§5.6 复系数和实系数多项式

习题

1. 设 c_1, c_2, c_3 是 x^3+px^2+qx+r 的根. 求作多项式, 使得 $c_1(c_2+c_3), c_2(c_1+c_3), c_3(c_1+c_2)$ 为根.

解 依题意, 由 Vieta 定理有

$c_1+c_2+c_3=-p.$

$c_1c_2+c_2c_3+c_1c_3=q.$

$c_1c_2c_3=-r.$

记 $\alpha_1=c_1(c_2+c_3)$, $\alpha_2=c_2(c_1+c_3)$, $\alpha_3=c_3(c_1+c_2)$. 若设以 α_1,α_2,α_3 为根的多项式为 x^3+mx^2+nx+s, 则

$m=-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=-2(c_1c_2+c_2c_3+c_1c_3)=-2q,$

$n=\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_3=c_1^2c_2^2+c_1^2c_3^2+c_3^2c_2^2+3c_1^2c_2c_3+3c_1c_2^2c_3+3c_1c_2c_3^2=(c_1c_2+c_2c_3+c_1c_3)^2+c_1c_2c_3(c_1+c_2+c_3)=q^2+pr,$

$s=-\alpha_1\alpha_2\alpha_3=-c_1c_2c_3(c_1^2c_2+c_1c_2^2+c_1c_2c_3+c_1^2c_3+c_1c_3^2+c_1c_2c_3+c_2^2c_3+c_2c_3^2+c_1c_2c_3-c_1c_2c_3)=-c_1c_2c_3[(c_1c_2+c_2c_3+c_1c_3)(c_1+c_2+c_3)-c_1c_2c_3]=-r[q(-p)+r]=r^2-pqr.$

故所求多项式为 $x^3+-2qx^2+(q^2+pr)x+(r^2-pqr)$.

2. 设 $f(x)\in\mathbb{R}[x]$, $\deg f(x)$ 为奇数, 则 $f(x)$ 必有实数根.

证明 反证法. 实系数多项式 $f(x)$ 在实数域上的标准分解式中不可约多项式为一次多项式或形如 ax^2+bx+c 的二次多项式, 其中 $b^2-4ac<0$. 若 $f(x)$ 的标准分解式只含二次不可约因式, 则 $\deg f(x)$ 一定是偶数次的与已知条件 $\deg f(x)$ 为奇数矛盾. 故 $f(x)$ 标准分解式中必有形如 $x-a$ 的一次因式, 其中 $a\in\mathbb{R}$, 即必有实数根.

3. 证明 $f(x)=x^8+5x^6+4x^4+2x^2+1$ 无实根.

证明 因为对任意的实数 c, 都有 $c^8+5c^6+4c^4+2c^2+1>0$, 所以方程 $x^8+5x^6+4x^4+2x^2+1=0$ 无实数根.

4. 若实系数多项式 $f(x)=x^3+px^2+qx+r$ 的三个根均为实数，求证：$p^2\geq 3q$.

证明 依题意，设原方程的 3 个根分别为 c_1,c_2,c_3. 则由 Vieta 定理，可得

$$\begin{cases} c_1+c_2+c_3=-p \\ c_1c_2+c_1c_3+c_2c_3=q \\ c_1c_2c_3=-r \end{cases}$$

由于 c_1,c_2,c_3 均为实数，故有

$$(c_1-c_2)^2+(c_1-c_3)^2+(c_2-c_3)^2\geq 0.$$

即

$$2(c_1^2+c_2^2+c_3^2)-2(c_1c_2+c_1c_3+c_2c_3)=2(c_1+c_2+c_3)^2-6(c_1c_2+c_1c_3+c_2c_3)=2(-p)^2-6q\geq 0.$$

于是有 $p^2\geq 3q$.

5. 设不可约多项式 $p(x)\in\mathbb{Q}[x]$. 求证： $p(x)$ 在 $\mathbb{C}$ 上没有重根.

证明 反证法. 若 $p(x)$ 在复数域 $\mathbb{C}$ 上有重根 c, 则 $x-c$ 是 $p(x)$ 和 $p'(x)$ 的公因式，因此在复数域上 $(p(x),p'(x))\neq 1$. 该式在有理数域上同样成立. 注意到 $p(x)$ 是有理数域上的不可约多项式，所以 $p(x)|p'(x)$, 但这是不可能的. 命题得证.