§4.4 像与核

1. 设 $\varphi: F^{n\times n}\to F$, $A\mapsto \mathrm{tr}(A)$ 是线性映射. 求 Kerφ, Imφ, 并求它们的一个基和维数.

解 $\mathrm{Ker}\varphi=\{A\in F^{n\times n}|\mathrm{tr}(A)=0\}$, $\mathrm{Im}\varphi=\{\mathrm{tr}(A)|A\in F^{n\times n}\}$; Ker$\varphi$ 的一个基为 $E_{ij}\ \ (i\neq j), E_{ii}-E_{nn}\ \ (i=1,2,\cdots,n-1)$, 故 $\dim\mathrm{Ker}\varphi=n^2-1$; Im$\varphi$ 的一个基为 1, 故 $\dim\mathrm{Im}\varphi=1$.

2. 设

$$A=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}.$$

定义线性映射 $\varphi_A: F^{2\times 2}\to F^{2\times 2}$, $B\mapsto AB$. 求 Kerφ_A, Imφ_A, 并求它们的一个基和维数.

解 (法一)

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\varphi_A&=\{AB|B\in F^{2\times 2}\}=\{\begin{pmatrix}a-c&b-d\\c-a&d-b\end{pmatrix}|\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in F^{2\times 2}\}\\&=\{\begin{pmatrix}a&b\\-a&-b\end{pmatrix}|a,b\in F\}.\end{aligned}$$

可得 Imφ_A 的一个基为 $\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}$, 故 $\dim\mathrm{Im}\varphi_A=2$;

$$\mathrm{Ker}\varphi_A=\{B|AB=0,B\in F^{2\times 2}\}=\{\begin{pmatrix}a&b\\a&b\end{pmatrix}|a,b\in F\}.$$

可得 Kerφ_A 的一个基为 $\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$, 故 $\dim\mathrm{Ker}\varphi_A=2$.

(法二) 直接计算得

$$\varphi_A(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})A,$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\-1&0&1&0\\0&-1&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

所以 $\dim\mathrm{Im}\varphi_A = r(A) = 2$, $\mathrm{Im}\varphi_A = \langle E_{11} - E_{21}, E_{12} - E_{22}\rangle$, $\mathrm{Im}\varphi_A$ 的一个基为 $E_{11} - E_{21}, E_{12} - E_{22}$.

$AX = 0$ 的基础解系为 $(1, 0, 1, 0)^T, (0, 1, 0, 1)^T$, 所以 $\dim\mathrm{Ker}\varphi_A = 2$, $\mathrm{Ker}\varphi_A = \langle E_{11} + E_{21}, E_{12} + E_{22}\rangle$, $\mathrm{Ker}\varphi_A$ 的一个基为 $E_{11} + E_{21}, E_{12} + E_{22}$.

3. 设 V 是四维线性空间, $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ 是 V 的一个基, U 是三维线性空间, η_1, η_2, η_3 是 U 的一个基, $\varphi \in \mathfrak{L}(V, U)$,

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4,) = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

求 $\mathrm{Im}\varphi$ 与 $\mathrm{Ker}\varphi$.

解 记 φ 在基 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ 和 η_1, η_2, η_3 下的矩阵为 A, 则

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以, $\mathrm{Im}\varphi = \{a_1(\eta_1 + \eta_3) + a_2(\eta_2 + \eta_3) | a_1, a_2 \in F\}$; 而 $AX = 0$ 的基础解系为 $(-1, 0, 1, 0)^T, (0, -1, 0, 1)^T$, 故 $\mathrm{Ker}\varphi = \{a_1(-\xi_1 + \xi_3), a_2(-\xi_2 + \xi_4) | a_1, a_2 \in F\}$.

4. 用线性映射的观点证明：设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times s$ 矩阵, 则 $r(AB) \le \min\{r(A), r(B)\}$.

证明 定义

$$\varphi_A : F^n \to F^m, \quad X \mapsto AX;$$

$$\varphi_B : F^s \to F^n, \quad Y \mapsto BY;$$

$$\varphi_{AB} : F^s \to F^m, \quad Y \mapsto ABY;$$

$$\varphi : \mathrm{Im}\varphi_B \to F^m, \quad BY \mapsto ABY;$$

对 φ 用维数公式得: $r(B) = \dim\mathrm{Im}\varphi_B = \dim\mathrm{Ker}\varphi + \dim\mathrm{Im}\varphi = (\dim\mathrm{Im}\varphi_B \bigcap \mathrm{Ker}\varphi_A) + r(AB)$, 即得 $r(AB) \leqslant r(B)$.

$\mathrm{Im}\varphi_B \subseteq F^n$, 由 φ 的定义即得 $\mathrm{Im}\varphi_{AB} = \mathrm{Im}\varphi \subseteq \mathrm{Im}\varphi_A$, 所以 $r(AB) \le r(A)$, 综上, $r(AB) \le \min\{r(A), r(B)\}$. $\square$

(万琴解答)