第一章　总复习题

1. 设 A 是 n 阶方阵，求证：

(1) 若对任意的 n 维列向量 X 都有 $AX=0$, 则 $A=0$;

(2) 若对任意的 n 阶方阵 B 都有 $AB=0$, 则 $A=0$;

(3) 若对任意的 n 阶方阵 B 都有 $AB=B$, 则 $A=E$.

证明：(1) 将 A 按列分块为 $A=(A_1,A_2,\cdots,A_n), \varepsilon_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为 n 维标准列向量，由条件得 $A\varepsilon_i=A_i=0(i=1,2,\cdots,n)$, 所以 $A=0$; 反之当 $A=0$ 时，对任意的 n 维列向量 X 显然有 $AX=0$.

(2) 由条件当 $B=E$ 时，$0=AB=AE=A$, 故 $A=0$; 反之当 $A=0$ 时，对任意的 n 阶方阵 B, 显然有 $AB=0$.

(3) 条件等价于对任意的 n 阶方阵 B 都有 $(A-E)B=0$, 由 (2) 的结论得 $A-E=0$, 即 $A=E$. □

2. 一个 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的 **迹** 定义为 $\mathrm{tr}(A)=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$. 求证：

(1) $\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B)$;

(2) $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$.

证明：(1) 显然.

(2) 假定 $C=AB$, $D=BA$, $C=(c_{ij})_{n\times n}$, $D=(d_{ij})_{n\times n}$, 则

$$\mathrm{tr}(AB)=\sum_{i=1}^{n}c_{i,i}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ik}b_{ki},$$

$$\mathrm{tr}(BA)=\sum_{k=1}^{n}d_{k,k}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}b_{ki}a_{ik}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ik}b_{ki}.$$

即 $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(AB)$. □

3. 证明：不存在非零的 n 阶方阵 A, B, 使得 $AB-BA=E$.

证明：因为 $\mathrm{tr}(AB-BA)=0\neq n=\mathrm{tr}(E)$, 故不存在 n 阶方阵 A, B, 使 $AB-BA=E$. □

4. 设 A,B 是 n 阶方阵，满足 $A=\frac{1}{2}(B+E)$. 求证：$A^2=A$ 的充分必要条件是 $B^2=E$.

证明：必要性： $\frac{1}{4}(B^2+2B+E)=(\frac{1}{2}(B+E))^2=A^2=A=\frac{1}{2}(B+E)$, 整理得： $B^2=E$;

充分性：由 $A=\frac{1}{2}(B+E)$, 得 $B=2A-E$, 又 $B^2=4A^2-4A+E=E$, 所以 $A^2=A$. □

5. 证明：

(1) 上三角阵的乘积是上三角阵;

(2) 上三角阵可逆的充分必要条件是对角元均非零;

(3) 可逆的上三角阵的逆矩阵是上三角阵.

证明： (1) 设 A, B 均为上三角阵， A 的第 i 列为 $A_i=\sum_{j=1}^{i}a_{ji}\varepsilon_j$, B 的第 i 列为 $B_i=\sum_{j=1}^{i}b_{ji}\varepsilon_j$. 则 AB 的第 i 列为 $AB_i=A\sum_{j=1}^{i}b_{ji}\varepsilon_j=\sum_{j=1}^{i}b_{ji}A_j=\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{j}b_{ji}a_{kj}\varepsilon_k=\sum_{k=1}^{i}(\sum_{j=k+1}^{i}b_{ji}a_{kj})\varepsilon_k$, 故命题得证.

(2) 设上三角阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$. 则

$$A\text{ 可逆 }\Leftrightarrow \det A=\Pi_{i=1}^{n}a_{ii}\neq 0 \Leftrightarrow \text{ 对角元 } a_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,n).$$

(3) 因为 $A^{-1}=\frac{A^*}{\det A}$, A 为上三角阵，则 A^* 的第 (i,j) 元素为 A_{ji}, 当 $i>j$ 时， A_{ji} 为 $n-1$ 阶上三角阵且其第 (j,j) 为 0 的行列式，故 $A_{ji}=0$, 从而 A^{-1} 也为上三角阵. □

6. 设 $AB=A+B$. 求证： $(1)A-E$ 可逆； $(2)AB=BA$.

证明： (1) 因 $AB=A+B$, 故 $(A-E)(B-E)=E$, 所以 $A-E$ 可逆，且逆矩阵为 $B-E$.

(2) 由可逆阵定义知， $(A-E)(B-E)=E=(B-E)(A-E)$, 展开可得 $AB=BA$. □

7. 一个 n 阶方阵 A 不可逆的充分必要条件是存在非零的 n 阶方阵 B, 使得 $AB=0$.

证明：必要性：设 $r(A)=r$, A 不可逆，因此 $r<n$ 且存在可逆矩阵 P, Q, 使得 $A=P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$. 令 $B=Q^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix}$, 则因 Q 可逆，所以

$r(B)=n-r>0$, 从而 $B\neq 0$, 且

$$AB=P\begin{pmatrix} E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}QQ^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & E_{n-r}\end{pmatrix}=0.$$

充分性：反证法．若 A 可逆，则 $B=A^{-1}0=0$, 与设矛盾．故 A 不可逆． $\square$

8. 证明：

(1) 与矩阵 $\mathrm{diag}\{1,2,3,\cdots,n\}$ 可交换的 n 阶方阵是对角阵;

(2) 与所有 $E(i,j)$, $i,j=1,2,\cdots,n$ 可交换的 n 阶对角阵是数量阵;

(3) 与所有 n 阶方阵都可交换的矩阵是数量阵.

证明： (1) 设与矩阵 $D=\mathrm{diag}\{1,2,3,\cdots,n\}$ 可交换的矩阵为 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 下证 A 为对角阵．事实上， AD 的第 (i,j) 元为 ja_{ij}, 而 DA 的第 (i,j) 元为 ia_{ij}, 由 $AD=DA$, $ja_{ij}=ia_{ij}$, 得当 $i\neq j$ 时， $a_{ij}=0$, 所以 A 是对角阵.

(2) 设对角阵 $A=\mathrm{diag}\{a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}\}$ 与所有 $E(i,j)$, $i,j=1,2,\cdots,n$ 可交换．由 $E(i,j)A=a_{jj}E(i,j)=AE(i,j)=a_{ii}E(i,j)$, 得 $a_{ii}=a_{jj}$. 所以结论成立.

(3) 由 (1)(2) 和单位矩阵能与任意矩阵交换可得． $\square$

9. 设 $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ -2 & -4 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 2\end{pmatrix}$, 求 A^{-1} 和 A.

解：因 $\det A^*=-8$ 且 A 是 4 阶矩阵，所以 $\det A=-2$.

$$A^{-1}=\frac{A^*}{\det A}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix};A=(A^{-1})^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -2 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

10. 设四阶可逆方阵 $A=(X_1,X_2,X_3,X_4)$,$B=(X_4,X_3,X_2,X_1)$,

$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. 求 B^{-1} 与 A^{-1},P,Q 关系式.

解：易知 $B=APQ$,$P^{-1}=P,Q^{-1}=Q$, 所以 $B=Q^{-1}P^{-1}A^{-1}=QPA^{-1}$.

11. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是 n 阶方阵，满足 $AA^T=E$, 且 $\det A=-1$. 求证： $a_{ij}=-A_{ij}$, $i,j=1,2,\cdots,n$, 其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式.

证明：因为 $AA^T=E$, 所以 A 可逆，且 $A^{-1}=A^T$. 又由 $\det A=-1$, 得 $A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=-A^*$, 所以 $A^T=-A^*$, 即 $a_{ij}=-A_{ij}$, $i,j=1,2,\cdots,n$. □

12. 设 A 是 m 阶可逆阵， D 是 n 阶方阵，则

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=\det(A)\det(D-CA^{-1}B).$$

证明：因为 A 可逆，所以

$$\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ -CA^{-1} & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

两边取行列式得 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=\det(A)\det(D-CA^{-1}B)$. □

13. 设 A 为 n 阶可逆阵， α 是 n 维列向量， b 为常数. 记分块矩阵

$$P=\begin{pmatrix} E & 0 \\ -\alpha^TA^* & \det A \end{pmatrix}, Q=\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & b \end{pmatrix}.$$

(1) 计算并化简 PQ;

(2) 证明： Q 可逆的充分必要条件是 $\alpha^TA^{-1}\alpha\neq b$.

解： (1) $PQ=\begin{pmatrix} A & \alpha \\ 0 & \det A(b-\alpha^TA^{-1}\alpha) \end{pmatrix}$.

(2) 由 (1) 得 $\det(PQ)=\det(P)\det(Q)=\det(A)^2(b-\alpha^TA^{-1}\alpha)$. 又 A 可逆, $\det P=\det A\neq 0$, $\det Q=\det(A)(b-\alpha^TA^{-1}\alpha)$. 所以 Q 可逆的充分必要条件是 $\det Q\neq 0$, 即 $\alpha^TA^{-1}\alpha\neq b$.

(万琴解答)