习题 1.3　分块矩阵

1. 设 A, B 是 n 阶方阵，计算 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^2$.

解：直接计算得 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & BA \end{pmatrix}$.

2. 计算 $\begin{pmatrix} 0 & E_4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$，其中 $n = 2, 3, 4, 5$.

解：设原矩阵为 A，则直接计算得，

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & E_3 \\ E_2 & 0 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 0 & E_2 \\ E_3 & 0 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ E_4 & 0 \end{pmatrix}, A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & E_4 \end{pmatrix}.$$

注：利用 Ex.3 的结论，可用分块矩阵进行计算：

$$A^2 = A(\varepsilon_5, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) = (A\varepsilon_5, A\varepsilon_1, A\varepsilon_2, A\varepsilon_3, A\varepsilon_4) = (\varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \begin{pmatrix} 0 & E_3 \\ E_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A^2(\varepsilon_5, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) = (A^2\varepsilon_5, A^2\varepsilon_1, A^2\varepsilon_2, A^2\varepsilon_3, A^2\varepsilon_4) = (\varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \begin{pmatrix} 0 & E_2 \\ E_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

类似地，$\begin{pmatrix} 0 & E_4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ E_4 & 0 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} 0 & E_4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & E_4 \end{pmatrix}$.

3. $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ 称为 n 维标准单位列向量; $\varepsilon_1^T, \varepsilon_2^T, \cdots, \varepsilon_n^T$ 称为 n 维标准单位行向量. 求证下列式子. (注意：对于 $m \times n$ 矩阵 A, $A\varepsilon_i$ 中的 ε_i 是 n 维标准单位列向量, $\varepsilon_i^T A$ 中的 ε_i^T 是 m 维标准单位行向量).

(1) $\varepsilon_i^T \varepsilon_j = \delta_{ij}$, 其中 δ_{ij} 是 Kronecker 符号，即 $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$；

(2) $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i$;

(3) $A_{m\times n}\varepsilon_i$ 是 A 的第 i 列， $\varepsilon_i^T A_{m\times n}$ 是 A 的第 i 行;

(4) $\varepsilon_i^T A_{m\times n} \varepsilon_j = a_{ij}$.

解：(1) 分别将 n 阶单位阵按行和列分块，得

$$E_n = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^T \\ \varepsilon_2^T \\ \vdots \\ \varepsilon_n^T \end{pmatrix} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n).$$

$$(\delta_{ij})_{n\times n} = E_n = E_nE_n = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^T \\ \varepsilon_2^T \\ \vdots \\ \varepsilon_n^T \end{pmatrix} (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) = (\varepsilon_i^T\varepsilon_j)_{n\times n}.$$

比较左右矩阵第 (i,j) 元素，即得 $\delta_{ij} = \varepsilon_i^T\varepsilon_j$, 其中 $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$.

(2)

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1\varepsilon_1 + \cdots + a_n\varepsilon_n = \sum_{i=1}^{n} a_i\varepsilon_i.$$

(3) 将 A 按列分块为 $A = (A_1, A_2, \cdots, A_n)$, 从而

$$(A_1, A_2, \cdots, A_n) = A = AE = A(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) = (A\varepsilon_1, A\varepsilon_2, \cdots, A\varepsilon_n),$$

比较等式左右两边矩阵的第 i 列，即得 $A\varepsilon_i$ 是 A 的第 i 列 A_i.

注意到 $\varepsilon_i^TA = (A^T\varepsilon_i)^T$, 而 $A^T\varepsilon_i$ 是 A^T 的第 i 列，其转置即 A 的第 i 行，故 ε_i^TA 为 A 的第 i 行.

(4) 由 (3) 得 $\varepsilon_i^TA_{m\times n}\varepsilon_j = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})\varepsilon_j = a_{ij}$.

4. m 维标准单位列向量 ε_i 和 n 维标准单位行向量 ε_j^T 的乘积 $\varepsilon_i\varepsilon_j^T$ 称为 $m\times n$ 阶基础矩阵，记为 E_{ij}. 基础矩阵 E_{ij} 的第 (i,j) 分量是 1, 其它分量都是 0. 求证：

(1) $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$;

(2) 设 $A = (a_{ij})_{m\times n}$, 则 $A = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}$;

(3) $E_{ij}A$ 的第 i 行元素是 A 中的第 j 行的元素，其余元素为 0; AE_{ij} 的第 j 列元素是 A 中的第 i 列的元素，其余元素为 0.

(4) $E_{ij}AE_{kl} = a_{jk}E_{il}$.

证明：(1) 由 $E_{ij} = \varepsilon_i\varepsilon_j^T$, $E_{kl} = \varepsilon_k\varepsilon_l^T$, 得 $E_{ij}E_{kl} = \varepsilon_i\varepsilon_j^T\varepsilon_k\varepsilon_l^T = (\varepsilon_j^T\varepsilon_k)\varepsilon_i\varepsilon_l^T = \delta_{jk}E_{il}$.

(2) $A = (a_{ij})_{m\times n}$, 则

$$A = a_{11}E_{11} + \cdots + a_{1n}E_{1n} + a_{21}E_{21} + \cdots + a_{2n}E_{2n} + \cdots + a_{m1}E_{m1} + \cdots + a_{mn}E_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}.$$

(3) 将 A 的第 i 行记为 α_i, A 的第 j 列记为 A_j. 则

$$E_{ij}A = \varepsilon_i\varepsilon_j^TA = \begin{array}{c} \\ \\ (i) \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\alpha_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \alpha_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\begin{array}{c} \\ \\ (i) \\ \\ \\ \end{array},$$

$$AE_{ij} = A\varepsilon_i\varepsilon_j^T = A_i(0, \cdots, \underset{(j)}{1}, \cdots, 0) = (0, \cdots, \underset{(j)}{A_i}, \cdots, 0).$$

(4) $E_{ij}AE_{kl} = \varepsilon_i\varepsilon_j^T A\varepsilon_k\varepsilon_l^T = \varepsilon_i a_{jk}\varepsilon_l^T = a_{jk}E_{il}$.

(李小凤解答)