第九章 二次型 复习题参考答案

1. 取定欧氏空间的一个基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$, 对 $\alpha=\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i,\beta=\sum_{i=1}^n y_i\alpha_i$, 有

$$(\alpha,\beta)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)A\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},$$

其中 $A=((\alpha_i,\alpha_j))_{n\times n}$ 称为基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的度量矩阵.

(1) 在取定 n 维欧氏空间 V 的一个基的前提下，内积与度量矩阵互相唯一确定；

(2) 度量矩阵是实对称正定阵；

(3) n 维欧氏空间 V 的不同基下的度量矩阵是合同的；

(4) 当基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是正交基时，度量矩阵是对角阵；当基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是标准正交基时，度量矩阵是单位阵 E.

证明：(1)(2) 记 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$.

首先, $(\alpha,\beta)=(\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i,\sum_{j=1}^n y_j\alpha_j)=\sum_{i,j=1}^n(\alpha_i,\alpha_j)x_iy_j=X^TAY$. 若还有矩阵 B, 使得对任意的 $\alpha,\beta\in V$, 成立 $(\alpha,\beta)=X^TBY$. 取 $\alpha=\alpha_i,\beta=\alpha_j$, 则 $X=\varepsilon_i$, $Y=\varepsilon_j$, 从而 $a_{ij}=X^TAY=(\alpha,\beta)=X^TBY=b_{ij}$, 该式对所有 $1\le i,j\le n$ 成立，因此 $A=B$. 唯一性得证.

其次，因 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是基，所以对任意的 $0\neq X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in\mathbb{R}^n$, 有 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)X=\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i\neq 0$, 故由内积定义知 $(\alpha,\alpha)>0$, 即 $0<(\alpha,\alpha)=X^TAX$. 又由内积定义知 A 实对称，因此 A 正定.

此外，给定正定矩阵 A, 对任意的 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)X,\beta=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)Y\in V$, 定义 $(\alpha,\beta)=X^TAY$, 则

a. $(\alpha,\beta)=X^TAY=Y^TAX=(\beta,\alpha)$;

b. 对任意的 $\gamma=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)Z$, $(\alpha+\beta,\gamma)=(X+Y)^TAZ=X^TAZ+Y^TAZ=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$;

c. 对任意的 $k\in\mathbb{R}$, $(k\alpha,\beta)=(kX)^TAY=kX^TAY=k(\alpha,\beta)$;

d. 对任意的 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)X\in V$, 因 A 正定，故 $(\alpha,\alpha)=X^TAX\ge 0$, 且等号成立充分必要条件是 $X=0$ 的充分必要条件是 $\alpha=0$.

综上得正定阵 A 定义了一个内积.

因此，内积与度量矩阵相互唯一确定，且度量矩阵是正定阵.

(3) 设 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是 V 的另一个基，P 是从基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵，B 是基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的度量矩阵，$\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ 分别是 α,β 在基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 下的坐标向量. 则 P 可逆，且 $X=P\tilde{X}$, $Y=P\tilde{Y}$, 从而 $\tilde{X}^TB\tilde{Y}=(\alpha,\beta)=X^TAX=\tilde{X}^TP^TAP\tilde{Y}$, 类似 (1)(2) 中证明即得 $B=P^TAP$, 说明 B 与 A 合同.

(4) 若基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是正交基，则 $(\alpha_i,\alpha_j)=0,(i\neq j)$, 故 A 为对角阵. 若基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是标准正交基，则 $(\alpha_i,\alpha_j)=\delta_{ij}$, 故 $A=E_n$, 结论成立. □

2. 证明实二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^k(b_{i1}x_1+\cdots+b_{in}x_n)^2,$$

的秩等于下面矩阵 B 的秩

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \end{pmatrix}.$$

证明：将 B 按行分块为 $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_k \end{pmatrix}$, 其中 $B_i = (b_{i1}, b_{i2}, \cdots, b_{in})$. 则

$$B^T B = (B_1^T, B_2^T, \cdots, B_k^T) \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \cdots \\ B_k \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{k} B_i^T B_i.$$

所以

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= \sum_{i=1}^{k} (b_{i1}x_1 + \cdots + b_{in}x_n)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{k} (x_1, x_2, \cdots, x_n) \begin{pmatrix} b_{i1} \\ b_{i2} \\ \cdots \\ b_{in} \end{pmatrix} (b_{i1}, b_{i2}, \cdots, b_{in}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{k} (x_1, x_2, \cdots, x_n) B_i^T B_i \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= (x_1, x_2, \cdots, x_n) \sum_{i=1}^{k} B_i^T B_i \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= (x_1, x_2, \cdots, x_n) B^T B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

因为 $(B^T B)^T = B^T (B^T)^T = B^T B$, 所以 $B^T B$ 是对称矩阵， f 的相伴矩阵为 $B^T B$.

命题转化为证明 $r(B) = r(B^T B)$, 我们只要证明 $BX = 0$ 与 $B^T BX = 0$ 同解即可. 事实上，若 X 是 $BX = 0$ 的解，显然有 $B^T BX = 0$, 即 X 也是 $B^T BX = 0$ 的解；另一方面，若 X 是 $B^T BX = 0$ 的解，则 $X^T B^T BX = 0$, 从而 $(BX)^T (BX) = 0$. 注意到 BX 是实的 n 维列向量，所以 $BX = 0$, 即 X 也是 $BX = 0$ 的解. □

3. 一个实二次型可以分解为两个实系数的一次多项式之积的充分必要条件是或者二次型的秩等于 1 或者二次型的秩等于 2 且符号差等于零.

证明: 必要性. 若 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)(b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n)$, 其中 $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \neq 0$, $(b_1, b_2, \cdots, b_n) \neq 0$.

若向量 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 和 $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 线性相关，则它们的元素对应成比例，不妨设 $(a_1, a_2, \cdots, a_n) =$

$k(b_1, b_2, \cdots, b_n)$, 且 $a_1 \neq 0$, 做可逆线性替换

$$\begin{cases} y_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \\ y_2 = x_2 \\ \cdots \\ y_n = x_n \end{cases}$$

则 $f = ky_1^2$, 故此时 $r = 1$.

若向量 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 和 $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 线性无关. 为方便起见，不妨设 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, 定义可逆线性替换

$$\begin{cases} y_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \\ y_2 = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n \\ y_3 = x_3 \\ \cdots \\ y_n = x_n \end{cases}$$

得到 $f = y_1y_2$. 再做可逆线性替换

$$\begin{cases} y_1 = z_1 + z_2 \\ y_2 = z_1 - z_2 \\ y_3 = x_3 \\ \cdots \\ y_n = x_n \end{cases}$$

得 $f = z_1^2 - z_2^2$. 显然 f 的秩为 2 且符号差为零.

充分性. 若秩为 1, 可假设 $f = y_1^2 = y_1y_1$, 其中 y_1 为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 一次多形式；若秩为 2, 且符号差为 1, 可设 $f = y_1^2 - y_2^2$, 显然有 $f = (y_1 + y_2)(y_1 - y_2)$, 其中 y_1, y_2 均为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 两个一次多形式. 因此无论哪种情况， f 都可以分解为两个一次多项式之积. □

4. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (1-a)x_1^2 + (1-a)x_2^2 + 2x_3^2 + 2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

(1) 求 a 的值;

(2) 求正交替换 $X = QY$, 把 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化成标准形;

(3) 求方程 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解.

解：(1) f 的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1-a & 1+a & 0 \\ 1+a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 因 $r(A) = 2$, 有 $0 = \det A = 2((1-a)^2 - (1+a)^2) = -8a$, 故 $a = 0$.

(2) 由 (1) 得 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 则 $f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)^2$. 因此 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 0$.

对特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, 解线性方程组 $(2E - A)X = 0$, 得基础解系 $\alpha_1 = (1, 1, 0)^T, \alpha_2 = (1, 1, 1)^T$. 做 Schmidt 正交化， $\beta_1 = \alpha_1 = (1, 1, 0)^T, \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = (0, 0, 1)^T$. 单位化 $\gamma_1 = \frac{\beta_1}{|\beta_1|} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T$, $\gamma_2 = \beta_2 = (0, 0, 1)^T$.

对特征值 $\lambda_3 = 0$, 解线性方程组 $-AX = 0$ 得基础解系 $\alpha_3 = (1, -1, 0)^T$ 单位化 $\gamma_3 = \frac{\alpha_3}{|\alpha_3|} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T$.

令 $Q = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, 则做正交线性替换 $X = QY$, 二次型化为标准形为 $f(x_1, x_2, x_3) = 2y_1^2 + 2y_2^2$.

(3) 方程 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, 即 $2y_1^2 + 2y_2^2 = 0$, 则有 $y_1 = y_2 = 0$, 即 $X = Q(0, 0, y_3)^T = \frac{1}{2}(1, -1, 0)^T$, 从而方程 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的所有解为 $c(1, -1, 0)^T, c \in \mathbb{R}$.

5. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3$, 其中二次型矩阵 A 的特征值之和为 1, 特征值之积为 -12.

(1) 求 a,b 的值;

(2) 利用正交替换将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形，写出所用的正交变换的正交矩阵.

解：(1) 二次型矩阵为 $A=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$. 设 A 特征值为 $\lambda_i,(i=1,2,3)$, 依题意有 $\sum_{i=1}^{3}\lambda_i=tr(A)=a+2-2=1$, 故 $a=1$. $\prod_{i=1}^{3}=\det A=-4a-2b^2=-12$, 得 $b=\pm 2$.

(2) $f_A(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & \mp 2 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ \mp 2 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix}=(\lambda+3)(\lambda-2)^2=0$. 解得 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-3$.

当 $b=2$ 时，解线性方程组 $(2E-A)X=0$, 得基础解系 $\alpha_1=(2,0,1)^T,\alpha_2=(0,1,0)^T$. 它们已正交，可直接单位化得 $\gamma_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}=(\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}})^T$, $\gamma_2=\beta_2=(0,1,0)^T$. 解线性方程组 $(-3E-A)X=0$, 得基础解系 $\alpha_3=(1,0,-2)^T$. 单位化 $\gamma_3=\frac{\alpha_3}{|\alpha_3|}=(\frac{1}{\sqrt{5}},0,-\frac{2}{\sqrt{5}})^T$. 令 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$, 则做正交替换 $X=QY$, 二次型化的标准形为 $f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2+2y_2^2-3Y_3^2$;

当 $b=-2$ 时，解线性方程组 $(2E-A)X=0$, 得基础解系 $\alpha_1=(-2,0,1)^T,\alpha_2=(0,1,0)^T$. 它们已正交，可直接单位化得 $\gamma_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}=(-\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}})^T$, $\gamma_2=\beta_2=(0,1,0)^T$. 解线性方程组 $(-3E-A)X=0$, 得基础解系 $\alpha_3=(1,0,2)^T$, 单位化 $\gamma_3=\frac{\alpha_3}{|\alpha_3|}=(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}})^T$. 令 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$, 则做正交替换 $X=QY$, 二次型化的标准形为 $f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$.

6. 所有 $\mathbb{C}$ 上 n 阶对称矩阵按照合同关系分类，共有几类？所有 $\mathbb{R}$ 上 n 阶对称矩阵按照合同关系分类，共有几类？

答：$\mathbb{C}$ 上任意两个 n 阶复对称矩阵合同的充要条件是秩相等. 秩有 $n+1$ 种可能：$0,1,2,\cdots,n$, 因此所有 $\mathbb{C}$ 上 n 阶对称矩阵按照合同关系分类，共有 $n+1$ 类;

因为任意两个 n 阶实对称矩阵合同的充要条件是它们有相同的秩 r 和相同的正惯性指数 p. $r=0$ 时，$p=0$, 有 1 类；$r=1$ 时，$p=0,1$, 有 2 类；$r=2$ 时，$p=0,1,2$, 有 3 类；$\cdots$; $r=n$ 时，$p=0,1,2,\cdots,n$, 有 $n+1$ 类. 所以把互相合同的实对称矩阵作为一个类，则 n 阶实对称矩阵全体共有 $1+2+\cdots+n=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ 类.

7. 设实二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=y_1^2+\cdots+y_k^2-y_{k+1}^2-\cdots-y_{k+s}^2,$$

其中 $y_i=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n(i=1,2,\ldots,k+s)$, 求证：$f$ 的正惯性指数 $p\le k$, f 的负惯性指数 $q\le s$.

证明：设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 经过可逆线性替换 $X=CZ$ 后化为规范形

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=z_1^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_{p+q}^2.$$

于是有

$$y_1^2+\cdots+y_k^2-y_{k+1}^2-\cdots-y_{k+s}^2=z_1^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_{p+q}^2. \tag{1}$$

则 $p\le k, q\le s$.

若不然，$p > k$. 设 $C^{-1} = (c_{ij})_{n\times n}$, 构造线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = 0 \\ c_{p+1,1}x_1 + c_{p+1,2}x_2 + \cdots + c_{p+1,n}x_n = 0 \\ \cdots \\ c_{n,1}x_1 + c_{n,2}x_2 + \cdots + c_{n,n}x_n = 0 \end{cases}$$

该方程组有 n 个未知数，$k+(n-p) = n-(p-k) < n$ 个方程, 所以必有非零解 $\alpha \neq 0$, 相应的 $(y_1, y_2, \cdots, y_{k+s}) = (0, \cdots, 0, b_{k+1}, \cdots, b_{k+s})$, $(z_1, z_2, \cdots, z_n) = (c_1, \cdots, c_p, 0, \cdots, 0) \neq 0$. 将 α 代入 (1) 式，左边小于等于 0, 而右边 > 0, 矛盾．因此 $p \leq k$.

同理，若 $q > s$, 构造线性方程组

$$\begin{cases} a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \cdots + a_{k+1,n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{k+s,1}x_1 + a_{k+s,2}x_2 + \cdots + a_{k+s,n}x_n = 0 \\ c_{1,1}x_1 + c_{1,2}x_2 + \cdots + c_{1,n}x_n = 0 \\ \cdots \\ c_{p,1}x_1 + c_{p,2}x_2 + \cdots + c_{p,n}x_n = 0 \\ c_{p+q+1,1}x_1 + c_{p+q+1,2}x_2 + \cdots + c_{p+q+1,n}x_n = 0 \\ \cdots \\ c_{n,1}x_1 + c_{n,2}x_2 + \cdots + c_{n,n}x_n = 0 \end{cases}$$

该方程组有 n 个未知数，$s + p + (n - p - q) < q + p + (n - p - q) = n$ 个方程，所以必有非零解 $\alpha \neq 0$, 相应的 $(y_1, y_2, \cdots, y_{k+s}) = (b_1, \cdots, b_k, 0, \cdots, 0)$, $(z_1, z_2, \cdots, z_n) = (0, \cdots, 0, c_{p+1}, \cdots, c_{p+q}, 0, \cdots, 0) \neq 0$. 将 α 代入 (1) 式，左边大于等于 0, 而右边 < 0, 矛盾．因此 $q \leq s$. □

8. 设 A 是 n 阶正定阵，在 $\mathbb{R}^n$ 中，定义

$$(X, Y) = X^T AY.$$

证明 (-, -) 是一个内积，从而定义了一个欧氏空间.

证明：依题意有上述内积有以下性质：

1) $(X, Y) = X^T AY = Y^T AX = (Y, X)$;

2) $(X + Y, Z) = (X + Z)^T AY = X^T AY + Z^T AY = (X, Y) + (Z, Y)$;

3) $(cX, Y) = (cX)^T AY = cX^T AY = c(X, Y)$;

4) 任意的 $X \neq 0$, 因为 A 是 n 阶正定阵，故 $(X, X) = X^T AX > 0$, 当且仅当 $X = 0, (X, X) = 0$.

因此，依内积定义知 $\mathbb{R}^n$ 按上述内积构成一个欧氏空间． □

9. 实对称阵 A 是正定的充分必要条件是 A 的所有主子式大于零.

证明：充分性．A 的顺序主子式是 A 的主子式，因此 A 的所有主子式大于零，必有 A 的顺序主子式大于零，从而由 A 实对称即得 A 正定.

必要性．记 A 的任意 k 阶主子式 $A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ i_1, i_2, \cdots, i_k \end{pmatrix} = M$. 互换 A 的第 1 行和 i_1 行，第 1 列和第 i_1 列，再互换第 2 行和第 i_2 行，第 2 列和第 i_2 列，$\cdots$, 第 k 行和第 i_k 行，第 k 列和第 i_k 列，得矩阵 B, 则矩阵 B 的 k 阶顺序主子式就是 M, 且 B 合同于 A, 而 A 正定，从而 B 正定，故 $M > 0$. □

10. 设 A 是 $\mathbb{R}$ 上 n 阶对称阵，证明下列条件等价：

(1) A 是正定矩阵;

(2) 存在主对角线上元素全为 1 的上三角阵 B, 使 $A = B^T DB$, 其中 D 是对角元大于零的对角阵;

(3) 存在主对角线上元素全为正的上三角阵 C, 使 $A = C^T C$.

证明： (1) $\Rightarrow$ (2). 对矩阵的阶用归纳法.

当 $n = 1$ 时， $A = (a_{11})$, $a_{11} > 0$, 取 $D = (a_{11})$, $B = I_1$ 即可.

归纳假设结论对 $n-1$ 阶正定阵成立，现证 n 阶正定阵结论成立.

将 A 分块为 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha \\ \alpha^T & A_1 \end{pmatrix}$. 因 A 正定，故 A 的一阶顺序主子式 $a_{11} > 0$. 对 A 施行如何合同变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & -a_{11}^{-1}\alpha \\ 0 & E_{n-1} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha \\ \alpha^T & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a_{11}^{-1}\alpha \\ 0 & E_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & A_1 - a_{11}^{-1}\alpha\alpha^T \end{pmatrix} = \tilde{A},$$

$\tilde{A}$ 合同于 A, 因此也是正定阵，故 $A_1 - a_{11}^{-1}\alpha\alpha^T$ 是 $n-1$ 阶对称正定阵. 从而由归纳假设，存在 $n-1$ 阶单位上三角阵 B_1, 和 $n-1$ 阶正定对角阵 D_1, 使得 $A_1 - a_{11}^{-1}\alpha\alpha^T = B_1^T DB_1$. 则 $B = \begin{pmatrix} 1 & -a_{11}^{-1}\alpha \\ 0 & E_{n-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$ 是单位上三角阵， $D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix}$ 是正定对角阵，且 $A = B^T DB$.

(2) $\Rightarrow$ (3) 由 (2), 设 $D = \mathrm{diag}\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$, 其中 $d_i > 0$. 令 $C = \mathrm{diag}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \cdots, \sqrt{d_n})B$, 则 $A = C^T C$, 且 C 是主对角线元素全正的上三角阵.

(3) $\Rightarrow$ (1) 这时 $A = C^T I_n C, A$, 即 A 与 I_n 合同，故 A 正定. □

11. 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 求证对于任意的 $t > 0 \in R$, $tE + A^T A$ 是正定矩阵.

证明：显然 $A^T A$ 是实对称矩阵. 对任意的 $0 \neq X \in \mathbb{R}^n$, $AX \in \mathbb{R}^n$, 故 $X^T A^T AX = (AX)^T AX \geq 0$. 对任意的 $t > 0$, $tE + A^T A$ 是对称的，且 $X^T(tE + A^T A)X = tX^T X + X^T A^T AX > 0$. 综上， $tE + A^T A$ 是正定矩阵. □

12. 设对称阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是正定的，证明存在正定阵，使得 $A = B^2$.

证明：因为 A 正定，故必存在正交阵 Q, 使得 $A = Q^T \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}Q$, 其中 $\lambda_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为 A 特征值. 令 $B = Q^T \mathrm{diag}\{\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \cdots, \sqrt{\lambda_n}\}Q$, 则 B 对称正定，且 $A = B^2$. □

13. 设 A 是一个实可逆阵. 证明：存在一个正定阵 S 和正交阵 Q, 使得 $A = QS$.

证明： A 是实可逆的，故 $A^T A$ 是正定的. 由 12 题结论知，存在正定阵 $S = S^T$, 使得 $A^T A = S^2$. 令 $Q = (A^T)^{-1}S$, 则 $A = QS$, 只要证 Q 为正交阵，则命题得证. 事实上， $QQ^T = ((A^T)^{-1}S)((A^T)^{-1}S)^T = (A^T)^{-1}SS^T A^{-1} = (A^T)^{-1}SSA^{-1} = (A^T)^{-1}A^T AA^{-1} = E$. 故 Q 正交. □

14. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_s \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_s^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_s^{n-1} \end{pmatrix},$$

其中 $a_i \in \mathbb{R}$, $a_i \neq a_j (i \neq j; i, j = 1, 2, \cdots, s)$. 若 $B = A^T A$ 是正定阵，求 s 的值.

解： A 为 $n \times s$ 阶矩阵，若 $s > n$, 则 s 阶矩阵 $A^T A$ 的秩 $r(A^T A) \leq n < s$, $A^T A$ 必非正定.

若 $s \le n$, 则 A^TA 必正定．事实上， A 有一个 s 阶子式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_s \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_s^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{s-1} & a_2^{s-1} & \cdots & a_s^{s-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le s}(a_j - a_i) \ne 0,$$

故 A 是列满秩的．因此对任意 $0 \ne X \in \mathbb{R}^n$, $0 \ne AX \in \mathbb{R}^n$, 故 $X^TA^TAX > 0$, 这就证明了当 $s \le n$ 时， A^TA 正定． □

15. 设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha^T \\ \alpha & B \end{pmatrix}$$

是实对称阵，其中 $a_{11} < 0$, B 是 $n-1$ 阶正定阵．求证：

(1) $B - a_{11}^{-1}\alpha\alpha^T$ 是正定矩阵；

(2) A 的符号差为 $n-2$.

证明： (1) 对 A 作合同变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & -a_{11}^{-1}\alpha^T \\ 0 & E_{n-1} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha^T \\ \alpha & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -a_{11}^{-1}\alpha^T \\ 0 & E_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & B - a_{11}^{-1}\alpha\alpha^T \end{pmatrix}.$$

则 $B - a_{11}^{-1}\alpha\alpha^T$ 是对称矩阵．因 $a_{11} < 0$, 且 B 正定，故对任意 $0 \ne X \in \mathbb{R}^n$, $X^T(-a_{11}^{-1}\alpha\alpha^T)X \ge 0$, $X^TBX > 0$, 从而 $X^T(B - a_{11}^{-1}\alpha\alpha^T)X = X^TBX + X^T(-a_{11}^{-1}\alpha\alpha^T)X > 0$, 因此 $B - a_{11}^{-1}\alpha\alpha^T$ 是 $n-1$ 阶正定阵.

(2) 由 (1)$B - a_{11}^{-1}\alpha\alpha^T$ 是 $n-1$ 阶正定阵，故存在 $n-1$ 阶可逆阵 P, 使得 $P^T(B - a_{11}^{-1}\alpha\alpha^T)P = E_{n-1}$, 从而

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & P \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & -a_{11}^{-1}\alpha^T \\ 0 & E_{n-1} \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} 1 & -a_{11}^{-1}\alpha^T \\ 0 & E_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \\ & E_{n-1} \end{pmatrix}.$$

故 A 正惯性指数 $p = n-1$, 负惯性指数 $q = 1$, 因此符号差为 $n-1$. □

16. 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 是实正定阵，求证：

$$g(x_1, \cdots, x_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{2n} & x_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & 0 \end{vmatrix}.$$

是负定阵.

证明： (法一) 要证 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是负定的，只要证明对任意 n 维非零实向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$, 都有

$$g(a_1, \cdots, a_n) = \begin{vmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{vmatrix} < 0.$$

事实上，因为 A 是正定阵，所以存在可逆的阵 C, 使 $C^TAC = E_n$. 于是

$$\begin{pmatrix} C^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & C^T\alpha \\ \alpha^TC & 0 \end{pmatrix}.$$

则 $\begin{vmatrix} A & \alpha \\ \alpha & 0 \end{vmatrix}$ 和 $\begin{vmatrix} E_n & C^T\alpha \\ \alpha^T C & 0 \end{vmatrix}$ 同号. 注意到实向量 $\alpha \neq 0$ 及 C 可逆，故 $C^T\alpha \neq 0$, 且

$$\begin{vmatrix} E_n & C^T\alpha \\ \alpha^T C & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_n & 0 \\ \alpha^T C & -\alpha^T CC^T\alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_n & C^T\alpha \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\alpha^T CC^T\alpha = -(C^T\alpha)^T(C^T\alpha) < 0.$$

即对任意 n 维非零向量 $\alpha = (a_1, \cdots, a_n)^T$, $g(a_1, \cdots, a_n) < 0$, 因此 g 是负定阵.

(法二) 往证 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的矩阵是负定的. 事实上，将

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{2n} & x_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & 0 \end{vmatrix}$$

按最后一列展开后，再按最后一行展开即得 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = -\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}x_ix_j = -X^TA^*X$, 其中 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, $A^* = (A_{ji})_{n\times n}$. 因 A 对称正定，所以 $A^* = (A_{ji})_{n\times n}$ 也是对称正定的，即 g 的矩阵 $-A^*$ 是负定的，从而 g 负定，命题得证. □

17. 设 A 是 $\mathbb{R}$ 上 n 阶对称阵，则下列叙述是等价的.

(1) A 为半正定的;

(2) 对任意的 $t > 0 \in \mathbb{R}$, $tE + A$ 正定，且 $\det A = 0$;

(3) 存在秩为 r 的 n 阶实矩阵 B, $r < n$, 使 $A = B^TB$;

(4) A 的所有主子式大于或等于零，且 $\det A = 0$.

证明: (1) $\Rightarrow$ (2): A 半正定，则任意的 $0 \neq X \in \mathbb{R}^n$, $X^TAX \geq 0$. 对任意的 $t > 0 \in R$, $X^T(tE)X > 0$. $X^T(tE + A)X = X^T(tE)X + X^TAX > 0$, 且 $tE + A$ 对称，故 $tE + A$ 正定. 由 A 半正定还知，存在一个非零 $0 \neq X_0 \in \mathbb{R}$, 使得 $X_0^TAX_0 = 0$. 从而 $r(A) < n$, 进而 $\det A = 0$.

(2) $\Rightarrow$ (1): 一方面，因为 $\det A = 0$, 故 $r(A) = r < n$. 另一方面，因对任意的 $t > 0$, $tE + A$ 正定，则 $t + A$ 的特征值全是正数. 设 A 的特征值为 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r$, 则 $\lambda_i \geq 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$. 若不然设 $\lambda_{i_0} < 0$, 取 $0 < t < |\lambda_{i_0}|$, 则 $tE + A$ 有负特征值 $t + \lambda_{i_0} < 0$, 与 $tE + A$ 正定矛盾. 故 A 的特征值均非负，又 A 对称，故 A 半正定.

(1) $\Rightarrow$ (3): (法一) 因 A 为半正定的，故存在可逆阵 C, 使得 $A = C^T\begin{pmatrix} E_r & \\ & 0 \end{pmatrix}C$, 令 $B = \begin{pmatrix} E_r & \\ & 0 \end{pmatrix}C$, 则 $r(B) = r < n$, 且 $A = B^TB$ 即可.

(法二) 因 A 为半正定的, 故 A 的特征值全非负, 从而存在正交矩阵 Q, 使得 $A = Q^T\mathrm{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_r, 0, \cdots, 0\}Q$, 令 $B = Q^T\mathrm{diag}\{\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_r}, 0, \cdots, 0\}Q$, 则 $r(B) = r < n$, 且 $A = B^TB$.

(3) $\Rightarrow$ (1): 首先 $r(A) = r(B^TB) \leq r(B) < n$, 其次对任意 $0 \neq X \in \mathbb{R}^n$, $BX \in \mathbb{R}^n$, 从而 $X^TAX = X^TB^TBX = (BX)^T(BX) \geq 0$.

(1) $\Rightarrow$ (4): 设 M 是取自 A 的第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行和 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 列元素组成的矩阵，记 $I = \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$. 因 A 对称, 故 M 是对称阵, 且对任意的 $0 \neq \tilde{X} = (x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k})^T \in \mathbb{R}^k$, 构造 n 维列向量 $Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$, 使得 $y_s = x_s, y_t = 0 (s \in I, t \notin I)$, 则 $0 \neq Y \in \mathbb{R}$, $0 \leq Y^TAY = \tilde{X}M\tilde{X}$, 说明 M 是半正定的或正定的，故 $\det M \geq 0$.

(4) $\Rightarrow$ (1): 对 A 的任意 k 阶顺序主子阵 A_k, 由牛顿公式知 $\det(tE + A_k) = t^k + p_1t^{k-1} + \cdots + p_k$, 其中 p_i 为 A_k 的所有 $i (1 \leq i \leq k)$ 阶主子式之和. 由已知 A 的所有主子式大于或等于 0, 因此对任意 $t > 0$, $\det(tE + A_k) > 0$, 从而 $tE + A$ 是正定阵，由 (2) 即知 A 半正定. □

(黄雪娥解答)