习题 3.4　子空间

1. 设 S 是线性空间 V 的子集，证明

$$\langle S\rangle = \{a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_m\alpha_m | m \in \mathbb{N}, \alpha_i \in S, i = 1, 2, \cdots, m\}$$

是 V 的子空间.

证明　首先，取 $m = 1$, $a_1 = 0$, 则 $0 = 0\alpha_1 \in \langle S\rangle$, 所以 $\langle S\rangle$ 非空.

其次，适当添加一些系数为 0 的项，可设对任意

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_m\alpha_m, b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \ldots + b_m\alpha_m \in \langle S\rangle,$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_m, b_1, b_2, \cdots, b_m \in F$. 因 F 是数域，因此 $a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_m + b_m \in F$, 所以

$$\begin{aligned} &(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_m\alpha_m) + (b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \ldots + b_m\alpha_m) \\ =& (a_1 + b_1)\alpha_1 + (a_2 + b_2)\alpha_2 + \cdots + (a_m + b_m)\alpha_m \in \langle S\rangle \end{aligned}.$$

即 $\langle S\rangle$ 关于加法封闭.

最后，同理可证 $\langle S\rangle$ 关于数乘封闭. 综上，$\langle S\rangle$ 是 V 的子空间. □

2. 在 $\mathbb{R}^3$ 中，求 $\langle\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\rangle$ 的一个基和维数，其中 $\alpha_1 = (2, -3, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, 4, 2)^T$, $\alpha_3 = (5, -2, 4)^T$.

解　因 α_1, α_2 对应元素不成比例，所以 α_1, α_2 线性无关，而 $\alpha_3 = 2\alpha_1 + \alpha_2$, 所以 $\langle\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\rangle$ 的一个基为 α_1, α_2, 维数等于 2.

3. 在 $\mathbb{R}^4$ 中，记 $V_1 = \langle\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\rangle$, $V_2 = \langle\alpha_4, \alpha_5\rangle$, 其中 $\alpha_1 = (1, 1, 0, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, 0, 0, 1)^T$, $\alpha_3 = (1, 1, -1, 1)^T$, $\alpha_4 = (1, 2, 0, 1)^T$, $\alpha_5 = (0, 1, 1, 0)^T$. 分别求 $V_1 + V_2$ 和 $V_1 \cap V_2$ 的一个基和维数.

解首先求 $V_1 + V_2$ 的一个基. 因为 $V_1 + V_2$ 是由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 和 α_4, α_5 生成的，所以只要求出这五个向量的极大无关组即可. 采用行初等变换法：

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以可取 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 V_1+V_2 的一个基 (不唯一).

现在求 $V_1\cap V_2$ 的一个基. 从上面的矩阵可看出 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 V_1 的一个基, α_4,α_5 是 V_2 的一个基.

由维数公式 $\dim\,(V_1\cap V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1+V_2)=2+3-3=2$, 而 $\dim V_2=2$, $(V_1\cap V_2)\subseteq V_2$, 所以 $V_1\cap V_2=V_2$, 故 α_4,α_5 是 $V_1\bigcap V_2$ 的一个基.

4. 设

$$U=\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbb{R}\}.$$

(1) 证明 U 是 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的子空间;

(2) 求 U 的一个基和维数.

证明 (1) 首先, $0\in U$, 其次, 设对任意的 $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}\in U$, $k_1,k_2\in F$,

$$k_1\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k_1a+k_2c & k_1b+k_2d \\ -(k_1b+k_2d) & k_1a+k_2c \end{pmatrix}\in U.$$

所以 U 是 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的子空间.

(2) U 的一个基 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, 故维数等于 2.

5. 设 V_1,V_2 是 V 的有限维子空间且 $V_1\subseteq V_2$. 证明: $V_1=V_2$ 当且仅当 $\dim V_1=\dim V_2$.

证明: 设 V_1 的一个基为 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$, 由于 $V_1\subseteq V_2$, 则 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$ 是 V_2 的线性无关向量组. 又因为 $\dim V_1=\dim V_2$, 所以 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$ 的个数恰为 V_2 的维数, 从而 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$ 是 V_2 的一个基. 进而对任意 $v\in V_2, v=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m\in V_1$, 故 $V_2\subseteq V_1$.

综上所述, $V_1=V_2$. □

(万琴解答)