§7.1 多项式矩阵　习题参考答案

1. 若 $A(\lambda)$ 与 $C(\lambda)$ 相抵，$B(\lambda)$ 与 $D(\lambda)$ 相抵，则 $\begin{pmatrix} A(\lambda) & \\ & B(\lambda) \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} C(\lambda) & \\ & D(\lambda) \end{pmatrix}$ 相抵.

证明：由设 $A(\lambda)$ 与 $C(\lambda)$ 相抵，因此存在可逆 $\lambda-$ 阵 $M(\lambda), N(\lambda)$, 使得 $M(\lambda)A(\lambda)N(\lambda) = C(\lambda)$. 同理，存在可逆 $\lambda-$ 阵 $S(\lambda), T(\lambda)$, 使得 $S(\lambda)B(\lambda)T(\lambda) = D(\lambda)$. 故

$$\begin{pmatrix} M(\lambda) & \\ & S(\lambda) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A(\lambda) & \\ & B(\lambda) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N(\lambda) & \\ & T(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(\lambda) & \\ & D(\lambda) \end{pmatrix}$$

而 $\begin{vmatrix} M(\lambda) & \\ & S(\lambda) \end{vmatrix} = \det M(\lambda)\det S(\lambda) =$ 非零常数, 故 $\begin{pmatrix} M(\lambda) & \\ & S(\lambda) \end{pmatrix}$ 可逆, 同理 $\begin{pmatrix} N(\lambda) & \\ & T(\lambda) \end{pmatrix}$ 可逆，因此命题得证. □

(李小凤解答)