习题 1.1 数域

1. 求包含 $\sqrt{3}$ 的最小数域，并证明.

证明：可证 $P=\{a+b\sqrt{3}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$ 为所求.

先证 P 是数域. 显然 $P\subseteq\mathbb{C}$, $0+0\sqrt{3}=0, 1+\sqrt{3}=1\in P$, 且对于任意的 $a+b\sqrt{3}, c+d\sqrt{3}\in P$, 其中 $a,b,c,d\in\mathbb{Q}$,

$$(a+b\sqrt{3})\pm(c+d\sqrt{3})=(a\pm c)+(b\pm d)\sqrt{3}\in P,$$

$$(a+b\sqrt{3})(c+d\sqrt{3})=(ac+3bd)+(ad+bc)\sqrt{3}\in P.$$

对于 $c+d\sqrt{3}\neq 0$, 其中 c,d 不同时为零，有 $c-d\sqrt{3}\neq 0$ 且

$$\frac{(a+b\sqrt{3})}{c+d\sqrt{3}}=\frac{ac-3bd}{c^2-3d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-3d^2}\in P.$$

再证 P 是包含 $\sqrt{3}$ 的最小数域. 假设还存在一个数域 F 包含 $\sqrt{3}$, 往证 $P\subseteq F$, 即证明对任意 $a+b\sqrt{3}\in F$, 其中 $a,b\in\mathbb{Q}$, 总有 $a+b\sqrt{3}\in P$. 事实上，因 $\mathbb{Q}$ 是最小数域，故 $\mathbb{Q}\subseteq F$, 从而 $a,b\in F$; 其次由假设 $\sqrt{3}\in F$, 且 F 是数域，因此 $b\sqrt{3}\in F$, 进而 $a+b\sqrt{3}\in F$. 命题得证. □

2. 证明 $\mathbb{Q}(i)=\{a+bi\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$ 是一个数域.

证明：$\mathbb{Q}(i)$ 是 $\mathbb{C}$ 的子集. 且因为 $1=1+0i$, $0=0+0i$, 所以 $0,1\in\mathbb{Q}(i)$.

对于任意的 $a+bi, c+di\in\mathbb{Q}(i)$, 其中 $a,b,c,d\in\mathbb{Q}$, 成立

$$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i\in\mathbb{Q}(i),$$

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i\in\mathbb{Q}(i),$$

对 $c+di\neq 0$, 且 c,d 不同时为零，有 $c-di\neq 0$ 且

$$\frac{(a+bi)}{(c+di)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i\in\mathbb{Q}(i).$$

综上即得 $\mathbb{Q}(i)$ 是一个数域. □

(李小凤解答)