第七章　相似标准形　复习题参考答案

1. 设 F, K 是两个数域且 $F \subseteq K$. A, B 是两个数域 F 上的 n 阶方阵. 求证：A, B 在 F 上相似的充分必要条件是 A, B 在 K 上相似.

证明：必要性：A, B 在 F 上相似，则它们在 F 上有相同的行列式因子，不妨设为 $D_1(\lambda)$, $D_2(\lambda)$, $\cdots$, $D_n(\lambda) \in F[\lambda]$. 又 $F \subseteq K$, 故显然 $D_i(\lambda) \in K[\lambda]$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 即 A, B 在 K 上有相同的行列式因子，因此 A, B 在 K 上相似.

充分性：A, B 在 K 上相似，则它们在 K 上有相同的行列式因子，不妨设为 $D_1(\lambda)$, $D_2(\lambda)$, $\cdots$, $D_n(\lambda)$ $\in K[\lambda]$. 注意到 A 的 k 阶行列式因子是 $\lambda E - A$ 的所有非零 k 阶子式的最大公因式，而最大公因式与数域扩大无关，且 $A, B \in F$, 因此 A 在 F 上的 k 阶行列式因子依然是 $D_k(\lambda)$. 从而 A, B 在 F 上有完全相同的行列式因子，故 A, B 在 F 上相似. □

2. 设 A 是数域 F 上的 n 方阵，A 的行列式因子是 $1, \cdots, 1(n-1$ 个 $)$, $f(\lambda)$, 其中 $f(\lambda) = \lambda^n +$ $+a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$. 求证：$A$ 的特征多项式等于 A 的极小多项式.

证明：由题意知，A 的不变因子是 $1, \cdots, 1(n-1$ 个 $)$, 根据定理 7.3.5, $m_A(\lambda) = f(\lambda)$. □

3. 设 A 是数域 F 上的 n 阶方阵，求证：若 A 的特征多项式等于 A 极小多项式，则 A 的 Frobenius 标准形是一个 Frobenius 块.

证明：若 A 的特征多项式等于 A 极小多项式，则 $\deg m_A(\lambda) = \deg F(\lambda) = n$. 根据不变因子的乘积等于特征多项式，且最后一个不变因子就是极小多项式，因此 A 不变因子只能是 $1, \cdots, 1(n-1$ 个$)$, $m_A(\lambda)$, 即 A 只有一个非 1 的不变因子，所以 A 的 Frobenius 标准形是一个 Frobenius 块. □

4. 设 φ, ψ 是数域 F 上的 n 维线性空间 V 上的线性变换，且 φ 在 V 的一个基下的矩阵是一个 Frobenius 块. 求证：$\varphi\psi = \psi\varphi$ 的充分必要条件是 ψ 是 φ 的某个多项式 $h(\varphi)$, 其中 $\deg h(\lambda) < n$.

证明：充分性显然.

必要性. 设 φ 在基 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 下的矩阵是 Frobenius 块 F. 直接计算可得 $\varphi(\xi_1) = \xi_2$, $\varphi(\xi_2) = \xi_3 = \varphi^2(\xi_1)$, $\cdots$, $\varphi(\xi_{n-1}) = \xi_n = \varphi^{n-1}(\xi_1)$, 即 ξ_1, $\varphi(\xi_1)$, $\varphi^2(\xi_1)$, $\cdots$, $\varphi^{n-1}(\xi_1)$ 是 V 的一个基. 因此存在 b_0, b_1, b_2, $\cdots$, b_{n-1} 使得 $\psi(\xi_1) = b_0\xi_1 + b_1\varphi(\xi_1) + b_2\varphi^2(\xi_1) + \cdots + b_{n-1}\varphi^{n-1}(\xi_1) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi^i(\xi_1)$. 又因为 $\psi\varphi = \varphi\psi$, 因此 $\psi(\xi_2) = \psi(\varphi\xi_1) = \varphi(\psi(\xi_1)) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi^{i+1}(\xi_1) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi^i(\xi_2)$, 同理, $\psi(\xi_3) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi^i(\xi_3)$, $\cdots$, $\psi(\xi_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi^i(\xi_n)$. 故 $\psi = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi^i$, $h(\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i$ 为所求. □

5. 求证:

$$\begin{pmatrix} F((\lambda-2)^2(\lambda^2+2)) & 0 \\ 0 & F((\lambda-2)^2(\lambda^2+2)^2) \end{pmatrix}$$

相似于

$$\begin{pmatrix} F((\lambda-2)^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F((\lambda-2)^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F((\lambda^2+2)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F((\lambda^2+2)^2) \end{pmatrix}.$$

证明：将两个矩阵分别记做 A 和 B. 注意到 A, B 均为分块对角矩阵，由定理 7.3.2 知分块矩阵的初等因子组由各个对角块的初等因子组凑成.

矩阵 $F((\lambda-2)^2(\lambda^2+2))$ 只有一个非 1 的不变因子，其在 $\mathbb{R}$ 上初等因子组为 $(\lambda-2)^2$, λ^2+2. 同理矩阵 $F((\lambda-2)^2(\lambda^2+2)^2)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的初等因子组为 $(\lambda-2)^2$, $(\lambda^2+2)^2$. 因此 A 在 $\mathbb{R}$ 上的初等因子组为 $(\lambda-2)^2$, λ^2+2, $(\lambda-2)^2$, $(\lambda^2+2)^2$.

类似地，矩阵 $F((\lambda-2)^2)$, $F((\lambda-2)^2)$, $F((\lambda^2+2))$, $F((\lambda^2+2)^2)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的初等因子组分别是 $(\lambda-2)^2$, $(\lambda-2)^2$, λ^2+2, $(\lambda^2+2)^2$. 它们凑在一起恰为 B 在 $\mathbb{R}$ 上的初等因子组.

综上， A, B 在 $\mathbb{R}$ 上有相同的初等因子组，因此 A 相似于 B. □

注： A, B 在 $\mathbb{C}$ 上的初等因子组为 $(\lambda-2)^2$, $(\lambda-2)^2$, $\lambda+i\sqrt{2}$, $(\lambda+i\sqrt{2})^2$, $\lambda-i\sqrt{2}$, $(\lambda-i\sqrt{2})^2$.

6. $f_A(\lambda)=\lambda^3(\lambda+5)^4$, $m_A(\lambda)=\lambda(\lambda+5)^2$, 写出 A 的 Jordan 标准形.

解：Jordan 标准形由初等因子组唯一确定，所以只要确定了初等因子组，即可得矩阵的 Jordan 标准形. 因 $m_A(\lambda)=\lambda(\lambda+5)^2$, 所以 λ, $(\lambda+5)^2$ 是 A 的初等因子，且其他初等因子都是他们的因式. 结合所有初等因子的乘积是特征多项式 $f_A(\lambda)=\lambda^3(\lambda+5)^4$, 因此 A 的初等因子组为： λ, λ, λ, $(\lambda+5)^2$, $(\lambda+5)^2$ 或者 λ, λ, λ, $\lambda+5$, $\lambda+5$, $(\lambda+5)^2$. 从而 A 的 Jordan 标准形为：

$$\begin{pmatrix} 0 &&&&&& \\ & 0 &&&&& \\ && 0 &&&& \\ &&& -5 &&& \\ &&& 1 & -5 && \\ &&&&& -5 & \\ &&&&& 1 & -5 \end{pmatrix} \text{或} \begin{pmatrix} 0 &&&&&& \\ & 0 &&&&& \\ && 0 &&&& \\ &&& -5 &&& \\ &&&& -5 && \\ &&&&& -5 & \\ &&&&& 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

7. $A, B\in\mathbb{C}^{3\times3}$, 则 A 相似于 B 的充要条件是 $m_A(\lambda)=m_B(\lambda)$ 且 $f_A(\lambda)=f_B(\lambda)$. 若当 A, B 为 4 阶矩阵时，情况如何？

解：必要性显然成立. 至于充分性，有以下讨论：

i) 若 $\deg m_A(\lambda)=1$, 且 $m_A(\lambda)=m_B(\lambda)$, 则 A 与 B 的不变因子均为 $m_A(\lambda)$, $m_A(\lambda)$, $m_A(\lambda)$, 故 A 相似于 B.

ii) 若 $\deg m_A(\lambda)=2$, 则由 $m_A(\lambda)=m_B(\lambda)$, $f_A(\lambda)=f_B(\lambda)$, 可知 A 与 B 的不变因子均为： 1, $f_A(\lambda)/m_A(\lambda)$, $m_A(\lambda)$, 故 A 相似于 B.

iii) 若 $\deg m_A(\lambda)=3$, 即 $m_A(\lambda)=f_A(\lambda)$, 则 A 与 B 的不变因子均为 1, 1, $m_A(\lambda)$, 亦有 A 相似于 B. 即命题成立.

若 A, B 为 4 阶矩阵时，必要性依然成立，但充分性不成立.

反例：当 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 && \\ & 0 && \\ && 0 & 1 \\ &&& 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 &&& \\ & 0 && \\ && 0 & 1 \\ &&& 0 \end{pmatrix}$, 则 $m_A(\lambda)=m_B(\lambda)=\lambda^2$ 且 $f_A(\lambda)=f_B(\lambda)=\lambda^4$, 但 $r(A)=2\neq1=r(B)$, 故 A 与 B 不相似.

8. 设 φ 是复数域上 n 维空间 V 的线性变换， A 是 φ 在某个基下的矩阵. 求证： V 的每个根子空间都是循环子空间的充分必要条件是 A 的第 n 个行列式因子 $D_n(\lambda)$ 和第 n 个不变因子 $g_n(\lambda)$ 相等.

证明：设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t$ 是 φ 的全部不同特征值，$R(\lambda_i)$ 是 λ_i 的根子空间，$V(\lambda_i, e_{ij})$ 是 $\varphi-\lambda_i\mathrm{id}_V$ 的循环子空间 $(i=1,2,\cdots,t; j=1,2,\cdots,s_i)$. 则由空间第一和第二分解定理知 $R(\lambda_i)=\bigoplus_{j=1}^{s_i}V(\lambda_i, e_{ij})$, 循环子空间不能再分解为两个非零的 φ- 子空间的直和，每个循环子空间对应一个初等因子，即属于 λ_i 的循环子空间有几个相应 λ_i 的初等因子就有几个. 因此， V 的每个根子空间都是循环子空间 $\Longleftrightarrow s_i=1$, 即 $R(\lambda_i)=V(\lambda_i, e_{i1})\Longleftrightarrow$ 每个特征值 λ_i 对应的 Jordan 块只有一个 $\Longleftrightarrow A$ 的初等因子组为 $(\lambda-\lambda_1)^{e_{11}}$,

$(\lambda-\lambda_2)^{e_{21}}, \cdots, (\lambda-\lambda_t)^{e_{t1}}$, 且 $e_{11}+e_{21}+\cdots+e_{t1}=n \Longleftrightarrow A$ 的不变因子为 $1,1,\cdots,1(n-1$ 个$)$, $\prod_{i=1}^t(\lambda-\lambda_i)^{e_{i1}} \Longleftrightarrow A$ 的行列式因子为 $1,1,\cdots,1(n-1$ 个$)$, $\prod_{i=1}^t(\lambda-\lambda_i)^{e_{i1}}$ 即 A 的第 n 个行列式因子 $D_n(\lambda)$ 和第 n 个不变因子 $g_n(\lambda)$ 相等, 且 $D_n(\lambda)=g_n(\lambda)=\prod_{i=1}^t(\lambda-\lambda_i)^{e_{i1}}$. □

9. 设 φ 是复数域上 n 维空间 V 的线性变换, $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t$ 是 φ 的全部不同特征值. 且 $V=R(\lambda_1)\oplus R(\lambda_2)\oplus\cdots\oplus R(\lambda_t)$, 其中 $R(\lambda_i)$ 是 λ_i 的根子空间 $(i=1,2,\cdots,t)$. 设 W 是 V 的 φ- 子空间, 则 $W=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_t$, 其中 $W_i=W\cap R(\lambda_i)$.

证明: (法一) 依题意, 可设 $m_\varphi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{l_1}(\lambda-\lambda_2)^{l_2}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{l_t}$, 其中 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_t$ 是 φ 的全部互异特征值. 可记 $g_i(\lambda)=\prod_{j\neq i}(\lambda-\lambda_j)^{l_j}$, 则 $(g_1(\lambda),g_2(\lambda),\cdots,g_t(\lambda))=1$, 故存在 $u_1(\lambda),u_2(\lambda),\cdots,u_t(\lambda)$, 使得 $g_1(\lambda)u_1(\lambda)+g_2(\lambda)u_2(\lambda)+\cdots+g_t(\lambda)u_t(\lambda)=1$, 所以有 $\mathrm{id}_V=g_1(\varphi)u_1(\varphi)+g_2(\varphi)u_2(\varphi)+\cdots+g_t(\varphi)u_t(\varphi)$.

于是, 对于任意的 $\omega\in W$, 有 $\omega=\mathrm{id}_V(\omega)=(g_1(\varphi)u_1(\varphi)+g_2(\varphi)u_2(\varphi)+\cdots+g_t(\varphi)u_t(\varphi))(\omega)=g_1(\varphi)u_1(\varphi)(\omega)+g_2(\varphi)u_2(\varphi)(\omega)+\cdots+g_t(\varphi)u_t(\varphi)(\omega)$. 由于 W 是 V 的 φ- 子空间, 故 $g_i(\varphi)u_i(\varphi)(\omega)\in W, 1\le i\le s$. 而 $(\varphi-\lambda_i\mathrm{id}_V)^{l_i}[g_i(\varphi)u_i(\varphi)(\omega)]=m_\varphi(\varphi)u_i(\varphi)(\omega)=0$, 故有 $g_i(\varphi)u_i(\varphi)(\omega)\in R(\lambda_i)$, 从而 $g_i(\varphi)u_i(\varphi)(\omega)\in W\cap R(\lambda_i), 1\le i\le t$, 即 $W\subseteq W_1+W_2+\cdots+W_t$. 而 $W_1+W_2+\cdots+W_t\subseteq W$ 显然成立, 于是 $W=W_1+W_2+\cdots+W_t$.

此外, 若 $0=\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega+t$, 其中 $\omega_i\in W_i=W\bigcap R(\lambda_i)$, 则 $\omega_i\in R(\lambda_i)$. 注意到 $V=R(\lambda_1)\oplus R(\lambda_2)\oplus\cdots\oplus R(\lambda_t)$, 从而 $\omega_i=0$. 因此, $W_1+W_2+\cdots+W_t=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_t$.

综上, $W=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_t$.

(法二) 因 W 是 $\varphi-$ 子空间, 因此将 φ 限制在 W 得 W 的线性变换 ψ. 从而有 $W=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_s$ 其中 W_i 为 ψ 属于特征值 μ_i 的根子空间, $\dim W_i=m_i$ $(i=1,2,\cdots,s)$. 对任意 $\alpha\in W_i$, $0=(\psi-\mu_i)^{m_i}(\alpha_i)=(\varphi-\mu_i)^{m_i}(\alpha_i)$, 因此 $\alpha\in R(\mu_i)$, 且 μ_i 是 φ 的一个特征值, 不失一般性, 设 $\mu_i=\lambda_i$, 从而 $W_i\subseteq R(\lambda_i)$, $s\le t$. 而 $W_i\subseteq W$, 因此 $W_i\subseteq W\bigcap R(\lambda_i)$ $(i=1,2,\cdots,s)$. 若 $s<t$, 对 $s+1\le i\le t$, 取 $W_i=0$, 显然有 $W_i\subseteq W\bigcap R(\lambda_i)$.

此外, $W=W_i+U_i$, 其中 $U_i=\bigoplus_{j\neq i}W_j\subseteq\bigoplus_{j\neq i}R(\lambda_j)$. 因 $W_i\subseteq R(\lambda_i)$, 由第三章子空间理论得 $W\bigcap R(\lambda_i)=(W_i+U_i)\bigcap R(\lambda_i)=W_i+U_i\bigcap R(\lambda_i)\subseteq W_i+(\bigoplus_{j\neq i}R(\lambda_j))\bigcap R(\lambda_i)=W_i$.

至此证明了 $W=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_t$, 其中 $W_i=W\cap R(\lambda_i)$. □

10. 求 $J^2(0,n)$ 的 Jordan 标准形.

解: 记 $J=J(0,n)$, $A=J^2$. 则 $J^n=0, J^{n-1}\neq 0$. 此外, 依题意, 直接计算可知 A 的特征矩阵 $\lambda E-A$ 右下角的一个 $n-2$ 阶子式为非零常数, 故 A 的 $n-2$ 阶行列式因子 $D_{n-2}=1$. 从而 A 的前 $n-2$ 个不变因子全是 1, 只要确定 A 的最后一个不变因子即极小多项式, 即可得第 $n-1$ 个不变因子, 进而求得矩阵的所有初等因子组和 Jordan 标准形.

当 $n=2m, m\in\mathbb{N}$, 因 $A^m=J^{2m}=J^n=0$, 且 $A^{m-1}=J^{2m-2}=J^{n-2}\neq 0$, 故 $m_A(\lambda)=\lambda^m$. 又 $f_A(\lambda)=\lambda^n$, 于是 A 的初等因子组为 λ^m,λ^m, 因此 A 的 Jordan 标准形是: $\begin{pmatrix} J_1 & \\ & J_2 \end{pmatrix}$, 其中 $J_1=J_2$ 是主对角线上全为 0 的 m 阶 Jordan 块.

当 $n=2m-1, m\in\mathbb{N}$, 因 $A^m=J^{2m}=J^{n+1}=0$, $A^{m-1}=J^{2m-2}=J^{n-1}\neq 0$, 故 $m_A(\lambda)=\lambda^m$. 又 $f_A(\lambda)=\lambda^n$, 于是 A 的初等因子为 λ^{m-1},λ^m. 从而 A 的 Jordan 标准形为: $\begin{pmatrix} J_1 & \\ & J_2 \end{pmatrix}$, 其中 J_1,J_2 分别是主对角线上全为 0 的 $m-1$ 和 m 阶 Jordan 块.

11. 设 λ_0 是复数域上 n 阶方阵 A 的 k 重特征值, 求证: $r((\lambda_0E-A)^k)=n-k$.

证明：对 A 存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} J_0 & \\ & J_1 \end{pmatrix}$，其中 k 阶矩阵 J_0 是块对角矩阵，其对角块是 A 的属于特征值的 Jordan 块，从而 $\lambda_0 E - J_0$ 是对角线元素全为 0 的严格下三角阵，且 $(\lambda_0 E - J_0)^k = 0$. J_1 也是块对角矩阵，由 A 的非 λ_0 的特征值的 Jordan 块组成，即 J_1 为对角元全不等于 λ_0 下三角矩阵，因此 $(\lambda_0 E - J_1)^k$ 是可逆矩阵，秩为 $n-k$. 从而 $r((\lambda_0 E - A)^k) = r((\lambda_0 E - J)^k) = n-k$. □

12. 设复数域上 n 阶奇异方阵 A 满足 $r(A) = r(A^2) > 0$. 求证：A 相似于下面矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$，其中 C 为可逆阵.

证明：A 是奇异阵，必有 0 特征值，又 $r(A) > 0$，故 A 不是幂零阵，即 A 有非零的特征值. 因此 A 的 Jordan 标准形中的 Jordan 块既有 0 特征值的 Jordan 块，也有非零特征值的 Jordan 块，且 $r(A) = r(J) =$ 各 Jordan 块秩的和. 对于属于非 0 特征值 λ 的 Jordan 块 $J(\lambda, e)$ 是可逆阵，此时 $r(J^2(\lambda, e)) = r(J(\lambda, e)) = e$. 而对于零特征值的 Jordan 块 $J(0, e)$，其阶数必为 1 阶的. 若不然 $e > 1$，直接计算可得 $r(J^2(0, e)) = e - 1 < r(J(0, e))$，则 $r(A^2) < r(A)$ 与设矛盾. 将属于 0 特征值的 Jordan 块集中在 J 的左上角，而非零特征值的 Jordan 块在右下角即 C，结论得证. □

13. 设 J 是 n 阶 Jordan 块且主对角元素为 λ_0，求证：和 J 乘法可交换的 n 阶矩阵必为 J 的多项式.

证明：设 A 和 J 可交换. 将 J 写为 $J = \lambda_0 E_n + J_0, J_0$ 为主对角线元素全为零的 Jordan 型矩阵. 显然，A 和 J 可交换的充要条件 A 和 J_0 可交换. 直接计算得到 A 必具有下列形状 (上三角阵)：

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ & a_1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_2 \\ & & & a_1 \end{pmatrix}.$$

构造多项式 $f(x) = a_1 + a_2(x - \lambda_0) + a_3(x - \lambda_0)^2 + \cdots + a_n(x - \lambda_0)^{n-1}$. 容易验证 $A = f(J) = a_1 I + a_2(J - \lambda_0 I) + a_3(J - \lambda_0 I)^2 + \cdots + a_n(J - \lambda_0 I)^{n-1}$.

注：复习题 4 的证明方法也可用于证明本题. □

(黄雪娥解答)