第三章 总复习题

1. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，问 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_{s-1}+\alpha_s,\alpha_s+\alpha_1$ 是否线性无关？

解：设 $c_1(\alpha_1+\alpha_2)+c_2(\alpha_2+\alpha_3)+\cdots+c_{s-1}(\alpha_{s-1}+\alpha_s)+c_s(\alpha_s+\alpha_1)=0$. 整理得，

$$(c_1+c_s)\alpha_1+(c_1+c_2)\alpha_2+\cdots+(c_{s-2}+c_{s-1})\alpha_{s-1}+(c_{s-1}+c_s)\alpha_s=0.$$

因 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，所以上式与如下齐次线性方程组 $AX=0$ 同解，其中

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

又 $\det A=1+(-1)^{s+1}=\begin{cases} 2 & ,\ \text{当 } s \text{ 为奇数时} \\ 0 & ,\ \text{当 } s \text{ 为偶数时} \end{cases}$，故

(1) 当 s 为奇数时， $r(A)=s$, $AX=0$ 只有零解，从而向量组 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_{s-1}+\alpha_s,\alpha_s+\alpha_1$ 线性无关；

(2) 当 s 为偶数时， $r(A)<s$, $AX=0$ 有非零解，因此向量组 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_{s-1}+\alpha_s,\alpha_s+\alpha_1$ 线性相关.

2. 设 $A\in F^{n\times n}$, $A^m=0$, $A^{m-1}\neq 0$. 求证：存在 $X\in F^n$, 使得 X, AX, A^2X, $\cdots$, $A^{m-1}X$ 线性无关.

证明：由 $A^{m-1}\neq 0$ 知 A^{m-1} 至少存在一列不为零，不妨设第 j 列不为零，记这一列为 ξ, 下证 ε_j 就是我们要找的 α. 设

$$k_1\varepsilon_j+k_2A\varepsilon_j+\cdots+k_mA^{m-1}\varepsilon_j=0 \tag{1}$$

对 (1) 式两边同时左乘 A^{m-1}, 因为 $A^m=0$, 所以得 $k_1A^{m-1}\varepsilon_j=k_1\xi=0$, 而 $\xi\neq 0$, 故 $k_1=0$. 从而 (1) 变为

$$k_2A\varepsilon_j+\cdots+k_mA^{m-1}\varepsilon_j=0, \tag{2}$$

再对 (2) 式两边同时左乘 A^{m-2}, 得 $k_2A^{m-1}\varepsilon_j = k_2\xi = 0$, 故 $k_2 = 0$. 依此类推可得 $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$, 命题得证. □

3. 向量 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 线性表出, 但不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{s-1}$ 线性表出. 求证：向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{s-1}, \alpha_s$ 和 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{s-1}, \beta$ 等价.

证明：由已知条件知，只要证明 α_s 可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{s-1}, \beta$ 线性表出即可.

事实上，由 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 线性表出，知存在一组数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$, 使得 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3 + \cdots + k_s\alpha_s$, 且 $k_s \neq 0$. 若不然， $k_s = 0$, 则 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3 + \cdots + k_{s-1}\alpha_{s-1}$, 说明 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{s-1}$ 线性表出，与已知矛盾. 因此， $\alpha_s = \frac{1}{k_s}\beta - \frac{k_1}{k_s}\alpha_1 - \frac{k_2}{k_s}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_{s-1}}{k_s}\alpha_{s-1}$. 命题得证. □

4. 设 $A \in F^{m\times n}$ 且 $A = (A_1, A_2, \cdots, A_n)$, 其中 $A_i \in F^m (1 \leq i \leq n)$. 求证：

(1) $V = \{AX \mid X \in F^n\}$ 是 F^m 的子空间;

(2) $V = \langle A_1, A_2, \cdots, A_n\rangle$;

(3) $\mathrm{dim}V = r(A)$.

证明： (1) 显然 $0 \in V$, 故 V 是非空的.

对任意的 $Y, Z \in V$, 分别存在相应的 X_1, X_2 使得 $Y = AX_1, Z = AX_2$. 则 $Y + Z = AX_1 + AX_2 = A(X_1 + X_2) \in V$. 且对任意的 $c \in F$, $cY = cAX_1 = A(cX) \in V$. 故证 $V = \{AX \mid X \in F^n\}$ 是 F^m 的子空间.

(2) 首先证 $V \subseteq \langle A_1, A_2, \cdots, A_n\rangle$. 对任意的 $Y \in V$, 存在 X_1 使得 $Y = AX_1 = (A_1, A_2, \cdots, A_n)X_1 = x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_nA_n \in \langle A_1, A_2, \cdots, A_n\rangle$.

再证 $\langle A_1, A_2, \cdots, A_n\rangle \subseteq V$. 对任意 $Y \in \langle A_1, A_2, \cdots, A_n\rangle$, 有 $Y = x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_nA_n = (A_1, A_2, \cdots, A_n)X_1 = AX_1 \in V$. 故 $V = \langle A_1, A_2, \cdots, A_n\rangle$.

(3) 由 (2) 可得. □

5. 在 $F^{2\times 2}$ 中，证明

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

线性无关，并扩为 $F^{2\times 2}$ 的一个基.

证明：显然 A 和 B 所对应的元素不成比例，故得 A 和 B 是线性无关的.

因为 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$, 为 $F^{2\times 2}$ 的一个基，且

$$(A, B, E_{21}, E_{22}) = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

而 $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ 知 A 可逆，从而 A, B, E_{21}, E_{22} 是 $F^{2\times 2}$ 的一个基. $\square$

6. 设 V_1, V_2 是 V 的非平凡子空间，求证存在 $\alpha \in V$, 使得 $\alpha \notin V_1 \cup V_2$.

证明：(法一) 由 V_1 是 V 的非平凡子空间，故存在 $\alpha \notin V_1$. 对这个 α, 若 $\alpha \notin V_2$, 则命题得证.

现设 $\alpha \in V_2$, 因 V_2 是 V 的非平凡子空间，必另有 $\beta \notin V_2$. 若 $\beta \notin V_1$, 则命题的证.

若 $\beta \in V_1$, 这时有 $\alpha \notin V_1$ 且 $\beta \in V_1$, 或 $\alpha \in V_2$ 且 $\beta \notin V_2$, 可证 $\alpha + \beta \notin (V_1 \bigcup V_2)$. 否则如果 $\alpha + \beta \in V_1$, 因为 $\beta \in V_1$, 则 $(\alpha + \beta) - \beta = \alpha \in V_1$, 矛盾，所以 $\alpha + \beta \notin V_1$. 类似可证 $\alpha + \beta \notin V_2$.

(法二) 若 $V_1 \subseteq V_2$, 则 $V_1 \bigcup V_2 = V_2$. 由于 V_2 是 V 的非平凡子空间，故存在 $\alpha \notin V_2$, 从而 $\alpha \notin V_1$, α 为所求. 同理可证 $V_2 \subseteq V_1$ 情形.

若 $V_1 \nsubseteq V_2$ 且 $V_2 \nsubseteq V_1$, 又 V_1, V_2 是 V 的非平凡子空间，则存在 $\alpha \in V_1$ 且 $\alpha \notin V_2$, $\beta \in V_2$ 且 $\beta \notin V_1$. 则同法一证明知 $\alpha + \beta \notin V_1 \bigcup V_2$. $\square$

7. 设 $V_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 是线性空间 V 的 m 个非平凡子空间. 求证：存在 $\alpha \in V$, 它不属于 $\bigcup_{i=1}^{m} V_i$.

证明：(归纳法) 当 $m = 1$ 时显然成立. 归纳假设结论当 $m = k$ 时成立. 现要证明 $m = k + 1$ 时也成立.

由归纳假设，存在向量 α, 它不属于任何一个 $V_i (i = 1, \cdots, k)$. 若 α 也不属于 V_{k+1}, 则结论已成立,

因此可设 $\alpha \in V_{k+1}$. 在 V_{k+1} 外选一个向量 β. 若 β 不属于每个 $V_i (i = 1, \cdots, k)$, 则结论已成立. 故设 β 属于某个 V_i. 做集合 $M = \{t\alpha + \beta | t \in F\}$.

首先， M 和 V_{k+1} 的交为空集. 因为若 $t\alpha+\beta\in V_{k+1}$, 从 $t\alpha\in V_{k+1}$, 可推出 $\beta\in V_{k+1}$, 与假设矛盾.

又若 $t_1\alpha+\beta\in V_i$, $t_2\alpha+\beta\in V_i(i<k+1)$, 则 $(t_1-t_2)\alpha\in V_i$.

若 $t_1\neq t_2$, 将导致 $\alpha\in V_i$, 与假设矛盾.

由此可以看到， M 中只有有限个向量属于 V_i 的并集, 而 t 有无穷多个选择, 由此即得结论. $\square$

8. (1) 设 $A\in F^{n\times n}$, 求证： $V=\{B\in F^{n\times n}|BA=AB\}$ 构成 $F^{n\times n}$ 的子空间.

(2) 在 (1) 中令

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

求 V 的一个基与维数.

解： (1) 显然有 $0\cdot A=A\cdot 0$, 则 $0\in V$, 故 V 是非空的.

对任意 $B_1,B_2\in V$, 有 $B_1A=AB_1,B_2A=AB_2$, 则 $(B_1+B_2)A=B_1A+B_2A=AB_1+AB_2=A(B_1+B_2)$, 所以 $B_1+B_2\in V$.

对任意的 $c\in F$, $(cB)A=cBA=cAB=A(cB)$, 即 $cB\in V$.

故 $V=\{B\in F^{n\times n}|BA=AB\}$ 构成 $F^{n\times n}$ 的子空间.

(2) 因为 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}=E+C$, 其中 $C=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, 所以 $BA=AB$ 等价于 $BC=CB$. 不妨设 $B=(b_{ij})_{3\times3}$. 直接计算得 $b_{11}=b_{22}-b_{13}$, $b_{33}=b_{22}$, $b_{23}=b_{12}=b_{32}$, $b_{21}=b_{31}=0$. 故得

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

是 V 的一个基， $\mathrm{dim}V=3$.

9. 在 $F^{n\times n}$ 中，记

$$U=\{A\in F^{n\times n}\mid \mathrm{tr}(A)=0\},W=\{\mathrm{diag}(a,a,\cdots,a)\mid a\in F,i=1,2,\cdots,n\}.$$

(1) 求证： U,W 是 $F^{n\times n}$ 的子空间;

(2) 求 U, W 的一个基和维数；

(3) 证明： $F^{n\times n} = U \oplus W$.

证明：(1) 显然 $0 \in U$, 故 U 是非空的. 对任意的 $A, B \in U$, $\mathrm{tr}(A) = 0, \mathrm{tr}(B) = 0$, 则 $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B) = 0$, 即 $A + B \in U$. 对于任意的 $c \in F$, $\mathrm{tr}(cA) = c\mathrm{tr}(A) = 0$, 即 $cA \in U$. 故 U 是 $F^{n\times n}$ 的子空间. 同理可证 W 是 $F^{n\times n}$ 的子空间.

(2) $E_{ij}(1 \le i \ne j \le n)$, $E_{ii} - E_{nn}(i = 1, 2, \cdots, n-1)$ 为 U 的一个基, $\mathrm{dim}U = n^2 - 1$.

$E_{11} + E_{22} + \cdots + E_{nn}$ 为 W 的一个基， $\mathrm{dim}W = 1$.

(3) 对任意的 $A \in F^{n\times n}$, 令 $a = \frac{a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}}{n}$, $B = A - aE$, $C = aE$, 则 $A = B + C$, 且 $B \in U$, $C \in W$. 即 $F^{n\times n} = U + W$.

若 $A \in (U \bigcap W)$, 则 $A \in U$ 即 $\mathrm{tr}(A) = 0$, 且 $A \in W$, 即 $A = aE$, 从而 $0 = \mathrm{tr}(A) = na$, 因此 $a = 0$, 进而 $A = 0$.

综上即得 $F^{n\times n} = U \oplus W$. □

10. 记

$$F^{n\times n}E_{ii} = \{AE_{ii} \mid A \in F^{n\times n}\}(i = 1, 2, \cdots, n).$$

求证：

(1) $F^{n\times n}E_{ii}$ 是 $F^{n\times n}$ 的子空间；

(2) $F^{n\times n} = F^{n\times n}E_{11} \oplus F^{n\times n}E_{22} \oplus \cdots \oplus F^{n\times n}E_{nn}$.

证明： (1) $0 = 0E_{ii} \in F^{n\times n}E_{ii}$, 故 $F^{n\times n}E_{ii}$ 是非空的.

对任意的 $B, C \in F^{n\times n}E_{ii}$, 存在相应的 A_1, A_2 使得 $B = A_1E_{ii}, C = A_2E_{ii}$, 则 $B + C = A_1E_{ii} + A_2E_{ii} = (A_1 + A_2)E_{ii} \in F^{n\times n}E_{ii}$.

对于任意的 $c \in F$, 有 $cB = cA_1E_{ii} = (cA_1)E_{ii} \in F^{n\times n}E_{ii}$.

故 $F^{n\times n}E_{ii}$ 是 $F^{n\times n}$ 的子空间.

(2) 对任意的 $A \in F^{n\times n}$, 将 A 按列分块为 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, 则 $AE_{ii} = A\varepsilon_i\varepsilon_i^T = \alpha_i(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0) = (0, \cdots, 0, \alpha_i, 0, \cdots, 0)$. 从而 $E_{ji}(j = 1, 2, \cdots, n)$ 是 $F^{n\times n}E_{ii}$ 的一个基， $\mathrm{dim}F^{n\times n}E_{ii} = n$. 进而 $\mathrm{dim}F^{n\times n} = n^2 = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{dim}F^{n\times n}E_{ii}$.

此外, 对任意 $A \in F^{n\times n}$, $A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$, 其中 $A_i = (0, \cdots, \alpha_i, \cdots, 0) \in F^{n\times n}E_{ii}, (i = 1, 2, \cdots, n)$.

这就证明了 $F^{n\times n}=F^{n\times n}E_{11}\oplus F^{n\times n}E_{22}\oplus\cdots\oplus F^{n\times n}E_{nn}$. □

11. 在 $F^{2\times 2}$ 中，记

$$V_1=\{\begin{pmatrix} a & -a \\ b & c \end{pmatrix} \mid a,b,c\in F\},\ V_2=\{\begin{pmatrix} a & b \\ -a & c \end{pmatrix} \mid a,b,c\in F\}.$$

(1) 求证 V_1,V_2 是 V 的子空间;

(2) 分别写出 V_1+V_2 和 $V_1\cap V_2$ 的一个基和维数.

证明: (1) 显然 $0\in V_1$, 故 V_1 是非空的. 对任意的 $A,B\in V_1$, $A=\begin{pmatrix} a_1 & -a_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a_2 & -a_2 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}$, $A+B=\begin{pmatrix} a_1+a_2 & -(a_1+a_2) \\ b_1+b_2 & c_1+c_2 \end{pmatrix}\in V_1$. 且对于任意的 $c\in F$, $cA=\begin{pmatrix} ca_1 & -ca_1 \\ cb_1 & cc_1 \end{pmatrix}\in V_1$. 故 V_1 是 V 的子空间.

同理可证 V_2 是 V 的子空间.

(2) $\eta_1=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\eta_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\eta_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是 V_1 的一个基, $\dim V_1=3$.

$\gamma_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\gamma_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\gamma_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是 V_2 的一个基，$\dim V_2=3$.

$V_1+V_2=\langle\eta_1,\eta_2,\eta_3,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\rangle=\langle\eta_2,\eta_3,\gamma_1,\gamma_2\rangle$, 故 $\dim(V_1+V_2)=4$. 而 η_2, η_3, γ_2, γ_3 是 V_1+V_2 的一个基.

由维数公式可得 $\dim(V_1\cap V_2)=2$. 构造齐次线性方程组

$$x_1\eta_1+x_2\eta_2+x_3\eta_3+y_1\gamma_1+y_2\gamma_2+y_3\gamma_3=0.$$

可得基础解系为 $\zeta_1=(-1,1,0,1,-1,0)^T,\zeta_2=(0,0,-1,0,0,1)^T$, 从而 $V_1\cap V_2$ 的一个基为 $\alpha_1=-\eta_1+\eta_2=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2=-\eta_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(李小凤解答)