习题 4.3 同构

1. 设 $\varphi: V \to U$ 是同构映射，V_1, V_2 是 V 的子空间．求证：

$$\varphi(V_1+V_2)=\varphi(V_1)+\varphi(V_2),\quad \varphi(V_1\cap V_2)=\varphi(V_1)\cap\varphi(V_2).$$

证明 (1) 对任何 $\beta\in\varphi(V_1+V_2)$, 存在 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2\in V_1+V_2$, 其中 $\alpha_1\in V_1$, $\alpha_2\in V_2$ 使得 $\beta=\varphi(\alpha)=\varphi(\alpha_1+\alpha_2)$. 又因为 φ 是线性映射, 所以 $\beta=\varphi(\alpha_1+\alpha_2)=\varphi(\alpha_1)+\varphi(\alpha_1)\in\varphi(V_1)+\varphi(V_2)$, 所以 $\varphi(V_1+V_2)\subseteq\varphi(V_1)+\varphi(V_2)$;

对任何 $\gamma\in\varphi(V_1)+\varphi(V_2)$, 存在 $\alpha_1\in V_1$, $\alpha_2\in V_2$ 使得 $\gamma=\varphi(\alpha_1)+\varphi(\alpha_2)$. 又因为 φ 是线性映射，所以 $\gamma=\varphi(\alpha_1)+\varphi(\alpha_2)=\varphi(\alpha_1+\alpha_2)\in\varphi(V_1+V_2)$, 所以 $\varphi(V_1)+\varphi(V_2)\subseteq\varphi(V_1+V_2)$; 综上，$\varphi(V_1+V_2)=\varphi(V_1)+\varphi(V_2)$;

(2) 由 $\varphi(V_1\cap V_2)\subseteq\varphi(V_1)$, $\varphi(V_1\cap V_2)\subseteq\varphi(V_2)$, 得 $\varphi(V_1\cap V_2)\subseteq\varphi(V_1)\cap\varphi(V_2)$; 而对任何 $\beta\in\varphi(V_1)\cap\varphi(V_2)$, 存在 $\alpha_1\in V_1, \alpha_2\in V_2$ 使得 $\beta=\varphi(\alpha_1)=\varphi(\alpha_2)$, 因为 φ 是单射, 所以 $\alpha_1=\alpha_2\in V_1\cap V_2$, 则 $\beta\in\varphi(V_1\cap V_2)$, 得 $\varphi(V_1)\cap\varphi(V_2)\subseteq\varphi(V_1\cap V_2)$; 综上，$\varphi(V_1\cap V_2)=\varphi(V_1)\cap\varphi(V_2)$. □

2. 设 $\varphi: V\to U$ 是同构映射，S 是 V 的子集合．求证：$\varphi(\langle S\rangle)=\langle\varphi(S)\rangle$.

证明 设 $\langle S\rangle$ 的基为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$, 因为 φ 是同构映射, 所以 $\varphi(\xi_1),\varphi(\xi_1),\cdots,\varphi(\xi_n)$ 是 $\langle\varphi(S)\rangle$ 的基，即得 $\varphi(\langle S\rangle)=\varphi(\langle\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\rangle)=\langle\varphi(\xi_1),\varphi(\xi_1),\cdots,\varphi(\xi_n)\rangle=\langle\varphi(S)\rangle$. □

3. 证明 $F^{2\times2}\cong F^4$, 并写出同构映射.

证明 因为 $F^{2\times2}$, F^4 都是 F 上的线性空间，且 $\dim F^{2\times2}=\dim F^4=4$, 所以 $F^{2\times2}\cong F^4$; 同构映射取为 φ:

$$F^{2\times2}\to F^4,\quad \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\mapsto(a,b,c,d)^T.$$

□

4. 设 A 是 n 阶可逆阵，定义 $\varphi_A: F^n\to F^n$, $X\mapsto AX$, 求证：φ_A 是同构映射.

证明 一方面，设 $\varphi_A(X_1) = \varphi_A(X_2)$, 即 $AX_1 = AX_2$. 因为 A 可逆，所以 $X_1 = X_2$, 即 φ_A 是单射. 另一方面，对任何 $X \in F^n$, 存在 $A^{-1}X \in F^n$, 使得 $\varphi_A(A^{-1}X) = AA^{-1}X = X$, 即 φ_A 是满射，所以 φ_A 是双射.

又对任何 $X_1, X_2 \in F^n$, $k_1, k_2 \in F$, 有 $\varphi_A(k_1X_1 + k_2X_2) = A(k_1X_1 + k_2X_2) = k_1(AX_1) + k_2(AX_2) = k_1\varphi_A(X_1) + k_2\varphi_A(X_2)$; 所以 φ_A 是线性映射;

综上， φ_A 是同构映射. $\square$

5. 在 F^2 中，令 $\varphi : F^2 \to F^2$, $(a,b)^T \mapsto (2b, -a)^T$, 则 φ 是同构映射.

证明 对任何 $(a,b)^T \in F^2$, 存在唯一 $(-b, \frac{a}{2})^T \in F^2$, 使得 $\varphi((-b, \frac{a}{2})^T) = (a,b)^T$, 所以 φ 是双射;

对任何 $(a,b)^T, (c,d)^T \in F^2$, $k_1, k_2 \in F$, 有 $\varphi(k_1(a,b)^T + k_2(c,d)^T) = \varphi((k_1a + k_2c, k_1b + k_2d)^T) = (2(k_1b + k_2d)^T, -(k_1a + k_2c))^T = k_1(2b, -a)^T + k_2(2d, -c)^T = k_1\varphi((a,b)^T) + k_2\varphi((c,d)^T)$; 所以 φ 是线性映射;

综上， φ 是同构映射. $\square$

(万琴解答)