§9.1 二次型，矩阵的合同，标准形　习题参考答案

1. 写出下列二次型的矩阵，并求出二次型的秩.

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+4x_1x_3-2x_2x_3$;

(2) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4-x_3x_4$.

解： (1)$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+4x_1x_3-2x_2x_3$ 所对应的矩阵为：

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, r(A)=3.$$

(2) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4-x_3x_4$ 所对应的矩阵为：

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, r(A)=4.$$

2. 求下列矩阵的二次型.

$$(1)\ A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -5 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix};\qquad (2)\ A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

解： (1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+\frac{2}{3}x_1x_2-10x_2x_3+3x_3^2$.

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=-x_1^2-4x_1x_2+8x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$.

3. 设 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+2ax_1x_3+2bx_1x_3$ 的秩为 1, 求 a,b.

解：二次型对应的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ -2 & 4 & b \\ a & b & 4 \end{pmatrix}$, $r(A)=1$.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ -2 & 4 & b \\ a & b & 4 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ 0 & 0 & b+2a \\ 0 & b+2a & 4-a^2 \end{pmatrix}=C,$$

即 $r(C)=1$, 则有 $b+2a=0, 4-a^2=0$. 解得： $a=2, b=-4$ 或 $a=-2, b=4$.

4. 求 $f(x_1,x_2,x_3)=(ax_1+bx_2+cx_3)^2$ 矩阵和秩，其中 a,b,c 为实数.

解: 二次型对应的矩阵为：$A=\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}=(a,b,c)^T(a,b,c)$, 令 $B=(a,b,c)$, 即 $A=B^TB$, 有 $r(A)\le\min\{r(B^T),r(B)\}$.

若 a,b,c 全为零，则 $r(A)=0$;

若 a,b,c 中至少有一个不为零，因 $B\in\mathbb{R}^3$, 则 $r(A)=1$.

5. 用矩阵初等变换的方法将二次型化为标准型.

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2+4x_2x_3$;

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-3x_2^2+x_3^2+x_1x_3$.

解：(1) 二次型所对应的矩阵为：$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&2\\0&2&2\end{pmatrix}$. 则

$$\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&2\\0&2&2\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&2&2\\1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\\1&1&-2\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix},$$

令 $X=CY$, 其中 $C=\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$, 则 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+y_2^2-2y_3^2$.

(2) 方法同 (1), 最后的 $C=\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,$C^TAC=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-3&0\\0&0&\frac{3}{4}\end{pmatrix}$.

用的初等变换不同，得到的替换矩阵不同，但是最后的标准型的正负惯性指数是一样的，即标准形中正对角元的个数一样，且负对角元的个数一样.

6. 用配方法将二次型化为标准型.

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+2x_1x_3$;

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-4x_2^2+4x_1x_3-2x_2x_3$.

解：(1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+2x_1x_3$.

因二次型中不含平方项，先做可逆线性替换使得含有平方项，$\begin{cases}x_1=y_1+y_2\\x_2=y_1-y_2\\x_3=y_3\end{cases}$，则有 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2-y_2^2+2y_1y_3+2y_2y_3=(y_1+y_3)^2-(y_2-y_3)^2$.

再令 $\begin{cases}z_1=y_1+y_3\\z_2=y_2-y_3\\z_3=y_3\end{cases}$，得标准形为：$(x_1,x_2,x_3)=z_1^2-z_2^2$.

所用的可逆矩阵为：$C=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-4x_2^2+4x_1x_3-2x_2x_3$.

先将含有 x_1 的配方，在将剩余部分配方，得 $f(x_1,x_2,x_3)=2(x_1+x_3)^2-4(x_2+\frac{1}{4}x_3)^2-\frac{7}{4}x_3^2$.

令 $\begin{cases}y_1=x_1+x_3\\y_2=x_2+\frac{1}{4}x_3\\y_3=x_3\end{cases}$，即 $Y=BX$, 其中 $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&\frac{1}{4}\\0&0&1\end{pmatrix}$ 为可逆阵，故用可逆线性替换 $X=B^{-1}Y$, 可将原二次型化为标准型：$2y_1^2-4y_2^2-\frac{1}{4}y_3^2$.

7. 用正交线性替换的方法将下列实二次型化为标准型.

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$;

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$.

解：(1) 二次型所对应得矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. A 的特征值为：$\lambda_1=4,\lambda_2=\lambda_3=5$, 相应的特征向量为 $\alpha_1=(2,1,2)^T,\alpha_2=(-1,2,0)^T,\alpha_3=(-1,0,1)^T$.

用 Schmidt 正交化及单位化得 $\gamma_1=\frac{1}{3}(2,1,2)^T$, $\gamma_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2,0)^T$, $\gamma_3=\frac{\sqrt{5}}{15}(-4,-2,5)^T$.

令 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$, 使得 $Q^TAQ=\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, 即用正交线性替换 $X=QY$, 将原二次型化为标准型：$-4y_1^2+5y_2^2+5y_3^2$.

(2) 二次型所对应得矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. A 的特征值为：$\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=3$, 相应的特征向量为 $\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(-1,1,0)^T,\alpha_3=(-1,0,1)^T$.

将他们正交化及单位化得 $\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$, $\gamma_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T$, $\gamma_3=-\frac{\sqrt{6}}{6}(1,1,-2)^T$.

令 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$, 使得 $Q^TAQ=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 即用正交线性替换 $X=QY$, 可将原二次型化为标准型：$3y_2^2+3y_3^2$.

8. 设 A 合同于 B, 则 A 可逆当且仅当 B 可逆，这时 A^{-1} 合同于 B^{-1}.

证明：A 合同于 B, 则 A 必相抵于 B, 相抵矩阵有相同的秩，故 A 可逆的充要条件是 B 可逆. 由 A 合同于 B, 存在可逆阵 C, 使得 $A=C^TBC$. 两边同时取逆，即得 $A^{-1}=(C^TBC)^{-1}=C^{-1}B^{-1}(C^{-1})_T$, 故 A^{-1} 合同于 B^{-1}. 充分性同理可证. □

9. 设 A 合同于 B,C 合同于 D, 则 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ 合同于 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$.

证明：因为 A 合同于 B,C 合同于 D, 所以分别存在可逆阵 P,Q, 使得 $B=P^TAP,D=Q^TCQ$.

令 $U=\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$, 则 U 可逆，且

$$U^T\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}U=\begin{pmatrix} P^T & 0 \\ 0 & Q^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

□

(李小凤解答)