§8.1 欧式空间，长度，夹角　习题参考答案

1. 设 A 是 n 是可逆实矩阵，定义映射 $(-,-):\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ 如下：$(\alpha,\beta)=\alpha^TA^TA\beta$. 求证：$(-,-)$ 是一个内积，因而 $\mathbb{R}^n$ 对于 $(-,-)$ 构成一个欧式空间.

证明：$\forall\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}^n$, 有

1) $(\alpha,\beta)=\alpha^TA^TA\beta=(\alpha^TA^TA\beta)^T=\beta^TA^TA\alpha=(\beta,\alpha)$;

2) $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha+\beta)^TA^TA\gamma=\alpha^TA^TA\gamma+\beta^TA^TA\gamma=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$;

3) $\forall c\in\mathbb{R},(c\alpha,\beta)=(c\alpha)^TA^TA\beta=c\alpha^TA^TA\beta=c(\alpha,\beta)$;

4) $(\alpha,\alpha)=\alpha^TA^TA\alpha=(A\alpha)^TA\alpha$. 记 $(A\alpha)^T=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in\mathbb{R}^n$, 则 $(A\alpha)^TA\alpha=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\geq 0$ 即 $(\alpha,\alpha)\geq 0$, 并且当且仅当 $A\alpha=0$ 即 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T=0$ 时等号成立. 注意到 A 可逆，因此 $A\alpha=0$ 当且仅当 $\alpha=0$. 故当且仅当 $\alpha=0$ 时，$(\alpha,\alpha)=0$.

综上得 $(-,-)$ 是一个内积，因此 $\mathbb{R}^n$ 对于 $(-,-)$ 构成一个欧式空间. □

2. 求证：对于欧式空间 V 中的任意向量 α,β 有

(1) $|\alpha+\beta|^2+|\alpha-\beta|^2=2|\alpha|^2+2|\beta|^2$;

(2) $(\alpha,\beta)=\frac{1}{4}|\alpha+\beta|^2-\frac{1}{4}|\alpha-\beta|^2$;

(3) $|\alpha+\beta|\leq|\alpha|+|\beta|$.

证明：(1) $|\alpha+\beta|^2+|\alpha-\beta|^2=(\alpha+\beta,\alpha+\beta)+(\alpha-\beta,\alpha-\beta)=|\alpha|^2+2(\alpha,\beta)+|\beta|^2+|\alpha|^2-2(\alpha,\beta)+|\beta|^2=2|\alpha|^2+2|\beta|^2$

(2) $\frac{1}{4}|\alpha+\beta|^2-\frac{1}{4}|\alpha-\beta|^2=\frac{1}{4}[(\alpha+\beta,\alpha+\beta)-(\alpha-\beta,\alpha-\beta)]=\frac{1}{4}[(\alpha,\alpha)+2(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)-(\alpha,\alpha)+2(\alpha,\beta)-(\beta,\beta)]=(\alpha,\beta)$

(3) $|\alpha+\beta|^2=(\alpha+\beta,\alpha+\beta)=|\alpha|^2+2(\alpha,\beta)+|\beta|^2\leq|\alpha|^2+2|\alpha||\beta|+|\beta|^2=(|\alpha|+|\beta|)^2$, 进而 $|\alpha+\beta|\leq|\alpha|+|\beta|$. □

3. 在 $\mathbb{R}^4$ 中，求 α,β 的夹角.

(1) $\alpha=(2,1,3,2),\beta=(1,2,-2,1)$;

(2) $\alpha=(1,1,1,1),\beta=(0,1,0,0)$

解：设 α,β 夹角为 θ.

(1) $\cos\theta=\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}=\frac{0}{180}=0$, 所以 $\theta=\frac{\pi}{2}$.

(2) 同 (1), 得 $\theta=\frac{\pi}{3}$.

4. 在欧式空间 V 中，定义两个向量 α,β 的距离为 $|\alpha-\beta|$. 求证：

(1) 当 $\alpha\neq\beta$ 时，$|\alpha-\beta|>0$;

(2) $|\alpha-\beta|=|\beta-\alpha|$;

(3) $|\alpha-\beta|\leq|\alpha-\gamma|+|\gamma-\beta|$.

证明：(1) 由内积定义知 $|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha-\beta,\alpha-\beta)}\geq 0$, 且等号成立当且仅当 $\alpha-\beta=0$, 即 $|\alpha-\beta|=0$ 当且仅当 $\alpha=\beta$. 故结论成立.

(2) $|\alpha-\beta|=|-(\beta-\alpha)|=|-1||\beta-\alpha|=|\beta-\alpha|$;

(3) 由习题 2(3), $|\alpha-\beta|=|\alpha-\gamma+\gamma-\beta|\leq|\alpha-\gamma|+|\gamma-\beta|$. □

5. 在 $\mathbb{R}^4$ 中，求与向量 $\beta=(1,-1,-1,1),\gamma=(2,1,1,3)$ 正交的所有向量.

解：设所求向量为 $\alpha = (a_1, a_2, a_3, a_4)$. 依题意，有

$$(\alpha, \beta) = a_1 - a_2 - a_3 + a_4 = 0, (\alpha, \gamma) = 2a_1 + a_2 + a_3 + 3a_4 = 0.$$

联立上面两个方程组，解得 $a_1 = -\frac{4}{3}a_4, a_2 = -a_3 - \frac{1}{3}a_4, a_3 = a_3, a_4 = a_4$. 那么该方程组基础解系为 $\alpha_1 = (0, -1, 1, 0), \alpha_2 = (-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 0, 1)$, 所以与向量 $\beta = (1, -1, -1, 1), \gamma = (2, 1, 1, 3)$ 正交的所有向量是 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$, 其中 $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

6. 设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是 n 维欧式空间 V 的一个基，证明：

(1) 如果 $\alpha \in V$ 使得 $(\alpha, \xi_i) = 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$, 那么 $\alpha = 0$;

(2) 如果 $\alpha_1, \alpha_2 \in V$ 使得 $(\alpha_1, \xi_i) = (\alpha_2, \xi_i) (i = 1, 2, \cdots, n)$, 那么 $\alpha_1 = \alpha_2$.

证明： (1) 因 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是 V 的一个基，因此对 $\alpha \in V$, 可设 $\alpha = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \cdots + x_n\xi_n$, 其中 $x_i (i = 1, 2, \cdots, n) \in \mathbb{R}$. 那么由 $(\alpha, \xi_i) = 0$, 有 $(\alpha, \alpha) = (\alpha, x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \cdots + x_n\xi_n) = x_1(\alpha, \xi_1) + x_2(\alpha, \xi_2) + \cdots + x_n(\alpha, \xi_n) = 0$ 即 $(\alpha, \alpha) = 0$, 从而由内积定义知，只能 $\alpha = 0$;

(2) 由 $(\alpha_1, \xi_i) = (\alpha_2, \xi_i) (i = 1, 2, \cdots, n)$ 得 $(\alpha_1 - \alpha_2, \xi_i) = 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$. 由 (1) 知 $\alpha_1 = \alpha_2$. □

(黄雪娥解答)