)^2+\sum_{i=r+1}^{n}a_i^2>\mid\alpha-\beta\mid^2.$$

(法二) 对任意的 $\beta\neq\beta'\in U$, $0\neq\beta-\beta'\in U$, $\gamma\in U^{\perp}$, 所以由已知 $\alpha=\beta+\gamma$ 及勾股定理知 $|\alpha-\beta'|^2=|(\beta-\beta')+\gamma|^2=|\beta-\beta'|^2+|\gamma|^2>|\gamma|^2=|\alpha-\beta|^2$. □

注: 本题说明向量 α 和 V 的子空间 U 的最短距离为 α 在 U^T 的正投影的长度.

5. 证明: 在 R^3 中向量 (x_0,y_0,z_0) 到平面 $U=(x,y,z)\in R^3\mid ax+by+cz=0$ 的最短距离等于

$$\frac{|ax_0+by_0+cz_0|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

证明: $U=\{(x,y,z)|ax+by+cz=0\}$, 则 $U^T=\langle(a,b,c)\rangle$, 及 $\xi=\frac{(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ 是 U^T 的一个标准正交基. 由复习题 5 知, 所求最短距离为 (x_0,y_0,z_0) 在 U^T 的正投影 γ 的长度, $\gamma=((x_0,y_0,z_0),\xi)\xi$, 故所求最短距离为 $\frac{|ax_0+by_0+cz_0|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. □

6. 设 A 是 n 阶实可逆矩阵, 求证: A 可分解为 $A=QT$, 其中 Q 是正交阵, T 是主对角线上的元素均大于零的上三角阵, 且这样的分解是唯一的.

证明: 存在性. 将 A 按列分块为 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$. 因 A 可逆, 故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是线性无关向量组, 可用 Schmidt 法将 α_i 正交化, 再将其标准化得 β_i, 整理得

$$\begin{cases}\beta_1=c_{11}\alpha_1\\ \beta_2=c_{21}\alpha_1+c_{22}\alpha_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \beta_n=c_{n1}\alpha_1+c_{n2}\alpha_2+\cdots+c_{nn}\alpha_n\end{cases}$$

其中 c_{ij} 为实数且 $c_{ii}>0$. 用矩阵形式表示为

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=A\begin{pmatrix}c_{11}&c_{21}&\cdots&c_{n1}\\0&c_{22}&\cdots&c_{n2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&c_{nn}\end{pmatrix},$$

即 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=AC$, $Q=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$ 为正交阵，所以 $A=QT$, 其中 $T=C^{-1}$. 因为 C 是主对角元为正的实上三角阵，故 T 也是主对角元大于 0 的上三角阵.

唯一性. 若有两个分解 $A=QT=Q_1T_1$, 则 $Q^{-1}Q_1=TT_1^{-1}$. 一方面正交阵的逆仍是正交阵，两个正交阵的积也是正交阵，所以 $Q^{-1}Q_1(=TT_1^{-1})$ 是正交阵. 另一方面上三角阵之积也是上三角阵，所以 $(Q^{-1}Q_1=)TT_1^{-1}$ 是上三角阵. 而上三角阵若为正交阵则必是对角阵且对角元为 ±1, 但 TT_1^{-1} 的对角元均为正，因此 $Q^{-1}Q_1=TT_1^{-1}=I$. 故 $T=T_1$, $Q=Q_1$, 即 $A=QT$ 的分解唯一. □

7. 设 V_1, V_2 是 n 维欧氏空间 V 的子空间.

(1) $(V_1^{\perp})^{\perp}=V_1$;

(2) $V_1\subseteq V_2$, 则 $V_2^{\perp}\subseteq V_1^{\perp}$;

(3) $(V_1+V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}$;

(4) $(V_1\cap V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}+V_2^{\perp}$.

证明：(1) 一方面，$V=(V_1^{\perp})\oplus(V_1^{\perp})^{\perp}$, 故 $\dim(V_1^{\perp})^{\perp}=n-\dim(V_1^{\perp})=\dim V_1$. 另一方面，对任意的 $u_1\in V_1$, $u\in V_1^{\perp}$, $(u_1,u)=0$, 故 $V_1\subseteq(V_1^{\perp})^{\perp}$, 从而 $(V_1^{\perp})^{\perp}=V_1$.

(2) 对任意的 $u\in V_2^{\perp}$, 任意的 $u_2\in V_2$, 有 $(u,u_2)=0$. 又已知 $V_1\subseteq V_2$, 任意的 $u_1\in V_1\subseteq V_2$, $(u,u_1)=0$. 因而 $u\in V_1^{\perp}$, 从而 $V_2^{\perp}\subseteq V_1^{\perp}$.

(3) 依题意, 对任意的 $u\in(V_1+V_2)^{\perp}$, $v_1+v_2\in V_1+V_2$, 总有 $(u,v_1+v_2)=0$. 显然 $v_2=0\in V_2$, 上式即为对任意的 $v_1\in V_1$, 总有 $(u,v_1)=0$, 因此 $u\in V_1^{\perp}$. 同理，$u\in V_2^{\perp}$, 因此 $(V_1+V_2)^{\perp}\subseteq V_1^{\perp}\bigcap V_2^{\perp}$.

另一方面，对任意的 $v\in V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}$, $u_1+u_2\in V_1+V_2$, 有 $(v,u_1)=0$, $(v,u_2)=0$. 从而 $(v,u)=(v,u_1)+(v,u_2)=0$, 于是 $v\in(V_1+V_2)^{\perp}$, 即 $V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}\subseteq(V_1+V_2)^{\perp}$. 综上所述，成立 $(V_1+V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}$.

(4) 由 (1) 及 (3), 我们可得 $(V_1^{\perp}+V_2^{\perp})^{\perp}=(V_1^{\perp})^{\perp}\cap(V_2^{\perp})^{\perp}=V_1\cap V_2$, 从而有 $(V_1\cap V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}+V_2^{\perp}$. □

8. 设 φ 是 n 维欧式空间 V 的对称变换. U 是 $\varphi-$ 不变子空间，则 $U^{\perp}$ 也是 $\varphi-$ 不变子空间.

证明：(法一) 设 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m$ 是 U 的一个标准正交基，将其扩为 V 一个标准正交基 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$. 则 $U^T=\langle\gamma_{m+1},\gamma_{m+2},\cdots,\gamma_n\rangle$. 由已知 U 是 $\varphi-$ 不变子空间，则

$$\varphi(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)\begin{pmatrix} A & C\\ 0 & B\end{pmatrix}.$$

又因为 φ 是对称变换，故 $\begin{pmatrix} A & C\\ 0 & B\end{pmatrix}$ 是对称阵，从而 $C=0$, 所以 $U^{\perp}$ 也是 $\varphi-$ 不变子空间.

(法二) 对任意的 $\alpha\in U^{\perp}$, 往证 $\varphi(\alpha)\in U^{\perp}$. 事实上，对任意的 $\beta\in U$, 因 U 是 $\varphi-$ 不变子空间，故 $\varphi(\beta)\in U$. 又因 φ 是对称变换，所以 $(\varphi(\alpha),\beta)=(\alpha,\varphi(\beta))=0$, 故 $\varphi(\alpha)\in U^{\perp}$, 即 $U^{\perp}$ 也是 $\varphi-$ 不变子空间. □

9. 设 φ 是欧式空间 V 的正交变换，U 是 $\varphi-$ 不变子空间，则 $U^{\perp}$ 也是 $\varphi-$ 不变子空间.

证明：(法一) 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m$ 为 U 的一个标准正交基，将其扩为 V 的一个标准正交基 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$, 则 $U^{\perp}=\langle\xi_{m+1},\cdots,\xi_n\rangle$, $V=U\bigoplus U^{\perp}$. 由假设 U 是 $\varphi-$ 不变子空间，从而 $\varphi(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\begin{pmatrix} A & B\\ 0 & C\end{pmatrix}$. 又因为 φ 是正交变换，则 $\begin{pmatrix} A & B\\ 0 & C\end{pmatrix}$ 为正交阵，即 $\begin{pmatrix} A & B\\ 0 & C\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A & B\\ 0 & C\end{pmatrix}^{T}$, 直接计算即得 $B=0$, 因此 $U^{\perp}$ 也是 $\varphi-$ 不变子空间.

(法二) 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m$ 为 U 的一个标准正交基，将其扩为 V 的一个标准正交基 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$，则 $U=\langle\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m\rangle$, $U^\perp=\langle\xi_{m+1},\cdots,\xi_n\rangle$. 因为 φ 正交，从而 $\varphi(\xi_1),\varphi(\xi_2),\cdots,\varphi(\xi_n)$ 是 V 的一个标准正交基. 又因为 U 是 $\varphi-$ 不变子空间，所以 $\varphi(\xi_1),\varphi(\xi_2),\cdots,\varphi(\xi_m)\in U$, 且由正交知它们线性无关，个数为 U 的维数，因此是 U 的一个基. 此外，$\varphi(\xi_{m+1}),\varphi(\xi_{m+2}),\cdots,\varphi(\xi_n)$ 与 $\varphi(\xi_1),\varphi(\xi_2),\cdots,\varphi(\xi_m)$ 均正交，故 $\varphi(\xi_{m+1}),\varphi(\xi_{m+2}),\cdots,\varphi(\xi_n)\in U^\perp$, 从而 $U^\perp$ 也是 $\varphi-$ 不变子空间.

(法三) 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m$ 为 U 的一个标准正交基，将其扩为 V 的一个标准正交基 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$. 因 φ 是正交变换，因此 $\varphi(\xi_1),\varphi(\xi_2),\cdots,\varphi(\xi_n)$ 也是 V 的一个标准正交基. 又 U 是 $\varphi-$ 子空间，因此 $\varphi(\xi_1),\varphi(\xi_2),\cdots,\varphi(\xi_m)\in U$, 注意到它们正交,因此线性无关且个数为 U 的维数,故 $\varphi(\xi_1),\varphi(\xi_2),\cdots,\varphi(\xi_m)$ 构成 U 的一个基.

对任意 $\alpha\in U^\perp$, $\beta\in U$, $\beta=\sum_{i=1}^m a_i\varphi(\xi_i)$, 注意到 φ 是正交变换，因此

$$(\varphi(\alpha),\beta)=(\varphi(\alpha),\sum_{i=1}^m a_i\varphi(\xi_i))=\sum_{i=1}^m a_i(\varphi(\alpha),\varphi(\xi_i))=\sum_{i=1}^m a_i(\alpha,\xi_i)=0,$$

故 $\varphi(\alpha)\in U^\perp$, 这就证明了 $U^\perp$ 也是 $\varphi-$ 不变子空间.

注：该部分证明也可改为证明对 $i=1,2,\cdots,m$, $(\varphi(\alpha),\varphi(\xi_i))=(\alpha,\xi_i)=0$. □

10. 已知 $\alpha_1=(1,-2,1)^T,\alpha_2=(-1,a,1)^T$ 依次是三阶不可逆实对阵 A 的属于特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1$ 的特征向量. 求

(1) A;

(2) $A^{2010}\beta$, 其中 $\beta=(1,1,1)^T$.

解：(1) 因实对称阵属于不同特征值的特征向量正交，因此 $\alpha_1^T\alpha_2=0$ 得 $a=0$. 又 A 是不可逆矩阵，因此必有特征值 0, 属于 0 特征值的特征向量和 α_1, α_2 正交，计算得 $\alpha_3=(1,1,1)^T$ 是 0 特征值的一个特征向量. 将 α_1, α_2, α_3 单位化得正交矩阵 $U=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}\\-\frac{2}{\sqrt6}&0&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$, 使得 $U^TAU=\mathrm{diag}\{1,-1,0\}$, 即

$$A=U\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix}U^T=\begin{pmatrix}-\frac13&-\frac13&\frac23\\-\frac13&\frac23&-\frac13\\\frac23&-\frac13&-\frac13\end{pmatrix}.$$

(2) 因 β 是 A 的属于 0 特征值的特征向量，故 $A\beta=0$, 进而 $A^{2010}\beta=0$.

11. 设三阶实对称阵 A 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$. 又 $\alpha_1=(1,-1,1)^T$ 是 A 的属于 λ_1 的一个特征向量，记 $B=A^5-4A^3+E$.

(1) 验证 α_1 是 B 的特征向量，并求 B 的全部特征值和特征向量;

(2) 求矩阵 B.

解：(1) $A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1$, $B=A^5-4A^3+E$, 知 B 的特征值为 $-2,1,1$.

$B\alpha_1=(A^5-4A^3+E)\alpha_1=-2\alpha_1$. 所以 B 的属于特征值 -2 的特征向量是 $k_1\alpha_1$, 其中 k_1 为非零实数.

因 B 是对称阵，故 B 属于 1 的特征向量和 α_1 正交，直接计算得 $\alpha_2=(1,1,0)^T$, $\alpha_3=(-1,0,1)^T$, 故 B 的属于特征值 1 的特征向量是 $k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$, 其中 k_2,k_3 是不全为零的实数.

(2) α_1 单位化后得 $\beta_1=(\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3})^T$. 将 α_2,α_3 正交化，再单位化后得 $\beta_2=(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2},0)^T$, $\beta_3=(-\frac{1}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6},\frac{\sqrt2}{\sqrt3})$, 令 $U=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, 则 $B=U\mathrm{diag}\{-2,1,1\}U^T$.

12. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix}$, $\beta=(1,1,-2)^T$. 已知线性方程组 $AX=\beta$ 有解但不唯一，试求：

(1) a 的值;

(2) 正交阵 Q, 使得 Q^TAQ 为对角阵.

解：(1) 因为 $AX=\beta$ 有解但不唯一，则 $\det A=-(a+2)(a-1)^2=0$, 从而 a 应取值 -2 或 1. 又 β 是 $AX=\beta$ 的解，故 $r(A)=r(A,\beta)$, 从而 a 只能取值 -2.

(2) β 与 $AX=0$ 的解空间正交，解得 A 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=3,\lambda_3=-3$, 特征向量为 $\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(-1,0,1)^T,\alpha_3=(1,-2,1)^T$. Schmidt 正交化方法中可得到 $\gamma_1=(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3})^T$, $\gamma_2=(-\frac{1}{\sqrt2},0,\frac{1}{\sqrt2})^T$, $\gamma_3=(\frac{1}{\sqrt6},-\frac{2}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6})^T$. 即 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$, 使得 Q^TAQ 为对角阵.

13. 设

$$A=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&a\\1&1&b\end{pmatrix},$$

已知 $\alpha=(1,1,1)^T$ 是 A 的特征向量.

(1) 求 a,b 的值及特征向量 α 所对应的特征值;

(2) 求 A 的全部特征值和特征向量;

(3) 问 A 是否可对角化？若是，求正交阵 Q, 使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角阵.

解：(1) 由已知条件 α 是 A 的属于特征值 λ_0 的特征向量，则 $A\alpha=\lambda_0\alpha$, 有 $\lambda_0=3,a=1,b=1$.

(2) A 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=3$. $\alpha_1=(-1,-1,2)^T,\alpha_2=(1,-1,0)^T,\alpha_3=(1,1,1)^T$ 是 A 的特征向量，因此的属于特征值 $1,2,3$ 的所有特征向量分别是 $k_1\alpha_1$, $k_2\alpha_2$, $k_3\alpha_3$, 其中 k_1,k_2,k_3 是任意非零实数.

(3) A 是实对称阵，则 A 可对角化. α_1, α_2, α_3 是不同特征值的特征向量，已正交，将它们单位化后得：$\gamma_1=(-\frac{1}{\sqrt6},-\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6})^T$, $\gamma_2=(\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2},0)^T$, $\gamma_3=(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3})^T$. 令 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$, 则 Q^TAQ 为对角阵.

14. 设 φ 是 n 维欧式空间上的线性变换，证明：φ 是对称变换的充分必要条件是 φ 有 n 个两两正交的特征向量.

证明：必要性. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的一个标准正交基，φ 是对称变换，则 φ 在 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的矩阵是实对称阵，所以存在正交阵 U, 使得 $U^TAU=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$, 其中 $\lambda_1,\lambda_2\cdots,\lambda_n$ 就是 A 的特征值. 令 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)U$, 则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 也是标准正交向量组，且 $\varphi(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)U^TAU=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$, 所以 $\varphi(\beta_i)=\lambda_i\beta_i(i=1,2,\cdots,n)$, 即 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是 φ 的 n 个两两正交的特征向量.

充分性. 设 φ 有 n 个两两正交的特征向量 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$, $\varphi(\beta_i)=\lambda_i\beta_i$, $i=1,2,\cdots,n$. 将 $\beta_i,i=1,2,\cdots,n$ 单位化后为 $\alpha_i=\frac{\beta_i}{|\beta_i|},i=1,2,\cdots,n$, 则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的一个标准正交基，且 $\varphi(\alpha_i)=\lambda_i\alpha_i$, 从而

$$\varphi(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}.$$

显然 $\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$ 是对称阵. 上述关系说明 φ 在标准正交基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵是对称阵，因此 φ 是对称变换. $\square$

15. 设 A,B 是 $\mathbb{R}$ 上的 n 阶对称阵，且 $AB=BA$. 求证存在正交阵 Q, 使得 Q^TAQ,Q^TBQ 同时为对角阵.

证明：(法一) 由 A 为 n 阶对称阵, 则存在正交阵 U, 使得：$U^TAU=\mathrm{diag}\{\lambda_1E_{r_1},\lambda_2E_{r_2},\cdots,\lambda_tE_{r_t}\}$, 其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t$ 为 A 的所有互异特征值. 由已知 $AB=BA$, 得 $U^TAUU^TBU=U^TBUU^TAU$. 将 U^TBU 做分块

$$U^TBU=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & B_{t2} & \cdots & B_{tt} \end{pmatrix}, \text{其中 } B_{ij} \text{ 是 } r_i\times r_j \text{ 阶矩阵.}$$

直接计算得 $B_{ij}=0\,(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,t)$. 注意到 U 是正交阵, B 是对称阵, 因此 U^TBU 是对称阵, 进而 B_{ii} 均为对称阵. 对每个 B_{ii}, 存在正交阵 P_i, 使得 $P_i^TB_{ii}P_i$ 是对角阵 D_i, 且 $P_i^T\lambda_iE_{r_i}P_i=\lambda_iE_{r_i}$. 令 $Q=U\mathrm{diag}\{P_1,P_2,\cdots,P_t\}$, 则 Q^TAQ,Q^TBQ 均为对角阵.

(法二) 对矩阵的阶数用归纳法.

当 $n=1$ 时，结论成立.

归纳假设结论对 $n-1$ 阶成立.

当 n 阶时，因 $AB=BA$, 且 A,B 是 $\mathbb{R}$ 上的 n 阶对称阵，所以存在公共的单位特征向量 $X_1\in\mathbb{R}^n$, 使得 $AX_1=\lambda_1X_1$, $BX_1=\mu_1X_1$. 将 X_1 扩为标准内积空间 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基 $X_1,X_2,\cdots,X_n$. 记 $P=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$, 则 P 是正交阵，且 $P^TAP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \alpha\\ 0 & A_1\end{pmatrix}$, $P^TBP=\begin{pmatrix}\mu_1 & \beta\\ 0 & B_1\end{pmatrix}$. 注意到 A, B 实对称，因此 P^TAP, P^TBP 实对称，从而 $\alpha=\beta=0$, A_1, B_1 是 $n-1$ 阶实对称阵. 又由 $AB=BA$ 及 P 是正交阵，计算可得 $A_1B_1=B_1A_1$. 由归纳假设得存在 $n-1$ 阶正交阵 P_1 使得 $P_1^{-1}A_1P_1$, $P_1^{-1}B_1P_1$ 为对角阵. 令 $Q=P\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P_1\end{pmatrix}$, 则 Q 为正交阵，且 Q^TAQ,Q^TBQ 均为对角阵.

(法三) 将 A, B 视为 $\mathbb{R}^n$ 的线性变换 φ, ψ, 则由已知条件知 φ, ψ 是对称变换，且 $\varphi\psi=\psi\varphi$. 命题转换为证明：存在 V 标准正交基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$, 使得 φ 和 ψ 在该基下的矩阵均为对角矩阵.

$n=1$ 时显然成立. 归纳假设结论对小于 n 者成立.

因 φ 是对称变换, 所以存在特征值 $\lambda_1\in\mathbb{R}$ 及相应特征子空间 V_1. 显然, V_1 是 $\varphi-$ 子空间. 若 $\dim V_1=n$, 结论显然成立. 下设 $\dim V_1<n$.

设 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m$ 是 V_1 的一个标准正交基，将其扩为 $\mathbb{R}^n$ 一个标准正交基 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$. 则 $V_1^T=\langle\gamma_{m+1},\gamma_{m+2},\cdots,\gamma_n\rangle$. 因为 V_1 是 $\varphi-$ 不变子空间，则

$$\varphi(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)\begin{pmatrix}A & C\\ 0 & B\end{pmatrix}.$$

又因为 φ 是对称变换，故 $\begin{pmatrix}A & C\\ 0 & B\end{pmatrix}$ 是对称阵，从而 $C=0$, $A^T=A$, $B^T=B$, 表明 $\varphi|_{V_1}$ 和 $\varphi|_{V_1^\perp}$ 分别是 V_1 和 $V_1{}^\perp$ 的对称变换.

因为 $\varphi\psi=\psi\varphi$, 因此 V_1 也是 $\psi-$ 子空间，且由 ψ 是对称变换，同理可得 $\psi|_{V_1}$ 和 $\psi|_{V_1^\perp}$ 分别是 V_1 和 $V_1{}^\perp$ 的对称变换. 从而 $\varphi|_{V_1^\perp}\psi|_{V_1^\perp}=\psi|_{V_1^\perp}\varphi|_{V_1^\perp}$.

由归纳假设存在 U 的标准正交基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m$, 使得 $\varphi|_U$ 和 $\psi|_U$ 在该基下的矩阵分别为对角矩阵 D_1 和 S_1. 同理存在 $U^\perp$ 的标准正交基 $\eta_{m+1}+\eta_{m+2},\cdots,\eta_n$, 使得 $\varphi|_{U^\perp}$ 和 $\psi|_{U^\perp}$ 在该基下的矩阵分别为对角矩阵 D_2 和 S_2. 从而 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m,\eta_{m+1}+\eta_{m+2},\cdots,\eta_n$ 是 V 的标准正交基，且 φ 和 ψ 在该基下的矩阵为对角阵 $\mathrm{diag}\{D_1,D_2\}$ 和 $\mathrm{diag}\{S_1,S_2\}$. □

16 . 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 和 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是 n 维欧氏空间 V 的两个标准正交基. 证明：如果存在正交变换 φ 使得 $\varphi(\xi_1)=\eta_1$, 则

$$\langle\varphi(\xi_2),\cdots,\varphi(\xi_n)\rangle=\langle\eta_2,\cdots,\eta_n\rangle.$$

证明:因为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是 n 维欧氏空间 V 的两个标准正交基, φ 是正交变换,因此 $\varphi(\xi_1),\varphi(\xi_2),\cdots,\varphi(\xi_n)$ 也是 V 的标准正交基, 进而 $\langle\varphi(\xi_1)\rangle^{\perp}=\langle\varphi(\xi_2),\cdots,\varphi(\xi_n)\rangle$. 因为 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是标准正交基, 所以 $\langle\eta_1\rangle^{\perp}=\langle\eta_2,\cdots,\eta_n\rangle$. 又由已知 $\varphi(\xi_1)=\eta_1$, 所以

$$\langle\varphi(\xi_2),\cdots,\varphi(\xi_n)\rangle=\langle\varphi(\xi_1)\rangle^{\perp}=\langle\eta_1\rangle^{\perp}=\langle\eta_2,\cdots,\eta_n\rangle.$$

□

17 (1) 设 u,v 是欧氏空间 V 中两个不同的单位向量, 求证：必存在镜面反射 φ, 使 $\varphi(u)=v$.

(2) 证明 n 维欧氏空间中任一正交变换均可表示一系列镜面反射的乘积.

证明： (1) 令 $e=\frac{u-v}{|u-v|}$, 定义 φ 如下： $\varphi(X)=X-2(e,X)e$, 则 φ 是镜面反射. 注意到 $(u,u)=(v,v)=1$, 我们有 $|u-v|^2=(u-v,u-v)=(u,u)+(v,v)-2(u,v)=2-2(u,v)$. $\varphi(u)=u-2(e,u)e=u-2(\frac{u-v}{|u-v|},u)\frac{u-v}{|u-v|}=u-2\frac{1-(u,v)}{|u-v|^2}(u-v)=u-2\frac{1-(u,v)}{2-2(u,v)}(u-v)=v$.

(2) (法一) 设 ξ 是 n 维欧氏空间 V 的正交变换, 则存在 V 的一个标准正交基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$, 使得 ξ 在该基下的矩阵是 $\mathrm{diag}\{E_r,-E_s,\begin{pmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}\cos\theta_t & -\sin\theta_t\\ \sin\theta_t & \cos\theta_t\end{pmatrix}\}$. 记 $l_j=s+t+2j$. 令

$$A=\begin{pmatrix}-1 & \\ & E_{n-1}\end{pmatrix}^2, B_i=\begin{pmatrix}E_{r+i-1} & & \\ & -1 & \\ & & E_{n-i}\end{pmatrix}, i=1,2,\cdots,s$$

$$C_{2j-1}=\begin{pmatrix}E_{l_j-2} & & \\ & -1 & \\ & & E_{n-l_j+1}\end{pmatrix}, C_{2j}=\begin{pmatrix}E_{l_j-2} & & & \\ & -\cos\theta_j & \sin\theta_j & \\ & \sin\theta_j & \cos\theta_j & \\ & & & E_{n-l_j}\end{pmatrix}, j=1,2,\cdots,t.$$

取 ψ, σ_i, τ_j 使得他们在 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 下的矩阵分别为 A, B_i, C_j, $(i=1,2,\cdots,s, j=1,2,\cdots,2t)$, 则 ψ, σ_i, τ_j 均为镜面反射变换, 且 $\varphi=\psi\psi\sigma_1\cdots\sigma_s\tau_1\cdots\tau_{2t}$.

(法二) 对维数 n 用归纳法. $n=1$ 时, 正交变换 ξ 或是恒等变换, 或是 $\xi(X)=-X$. 后者已是镜面反射, 而 $1=(-1)(-1)$, 即恒等变换是两个镜面反射之积, 故结论成立. 现假定结论对 $n-1$ 成立. 设 V 是 n 维欧氏空间, ξ 是 V 的正交变换. 设 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是 V 的一个标准正交基, 因为 $|\xi(e_1)|=|e_1|=1$, 由 (1) 知存在镜面反射 ψ, 使 $\psi\xi(e_1)=e_1$. ξ, ψ 都是正交变换, 故 $\psi\xi$ 也是正交变换, 于是 $V_1=e_1^{\perp}$ 是 $\psi\xi$ 的不变子空间, 且 $(\psi\xi)|_{V_1}$ 是正交变换. 由归纳假设, 存在 V_1 的一系列镜面反射 $\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_k$, 使得 $\psi\xi=\psi_1\psi_2\cdots\psi_k$. ψ_i 可以扩张到 V 上, 满足 $\psi_i(e_1)=e_1$. 不难验证得到的线性变换仍是镜面反射. 于是 $\xi=\psi^{-1}\psi_1\psi_2\cdots\psi_k$. 因为镜面反射的逆仍是镜面反射 (事实上就是它自己), 故结论成立. □

18. 设 Q 是正交阵. 证明：存在正交阵 S, 使得 $Q=S^3$.

证明： Q 是正交阵, 则存在正交阵 P, 使得 $P^TQP=\mathrm{diag}\{E_r,-E_s,A_1,\cdots,A_t\}$, 其中 A_i 形如 $\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ 的二阶实矩阵. 即 $Q=P\mathrm{diag}\{E_r,-E_s,A_1,\cdots,A_t\}P^T$. 直接计算知 $E_r=E_r^3$, $-E_s=(-E_s)^3$. 注意到 $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}$, 令 $B_i=\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_i}{3} & -\sin\frac{\theta_i}{3}\\ \sin\frac{\theta_i}{3} & \cos\frac{\theta_i}{3}\end{pmatrix}$, 则 $B_i^3=A_i$, 因此只要取 $S=P\mathrm{diag}\{E_r,E_s,B_1,B_2,\cdots,B_r\}P^T$, 就有 $Q=S^3$. □