第四章 复习题

1. 设 V 是数域 F 的一维线性空间. 证明：从 V 到本身的映射 φ 是线性映射的充分必要条件是：存在 $c \in F$, 使得对任意的 $\alpha \in V$, 都有 $\varphi(\alpha) = c\alpha$.

证明：充分性显然.

必要性 因为 V 是数域 F 的一维线性空间，所以存在 $0 \neq \alpha_0 \in V$, 且 α_0 是 V 的一个基. 因此对 V 中任意向量 α, 存在 $a \in F$, 使得 $\alpha = a\alpha_0$. 而 φ 是 V 到自身的线性映射，所以 $\varphi(\alpha_0) \in V$, 从而存在 $c \in F$, 使得 $\varphi(\alpha_0) = c\alpha_0$. 进而 $\varphi(\alpha) = \varphi(a\alpha_0) = a\varphi(\alpha_0) = ac\alpha_0 = c\alpha$. □

2. 设 n 维线性空间 V 的线性变换 φ 在任意一个基下的矩阵都相同，则 $\varphi = c\mathrm{id}_V$, 其中 $c \in F$.

证明：设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 V 的一个基. V 的线性变换 φ 在该基下的矩阵为 A, 即 $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)A$. 设 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 是 V 的另一个基，$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)P$, 则 P 可逆. 从而 $\varphi(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)P^{-1}AP$. 但由已知 φ 在 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 下的矩阵也是 A, 因此 $A = P^{-1}AP$, 进而 $PA = AP$. 所以已知条件等价于对任意的可逆矩阵 P, $PA = AP$. 由第一章知识知矩阵 A 必为数量阵，设为 cE, 故 $\varphi = c\mathrm{id}_V$. □

3. 设 φ 是数域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换，满足

$$a_n\varphi^n + a_{n-1}\varphi^{n-1} + \cdots + a_2\varphi^2 + a_1\varphi + a_0\mathrm{id}_V = 0,$$

其中 $a_i \in F$, $i = 0, 1, 2, \cdots, n$. 设 $a_0 \neq 0$. 求证 φ 是可逆变换.

证明：(法一) 因 φ 是线性变换, 且 $a_0 \neq 0$, 故可定义 $\psi = -\frac{a_n}{a_0}\varphi^{n-1} - \frac{a_{n-1}}{a_0}\varphi^{n-2} - \cdots - \frac{a_2}{a_0}\varphi - \frac{a_1}{a_0}\mathrm{id}_V$, 则 ψ 是 V 的线性变换，且由 $a_n\varphi^n + a_{n-1}\varphi^{n-1} + \cdots + a_2\varphi^2 + a_1\varphi + a_0\mathrm{id}_V = 0$, 直接计算得 $\varphi\psi = \mathrm{id}_V = \psi\varphi$, 因此 φ 可逆.

(法二) 设 $\dim V = n$, 取定 V 的一个基 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$, 设 $\varphi(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)A$, 则根据 $\mathcal{L}(V) \cong F^{n\times n}$ 知 $a_nA^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0E_n = 0$. 因此

$$E_n = -\frac{1}{a_0}(a_nA^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A) = A(-\frac{a_n}{a_0}A^{n-1} - \frac{a_{n-1}}{a_0}A^{n-2} - \cdots - \frac{a_1}{a_0}E_n),$$

从而 A 可逆. 故由 $\mathcal{L}(V)\cong F^{n\times n}$ 可知 φ 可逆. $\square$

4. 证明

$$W=\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbb{R}\}\cong\mathbb{R}^2.$$

证明：因 $W=\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\|\ a,b\in\mathbb{R}\}$, 则 $\dim W=2=\dim\mathbb{R}^2$. 所以 $W=\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbb{R}\}\cong\mathbb{R}^2$. $\square$

5. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\in F^n$, 且

$$\begin{cases} \beta_1=a_{11}\alpha_1+a_{21}\alpha_2+\cdots+a_{s1}\alpha_s \\ \beta_2=a_{12}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\cdots+a_{s2}\alpha_s \\ \cdots\quad\cdots \\ \beta_t=a_{1t}\alpha_1+a_{2t}\alpha_2+\cdots+a_{st}\alpha_s \end{cases}$$

上式可记为

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)A.$$

记 $A=(a_{ij})=(A_1,A_2,\cdots,A_t)\in F^{s\times t}$. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，证明：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性无关的充分必要条件是 $A_1,A_2,\cdots,A_t$ 线性无关.

证明：记 $U=\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\rangle$, 因 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是 F^n 上 s 个线性无关向量, 所以 U 是 F 上 s 维线性空间, 且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是 U 的一个基. 已知条件等价于 A_i 是 β_i 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 下的坐标 $(i=1,2,\cdots,t)$, 由同构即得 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性无关的充分必要条件是 $A_1,A_2,\cdots,A_t$ 线性无关. $\square$

6. 证明：有限维线性空间 V 的任意子空间 U 都是 V 上某个线性变换的核；有限维线性空间 V 的任意子空间 U 都是 V 上某个线性变换的像.

证明: 设 $\xi_1,\cdots,\xi_r$ 是 U 的一个基, 将其扩为 V 的一个基 $\xi_1,\cdots,\xi_r,\xi_{r+1},\cdots,\xi_n$.

定义 $\varphi:V\to V,\sum_{i=1}^n a_i\xi_i\mapsto\sum_{i=r+1}^n a_i\xi_i$, 则 φ 是 V 的线性变换, 且 $U=\mathrm{Ker}\varphi$.

定义 $\psi:V\to V,\sum_{i=1}^n a_i\xi_i\mapsto\sum_{i=1}^r a_i\xi_i$, 则 ψ 是 V 的线性变换，且 $U=\mathrm{Im}\psi$.
$\square$

7. 设 φ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换，则

(1) $\mathrm{Ker}\varphi\subseteq\mathrm{Ker}\varphi^2\subseteq\mathrm{Ker}\varphi^3\subseteq\cdots\subseteq\mathrm{Ker}\varphi^m\subseteq\cdots$;

(2) $\mathrm{Im}\varphi\supseteq\mathrm{Im}\varphi^2\supseteq\mathrm{Im}\varphi^3\supseteq\cdots\supseteq\mathrm{Im}\varphi^m\supseteq\cdots$;

(3) 存在正整数 s, 使得 $\mathrm{Ker}\varphi^s=\mathrm{Ker}\varphi^{s+1}$;

(4) 存在正整数 t, 使得 $\mathrm{Im}\varphi^t=\mathrm{Im}\varphi^{t+1}$;

(5) 若 $\mathrm{Ker}\varphi^s=\mathrm{Ker}\varphi^{s+1}$, 则对于任意的正整数 i, 有 $\mathrm{Ker}\varphi^s=\mathrm{Ker}\varphi^{s+i}$;

(6) 若 $\mathrm{Im}\varphi^t=\mathrm{Im}\varphi^{t+1}$, 则对于任意的正整数 i, 有 $\mathrm{Im}\varphi^t=\mathrm{Im}\varphi^{t+i}$;

(7) $\mathrm{Ker}\varphi^s=\mathrm{Ker}\varphi^{s+1}$ 的充分必要条件是 $\mathrm{Im}\varphi^s=\mathrm{Im}\varphi^{s+1}$.

(8) 若 $\mathrm{Ker}\varphi^s=\mathrm{Ker}\varphi^{s+1}$, 则 $V=\mathrm{Ker}\varphi^s\oplus\mathrm{Im}\varphi^s$.

证明: (1) 要证 $\mathrm{Ker}\varphi\subseteq\mathrm{Ker}\varphi^2\subseteq\mathrm{Ker}\varphi^3\subseteq\cdots\subseteq\mathrm{Ker}\varphi^m\subseteq\cdots$, 只要证明 $\mathrm{Ker}\varphi^m\subseteq\mathrm{Ker}\varphi^{m+1}(m=1,2,\cdots)$ 即可.

对任意 $\alpha\in\mathrm{Ker}\varphi^m$, 则 $\varphi^m(\alpha)=0$, 有 φ 是线性变换, 所以 $\varphi^{m+1}(\alpha)=\varphi(\varphi^m(\alpha))=\varphi(0)=0$, 故 $\alpha\in\mathrm{Ker}\varphi^{m+1}$. 这就证明了 $\mathrm{Ker}\varphi^m\subseteq\mathrm{Ker}\varphi^{m+1}$.

(2) 要证 $\mathrm{Im}\varphi\supseteq\mathrm{Im}\varphi^2\supseteq\mathrm{Im}\varphi^3\supseteq\cdots\supseteq\mathrm{Im}\varphi^m\supseteq\cdots$, 只要证 $\mathrm{Im}\varphi^s\supseteq\mathrm{Im}\varphi^{s+1}(s=1,2,\cdots)$ 即可.

(法一) 因 φ 是 V 的线性变换, 所以 $\mathrm{Im}\varphi\in V$, 从而 $\mathrm{Im}\varphi^{s+1}=\varphi^{s+1}(V)=\varphi^s(\varphi(V))=\varphi^s(\mathrm{Im}\varphi)\subseteq\varphi^s(V)=\mathrm{Im}\varphi^s$.

(法二) 对任意 $\beta\in\mathrm{Im}\varphi^{s+1}$, 则存在 $\alpha\in V$, 使得 $\beta=\varphi^{s+1}(\alpha)$. 因 φ 是 V 的线性变换, 所以 $\varphi(\alpha)\in V$, 从而 $\beta=\varphi^s(\varphi(\alpha))\in\mathrm{Im}\varphi^s$, 故 $\mathrm{Im}\varphi^s\supseteq\mathrm{Im}\varphi^{s+1}$.

(3) 由 (1) 可有 $\mathrm{Ker}\varphi\subseteq\mathrm{Ker}\varphi^2\subseteq\mathrm{Ker}\varphi^3\subseteq\cdots\subseteq\mathrm{Ker}\varphi^m\subseteq\cdots$. 由于 V 是有限维, $\mathrm{dimKer}\varphi$ 是常数, 且维数不能为负数, 因此上式不能无限不能下去, 从而一定存在正整数 s 使得 $\mathrm{dimKer}\varphi^s=\mathrm{dimKer}\varphi^{s+1}$, 但 $\mathrm{Ker}\varphi^s\subseteq\mathrm{Ker}\varphi^{s+1}$, 所以 $\mathrm{Ker}\varphi^s=\mathrm{Ker}\varphi^{s+1}$.

(4) 方法同 (3)

(5) 由 (3) 用数学归纳法证明: 显然当 $i=1$ 时结论成立.

归纳假设结论对 $j\le i-1$ 成立, 即 $\mathrm{Ker}\varphi^s=\mathrm{Ker}\varphi^{s+j}(j\le i-1)$.

再证 i 时结论成立. 事实上, 有

$$\mathrm{Ker}\varphi^s=\mathrm{Ker}\varphi^{s+(i-1)}\subseteq\mathrm{Ker}\varphi^{s+i}. \tag{1}$$

对任意 $\beta\in\mathrm{Ker}\varphi^{s+i}$, 则有 $0=\varphi^{s+i}(\beta)=\varphi^{s+(i-1)}(\varphi(\beta))$, 即 $\varphi(\beta)\in\mathrm{Ker}\varphi^{s+(i-1)}=\mathrm{Ker}\varphi^s$. 所以 $\varphi^{s+1}(\beta)=0,\beta\in\mathrm{Ker}\varphi^{s+1}=\mathrm{Ker}\varphi^s$, 此即

$$\mathrm{Ker}\varphi^{s+i}\subseteq\mathrm{Ker}\varphi^s. \tag{2}$$

由 (1) 和 (2) 式可得 $\mathrm{Ker}\varphi^{s+i}=\mathrm{Ker}\varphi^s$.

(6) 方法同 (5).

(7) (必要性) 由 $\mathrm{dimKer}\varphi^s+\mathrm{dimIm}\varphi^s=\mathrm{dimV}=\mathrm{dimKer}\varphi^{s+1}+\mathrm{dimIm}\varphi^{s+1}$, 且 $\mathrm{Ker}\varphi^s=\mathrm{Ker}\varphi^{s+1}$, 故 $\mathrm{dimKer}\varphi^s=\mathrm{dimKer}\varphi^{s+1}$, 从而 $\mathrm{dimIm}\varphi^s=\mathrm{dimIm}\varphi^{s+1}$. 又因 $\mathrm{Im}\varphi^{s+1}\subseteq\mathrm{Im}\varphi^s$, 故得 $\mathrm{Im}\varphi^{s+1}=\mathrm{Im}\varphi^s$.

(充分性) 若 $\mathrm{Im}\varphi^{s+1}=\mathrm{Im}\varphi^s$. 由 $\mathrm{dimKer}\varphi^s+\mathrm{dimIm}\varphi^s=\mathrm{dimV}=\mathrm{dimKer}\varphi^{s+1}+\mathrm{dimIm}\varphi^{s+1}$, 得 $\mathrm{dimKer}\varphi^s=\mathrm{dimKer}\varphi^{s+1}$, 而 $\mathrm{Ker}\varphi^s\subseteq\mathrm{Ker}\varphi^{s+1}$, 所以 $\mathrm{Ker}\varphi^s=\mathrm{Ker}\varphi^{s+1}$.

(8) 对任意 $\alpha\in V$, 因为 $\varphi^m(\alpha)\in\mathrm{Im}\varphi^m=\mathrm{Im}\varphi^{2m}$, 所以存在 $\beta\in V$, 使得 $\varphi^m(\alpha)=\varphi^{2m}(\beta)$, $\alpha=\varphi^m(\beta)+(\alpha-\varphi^m(\beta))$. 而 $\varphi^m(\alpha-\varphi^m(\beta))=0$, 即 $\alpha-\varphi^m(\beta)\in\mathrm{Ker}\varphi^m$. 即证明了 $V=\mathrm{Im}\varphi^m+\mathrm{Ker}\varphi^m$. 若 $\alpha\in\mathrm{Ker}\varphi^m\cap\mathrm{Im}\varphi^m$, 则 $\alpha=\varphi^m(\beta),\varphi^m(\alpha)=0$, 于是 $0=\varphi^m(\alpha)=\varphi^{2m}(\beta)$, 即 $\beta\in\mathrm{Ker}\varphi^{2m}=\mathrm{Ker}\varphi^m$, 于是 $\alpha=\varphi^m(\beta)=0$. 这就证明了 $\mathrm{Im}\varphi^m\cap$ Ker $\varphi^m=0$. 所以 $V=\mathrm{Im}\varphi^m\oplus\mathrm{Ker}\varphi^m$. □

8. 设 φ 是 n 维线性空间的线性变换，满足 $\mathrm{dimIm}\varphi^2=\mathrm{dimIm}\varphi$, 求证 $\mathrm{Im}\varphi\cap\mathrm{Ker}\varphi=0$.

证明: 因 $\mathrm{dimIm}\varphi^2=\mathrm{dimIm}\varphi$, $\mathrm{dimIm}\varphi^2+\mathrm{dimKer}\varphi^2=n=\mathrm{dimIm}\varphi+\mathrm{dimKer}\varphi$, 则得 $\mathrm{dimKer}\varphi^2=\mathrm{dimKer}\varphi$. 又因 $\mathrm{Ker}\varphi\subseteq\mathrm{Ker}\varphi^2$, 所以 $\mathrm{Ker}\varphi=\mathrm{Ker}\varphi^2$.

设 $\alpha\in\mathrm{dimIm}\varphi\cap\mathrm{Ker}\varphi$, 则存在 β 使得 $\alpha=\varphi(\beta)$, 且 $\varphi(\alpha)=0$. 所以 $\varphi^2(\beta)=\varphi(\alpha)=0$, 即 $\beta\in\mathrm{Ker}\varphi^2=\mathrm{Ker}\varphi$, 故 $\alpha=\varphi(\beta)=0$. 这就证明了 $\mathrm{Im}\varphi\cap\mathrm{Ker}\varphi=0$. □

9. 设 φ,ψ 是线性空间 V 的两个线性变换，且 $\varphi^2=\varphi$, $\psi^2=\psi$. 则

(1) $\mathrm{Im}\varphi=\mathrm{Im}\psi$ 的充分必要条件是 $\varphi\psi=\psi$, $\psi\varphi=\varphi$;

(2) $\mathrm{Ker}\varphi=\mathrm{Ker}\psi$ 的充分必要条件是 $\varphi\psi=\varphi$, $\psi\varphi=\psi$.

证明： (1) (法一) 由 $\varphi\psi=\psi$ 得 $\mathrm{Im}\psi\subseteq\mathrm{Im}\varphi$. 同理由 $\psi\varphi=\varphi$ 得 $\mathrm{Im}\varphi\subseteq\mathrm{Im}\psi$. 所以 $\mathrm{Im}\varphi=\mathrm{Im}\ \psi$.

反之，若 $\mathrm{Im}\varphi=\mathrm{Im}\psi$, 则对任意的 $\alpha\in V,\psi(\alpha)\in\mathrm{Im}\psi=\mathrm{Im}\varphi$. 因此，存在 $\beta\in V,\psi(\alpha)=\varphi(\beta)$. 又因为 $\varphi^2=\varphi$, 故 $\varphi\psi(\alpha)=\varphi^2(\beta)=\varphi(\beta)=\psi(\alpha)$. 此即 $\varphi\psi=\psi$. 同理可证 $\psi\varphi=\varphi$.

(法二) 充分性 设 $\mathrm{dim}V=n$. 因为 $\psi=\varphi\psi$, 所以 $\mathrm{Im}\psi=\varphi(V)=\varphi\psi(V)\subseteq$

$\varphi(V)=\mathrm{Im}\varphi$. 同理，由 $\varphi=\psi\varphi$, 可得 $\mathrm{Im}\varphi\subseteq\mathrm{Im}\psi$. 故 $\mathrm{Im}\varphi=\mathrm{Im}\psi$.

必要性 设 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$ 是 $\mathrm{Im}\varphi$(即 $\mathrm{Im}\psi$) 的一个基. 且设 $\alpha_i,\beta_i\in V$, $\varphi(\alpha_i)=\psi(\beta_i)=\eta_i$, $(i=1,2,\cdots,r)$, 则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 均线性无关，且由 $\varphi^2=\varphi$, $\psi^2=\psi$, 知 $\varphi(\eta_i)=\varphi^2(\alpha_i)=\varphi(\alpha_i)=\eta_i$, 同理 $\psi(\eta_i)=\eta_i$, $(i=1,2,\cdots,r)$. 又设 $\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$ 是 $\mathrm{Ker}\varphi$ 的一个基. 现证 $\eta_1,\cdots,\eta_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$ 是 V 的一个基. 事实上, 设 $a_1\eta_1+\cdots+a_r\eta_r+a_{r+1}\alpha_{r+1}+\cdots+a_n\alpha_n=0$. 因 φ 是线性变换, 将其作用于上式两边得 $0=a_1\varphi(\eta_1)+\cdots+a_r\varphi(\eta_r)=a_1\varphi^2(\alpha_1)+\cdots+a_r\varphi^2(\alpha_r)=a_1\eta_1+\cdots+a_r\eta_r$, 因此 $a_1=\cdots=a_r=0$, 进而 $a_{r+1}\alpha_{r+1}+\cdots+a_n\alpha_n=0$, 从而 $a_{r+1}=\cdots=a_n=0$.

对任意 $\alpha\in V$, $\alpha=\sum_{i=1}^r a_i\eta_i+\sum_{i=r+1}^n a_i\alpha_i$, $\varphi(\alpha)=\sum_{i=1}^r a_i\varphi(\eta_i)=\sum_{i=1}^r a_i\eta_i$, $\psi\varphi(\alpha)=\psi(\sum_{i=1}^r a_i\eta_i)=\sum_{i=1}^r a_i\eta_i=\varphi(\alpha)$, 因此 $\varphi=\psi\varphi$. 同理可证 $\psi=\varphi\psi$.

(2) 充分性 设 $\varphi\psi=\varphi,\psi\varphi=\psi$. 对任意的 $\alpha\in\mathrm{Ker}\varphi,\varphi(\alpha)=0$, 故 $\psi(\alpha)=\psi\varphi(\alpha)=0$. 因此 $\alpha\in\mathrm{Ker}\ \psi$,$\mathrm{Ker}\ \varphi\subseteq\mathrm{Ker}\psi$. 同理 $\mathrm{Ker}\psi\subseteq\mathrm{Ker}\ \varphi$. 因此 $\mathrm{Ker}\varphi=\mathrm{Ker}\psi$.

必要性 (法一) 若 $\mathrm{Ker}\varphi=\mathrm{Ker}\psi$, 对任意的 $\alpha\in V$, 有

$$\psi(\alpha-\psi(\alpha))=\psi(\alpha)-\psi^2(\alpha)=0,$$

因此 $\alpha-\psi(\alpha)\in\mathrm{Ker}\ \psi=\mathrm{Ker}\ \varphi$, 即 $\varphi(\alpha-\psi(\alpha))=0$. 也就是 $\varphi(\alpha)=\varphi\psi(\alpha),\varphi=\psi\varphi$. 同理可证 $\psi\varphi=\psi$.

(法二) 设 $\dim V=n$, $\xi_{r+1},\cdots,\xi_n$ 是 $\mathrm{Ker}\psi$ 的一个基，因 $\mathrm{Ker}\varphi=\mathrm{Ker}\psi$, 所以 $\varphi(\xi_i)=0,(i=r+1,\cdots,n)$. 将其扩为 V 的一个基 $\xi_1,\cdots,\xi_r,\xi_{r+1},\cdots,\xi_n$, 则 $\psi(\xi_1),\cdots,\psi(\xi_r)$ 线性无关. 现证 $\psi(\xi_1),\cdots,\psi(\xi_r),\xi_{r+1},\cdots,\xi_n$ 线性无关，从而是 V 的一个基. 事实上，若

$$a_1\psi(\xi_1)+\cdots+a_r\psi(\xi_r)+a_{r+1}\xi_{r+1}+\cdots+a_n\xi_n=0 \tag{3}$$

将线性变换 ψ 作用于上式两边，得 $a_1\psi^2(\xi_1)+\cdots+a_r\psi^2(\xi_r)=0$. 又因为 $\psi^2=\psi$, 因此 $\psi^2(\xi_i)=\psi(\xi_i)$, $(i=1,\cdots,r)$, 上式即 $a_1\psi(\xi_1)+\cdots+a_r\psi(\xi_r)=0$, 故 $a_1=\cdots=a_r=0$, 代入式 (3), 进而 $a_{r+1}=\cdots=a_n=0$.

对 V 中任意向量 α, $\alpha=\sum_{i=1}^r a_i\psi(\xi_i)+\sum_{i=r+1}^n a_i\xi_i$, $\varphi(\alpha)=\sum_{i=1}^r a_i\varphi\psi(\xi_i)$, $\varphi\psi(\alpha)=\varphi(\sum_{i=1}^r a_i\psi^2(\xi_i))=\varphi(\sum_{i=1}^r a_i\psi(\xi_i))=\sum_{i=1}^r a_i\varphi\psi(\xi_i)$, 故 $\varphi\psi=\varphi$. 同理可证， $\psi\varphi=\psi$. □

10. 设 V 是数域 F 上 n 维线性空间，$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_s$ 是非零线性变换，求证：存在 $\alpha\in V$, 使得 $\varphi_i(\alpha)\neq 0$, $i=1,2,\cdots,s$.

证明：依题意，由于每个 $\varphi_i\neq 0$, 故 $\mathrm{Ker}\varphi_i$ 是 V 的真子空间. 由第三章总复习题第 7 题可知，有限个真子空间 $\mathrm{Ker}\varphi_i$ 不能覆盖 V. 因此必存在 $\alpha\in V$, 使得 α 不属于任意一个 $\mathrm{Ker}\varphi_i$, 故 $\varphi_i(\alpha)\neq 0$. □

11. 设 V 是数域 F 上 n 维线性空间，$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_s$ 是两两不同的线性变换，求证：存在 $\alpha\in V$, 使得 $\varphi_1(\alpha),\varphi_2(\alpha),\cdots,\varphi_s(\alpha)$ 两两不同.

证明: 依题意, 令 $V_{ij}=\{v\in V|\varphi_i(v)=\varphi_j(v)\}(i<j)$, 其中 $i,j\in\{1,2,\ldots,k\}$. 易知 $V_{ij}=\mathrm{Ker}(\varphi_i-\varphi_j)$, 故 V_{ij} 是 V 的子空间. 又 $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_k$ 两两不同，故 $\mathrm{Ker}(\varphi_i-\varphi_j)\neq V$, 即每个 V_{ij} 都是 V 的真子空间. 而这些 V_{ij} 总共只有有限个，故由第三章总复习题第 7 题知，必存在 $\alpha\in V$ 不属于所有的 V_{ij} 的并. 此时 $\varphi_1(\alpha),\varphi_2(\alpha),\ldots,\varphi_k(\alpha)$ 两两不相同. □

12. 设 φ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换，φ 在一个基 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}.$$

求证：

(1) 设 U 是 V 的 $\varphi-$ 子空间，且 $\xi_n\in U$, 则 $U=V$;

(2) 对于任意的非零 $\varphi-$ 子空间 U, 总有 $\xi_1\in U$;

(3) V 不能分解为两个非平凡的 $\varphi-$ 子空间的直和;

(4) 求 φ 的所有不变子空间.

证明：(1) 依题意,

$$\varphi(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix},$$

可知 $\varphi(\xi_1) = a\xi_1$, $\varphi(\xi_2) = \xi_1 + a\xi_2$, $\cdots$, $\varphi(\xi_n) = \xi_{n-1} + a\xi_n$.

若设 U 为包含 ξ_n 的 $\varphi-$ 不变子空间，故由 $\xi_n \in U$, 得 $\varphi(\xi_n) \in U$, 故 $\xi_{n-1} = \varphi(\xi_n) - a\xi_n \in U$, 进而 $\varphi(\xi_{n-1}) \in U$, 得 $\xi_{n-2} \in U$, $\cdots$, 以此类推可得出 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n \in U$, 故只能 $U = V$, 即得 V 中包含 ξ_n 的 $\varphi-$ 不变子空间只有 V 自身.

(2) 设 U 为任意一个非零 $\varphi-$ 不变子空间，任取一个非零向量 $\alpha \in U$. 由 $\alpha \in V$, 可设 $\alpha = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \cdots + a_n\xi_n$, 则 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中至少有一个不为零，不妨设 a_i 是 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1$ 中第一个不为零者，此时 $\alpha = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \cdots + a_i\xi_i$. 则有 $\varphi(\alpha) = a_1\varphi(\xi_1) + a_2\varphi(\xi_2) + \cdots + a_i\varphi(\xi_i) = a_2\xi_1 + a_3\xi_2 + \cdots + a_i\xi_{i-1} + a\alpha \in U$. 因 U 是 V 的子空间，所以 $a_2\xi_1 + a_3\xi_2 + \cdots + a_i\xi_{i-1} \in U$, 将其仍记为 α, 从而 $\varphi(\alpha) = a_3\xi_1 + a_4\xi_2 + \cdots + a_i\xi_{i-2} + a\alpha \in U$, 所以 $a_3\xi_1 + a_4\xi_2 + \cdots + a_i\xi_{i-2} \in U$, $\cdots$, 以此类推，我们有 $a_i\xi_1 \in U$. 由于 $a_i \neq 0$, 因此 $\xi_1 \in U$, 命题得证.

(3) 由 (2), 任意两个两个非平凡 $\varphi-$ 不变子空间 V_1, V_2 必包含 ξ_1, 故 $V_1 \cap V_2 \neq 0$, 从而 V 不能分解为两个非平凡 $\varphi-$ 不变子空间的直和.

(4) 0, $U_i = \langle \xi_1, \cdots, \xi_i \rangle, (i = 1, 2, \cdots, n)$ 是 $\varphi-$ 的不变子空间. □

13. 设 A, B 都是 $m \times n$ 矩阵，求证：线性方程组 $AX = 0$ 和 $BX = 0$ 同解的充分必要条件是存在 m 阶可逆矩阵 P, 使得 $A = PB$.

证明：因为 P 是可逆矩阵，充分性显然. 下证必要性.

(法一) 因为方程组 $AX = 0, BX = 0$ 同解. 自然地， $AX = 0$ 的解必是 $BX = 0$ 的解，因此 $AX = 0$ 和 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} X = 0$ 同解，进而 B 的行向量可由 A 的行向量线性表出. 同理， A 的行向量也可由 B 的行向量线性表出，故存在 m 阶非异阵 P, 使 $B = PA$. 事实上，设 A 秩为 r, 由于 A, B 行向量组等价，所以 A, B 的行向量组的极大线性无关组等价. 对 A 做若干行置换，可使得 A 的行向量组的极大线性无关组变到前 r 行，再通过矩阵行的消法变换将 A 的其余行消为零，此过程用矩阵表示即存在可逆矩阵 S, 使得 $SA = \begin{pmatrix} A_1 \\ 0 \end{pmatrix}$. 同理，对矩阵 B, 存在可逆矩阵 Q, 使得 $TB = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 其中 A_1, B_1 都是 $r \times n$ 阶行满秩矩阵，且他们的行向量组等价. 因此 A_1 的行向量均可由 B_1 的行向量线性表示，该关系用矩阵表示就是：存在 r 阶方阵 W_1 使得 $A_1 = W_1B_1$. 若 W_1 不可逆，即 $r(W_1) < r$, 则 $r(A_1) < r$, 与 $r(A_1) = r$ 矛盾. 故 W_1 可逆. 从而直接计算可知，只

要令 $P = S^{-1}\begin{pmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & E_{m-r} \end{pmatrix} T$, 即有 P 可逆，且 $A = PB$.

(法二) 设 $A, B \in F^{m\times n}$. 定义 $\varphi : F^n \to F^m$, $X \mapsto AX$, $\psi : F^n \to F^m$, $X \mapsto BX$. $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n$ 和 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m$ 分别是 F^n 和 F^m 的标准单位列向量，则

$$\varphi(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n) = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m)A, \tag{4}$$

$$\psi(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n) = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m)B. \tag{5}$$

设 $X_{r+1}, X_{r+2}, \cdots, X_n$ 是 $\mathrm{Ker}\varphi$ (也是 $\mathrm{Ker}\psi$) 的一个基，将其扩为 F^n 的一个基 $X_1, \cdots, X_r, X_{r+1}, \cdots, X_n$. 则 $\varphi(X_1), \cdots, \varphi(X_r)$ 线性无关，可扩为 W 的一个基 $Y_1 = \varphi(X_1), \cdots, Y_r = \varphi(X_r), Y_{r+1}, \cdots, Y_m$. 同理 $\psi(X_1), \cdots, \psi(X_r)$ 线性无关，可扩为 W 的一个基 $Z_1 = \psi(X_1), \cdots, Z_r = \psi(X_r), Z_{r+1}, \cdots, Z_m$. 定义 $\sigma : W \to W$, $\sum_{i=1}^m a_i Z_i \mapsto \sum_{i=1}^m a_i Y_i$, 则 σ 是可逆变换. 至此有如下关系成立：

$$\varphi(X_1, \cdots, X_n) = (Y_1, \cdots, Y_m)\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\psi(X_1, \cdots, X_n) = (Z_1, \cdots, Z_m)\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma(Z_1, \cdots, Z_m) = (Y_1, \cdots, Y_m),$$

从而 $\varphi = \sigma\psi$, 且

$$\sigma(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m) = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m)P, \tag{6}$$

其中 $P = (Y_1, \cdots, Y_m)(Z_1, \cdots, Z_m)^{-1}$ 可逆. 因此由 (4)-(6) 及同构知 $A = PB$.

(法三) 设 $r(A) = r$, 且设 n 维列向量 $u_{r+1}, u_{r+2}, \cdots, u_n$ 是 $AX = 0$ 的一个基础解系, 将其扩为 F^n 的一个基 $u_1, u_2, \cdots, u_r, u_{r+1}, u_{r+2}, \cdots, u_n$, 则 $Au_1, Au_2, \cdots, Au_r$ 线性无关. 记 $U = (u_1, u_2, \cdots, u_r, u_{r+1}, u_{r+2}, \cdots, u_n)$, $A_1 = (Au_1, Au_2, \cdots, Au_r)$, 则 U 可逆， A_1 列满秩，且 $AU = (A_1, 0)$. 同理，因为 $BX = 0$ 与 $AX = 0$ 同解，所以若记 $B_1 = (Bu_1, Bu_2, \cdots, Bu_r)$, 则 B_1 列满秩，且 $BU = (B_1, 0)$. 注意到 A_1 和 B_1 同为 $m \times r$ 阶列满秩矩阵，因此存在 m 阶可逆矩阵 P_1, P_2 使得

$$P_1 A_1 = \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix} = P_2 B_1.$$

故 $P_1 AU = P_2 BU$, 而 U 可逆，因此令 $P = P_1^{-1} P_2$, 就有 P 可逆，且 $A = PB$.

注 1: $Au_1, Au_2, \cdots, Au_r$ 线性无关的证明. 若 $a_1Au_1 + a_2Au_2 + \cdots + a_rAu_r = 0$, 则 $A(a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_ru_r) = 0$, 即 $a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_ru_r$ 是 $AX = 0$ 的一个解，因此 $a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_ru_r = a_{r+1}u_{r+1} + a_{r+2}u_{r+2} + \ldots + a_nu_n$. 而 $u_1, u_2, \cdots, u_r, u_{r+1}, u_{r+2}, \cdots, u_n$ 线性无关，所以 $a_i = 0, (i = 1, 2, \cdots, n)$.

注 2: 若 $m \times r$ 矩阵 A_1 列满秩，则存在可逆矩阵 P_1 使得 $P_1A_1 = \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}$. 事实上，对 A_1, 存在可逆矩阵 S 和 T 使得 $A_1 = S\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}T$. 因此

$$A_1 = S\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}T = S\begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & E_{m-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix},$$

令 $P_1 = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & E_{m-r} \end{pmatrix}^{-1} S^{-1}$, 则 $P_1A_1 = \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}$.

(法四) 设 V, W 分别是数域 F 上的 n 维和 m 维线性空间， $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 和 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m$ 分别是 V 和 W 的一个基. 定义

$$\varphi : V \to W, \varphi(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m)A, \tag{7}$$

$$\psi : V \to W, \psi(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m)B, \tag{8}$$

则 φ 和 ψ 都是 V 到 W 的线性映射. 由同构知条件 $AX = 0$ 和 $BX = 0$ 同解等价于 $\mathrm{Ker}\varphi = \mathrm{Ker}\psi$. 设 $\zeta_{r+1}, \zeta_{r+2}, \cdots, \zeta_n$ 是 $\mathrm{Ker}\varphi$ (也是 $\mathrm{Ker}\psi$) 的一个基，将其扩为 V 的一个基 $\zeta_1, \cdots, \zeta_r, \zeta_{r+1}, \cdots, \zeta_n$. 则 $\varphi(\zeta_1), \cdots, \varphi(\zeta_r)$ 线性无关，可扩为 W 的一个基 $\alpha_1 = \varphi(\zeta_1), \cdots, \alpha_r = \varphi(\zeta_r), \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_m$. 同理 $\psi(\zeta_1), \cdots, \psi(\zeta_r)$ 线性无关，可扩为 W 的一个基 $\beta_1 = \psi(\zeta_1), \cdots, \beta_r = \psi(\zeta_r), \beta_{r+1}, \cdots, \beta_m$. 定义 $\sigma : W \to W$, $\sum_{i=1}^m a_i\beta_i \mapsto \sum_{i=1}^m a_i\alpha_i$, 则 σ 是可逆变换. 至此有如下关系成立：

$$\varphi(\zeta_1, \cdots, \zeta_n) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\psi(\zeta_1, \cdots, \zeta_n) = (\beta_1, \cdots, \beta_m)\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma(\beta_1, \cdots, \beta_m) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m),$$

从而 $\varphi = \sigma\psi$. 记

$$(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) = (\eta_1, \cdots, \eta_m)S, (\beta_1, \cdots, \beta_m) = (\eta_1, \cdots, \eta_m)T,$$

故 S, T 可逆. 令 $P = ST^{-1}$, 则

$$\sigma : W \to W, \sigma(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m) = \sigma(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m)P \tag{9}$$

则由 (7)-(9) 及同构知 $A = PB$. □

14. 记 V 是 n 维线性空间， U 是 m 维线性空间， $\varphi : V \to U$ 是线性映射. 求证：存在线性映射 $\psi : U \to V$, 使得

$$\varphi\psi\varphi = \varphi, \quad \psi\varphi\psi = \psi.$$

证明：(法一) 设 $\xi_{r+1}, \cdots, \xi_n$ 是 $\mathrm{Ker}\varphi$ 的一个基, 将其扩为 V 的一个基 $\xi_1, \cdots, \xi_r$, $\xi_{r+1}, \cdots, \xi_n$. 则 $\varphi(\xi_1) \doteq \eta_1$, $\varphi(\xi_2) \doteq \eta_2$, $\cdots$, $\varphi(\xi_r) \doteq \eta_r$ 线性无关，可扩为 U 的一个基 $\eta_1, \cdots, \eta_r$, $\eta_{r+1}, \cdots, \eta_m$, 则 $\varphi(\sum_{i=1}^n a_i\xi_i) = \sum_{i=1}^r a_i\eta_i$.

定义 $\psi : U \to V$, 使得 $\psi(\sum_{i=1}^m a_i\eta_i) = \sum_{i=1}^r a_i\xi_i$, 则 ψ 是 U 到 V 的线性映射, 且 $\varphi\psi\varphi(\sum_{i=1}^n a_i\xi_i) = \varphi\psi(\sum_{i=1}^r a_i\eta_i) = \varphi(\sum_{i=1}^r a_i\xi_i) = \sum_{i=1}^r a_i\eta_i = \varphi(\sum_{i=1}^n a_i\xi_i)$, 故 $\varphi\psi\varphi = \varphi$. 同理可证 $\psi\varphi\psi = \psi$.

(法二) 对 V 到 U 的线性映射 φ, 存在 V 的基 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 和 U 的基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m$, 使得 φ 在这两个基下的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$. 定义 U 到 V 的线性映射 ψ, 使得 $\psi(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m) = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)B$, 其中 $B = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{n\times m}$, 则 $ABA = A$, $BAB = B$. 由同构知 $\varphi\psi\varphi = \varphi$, $\psi\varphi\psi = \psi$.

(法三) 设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 和 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m$ 分别是 V 和 U 的一个基， φ 在这两个基下的矩阵为 A. 对矩阵 A, 存在可逆矩阵 P 和 Q, 使得 $A = P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$, 令 $B = Q^{-1}\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$, 则 $ABA = A$, $BAB = B$. 再令 U 到 V 的线性映射 ψ, 使得 $\psi(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m) = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)B$, 则由同构知 $\varphi\psi\varphi = \varphi$, $\psi\varphi\psi = \psi$. □

(李小凤解答)