第五章 复习题

1. 设 $f(f(x)) = f^n(x)$, 求 $f(x)$.

解 若 $f(x) = 0$, 则命题成立. 若 $f(x) \neq 0$, 设 $\deg f(x) = m$, 则因为 $f(f(x)) = f^n(x)$, 有 $m^2 = \deg f(f(x)) = \deg f^n(x) = mn$, 所以 $m = 0$ 或 $\deg f(x) = n$.

若 $m = 0$, 由 $f(f(x)) = f^n(x)$ 即得 $f(x) = a$, 其中 $a^n = 1$.

若 $m = n$, 设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 则

$$f^n(x) = f(f(x)) = a_n f^n(x) + a_{n-1} f^{n-1}(x) + \cdots + a_1 f(x) + a_0, \tag{1}$$

(法一) 记 $y = f(x)$, (1) 为 $y^n = a_n y^n + a_{n-1} y_{n-1} + \cdots + a_1 y + a_0$, 所以 $a_n = 1, a_{n-1} = \cdots = a_1 = a_0 = 0$. 故 $f(x) = x^n$.

(法二) (1) 式改写为

$$(a_n - 1) f^n(x) + a_{n-1} f^{n-1}(x) + \cdots + a_1 f(x) + a_0 = 0, \tag{2}$$

上式左边各项的系数均为 0. (2) 式左边最高项为 $(a_n - 1)x^{n^2}$, 因此 $a_n = 1$. 将其代入 (2) 式, 得

$$a_{n-1} f^{n-1}(x) + \cdots + a_1 f(x) + a_0 = 0, \tag{3}$$

同理上式左边最高项为 $a_{n-1} x^{n(n-1)}$, 因此 $a_{n-1} = 0$, 以此类推, 得 $a_{n-2} = \cdots = a_1 = a_0 = 0$, 从而 $f(x) = x^n$.

(法三) 由 (1) 知, $f(x) | f(f(x))$, 故 $f(x) | a_0$. 因 $\deg f(x) \geq 1 > \deg a_0$, 从而 $a_0 = 0$. 又因 $f(x) \neq 0$, 由消去律得

$$f^{n-1}(x) = a_n f^{n-1}(x) + a_{n-1} f^{n-2}(x) + \cdots + a_1, \tag{4}$$

同理, (4), 故 $f(x)$ 整除 (4) 式右端, 进而 $a_1 = 0$, 依此类推得 $a_2 = \cdots = a_{n-1} = 0$, 进而有 $f(x) = a_n f(x)$, 从而 $a_n = 1$, 即 $f(x) = x^n$.

常见错误 1 分情况讨论只讨论 $f(x), g(x), h(x)$ 全不为零的情形.

常见错误 2 由 (1) 式直接得 $a_i = 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$, 没有证明过程.

2. (1) 若行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & x \end{vmatrix} = 0,$$

求 x;

(2) 设

$$f(x) = \begin{vmatrix} 2x & 3 & 1 & 2 \\ x & x & 0 & 5 \\ 2 & -2 & x & 1 \\ x & 2 & -1 & 4x \end{vmatrix},$$

求 x^3 项的系数； x^4 项的系数和多项式的常数项；

(3) 设

$$f(x) = \begin{vmatrix} x-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & x-a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & x-a_{33} \end{vmatrix},$$

求 x^3 项的系数； x^2 项的系数；常数项.

解 (1) 因 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & x \end{vmatrix} = x-3$, 故原式成立必须 $x=3$.

(2) 多项式 $f(x)$ 等于四阶行列式取自不同行且不同列元素乘积的代数和，而行列式的元素是次数不超过 1 的多项式，因此要得到 $f(x)$ 的 4 次项，要求每个元素都含有 x, 故 x^4 的系数为 8. 同理，求 $f(x)$ 的 3 次项时，只要求三个元素含有 x 即可，计算得 x^3 的系数是 -14, 常数项为 $f(0)=50$.

(3) 同理， x^3 的系数是 1, x^2 的系数是 $-a_{11}-a_{22}-a_{33}$, 常数项是

$$f(0) = \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix}.$$

3. 设 $f(x)=x^3+px^2+qx+r$, $g(x)=ax^2+bx+c$. 求证：若 $g(x)|f(x)$, 则

$$\frac{ap-b}{a} = \frac{aq-c}{b} = \frac{ar}{c}.$$

证明 (法一) 由于 $g(x)|f(x)$, 则存在 $q(x)$, 使得 $f(x)=g(x)q(x)$, 依题意，令 $q(x)=mx+n$, 其中 $m\neq 0$. 则

$$x^3+px^2+qx+r=(ax^2+bx+c)(mx+n)=amx^3+(an+bm)x^2+(bn+cm)x+cn,$$

必有 $am=1$, $an+bm=p$, $bn+cm=q$, $cn=r$, 解得

$$an=\frac{ap-b}{a}=\frac{aq-c}{b}=\frac{ar}{c}.$$

(法二) 如 §5.2 习题 3 般列式求. (过程略)

4. 设 $f(x),g(x)\in F[x]$, 令

$$\Omega=\{u(x)f(x)+v(x)g(x)|u(x),v(x)\in F[x]\}.$$

求证： (1) 若 $a(x),b(x)\in\Omega$, 则 $a(x)\pm b(x)\in\Omega$;

(2) 若 $a(x)\in\Omega$, 则对任意 $h(x)\in F[x]$, 有 $a(x)h(x)\in\Omega$;

(3) 存在首一的 $d(x)\in\Omega$, 使得对于任意的 $a(x)\in\Omega$, 有 $d(x)|a(x)$;

(4) $d(x)=(f(x),g(x))$.

证明 (1) 若 $a(x),b(x)\in\Omega$, 则存在 $u_1(x),v_1(x),u_2(x),v_2(x)\in F[x]$, 使得

$$a(x)=u_1(x)f(x)+v_1(x)g(x),\qquad b(x)=u_2(x)f(x)+v_2(x)g(x).$$

则

$$a(x)+b(x)=[u_1(x)+u_2(x)]f(x)+[v_1(x)+v_2(x)]g(x)\in\Omega.$$

同理 $a(x)-b(x)\in\Omega$.

(2) 若 $a(x)\in\Omega$, 则存在 $u(x),v(x)\in F[x]$, 使得 $a(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$. 于是对任意 $h(x)\in k[x]$, 有

$$a(x)h(x)=(u(x)h(x))f(x)+(v(x)h(x))g(x)\in F[x].$$

(3) 设 $d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)\neq 0$ 为 Ω 中一个次数最低首一多项式. 我们断言对于任意 $a(x)\in\Omega$, 有 $d(x)|a(x)$. 如若不然，假设 $a(x)=u'(x)f(x)+$

$v'(x)g(x) \in \Omega$ 使得 $d(x) \nmid a(x)$. 令 $a(x) = d(x)q(x) + r(x)$, 其中 $0 \leq \mathrm{deg}r(x) < \mathrm{deg}d(x)$. 于是

$$r(x) = a(x) - d(x)q(x) = (u'(x) - q(x)u(x))f(x) + (v'(x) - q(x)v(x))g(x) \in \Omega,$$

与设 $d(x)$ 是 Ω 中次数最低的多项式矛盾. 故对任意的 $a(x) \in \Omega$, 都有 $d(x)|a(x)$.

(4) 因为 $f(x) = 1f(x) + 0g(x) \in \Omega$, 所以 $d(x)|f(x)$. 同理 $d(x)|g(x)$. 又 $d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$, 所以 $d(x) = (f(x), g(x))$.

常见错误 (3) 的证明中直接取 $d(x) = (f(x), g(x))$. 这是不允许的，若不然则导致循环证明. 事实上，本题给出的是最大公因式的另一个定义.

5. 设 $(f(x), g(x)) = 1$, $\mathrm{deg}f(x) > 0$, $\mathrm{deg}g(x) > 0$. 证明: 存在唯一的 $u(x), v(x)$, 使得

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1$$

且 $\mathrm{deg}u(x) < \mathrm{deg}g(x)$, $\mathrm{deg}v(x) < \mathrm{deg}f(x)$.

证明 存在性. 因为 $(f(x), g(x)) = 1$, 所以存在 $h(x), k(x)$, 使得 $f(x)h(x) + g(x)k(x) = 1$. 若 $\mathrm{deg}h(x) > \mathrm{deg}g(x)$, 由带余除法，存在 $q(x), u(x)$, 使得 $h(x) = g(x)q(x) + u(x)$, 其中 $\mathrm{deg}u(x) < \mathrm{deg}g(x)$. 代入上式得 $f(x)(g(x)q(x) + u(x)) + g(x)k(x) = 1$, 即

$$f(x)u(x) + g(x)(f(x)q(x) + k(x)) = 1.$$

令 $v(x) = f(x)q(x) + k(x)$, 则 $\mathrm{deg}v(x) < \mathrm{deg}f(x)$. 若不然， $\mathrm{deg}v(x) \geq \mathrm{deg}f(x)$, 比较上式两边次数， $\mathrm{deg}(f(x)u(x) + g(x)v(x)) = \mathrm{deg}(g(x)v(x)) \geq 2 > 0 = \mathrm{deg}1$, 与 $f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1$ 矛盾.

唯一性. 设另有 $u_1(x), v_1(x)$ 适合条件, 即 $f(x)u_1(x) + g(x)v_1(x) = f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1$. 则 $f(x)(u(x) - u_1(x)) + g(x)(v(x) - v_1(x)) = 0$. 因为 $g(x)$ 与 $f(x)$ 互素，上式表明 $g(x)|(u(x) - u_1(x))$. 而 $u(x) - u_1(x)$ 次数小于 $g(x)$ 的次数，所以只能 $u(x) - u_1(x) = 0$. 即 $u(x) = u_1(x)$, 进而 $v(x) = v_1(x)$.

常见错误 1 存在性中 $\mathrm{deg}v(x)$ 的次数必须小于 $\mathrm{deg}f(x)$ 的次数的证明中，未给出如何导致矛盾的证明.

常见错误 2 存在性没有证明.

6. 若 $(f(x), g(x)) = 1$, 且 $h(x)|f(x)$, 则 $(h(x), g(x)) = 1$.

证明 因 $h(x)|f(x)$, 所以存在多项式 $s(x)$, 使得 $f(x) = h(x)s(x)$. 又因为 $(f(x), g(x)) = 1$, 所以存在多项式 $u(x), v(x)$, 使得

$$1 = f(x)u(x) + g(x)v(x) = h(x)(s(x)u(x)) + g(x)v(x),$$

因此 $(h(x), g(x)) = 1$.

7. 设 $a, b, c, d \in F$ 满足 $ad - bc = 1$. 求证:

$$(af(x) + bg(x)), cf(x) + dg(x)) = (f(x), g(x)).$$

证明 设 $d(x) = (f(x), g(x))$. 要证 $(af(x) + bg(x), cf(x) + dg(x)) = d(x)$.

首先, 因为 $d(x)|f(x)$ 且 $d(x)|g(x)$, 故 $d(x)|af(x)+bg(x)$ 且 $d(x)|cf(x)+dg(x)$.

其次, 若 $h(x)|af(x) + bg(x)$, $h(x)|cf(x) + dg(x)$, 则 $h(x)|d(af(x) + bg(x)) - b(cf(x)+dg(x))$. 因为 $ad-cb = 1$, 所以 $d(af(x)+bg(x))-b(cf(x)+dg(x)) = f(x)$, 因此 $h(x)|f(x)$. 同理 $h(x)|g(x)$, 故 $h(x)|d(x)$.

综上, $d(x) = (af(x) + bg(x), cf(x) + dg(x))$.

8. 如果多项式 $f_1(x), f_2(x), g_1(x), g_2(x)$ 满足

$$(f_1(x), g_1(x)) = (f_1(x), g_2(x)) = (f_2(x), g_1(x)) = (f_2(x), g_2(x)) = 1,$$

则

$$(f_1(x)g_1(x), f_2(x)g_2(x)) = (f_1(x), f_2(x))(g_1(x), g_2(x)).$$

证明 若 $f_1(x) = f_2(x) = 0$ 或 $g_1(x) = g_2(x) = 0$, 则命题成立. 否则

(法一) 设 $(f_1(x), f_2(x)) = d_1(x), (g_1(x), g_2(x)) = d_2(x)$, 那么存在 $h_1(x)$, $h_2(x)$, $h_3(x)$, $h_4(x)$ 使得

$$f_1(x) = d_1(x)h_1(x),\ \ f_2(x) = d_1(x)h_2(x),\ \ g_1(x) = d_2(x)h_3(x),\ \ g_2(x) = d_2(x)h_4(x).$$

结合已知条件知 $(h_i(x), h_j(x)) = 1, i \neq j (i, j = 1, 2, 3, 4)$. 因此

$$(h_1(x)h_3(x), h_2(x)h_4(x)) = 1.$$

而

$$(f_1(x)g_1(x), f_2(x)g_2(x)) = d_1(x)d_2(x)(h_1(x)h_3(x), h_2(x)h_4(x))$$

$$= d_1(x)d_2(x) = (f_1(x), f_2(x))(g_1(x), g_2(x)).$$

(法二) 因 $(f_1(x), g_1(x)) = (f_1(x), g_2(x)) = (f_2(x), g_1(x)) = (f_2(x), g_2(x)) = 1$, 因此可设

$$f_1(x) = k_1 p_1^{a_1}(x)p_2^{a_2}(x)\cdots p_m^{a_m}(x), f_2(x) = k_2 p_1^{b_1}(x)p_2^{b_2}(x)\cdots p_m^{b_m}(x),$$

$$g_1(x) = l_1 q_1^{c_1}(x)q_2^{c_2}(x)\cdots q_n^{c_n}(x), g_2(x) = l_2 q_1^{d_1}(x)q_2^{d_2}(x)\cdots q_n^{d_n}(x),$$

其中 $a_i \geq 0$, $b_i \geq 0$, $a_i + b_i > 0$, $i = 1, 2, \cdots, m$; $c_j \geq 0$, $d_j \geq 0$, $c_j + d_j > 0$, $j = 1, 2, \cdots, n$; $p_1(x), p_2(x), \cdots, p_m(x)$, $q_1(x), q_2(x), \cdots, q_n(x)$ 是两两互素的，不可约的，首一多项式. 因此

$$f_1 g_1 = k_1 l_1 p_1^{a_1}(x)p_2^{a_2}(x)\cdots p_m^{a_m}(x)q_1^{c_1}(x)q_2^{c_2}(x)\cdots q_n^{c_n}(x),$$

$$f_2 g_2 = k_2 l_2 p_1^{b_1}(x)p_2^{b_2}(x)\cdots p_m^{b_m}(x)q_1^{d_1}(x)q_2^{d_2}(x)\cdots q_n^{d_n}(x).$$

从而

$$(f_1(x), f_2(x)) = p_1^{s_1}(x)p_2^{s_2}(x)\cdots p_m^{s_m}(x),$$

$$(g_1(x), g_2(x)) = q_1^{t_1}(x)q_2^{t_2}(x)\cdots q_n^{t_n}(x),$$

$$(f_1(x)g_1(x), f_2(x)g_2(x)) = p_1^{s_1}(x)p_2^{s_2}(x)\cdots p_m^{s_m}(x)q_1^{t_1}(x)q_2^{t_2}(x)\cdots q_n^{t_n}(x),$$

其中 $s_i = \min\{a_i, b_i\}$, $t_i = \min\{c_j, d_j\}$, $i = 1, 2, \cdots, m$, $j = 1, 2, \cdots, n$, 故命题成立.

(法三) 设 $(f_1(x), f_2(x)) = s(x)$, $(g_1(x), g_2(x)) = t(x)$, 可证 $(f_1(x)g_1(x), f_2(x)g_2(x)) = s(x)t(x)$. 事实上，一方面，$s(x)|f_1(x)$, $t(x)|g_1(x)$, 所以 $s(x)t(x)|f_1(x)g_1(x)$, 同理, $s(x)t(x)|f_2(x)g_2(x)$. 另一方面，对任意的 $h(x)|f_1(x)g_1(x)$ 且 $h(x)|f_2(x)g_2(x)$. 可将 $h(x)$ 做分解为 $h(x) = s_1(x)t_1(x)$, 使得 $s_1(x)|f_1(x)$, $t_1(x)|g_1(x)$. 则 $s_1(x)t_1(x)|f_2(x)g_2(x)$, 进而 $s_1(x)|f_2(x)g_2(x)$. 因为 $(f_1(x), g_2(x)) = 1$, $s_1(x)|f_1(x)$, 所以 $(s_1(x), g_2(x)) = 1$, 因此 $s_1(x)|f_2(x)$. 同理， $t_1(x)|g_2(x)$, 从而 $s_1(x)|s(x)$, $t_1(x)|t(x)$, 故 $h(x)|s(x)t(x)$. 综上即得命题.

常见错误 1 设 $f_1(x)=k_1p_1^{a_1}(x)p_2^{a_2}(x)\cdots p_m^{a_m}(x)$, $f_2(x)=k_2p_1^{b_1}(x)p_2^{b_2}(x)\cdots p_m^{b_m}(x)$, 其中 $p_1(x),p_2(x),\cdots,p_m(x)$ 是不可约多项式,则 $(f_1(x),f_2(x))=p_1^{s_1}(x)p_2^{s_2}(x)\cdots p_m^{s_m}(x)$, 其中 $s_i=\min\{a_i,b_i\}$, $i=1,2,\cdots,m$; $t_i=\min\{c_j,d_j\}$, $j=1,2,\cdots,n$. (应加上 " 两两互素 ", 和 " 首一 ", 尤其是前者. 反例: $f(x)=x^2x^3$, $g(x)=x^4x^2$, $(f(x),g(x))=x^5\neq x^2x^2$).

常见错误 2 设 $f_1(x)=k_1p_1^{a_1}(x)p_2^{a_2}(x)\cdots p_m^{a_m}(x)$, 其中 $p_1(x),p_2(x),\cdots,p_m(x)$ 是不相等的不可约多项式. (不相等的多项式未必互素, 如 $p_1(x)=x$, $p_2(x)=2x$, $p_1(x)\neq p_2(x)$, 但 $(p_1(x),p_2(x))=x\neq 1$)

常见错误 3 $s(x)|f_1(x)$, $t(x)|g_1(x)$, 所以 $s(x)t(x)|f_1(x)g_1(x)$, 同理, $s(x)t(x)|f_2(x)g_2(x)$. 此外,对任意 $s_1(x)|f_1(x)$ 且 $s_1(x)|f_2(x)$, 则 $s_1|s(x)$. $t_1(x)|g_1(x)$ 且 $t_2(x)|g_2(x)$, 则 $t_1|t(x)$. 因此 $s_1(x)t_1(x)|f_1(x)g_1(x)$, $s_1(x)t_1(x)|f_2(x)g_2(x)$. 所以命题得证. (后半部分的假设不保证所取的为 $f_1(x)g_1(x)$ 和 $f_2(x)g_2(x)$ 的任一公因式, 而是带了约束条件的公因式, 因此是错误的)

9. 证明: 非常数首一多项式 $f(x)$ 是某个不可约多项式的幂的充分必要条件是对于任意 $g(x)$, 或 $(f(x),g(x))=1$, 或 $f(x)$ 可以整除 $g(x)$ 的某个幂.

证明 设 $p(x)$ 是不可约多项式, $f(x)=p^k(x)$. 又若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 不互素, 则 $p(x)$ 是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的公因式, 即 $p(x)|g(x)$, 所以 $p^k(x)|g^k(x)$, 即 $f(x)|g^k(x)$.

反之,若 $f(x)=p^m(x)h(x)$, 其中 $p(x)$ 是不可约, $\deg h(x)\geq 1$ 且 $(p(x),h(x))=1$. 取 $g(x)=h(x)$, 则 $(f(x),g(x))\neq 1$, 且 $f(x)$ 不能整除 $g(x)$ 的任意次幂, 与假设矛盾. 故 $f(x)$ 必是某个不可约多项式的幂.

10. 设 $f(x),g(x)\in F[x]$, 求证存在自然数 N, 使得当 $n_1,n_2>N$ 时, 有

$$(f^{n_1}(x),g(x))=(f^{n_2}(x),g(x)).$$

证明 当 $f(x)$, $g(x)$ 中有一个为常数时, 等式显然成立, 等式两边都是 1.

当 $f(x)$, $g(x)$ 次数均大于 0 时, 设 $p_1(x)$, $p_2(x)$, $\cdots$, $p_k(x)$ 是 $f(x)$, $g(x)$ 的所有首一的, 两两互素的, 不可约的公因式, 因此可进一步假设

$$f(x)=ap_1^{a_1}(x)p_2^{a_2}(x)\cdots p_k^{a_k}(x)p_{k+1}^{a_{k+1}}(x)p_{k+2}^{a_{k+2}}(x)\cdots p_r^{a_r}(x),$$

$$g(x)=bp_1^{b_1}(x)p_2^{b_2}(x)\cdots p_k^{b_k}(x)p_{r+1}^{b_{r+1}}(x)p_{r+2}^{b_{r+2}}(x)\cdots p_m^{b_m}(x),$$

其中 a, b 非零，$p_1(x), p_2(x), \cdots, p_m(x)$ $a_i > 0$, $b_j > 0$, $i = 1, 2, \cdots, r$, $j = 1, 2, \cdots, k, r+1, r+2, \cdots, m$. 令 $N = \max_{1\leq i\leq k}\left[\frac{b_i}{a_i}\right]+1$, 其中 $[a]$ 表示对 a 取整. 则 $Na_i > b_i$, $i = 1, 2, \cdots, m$. 故当 $n > N$ 时，总有 $(f^n(x), g(x)) = \frac{1}{b}g(x)$.

11. 设 $a \neq b \in F$. 求证： $f(x)$ 除以 $(x-a)(x-b)$ 的余式为

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}x + \frac{af(b)-bf(a)}{a-b}.$$

证明 (法一) 由带余除法，存在 $g(x), r(x)$, 使得

$$f(x) = (x-a)(x-b)g(x) + r(x),$$

解

得 $c = \frac{f(a)-f(b)}{a-b}$, $d = \frac{af(b)-bf(a)}{a-b}$, 即

$$r(x) = \frac{f(a)-f(b)}{a-b}x + \frac{af(b)-bf(a)}{a-b}.$$

(法二) 由余数定理, 存在 $g(x)$, 使得 $f(x) = (x-a)g(x)+f(a)$. 由带余除法, 对 $g(x) = (x-b)h(x)+s$, 则 $f(x) = (x-a)(x-b)h(x)+s(x-a)+f(a)$. 将 x 用 b 替换，得 $s = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. 从而 $f(x)$ 除以 $(x-a)(x-b)$ 的余式为 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$.

12. 设 $f(x)$ 是一个 n 次多项式，若当 $k = 0, 1, 2, \cdots, n$ 时有 $f(k) = \frac{k}{k+1}$, 求 $f(n+1)$.

解：设 $g(x) = f(x)(x+1) - x$, 则 $g(x)$ 是 $n+1$ 次多项式且 $x = 0, 1, 2, \cdots, n$ 是 $g(x)$ 的根，因此 $g(x) = cx(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$. 即 $f(x)(x+1) - x = cx(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$, 其中 c 是一个常数. 令 $x = -1$ 代入，求出 $c = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$. 从而 $f(x) = \frac{1}{x+1}[\frac{(-1)^{n+1}x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{(n+1)!} + x]$. 故 $f(n+1) = \frac{1}{n+2}[(-1)^{n+1} + n + 1]$. 当 n 是奇数时， $f(n+1) = 1$; 当 n 是偶数时， $f(n+1) = \frac{n}{n+2}$.

13. 设 $(x-1)|f(x^n)$. 求证： $(x^n-1)|f(x^n)$.

证明 (法一) $x^n - 1$ 有 n 个互异根 $\varepsilon_k = e^{2k\pi i/n}(k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$ 且 $\varepsilon_i^n = 1$. 由设 $x-1|f(x^n)$ 知 $f(1) = f(1^n) = 0$, 从而 $f(\varepsilon_k^n) = f(1) = 0(k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$. 而 $\varepsilon_k = e^{2k\pi i/n}$ 两两互异，因此 $x^n - 1|f(x^n)$.

(法二) 因 $x-1|f(x^n)$, 所以 $f(1)=f(1^n)=0$, 因此 $x-1|f(x)$, 即存在 $g(x)$ 使得 $f(x)=(x-1)g(x)$, 从而 $x^n-1|f(x^n)$.

(法三) 设 $f(x)=(x-1)h(x)+r$. 若 $r=0$, 用 x^n 替换上式的 x 得, $f(x^n)=(x^n-1)h(x^n)$, 故 $(x^n-1)|f(x^n)$. 若 $0\neq r\in F$, 用 x^n 替换上式的 x 得, $f(x^n)=(x^n-1)h(x^n)+r=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)h(x^n)+r$, 与 $(x-1)|f^n(x)$ 矛盾. 因此 $(x-1)|f(x)$,

常见错误 因为 $(x-1)|f(x^n)$, 所以 $f(x^n)=(x-1)g(x)$, 因此 1 是 $f(x)$ 的一个根. (注意: $f(x^n)=(x-1)g(x)$ 中是关于 x^n 的多项式, 而不是关于 x 的多项式. 如 $f(x^n)=(x-2)g(x)$, 不能就此断定 2 是 $f(x)$ 的一个根)

14. 证明：若 $(x^2+x+1)|f_1(x^3)+xf_2(x^3)$, 则 $(x-1)|f_1(x)$ 且 $(x-1)|f_2(x)$.

因

为 $x^2+x+1|f_1(x^3)+xf_2(x^3)$, 则得 ω_1,ω_2 也是 $f_1(x^3)+xf_2(x^3)$ 的根，则有

$$f_1(\omega_1^3)+\omega_1 f_2(w_1^3)=0,\quad f_1(\omega_2^3)+\omega_2 f_2(\omega_2^3)=0,$$

联立这两个方程，解得 $f_1(1)=f_2(1)=0$, 故 $(x-1)|f_1(x)$ 且 $(x-1)|f_2(x)$.

(法二) 设 $f_1(x)=(x-1)g_1(x)+r_1$, $f_2(x)=(x-1)g_2(x)+r_2$, 其中 $r_1,r_2\in F$. 因此

$$\begin{aligned} f_1(x^3)+xf_2(x^3) &= (x^3-1)g_1(x^3)+r_1+x(x^3-1)g_2(x)+r_2x \\ &= (x^2+x+1)((x-1)g_1(x^3)+x(x-1)g_2(x^3))+(r_2x+r_1). \end{aligned}$$

又因为 $(x^2+x+1)|f_1(x^3)+xf_2(x^3)$, 因此 $r_2x+r_1=0$, 故 $r_1=r_2=0$, 从而 $(x-1)|f_1(x)$ 且 $(x-1)|f_2(x)$.

15. 设 $\deg f(x)=n>1$, 且 $f'(x)|f(x)$. 求证: $f(x)$ 有 n 重根.

证明 (法一) 因为 $f'(x)|f(x)$, 所以 $(f(x),f'(x))=af'(x)$, 其中 a 是 $f'(x))$ 的首项系数的倒数. 又因为 $\frac{f(x)}{(f(x),f'(x))}$ 与 $f(x)$ 有相同的不可约因式. 由 $\deg f(x)=n>1$, $\deg f'(x)=n-1>0$, 则 $\frac{f(x)}{(f(x),f'(x))}$ 是一次的因式, 记为 $k(x-a)$, 则 $f(x)=k(x-a)^n$, 即 $f(x)$ 有 n 重根.

(法二) 设 $f(x)=ap_1^{a_1}(x)p_2^{a_2}(x)\cdots p_m^{a_m}(x)$, 其中 $p_i(x)$, $i=1,2,\cdots,m$ 为首一的两两互素的不可约 r_i 次多项式, $n=\sum_{i=1}^m a_ir_i$. 则 $(f(x),f'(x))=d(x)$, 其中

$d(x)=p_1^{a_1-1}(x)p_2^{a_2-1}(x)\cdots p_m^{a_m-1}(x)$. 由已知条件 $f'(x)|f(x)$, 所以 $f'(x)=bd(x)$. 另一方面 $\deg f'(x)=n-1$, 故 $n-1=\sum_{i=1}^m(a_i-1)r_i=n-\sum_{i=1}^m r_i$, 而 $r_i,i=1,2,\cdots,m$ 全是正整数，从而 $m=1$, 且 $r_1=1$.

常见错误 1 (法二) 证明中直接设 $p_i(x)$ 为一次多项式. (该假设在一般数域上是无法保证成立的)

常见错误 2 (法二) 证明中在复数域上做因式分解. (题目没有对数域做出特别说明，因此是一般数域 F. 用此法证明，只能得出必有 n 重复根 c, 需进一步说明 $c\in F$ 或 $d(x-c)^n\in F[x]$)

16. 设 $g(x)\in\mathbb{Q}[x]$, 存在 $c\in\mathbb{C}$, 使得 $g(c)=0$. 记

$$W=\{f(x)\in\mathbb{Q}[x]\mid f(c)=0\}.$$

求证：在 W 中存在唯一的首一不可约 $p(x)$, 使得对于任意的 $f(x)\in W$, 都有 $p(x)|f(x)$. 此时， c 称为代数数， $\mathbb{C}$ 中非代数数称为超越数， $p(x)$ 称为 c 的最小多项式.

证明 存在性. 因为 $g(x)\in W$, 所以 $W\neq\emptyset$. 取 W 中次数最低的首一多项式 $p(x)$, 则 $p(x)$ 为所求. 首先，$p(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上是不可约的. 若不然, 设 $p(x)=g(x)h(x)$, 其中 $g(x),h(x)\in\mathbb{Q}[x]$, 且 $g(x)$ 和 $h(x)$ 的次数均小于 $p(x)$ 的次数. 由于 $p(c)=0$, 因此 $g(c)$ 和 $h(c)$ 至少有一个为 0. 不妨设 $g(c)=0$, 则 $g(x)\in W$ 与 $p(x)$ 是 W 最低次数矛盾. 其次，对任意多项式 $f(x)\in W$, 因为 $f(c)=p(c)=0$, 说明 c 是 $f(x)$ 和 $p(x)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的公共根，因此他们在 $\mathbb{C}$ 上不互素. 注意到互素与数域扩大无关，所以 $f(x)$ 和 $p(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不互素. 而 $p(x)$ 是 $\mathbb{Q}$ 上不可约多项式，因此 $p(x)|f(x)$.

唯一性. 若还有 $q(x)\in W$ 满足条件，则 $q(x)|p(x)$, 且 $p(x)|q(x)$, 而 $p(x)$, $q(x)$ 都是首一多项式，因此 $q(x)=p(x)$.

17. 设 $f(x)=x^3+px^2+qx+r$ 的三个根成等差数列，求证：

$$3p^3-9pq+27r=0.$$

证明 设 c_1,c_2,c_3 是 $f(x)$ 的三个根，则三个根成等差数列的充分必要条件是

$$c_1=\frac{1}{2}(c_2+c_3),\text{或}c_2=\frac{1}{2}(c_1+c_3),\text{或}c_3=\frac{1}{2}(c_1+c_2),$$

即

$$(2c_1-c_2-c_3)(c_1-2c_2+c_3)(c_1+c_2-2c_3)=0.$$

将左式表为初等对称多项式 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 的多项式

$$(2c_1-c_2-c_3)(c_1-2c_2+c_3)(c_1+c_2-2c_3)=2\sigma_1^3-9\sigma_1\sigma_2+27\sigma_3.$$

而 $\sigma_1=-p,\sigma_2=q,\sigma_3=-r$, 所以 $3p^3-9pq+27r=0$.

注：依已知条件三根成等差数列，故可直接假设三个根为 $a-b,a,a+b$. 再进行计算.

18. 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上首一多项式且无实根，求证存在 $g(x),h(x)$, 使得

$$f(x)=g^2(x)+h^2(x)$$

且 $\deg g(x)>\deg h(x)$.

证明 因为 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上首一多项式且无实根，所以， $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的标准分解式的不可约因子形如 (x^2+bx+c), 其中 $b,c\in\mathbb{R}$ 且 $b^2-4c<0$. 对 $f(x)$ 的次数做数学归纳法证明命题.

当 $\deg f(x)=0$ 时， $f(x)=1=1^2+0^2$, 令 $g(x)=1$, $h(x)=0$, 符合题意.

归纳假设命题对次数小于等于 $n-1$ 的首一多项式成立.

当 $f(x)$ 的次数为 n 时. 由于其只有虚根，因此必存在 $f_1(x)=x^2+bx+c$ 和 $f_2(x)$, 其中 $b,c\in\mathbb{R}$ 且 $b^2-4c<0$, 使得 $f(x)=f_1(x)f_2(x)$. 令 $g_1(x)=x-a$, $h_1(x)=\sqrt{c-b/4}$, 则 $f_1(x)=g_1^2(x)+h_1^2(x)$ 且 $\deg g_1(x)>\deg h_1(x)$. 因 $\deg f_2(x)<n-1$, 由归纳假设存在 $f_2(x)$, $g_2(x)$ 使得 $f_2(x)=g_2^2(x)+h_2^2(x)$ 且 $\deg g_2(x)>\deg h_2(x)$. 这时,

$$(g_1^2(x)+h_1^2(x))(g_2^2(x)+h_2^2(x))=g_1^2(x)g_2^2(x)+h_1^2(x)g_2^2(x)+g_1^2(x)h_2^2(x)+h_1^2(x)h_2^2(x)$$

$$=(g_1(x)g_2(x)+h_1(x)h_2(x))^2+(g_1(x)h_2(x)-g_2(x)h_1(x))^2.$$

令

$$g(x)=g_1(x)g_2(x)+h_1(x)h_2(x),\quad h(x)=g_1(x)h_2(x)-g_2(x)h_1(x),$$

则有

$$f(x)=g^2(x)+h^2(x)$$

且

$$\deg g(x)=\deg g_1(x)+\deg g_2(x)>\deg(g_1(x)h_2(x)-g_2(x)h_1(x))=\deg h(x).$$

由数学归纳法，命题得证.

19. 设

$$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)-1,$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是两两不同的整数. 求证 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

使

得 $f(x)=g(x)h(x)$, 且 $\deg g(x)<n$, $\deg h(x)<n$. 由题意知 $-1=f(a_i)=g(a_i)h(a_i)(i=1,2,\cdots,n)$, 则 $g(a_i)=\pm1$, 且 $h(a_i)=\mp1$, 从而 $g(a_i)+h(a_i)=0(i=1,2,\cdots,n)$, 即 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 $g(x)+h(x)$ 的 n 个两两不同的根. 而 $\deg(g(x)+h(x))<n$, 故得 $g(x)=-h(x)$, 即 $f(x)=-g(x)^2$. 因为 $f(x)$ 的首项系数是 1, 而 $-g(x)^2$ 的首项系数负数，矛盾.

20. 设 $f(x)=(x-a_1)^2(x-a_2)^2\cdots(x-a_n)^2+1$, 其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是两两互异整数. 证明： $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 上不可约.

证明: 首先证明 $f(x)$ 不可能是某个多项式的平方. 用反证法, 假设 $f(x)=g^2(x)$ 是整系数多项式. 令 $h(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$, 则 $g(x)^2=h(x)^2+1$, 即 $(g(x)+h(x),g(x)-h(x))=1$. 因为 $g(x)$, $h(x)$ 都是整系数多项式. 故或者

于

是 $g(x)=1$ 或 $g(x)=-1$, 不可能. 再假设 $f(x)=u(x)v(x)$, $u(x)$, $v(x)$ 都是整系数多项式. $f(x)$ 是 $2n$ 次多项式，因此 $u(x)$ 和 $v(x)$ 的次数至少有一个不超过 n. 现假定 $u(x)$ 的次数小于 n, 显然 $f(x)$ 无实根，因此 $u(x)$ 也无实根. 不妨设 $u(x)$ 是首一多项式，则 $u(x)$ 恒大于零. 由 $f(a_i)=1$ 得 $u(a_i)v(a_i)=1$, 因此 $u(a_i)=1$. 考虑多项式 $u(x)-1$, 由上面的分析可知它有 n 个不同的根 $a_1,a_2,\cdots,a_n$. 但前面假设它的次数小于 n, 矛盾. 因此 $u(x)$ 只能是 n 次首一的多项式，于是 $v(x)$ 也是 n 次首一的多项式. 另一方面，由于对 a_i, $u(a_i)v(a_i)=1$, $u(a_i)=1$, 故 $u(a_i)=1$. 这表明 $u(a_i)=v(a_i)$, $i=1,2,\cdots,n$, 因此 $u(x)=v(x)$, $f(x)=u(x)^2$. 由前面的证明可知假设不成立.