§5.4 标准分解式

思考 分别在 $\mathbb{C}$ 上和 $\mathbb{R}$ 上讨论 $p(x)=x^2+1$ 是否为 $f(x)=(x^4-1)^3$ 的重因式.

解 因为 $f(x)=p^3(x)(x^2-1)^3$. 所以 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的因式. 但是重因式是对不可约因式来定义的，因为 $p(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上不可约，因而是 $f(x)$ 的 3 重因式. 而 $p(x)$ 在 $\mathbb{C}$ 上可约，因而不是 $f(x)$ 的重因式.

思考 $(f^m(x))'=mf^{m-1}(x)f'(x)$.

证明 对 m 做数学归纳法. 当 $m=1$ 时，命题显然成立. 假设命题对 $m-1$ 成立，即

$$(f^{m-1}(x))'=(m-1)f^{m-2}(x)f'(x).$$

考虑 m 情况，有

$$(f^m(x))'=(f^{m-1}(x)f(x))'=(f^{m-1}(x))'f(x))+f^{m-1}(x)f'(x)$$

$$=((m-1)f^{m-2}(x)f'(x)f(x))+f^{m-1}(x)f'(x)$$

$$=((m-1)f^{m-1}(x)f'(x))+f^{m-1}(x)f'(x)=mf^{m-1}(x)f'(x).$$

习题

1. 设 $p(x)\in F[x]$ 且 $\deg p(x)>0$, 如果对于任意的 $f(x)\in F[x]$, 或 $p(x)|f(x)$ 或 $(p(x),f(x))=1$. 则 $p(x)$ 为不可约多项式.

证明 反证法. 若不然, 设 $p(x)$ 是可约多项式, 则存在多项式 $u(x),v(x)\in F[x]$, 使得 $p(x)=u(x)v(x)$ 且 $0<\deg u(x)<\deg p(x)$, $0<\deg v(x)<\deg p(x)$. 对于

为不可约

多项式.

2. 设 $p(x)\in F[x]$ 且 $\deg p(x)>0$, 如果对于任意的 $f(x),g(x)\in F[x]$, 由 $p(x)|f(x)g(x)$, 则或 $p(x)|f(x)$ 或 $p(x)|g(x)$. 那么 $p(x)$ 为不可约多项式.

使

得 $p(x)=u(x)v(x)$ 且 $0<\deg u(x)<\deg p(x)$, $0<\deg v(x)<\deg p(x)$. 对于 $f(x)=u(x)$, $g(x)=v(x)$, 有 $p(x)|f(x)g(x)$ 但 $p(x)\nmid u(x)$ 且 $p(x)\nmid v(x)$, 这与已知矛盾. 故 $p(x)$ 是 $F[x]$ 上不可约多项式.

3. 证明： $f^2(x)|g^2(x)$ 的充分必要条件是 $f(x)|g(x)$.

证明 充分性. 设 $f(x)|g(x)$, 则存在 $h(x)$, 使得 $g(x)=f(x)h(x)$, 所以 $g^2(x)=f^2(x)h^2(x)$, 即 $f^2(x)|g^2(x)$.

必要性. (证法一) 当 $g(x)=0$ 或 $f(x)$ 为常数时，结论显然成立. 又因 $f^2(x)|g^2(x)$, 故不妨设 $\deg f(x)>0$ 且 $\deg g(x)>0$. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的分解式为 (标准分解式适当乘以一些 0 次项)

$$f(x)=ap_1^{a_1}(x)p_2^{a_2}(x)\cdots p_k^{a_k}(x),$$

$$g(x)=bp_1^{b_1}(x)p_2^{b_2}(x)\cdots p_k^{b_k}(x),$$

其中 $p_i(x)$ 为首一的两两互素的不可约多项式，$a_i\geq 0, b_i\geq 0, a_i+b_i>0, 1\leq i\leq k$. 则

$$f^2(x)=a^2p_1^{2a_1}(x)p_2^{2a_2}(x)\cdots p_k^{2a_k}(x),$$
$$g^2(x)=b^2p_1^{2b_1}(x)p_2^{2b_2}(x)\cdots p_k^{2b_k}(x).$$

因为 $f^2(x)|g^2(x)$, 所以 $0\leq 2a_i\leq 2b_i$, $1\leq i\leq k$. 故 $0\leq a_i\leq b_i$, $1\leq i\leq k$. 因此 $g(x)|f(x)$.

(证法二) 由证法一，不妨设 $\deg f(x)>0$ 且 $\deg g(x)>0$, 记 $(f(x),g(x))=d(x)$, 由下题结论有 $(f^2(x),g^2(x))=d^2(x)$. 但是由题设 $f^2(x)|g^2(x)$, 故有 $d^2(x)=\frac{1}{a^2}f^2(x)$, 其中 a 为 $f(x)$ 的首项系数. 从而 $d(x)$ 与 $f(x)$ 的次数相等. 又因 $d(x)|f(x)$, 故 $d(x)$ 与 $f(x)$ 相伴，注意到 $d(x)|g(x)$, 故 $f(x)|g(x)$.

4. 证明： $(f^m(x),g^m(x))=(f(x),g(x))^m$.

证明 (证法一) 设 $d(x)=(f(x),g(x))$, 不妨令 $f(x)=f_1(x)d(x)$, $g(x)=g_1(x)d(x)$, 则得 $(f_1(x),g_1(x))=1$. 下证 $(f_1^m(x),g_1^m(x))=1$. 由推论 5.3.3, 知 $(f_1^2(x),g^1(x))=1$. 再由推论 5.3.3, 进而 $(f_1^3(x),g_1(x))=1$, 依此类推,对任意自然数 m, $(f^m(x),g(x))=$

1. 同理 $(f^m(x), g^2(x)) = 1$, $(f^m(x), g^3(x)) = 1$, 依此类推，对任意自然数 m, $(f_1^m(x), g_1^m(x)) = 1$. 根据 $(f^m(x), g^m(x)) = (d^m(x)f_1^m(x), d^m(x)g_1^m(x)) = d^m(x)(f_1^m(x), g_1^m(x)) = d^m(x) = (f(x), g(x))^m$.

(证法二) 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的分解式为 (标准分解式适当乘以一些 0 次项)

$$f(x) = ap_1^{a_1}(x)p_2^{a_2}(x)\cdots p_k^{a_k}(x),$$

$$g(x) = bp_1^{b_1}(x)p_2^{b_2}(x)\cdots p_k^{b_k}(x),$$

其中 $p_i(x)$ 为首一的两两互素的不可约多项式，$a_i \geq 0, b_i \geq 0, a_i+b_i > 0, 1 \leq i \leq k$. 则

$$f^m(x) = a^m p_1^{ma_1}(x)p_2^{ma_2}(x)\cdots p_k^{ma_k}(x),$$

$$g^m(x) = b^m p_1^{mb_1}(x)p_2^{mb_2}(x)\cdots p_k^{mb_k}(x),$$

因为

$$(f(x), g(x)) = p_1^{c_1}(x)p_2^{c_2}(x)\cdots p_k^{c_k}(x), \quad c_i = \min\{a_i, b_i\}(i = 1, 2, \cdots, k),$$

所以

$$(f^m(x), g^m(x)) = p_1^{mc_1}(x)p_2^{mc_2}(x)\cdots p_k^{mc_k}(x), \quad c_i = \min\{a_i, b_i\}(i = 1, 2, \cdots, k);$$

故

$$(f^m(x), g^m(x)) = (f(x), g(x))^m.$$

5. 求证 $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ 无重因式.

证明 (证法一) 依题意，由于

$$f'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!},$$

故 $f(x) = f'(x) + \frac{1}{n!}x^n$,

$$(f(x), f'(x)) = (f'(x) + \frac{1}{n!}x^n, f'(x)) = (\frac{1}{n!}x^n, f'(x)).$$

注意到 x^n 的不可约因式只能是 x, 但其非 $f'(x)$ 的因式，因此 $(f(x), f'(x)) = 1$. 从而 $f(x)$ 没有重因式.

(证法二) 因为 $f(x)=f'(x)+\frac{1}{n!}x^n$, 故若 $f(x)$ 有重因式，即必有重根 α. 于是必有

$$0=f(\alpha)-f'(\alpha)=\frac{1}{n!}\alpha^n.$$

从而 $\alpha=0$, 即 0 是 $f(x)$ 的根，然而 $f(0)=1\neq 0$, 矛盾.

6. 求证 $f(x)=x^3+px+q$ 有重因式的充分必要条件是 $4p^3+27q^2=0$.

解 (法一) $f'(x)=3x^2+p$. 根据计算，得 $f(x)=(\frac{1}{3})f'(x)+r(x)$, 其中 $r(x)=\frac{2}{3}px+q$. 而 $f'(x)=(\frac{9}{2p}x-\frac{27q}{4p^2})r(x)+r_1(x)$, 其中 $r_1(x)=p-\frac{27q^2}{4p^2}$. 所以 $f(x)$ 有重因式的充分必要条件是 $(f(x),f'(x))\neq 1$, 充分必要条件是 $r_1(x)=0$, 即 $4p^3+27q^2=0$.

(法二) 必要性. 设 $f(x)$ 有重因式, 由待定系数法, 设 $f(x)=(x+a)^2(x+b)=x^3+(b+2a)x^2+(a^2+2ab)x+a^2b$. 比较系数可得

$$\begin{cases} b+2a=0 \\ a^2+2ab=p \\ a^2b=q \end{cases}$$

易见 $b=-2a$, 代入化简得 $4p^3+27q^2=0$.

充分性. 设 $4p^3+27q^2=0$. 令 $a=\frac{3q}{2p}$, $b=-\frac{3q}{p}$, 则有 $f(x)=(x+a)^2(x+b)$, 故 $f(x)=x^3+px+q$ 有 2 重因式 $x+\frac{3q}{2p}$.