§3.3 坐标

1. 求 $\alpha=(a_1,a_2,a_3)$ 在基 $\xi_1=(1,0,1)$, $\xi_2=(0,1,0)$, $\xi_3=(1,0,-1)$ 下的坐标.

解 设 $\alpha=k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3$, 即得线性方程组

$$\begin{cases} a_1=k_1+k_3\\ a_2=k_2\\ a_3=k_1-k_3\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} k_1=\frac{1}{2}(a_1+a_3)\\ k_2=a_2\\ k_3=\frac{1}{2}(a_1-a_3)\end{cases}$$

$\alpha=(a_1,a_2,a_3)$ 在基 $\xi_1=(1,0,1)$, $\xi_2=(0,1,0)$, $\xi_3=(1,0,-1)$ 下的坐标为 $(\frac{1}{2}(a_1+a_3),a_2,\frac{1}{2}(a_1-a_3))^T$.

2. 在 $F^{2\times 2}$ 中，求从基

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix},\xi_4=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$$

到基

$$\eta_1=\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix},\eta_3=\begin{pmatrix}1&-1\\0&-1\end{pmatrix},\eta_4=\begin{pmatrix}2&1\\1&-2\end{pmatrix}$$

的过渡矩阵. 并求矩阵 $\alpha=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$ 在上面两个基下的坐标.

解

$$(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})A.$$

$$(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})\begin{pmatrix}1&2&1&2\\2&1&-1&1\\3&0&0&1\\1&1&-1&-2\end{pmatrix}=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})B.$$

故 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 到 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 的过渡矩阵为

$$A^{-1}B=\begin{pmatrix} \frac{4}{7} & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 1 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$\alpha=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})(1,-1,0,1)^T=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)A^{-1}(1,-1,0,1)^T=(\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4})^T$;

所以 α 在基 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 下的坐标为 $(\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{3}{4})^T$;

$\alpha=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})(1,-1,0,1)^T=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)B^{-1}(1,-1,0,1)^T=(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{4},-\dfrac{3}{4})^T$;

从而 α 在基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的坐标为 $(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{5}{4},-\frac{3}{4})^T$.

3. 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 和 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是 n 维线性空间 V 的向量组，且

$$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)A.$$

求证：(1) 若 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 和 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是 V 的基，则 A 可逆;

(2) 若 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是 V 的一个基，A 可逆，则 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是 V 的一个基.

证明 (1) 由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 和 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是 V 的基，可设 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)B$, 又

$$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)A=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)BA=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)E,$$

所以 $BA=E$, 其中 A,B 都为 n 阶方阵，故 A 可逆;

(2) 由 $(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)A$, A 可逆，得 $(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)A^{-1}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$, 所以由 (1) 即得 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 也是 V 的一个基. □

(万琴解答)