习题 2.3　向量组的秩

1. 已知向量组 $\beta_1=(0,1,-1)^T$, $\beta_2=(a,2,1)^T$, $\beta_3=(b,1,0)^T$ 与向量组 $\alpha_1=(1,2,-3)^T$, $\alpha_2=(3,0,1)^T$, $\alpha_3=(9,6,-7)^T$ 有相同的秩, 且 β_3 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出. 求 a 和 b.

解：令

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&3&9\\2&0&6\\-3&1&-7\end{pmatrix},B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}0&a&b\\1&2&1\\-1&1&0\end{pmatrix},$$

$$A\longrightarrow\begin{pmatrix}1&3&9\\0&-6&-12\\0&10&20\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&3&9\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}0&a&b\\1&2&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&\frac{1}{3}\\0&0&b-\frac{1}{3}a\end{pmatrix},$$

由 $r(A)=r(B)$, 得 $b=\frac{1}{3}a$.

又由已知 β_3 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，即 $\beta_3=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$ 有解，则

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&3&9&b\\2&0&6&1\\-3&1&-7&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&3&9&b\\0&1&2&\frac{2b-1}{6}\\0&0&0&\frac{3a}{10}-\frac{2b-1}{6}\end{pmatrix},$$

得 $\frac{3a}{10}-\frac{2b-1}{6}=0$, 从而 $b=5$ 且 $a=15$.

2. 求向量组 $\alpha_1=(1,-1,2,4)^T$, $\alpha_2=(0,3,1,2)^T$, $\alpha_3=(3,0,7,14)^T$, $\alpha_4=(1,-1,2,0)^T$, $\alpha_5=(2,1,5,6)^T$ 的秩和极大线性无关组，并将其余向量表示为这个极大线性无关组的线性组合.

解：利用行初等变换不改变列向量组的线性关系求解.

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-1&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&0&1\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

因此 α_1, α_2, α_4 是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大无关组，且 $\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2$, $\alpha_5=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4$.

3. 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的秩为 r, 证明 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任意 r 个线性无关的向量都构成它的一个极大线性无关组.

证明：设向量组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中的任 r 个线性无关组成的向量组，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任意向量 α_i 添加到 $\alpha_i,\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 中后必线性相关，否则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的秩至少为 $r+1$, 与已知条件矛盾. 故 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的一个极大线性无关组.

4. 已知两个向量组 $\alpha_1=(1,0,2)^T$, $\alpha_2=(1,1,3)^T$, $\alpha_3=(1,-1,a+2)^T$ 和 $\beta_1=(1,2,a+3)^T$, $\beta_2=(2,1,a+6)^T$, $\beta_3=(2,1,a+4)^T$, 问 a 为何值时，两向量组等价？当 a 为何值时，两向量组不等价？

解：令

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\2&3&a+2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&0&a+1\end{pmatrix},$$

$$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&1\\a+3&a+6&a+4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

由 $r(B)=3$ 可知要使 α_1, α_2, α_3 与 β_1, β_2, β_3 等价, 当且仅当 $r(A)=3$, 即 $a\neq-1$. 当 $a=-1$ 时， α_1, α_2, α_3 与 β_1, β_2, β_3 不等价.

5. 证明： $r(A,B)\leq r(A)+r(B)$.

证明：(法一) 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p)$, $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_q)$, $r(A)=r$, $r(B)=s$, $r(A,B)=t$. 分别取 α_1, α_2, $\cdots$, α_p 的一个极大线性无关组 α_{i_1}, α_{i_2}, $\cdots$, α_{i_r}; β_1, β_2, $\cdots$, β_q 的一个极大线性无关组 β_{j_1}, β_{j_2}, $\cdots$, β_{j_s} 以及 α_1, α_2, $\cdots$, α_p, β_1, β_2, $\cdots$, β_q 的一个极大线性无关组 α_{k_1}, $\cdots$, α_{k_l}, $\beta_{k_{l+1}}$, $\cdots$, β_{k_t}. 易知 α_{k_1}, $\cdots$, α_{k_l}, $\beta_{k_{l+1}}$, $\cdots$, β_{k_t} 可由 α_{i_1}, α_{i_2}, $\cdots$, α_{i_r}, β_{j_1}, β_{j_2}, $\cdots$, β_{j_s} 线性表示，故 $t\leq r+s$, 即 $r(A,\ B)\leq r(A)+r(B)$.

(法二) 设 $r(A)=r$, $r(B)=s$, 则存在可逆矩阵 P_1, Q_1, P_2, Q_2 使得

$$A=P_1\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}Q_1,\quad B=P_2\begin{pmatrix}I_s&0\\0&0\end{pmatrix}Q_2.$$

于是， $(A,B)=(P_1,P_2)\left(\begin{array}{cccc} I_r & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & I_s & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} Q_1 & 0\\ 0 & Q_2\end{array}\right)$. 因此，

$$r(A,B)=r((P_1,P_2)\left(\begin{array}{cccc} I_r & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & I_s & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right))\leq r\left(\begin{array}{cccc} I_r & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & I_s & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)=r+s=r(A)+r(B).$$

(法三) 设 $r(A)=r$, $r(B)=s$, 则 A 的任意 $r+1$ 阶子式都等于 0, B 的任意 $s+1$ 阶子式都等于 0.

对 (A,B) 的任意 $r+s+1$ 阶子式，必至少有 $r+1$ 列来自 A 或至少 $s+1$ 列来自 B, 对这些列用 Laplace 定理展开得此 $r+s+1$ 阶子式等于 0.

因此， $r(A,B)\leq r+s=r(A)+r(B)$.

(法四)

$$\left(\begin{array}{cc} A & 0\\ 0 & B\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cc} A & B\\ 0 & B\end{array}\right)$$

因此， $r(A)+r(B)=r\left(\begin{array}{cc} A & 0\\ 0 & B\end{array}\right)=r\left(\begin{array}{cc} A & B\\ 0 & B\end{array}\right)\geq r(A,B)$. □

6. 证明： $r(A+B)\leq r(A)+r(B)$.

证明：(法一) 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$, $r(A)=r$, $r(B)=s$, $r(A+B)=t$, 则 $A+B=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n)$.

分别取 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的一个极大线性无关组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$; $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的一个极大线性无关组 $\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_s}$ 以及 $\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n$ 的一个极大线性无关组 $\alpha_{k_1}+\beta_{k_1},\alpha_{k_2}+\beta_{k_2},\cdots,\alpha_{k_t}+\beta_{k_t}$. 易知 $\alpha_{k_1}+\beta_{k_1},\alpha_{k_2}+\beta_{k_2},\cdots,\alpha_{k_t}+\beta_{k_t}$ 可由 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r},\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_s}$ 线性表示，故 $t\leq r+s$, 即 $r(A+B)\leq r(A)+r(B)$.

(法二) 设 $r(A)=r$, $r(B)=s$, 则存在可逆矩阵 P_1, Q_1, P_2, Q_2 使得

$$A=P_1\left(\begin{array}{cc} I_r & 0\\ 0 & 0\end{array}\right)Q_1,\quad B=P_2\left(\begin{array}{cc} I_s & 0\\ 0 & 0\end{array}\right)Q_2.$$

于是， $A+B=(P_1,P_2)\left(\begin{array}{cccc} I_r & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & I_s & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\left(\begin{array}{c} Q_1\\ Q_2\end{array}\right)$. 因此，

$$r(A+B) \leq r((P_1,P_2)\begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) \leq r\begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = r+s.$$

(法三) 由于 $A+B=(A,B)\begin{pmatrix} I_n \\ I_n \end{pmatrix}$, 所以 $r(A+B) \leq r(A,B) \leq r(A)+r(B)$.

7. 设 A 是 n 阶方阵, 则 $A^2=E$ 的充分必要条件是 $r(A+E)+r(E-A)=n$.

证明：考虑

$$\begin{pmatrix} E+A & 0 \\ 0 & E-A \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} E+A & 0 \\ E+A & E-A \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} E+A & E+A \\ E+A & 2E \end{pmatrix}$$
$$\longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{E-A^2}{2} & E+A \\ 0 & 2E \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{E-A^2}{2} & 0 \\ 0 & 2E \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} E-A^2 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

由于矩阵的秩在初等变换下保持不变，所以

$$r(E+A)+r(E-A)=r(E-A^2)+r(E)=r(E-A^2)+n.$$

因此， $r(E+A)+r(E-A)=n \Leftrightarrow r(E-A^2)=0 \Leftrightarrow A^2=E.$

(李小凤解答)