习题 2.4 线性方程组解的结构

1. 用消元法解下列线性方程组

(1)

$$\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3-4x_4=1 \\ x_1+3x_2+2x_3-2x_4+x_5=-1 \\ x_1-2x_2+x_3-x_4-x_5=3 \\ x_1-4x_2+x_3+x_4-x_5=3 \\ x_1+2x_2+x_3-x_4+x_5=-1 \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-4x_4=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3-x_4=1 \\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4=1 \\ 2x_1+2x_2+2x_3-x_4=1 \\ 5x_1+5x_2+2x_3=2 \end{cases}$$

解： (过程略) (1)

$$\begin{cases} x_1 &= & -\frac{k}{2} \\ x_2 &= & -\frac{k}{2}-1 \\ x_3 &= & 0 \\ x_4 &= & -\frac{k}{2}-1 \\ x_5 &= & k \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} x_1=\frac{1}{6} \\ x_2=\frac{1}{6} \\ x_3=\frac{1}{6} \\ x_4=0 \end{cases}$$

2. 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1+\lambda x_2+\mu x_3+x_4=0 \\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4=0 \\ 3x_1+(2+\lambda)x_2+(4+\mu)x_3+4x_4=1 \end{cases}$$

已知 $(1,-1,1,-1)^T$ 是该方程组的一个解. 试求

(1) 方程组的全部解，并用对应的齐次线性方程组的基础解系表示全部解;

(2) 该方程组满足 $x_2=x_3$ 的全部解.

解　(1) 将 $(1,-1,1,-1)^T$ 带入方程组中得：$\lambda=\mu$. 线性方程组的增广矩阵经过若干次行初等变换后化为行阶梯形：

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&\lambda&\lambda&1&0\\2&1&1&2&0\\3&2+\lambda&4+\lambda&4&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&3&1&1\\0&0&4\lambda-2&2\lambda-1&2\lambda-1\end{pmatrix}$$

①当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时, 原方程组有特解 $\gamma=(-\frac{1}{2},1,0,0)^T$, 对应齐次线性方程组有基础解系 $\eta_1=(1,-3,1,0)^T,\eta_2=(-\frac{1}{2},-1,0,1)$, 此时原方程组全部解为 $\gamma+a_1\eta_1+a_2\eta_2$, 其中 a_1,a_2 是 F 中的任意数.

②当 $\lambda\neq\frac{1}{2}$ 时，$\overline{A}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

原方程组有特解 $\gamma=(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)^T$, 对应的齐次线性方程组有基础解系 $\eta=(-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)^T$, 所以原方程组全部解为 $\gamma+a\eta$, 其中 a 是 F 中的任意数.

(2)

①当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，由 $x_2=x_3$ 得，$a_2=1-4a_1$, 故解为 $\gamma+a_1\eta_1+(1-4a_1)\eta_2$ 其中 a_1 是 F 中的任意数.

②当 $\lambda\neq\frac{1}{2}$ 时，由 $x_2=x_3$ 得，$a=1$, 故解为 $(-1,0,0,1)^T$.

3. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 为线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，$\beta_1=a\alpha_1+b\alpha_2$, $\beta_2=a\alpha_2+b\alpha_3,\cdots,\beta_s=a\alpha_s+b\alpha_1$, 其中 a,b 为常数. 试问 a,b 满足什么关系时，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 也为 $AX=0$ 的一个基础解系.

解　直接计算得，$\beta_i(i=1,2,\cdots,s)$ 也是 $AX=0$ 的解. 故当 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关时为 $AX=0$ 的一个基础解系. 设存在 $k_1,k_2,\cdots,k_s$, 使得 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_s\beta_s=0$. 将 $\beta_1=a\alpha_1+b\alpha_2$, $\beta_2=a\alpha_2+b\alpha_3$, $\cdots$, $\beta_s=a\alpha_s+b\alpha_1$ 带入，整理后得，

$$(ak_1+bk_s)\alpha_1+(bk_1+ak_2)\alpha_2+\cdots+(bk_s+ak_1)\alpha_s=0.$$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，所以 $ak_1+bk_s=bk_1+ak_2=\cdots=bk_s+ak_1=0$, 即：

$$\begin{pmatrix}a&&&b\\b&a&&\\&\ddots&\ddots&\\&&b&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_s\end{pmatrix}=0. \tag{1}$$

将 (1) 看成关于 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 的齐次方程组，则要使 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$, 只需

系数矩阵行列式不等于零，即 $a^s+(-1)^{s+1}b^s\neq 0$.

4. 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是 $AX=0$ 的一个基础解系， η 是 $AX=\beta$ 的一个特解，则

$$\eta,\eta+\xi_1,\eta+\xi_2,\cdots,\eta+\xi_{n-r}$$

是 $AX=\beta$ 的解集合的一个极大线性无关组.

证明　首先， $\eta,\eta+\xi_1,\eta+\xi_2,\cdots,\eta+\xi_{n-r}$ 每一个都是 $AX=\beta$ 的解.

其次，由已知条件知，对 $AX=\beta$ 的任一解 γ, 总有 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-r}$, 使得

$$\begin{aligned}\gamma &= \eta+a_1\xi_1+a_2\xi_2+\cdots+a_{n-r}\xi_{n-r}\\ &= (1-a_1-a_2-\cdots-a_{n-r})\eta+a_1(\eta+\xi_1)+a_2(\eta+\xi_2)+\cdots+a_{n-r}(\eta+\xi_{n-r}),\end{aligned}$$

即 γ 可由 $\eta,\eta+\xi_1,\eta+\xi_2,\cdots,\eta+\xi_{n-r}$ 线性表出.

最后，若

$$a_1(\eta+\xi_1)+a_2(\eta+\xi_2)+\cdots+a_{n-r}(\eta+\xi_{n-r})=0, \tag{2}$$

则 $(a_1+a_2+\cdots+a_{n-r})\eta+a_1\xi_1+a_2\xi_2+\cdots+a_{n-r}\xi_{n-r}=0$. 将该式两边同时左乘矩阵 A, 得 $(a_1+a_2+\cdots+a_{n-r})\beta=0$, 而 $\beta\neq 0$, 故 $a_1+a_2+\cdots+a_{n-r}=0$. 将其代入 (2), 则 $a_1\xi_1+a_2\xi_2+\cdots+a_{n-r}\xi_{n-r}=0$. 又 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是 $AX=0$ 的一个基础解系，必线性无关，从而 $a_1=a_2=\cdots=a_{n-r}=0$.

综上，即得 $\eta,\eta+\xi_1,\eta+\xi_2,\cdots,\eta+\xi_{n-r}$ 是 $AX=\beta$ 的解集合的一个极大线性无关组.　□

5. 设四元齐次线性方程组 (I) 为

$$\begin{cases} x_1+x_2=0\\ x_2-x_4=0\end{cases},$$

又已知某齐次线性方程组 (II) 的通解为 $k_1(0,1,1,0)^T+k_2(-1,2,2,1)^T$.

(1) 求线性方程组 (I) 的基础解系;

(2) 问方程组 (I) 和方程组 (II) 是否有非零公共解？若有，则写出所有的公共解；若没有，则说明理由．解

(1) $\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\end{pmatrix}$

所以齐次线性方程组 (I) 有基础解系

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2) 方程组 (I) 和方程组 (II) 有非零公共解等价于关于 k_1, k_2, k_3, k_4 的齐次线性方程组 $k_1(0,1,1,0)^T + k_2(-1,2,2,1)^T + k_3(0,0,1,0)^T + k_4(-1,1,0,1)^T = 0$ 有非零解.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解得 $(k_1, k_2, k_3, k_4)^T = k(1,-1,1,1)$, 即 $k_1 = -k_2 = k_3 = k_4$, 所以所有公共解为 $k_1(0,1,1,0)^T + k_2(-1,2,2,1)^T = -k_3(0,0,1,0)^T - k_4(-1,1,0,1)^T = k(-1,1,1,1)^T$, 其中 k 是 F 中任意数.

(万琴解答)