§7.3 不变因子、 Frobenius 标准形

1. 证明任一 n 阶方阵 A 必与它的转置 A^T 相似.

证明：（法一）对 $\lambda E-A$, 存在可逆 $\lambda-$ 阵 $M(\lambda)$ 和 $N(\lambda)$ 使得

$$M(\lambda)(\lambda E-A)N(\lambda)=\mathrm{diag}(1,...,1,d_1(\lambda),d_2(\lambda),...,d_k(\lambda)).$$

两边同取转置得

$$M^T(\lambda)(\lambda E-A^T)N^T(\lambda)=\mathrm{diag}(1,...,1,d_1(\lambda),d_2(\lambda),...,d_k(\lambda)).$$

由于可逆 $\lambda-$ 阵的转置仍为可逆 $\lambda-$ 阵，因此 $\lambda E-A^T$ 与 $\lambda E-A$ 有相同的法式，故 A 与 A^T 相似.

（法二）由于 $\lambda E-A$ 的任意 k 阶子阵都有 $\lambda E-A^T$ 的一个 k 阶子阵的转置与之对应，即

$$\left|(\lambda E-A)\begin{pmatrix} i_1,i_2,\cdots,i_k\\ j_1,j_2,\cdots,j_k\end{pmatrix}\right|=\left|\left((\lambda E-A^T)\begin{pmatrix} j_1,j_2,\cdots,j_k\\ i_1,i_2,\cdots,i_k\end{pmatrix}\right)^T\right|,$$

从而 A^T 的 k 阶行列式因子必整除 A 的任一 k 阶子式，进而整除 A 的 k 阶行列式因子. 由于 $A=(A^T)^T$, 故同样有 A 的 k 阶行列式因子必整除 A^T 的 k 阶行列式因子. 而行列式因子均为首一的，因此 A 的 k 阶行列式因子等于 A^T 的 k 阶行列式因子. 即 $\lambda E-A^T$ 与 $\lambda E-A$ 有相同的行列式因子，从而 A 必与 A^T 相似. □

2. 求下列矩阵的行列式因子与不变因子，并写出 Frobenius 标准形.

$$(1)\begin{pmatrix} 4 & 5 & -2\\ -2 & -2 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\qquad (2)\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 & -1\\ 2 & -2 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -2 & 2\\ -1 & -1 & 2 & -2\end{pmatrix}.$$

解：(1) A 的特征矩阵为 $\lambda E-A=\begin{pmatrix} \lambda-4 & -5 & 2\\ 2 & \lambda+2 & -1\\ 1 & 1 & \lambda-1\end{pmatrix}$. $\lambda E-A$ 有一个非零常数，所以 $D_1(\lambda)=1$. 又由于 $(\lambda E-A)\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{vmatrix} -5 & 2\\ \lambda+2 & -1\end{vmatrix}=1-2\lambda$, $(\lambda E-A)\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-4 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-\lambda$, 从而 $(1-2\lambda,-\lambda)=1$, 故 $D_2(\lambda)=1$. 此外，直接计算得 $D_3(\lambda)=|A(\lambda)|=(\lambda-1)^3$. 从而 A 的行列式因子为：$1,1,(\lambda-1)^3$; 不变因子为：$1,1,(\lambda-1)^3$. 故 A 的 Frobenius 标准形为：

$$\begin{pmatrix} 0 & & 1\\ 1 & 0 & -3\\ & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

(2) A 的特征矩阵为 $\lambda E-A=\begin{pmatrix} \lambda+2 & -2 & 1 & 1\\ -2 & \lambda+2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & \lambda+2 & -2\\ 1 & 1 & -2 & \lambda+2\end{pmatrix}$. $\lambda E-A$ 有一个非零常数，所以 $D_1(\lambda)=1$. 又由于 $(\lambda E-A)\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda+2 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix}=\lambda+4$, $(\lambda E-A)\begin{pmatrix} 2 & 3\\ 2 & 3\end{pmatrix}=$

$\begin{vmatrix} \lambda+2 & 1 \\ 1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda^2+4\lambda+3$, 从而 $(\lambda+4, \lambda^2+4\lambda+3)=1$, 故 $D_2(\lambda)=1$. 同理，$\lambda E-A$ 的所有三阶子式最大公因式是 $\lambda+4$, 故 $D_3(\lambda)=\lambda+4$. 此外, 直接计算得 $D_4(\lambda)=(\lambda+4)^2(\lambda^2-4)$. 从而 A 的行列式因子为：$1,1,\lambda+4,(\lambda+4)^2(\lambda^2-4)$; 不变因子为：$1,1,\lambda+4,(\lambda+4)(\lambda^2-4)=\lambda^3+4\lambda^2-4\lambda-16$. 故 A 的 Frobenius 标准形为：

$$\begin{pmatrix} -4 & & & \\ & 0 & & 16 \\ & 1 & 0 & 4 \\ & & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

3. 判断下列矩阵是否相似：

$$(1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\qquad (2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\qquad (3)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

解：由于两数字矩阵相似的充要条件是其行列式因子相等，故依题意，只需判断 A,B 的行列式因子是否相同即可.

(1) 直接计算知 A, B 的行列式因子均为：$1,(\lambda-1)(\lambda+1)$, 因此 A 与 B 相似.

(2) A 的 1 阶行列式因子为：$\lambda-1$, 但 B 的 1 阶行列式因子为：1, 因此 A 与 B 不相似.

(3) A 的 2 阶行列式因子即 A 的特征多项式为：$f_A(\lambda)=1,(\lambda-1)(\lambda+1)$, 而 B 的特征多项式为 $f_A(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda+\frac{1}{2})\neq f_A(\lambda)$, 因此 A 与 B 不相似.

4. 写出 A 的 Frobenius 标准形

$$(1)\quad A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix};\qquad (2)\quad A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

解：(1) 直接计算得 A 的行列式因子为 $1,1,\lambda-1,(\lambda-1)^2(\lambda^2+1)$, 从而 A 的不变因子组为：$1,1,\lambda-1,(\lambda-1)(\lambda^2+1)$, 故 A 的 Frobenius 标准形为：

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & 1 \\ & 1 & 0 & -1 \\ & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) (法一) 注意到矩阵 A 是一个分块对角矩阵. 令 $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, 则 $A=\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$. 计算可得 $\lambda E-B$ 相抵于 $\mathrm{diag}\{1,\lambda+1,(\lambda+1)(\lambda-2)\}$, 而 $\lambda E-C$ 相抵于 $\mathrm{diag}\{1,1,(\lambda-1)^3\}$. 从而 $\lambda E-A$ 相抵于 $\mathrm{diag}\{1,\lambda+1,(\lambda+1)(\lambda-2),1,1,(\lambda-1)^3\}$. 进而容易得到 A 的行列式因子为 $1,1,1,1,\lambda+1,(\lambda+1)^2(\lambda-2)(\lambda-1)^3$, 不变因子为：$1,1,1,1,\lambda+1,(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-1)^3$,

故 A 的 Frobenius 标准形为：

$$\begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & 0 & & & & -2 \\ & 1 & 0 & & & 5 \\ & & 1 & 0 & & -2 \\ & & & 1 & 0 & -4 \\ & & & & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(法二) 直接计算 A 的行列式因子，进而得不变因子和 Frobenius 标准形.

5. 设有理数域 Q 上的 10 阶方阵 A 不变因子为： $1, \cdots, 1, (\lambda-2)^2(\lambda^2+2), (\lambda-2)^2(\lambda^2+2)^2$. 写出 A 的 Frobenius 标准形.

解： $(\lambda-2)^2(\lambda^2+2) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 8\lambda + 8$, $(\lambda-2)^2(\lambda^2+2)^2 = \lambda^6 - 4\lambda^5 + 8\lambda^4 - 16\lambda^3 + 10\lambda^2 - 16\lambda + 16$. 则 A 的 Frobenius 标准形为：

$$\begin{pmatrix} 0 & & & -8 & & & & & & \\ 1 & 0 & & 8 & & & & & & \\ & 1 & 0 & -6 & & & & & & \\ & & 1 & 4 & & & & & & \\ & & & & 0 & & & & & -16 \\ & & & & 1 & 0 & & & & 16 \\ & & & & & 1 & 0 & & & -20 \\ & & & & & & 1 & 0 & & 16 \\ & & & & & & & 1 & 0 & -8 \\ & & & & & & & & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

6. 若矩阵 A 有 n 个不同的特征值，则 A 的特征多项式与极小多项式相等，并求出 A 的 Frobenius 标准形.

证明：因为 A 的特征多项式与极小多项式的根相同 (不计重数)，又 A 的 n 个特征值互不相同，所以 A 的特征多项式与极小多项式相等，设为 $f(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$. 又极小多项式等于 A 的最后一个不变因子，且不变因子的乘积等于行列式因子，因此 A 的不变因子为： $1, 1, \cdots, f(\lambda)$, 从而 A 的 Frobenius 标准形为

$$F = \begin{pmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

(李小凤解答)