§5.8 多元多项式

思考 一个多元多项式按照字典排列法，首项系数的次数是否最大？末项的次数是否最小？

解 未必. 如 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2x^2x_3+x_2^6+x_2x_3^4$.

习题

1. 写出三元三次多项式的一般形式.

解 按照字典排序法，所求多项式一般形式为

$f(x_1,x_2,x_3)=a_{300}x_1^3+a_{210}x_1^2x_2+a_{201}x_1^2x_3+a_{120}x_1x_2^2+a_{111}x_1x_2x_3+a_{102}x_1x_3^2+a_{030}x_2^3+a_{021}x_2^2x_3+a_{012}x_2x_3^2+a_{003}x_3^3+a_{200}x_1^2+a_{110}x_1x_2+a_{101}x_1x_3+a_{020}x_2^2+a_{011}x_2x_3+a_{002}x_3^2+a_{100}x_1+a_{010}x_2+a_{001}x_3+a_{000}$.
其中三次项系数不全为零.

2. 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n),g(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in F[x_1,x_2,\cdots,x_n]$, 且 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0$, 若对一切使 $g(a_1,a_2,\cdots,a_n)\neq 0$ 的 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T\in F^n$, 均有 $f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=0$. 则 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$.

证明 令

$$h(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)g(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

由已知条件知对任意的 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in F$, 均有

$$h(a_1,a_2,\cdots,a_n)=f(a_1,a_2,\cdots,a_n)g(a_1,a_2,\cdots,a_n)=0.$$

故 $h(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$. 而 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0$, 由多元多项式乘法的消去律知 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$.

3. 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 r 次齐次多项式，$c\in F$. 求证

$$f(cx_1,cx_2,\cdots,cx_n)=c^rf(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

证明 不妨设

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum a_{i_1i_2\cdots i_n}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n},$$

其中 $i_1+i_2+\cdots+i_n=r$. 那么

$$f(cx_1,cx_2,\cdots,cx_n)=\sum a_{i_1i_2\cdots i_n}(cx_1)^{i_1}(cx_2)^{i_2}\cdots(cx_n)^{i_n}$$

$$=\sum c^{i_1+i_2+\cdots+i_n}a_{i_1i_2\cdots i_n}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}=c^r\sum a_{i_1i_2\cdots i_n}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}=c^rf(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

4. 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n),g(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in F[x_1,x_2,\cdots,x_n]$. 若 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是齐次的，证明 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 都是齐次的.

证明 设 f,g 的次数分别为 s 和 t. 把 f 与 g 写成齐次多项式之和,

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f_0(x_1,x_2,\cdots,x_n)+f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)+\cdots+f_s(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$
$$g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=g_0(x_1,x_2,\cdots,x_n)+g_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)+\cdots+g_t(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

其中 $f_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 中所有 k 次单项的和， $0\le k\le s$; $g_l(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 中所有 l 次单项的和， $0\le l\le t$. 设 f 中齐次成份中最低次数为 i, 即

$$f_0(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\cdots=f_{i-1}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0,$$

$f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0$; g 的齐次成份中最低次数为 j. 如果 $i<s$, $j<t$ 两式中至少有一式成立，那么 $i+j<s+t$, 且

$$\begin{aligned}&f(x_1,x_2,\cdots,x_n)g(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\&=(f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)g_j(x_1,x_2,\cdots,x_n))+(f_{i+1}(x_1,x_2,\cdots,x_n)g_j(x_1,x_2,\cdots,x_n))\\&\quad+f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)g_{j+1}(x_1,x_2,\cdots,x_n)+\cdots+(f_s(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,g_t(x_1,x_2,\cdots,x_n))\end{aligned}$$

次数为 $i+j$ 的部分恰由且只由 $f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $g_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 之积得到. 因 $f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $g_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 均为齐次非零多项式，因此 $f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ $g_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 $i+j$ 次齐次多项式. 同理 $f_s(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ $g_t(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 $s+t$ 次齐次多项式. 从而 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 不是齐次多项式, 与设矛盾. 因此 $i=s$, $j=t$, 即 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是齐次多项式.