§8.2 标准正交基习题参考答案

1. 已知 $\alpha_1=(0,2,1,0)$, $\alpha_2=(1,-1,0,0)$, $\alpha_3=(1,2,0,-1)$, $\alpha_4=(1,0,0,1)$ 是欧氏空间 $\{R^4\}$ 的一个基. 对这个基 Schimidt 正交化，求 $\mathbb{R}^4$ 的一个标准正交基础.

解：令

$\beta_1=\alpha_1=(0,2,1,0)$.

$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(1,-1,0,0)+\frac{2}{5}(0,2,1,0)=(1,-\frac{1}{5},\frac{2}{5},0)$.

$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1,-1)$.

$\beta_4=\alpha_4-\frac{(\alpha_4,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_4,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\frac{(\alpha_4,\beta_3)}{(\beta_3,\beta_3)}\beta_3=(\frac{4}{15},\frac{4}{15},-\frac{8}{15},\frac{4}{5})$.

再令

$\gamma_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}=(0,\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},0)$.

$\gamma_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=(\frac{5}{\sqrt{30}},-\frac{1}{\sqrt{30}},\frac{2}{\sqrt{30}},0)$.

$\gamma_3=\frac{\beta_3}{|\beta_3|}=(\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}},-\frac{2}{\sqrt{10}},-\frac{2}{\sqrt{10}})$.

$\gamma_4=\frac{\beta_4}{|\beta_4|}=(\frac{1}{\sqrt{15}},\frac{1}{\sqrt{15}},-\frac{2}{\sqrt{15}},\frac{3}{\sqrt{15}})$.

则 γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 为所求的标准正交基.

2. 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_3+x_4=0 \\ \qquad x_2-x_4=0 \end{cases}$$

的解空间的标准正交基，并求与解空间正交的所有向量.

解：解方程可得 $x_1=x_3-x_4$, $x_2=x_4$. 若记解空间为 V, 则取 V 一个基为 $\xi_1=(1,0,1,0)$, $\xi_2=(-1,1,0,1)$. 令 $\beta_1=\xi_1$, $\beta_2=\xi_2-\frac{(\xi_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2},1)$. 再令 $\gamma_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}=(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}},0)$, $\gamma_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=(-\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{2}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{2}{\sqrt{10}})$. γ_1, γ_2 为 V 的一个标准正交基.

记方程组的系数矩阵为 $A=(\alpha_1,\alpha_2)^T$, 其中 $\alpha_1=(1,0,-1,1)^T$, $\alpha_2=(0,1,0,-1)^T$. 显然 α_1, α_2 线性无关. 由本节例 3 结论知对于 $U=<\alpha_1,\alpha_2>$, 有 $V^T=U$. 故与 V 正交的所有向量为 $\xi=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2$, 其中 c_1,c_2 为任意实数.

3. 设 V_1,V_2 是有限维内积空间 V 的子空间，求证：

(1) $(V_1^{\perp})^{\perp}=V_1$;

(2) $V_1\subseteq V_2$, 则 $V_2^{\perp}\subseteq V_1^{\perp}$;

(3) $(V_1+V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}$;

(4) $(V_1\cap V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}+V_2^{\perp}$.

证明：(1) 一方面，$V=(V_1^{\perp})\oplus(V_1^{\perp})^{\perp}$, 故 $\dim(V_1^{\perp})^{\perp}=n-\dim(V_1^{\perp})=\dim V_1$. 另一方面，对任意的 $u_1\in V_1$, $u\in V_1^{\perp}$, $(u_1,u)=0$, 故 $V_1\subseteq(V_1^{\perp})^{\perp}$, 从而 $(V_1^{\perp})^{\perp}=V_1$.

(2) 对任意的 $u\in V_2^{\perp}$, 任意的 $u_2\in V_2$, 有 $(u,u_2)=0$. 又已知 $V_1\subseteq V_2$, 任意的 $u_1\in V_1\subseteq V_2$, $(u,u_1)=0$. 因而 $u\in V_1^{\perp}$, 从而 $V_2^{\perp}\subseteq V_1^{\perp}$.

(3) 依题意, 对任意的 $u\in(V_1+V_2)^{\perp}$, $v_1+v_2\in V_1+V_2$, 总有 $(u,v_1+v_2)=0$. 显然 $v_2=0\in V_2$, 上式即为对任意的 $v_1\in V_1$, 总有 $(u,v_1)=0$, 因此 $u\in V_1^{\perp}$. 同理，$u\in V_2^{\perp}$, 因此 $(V_1+V_2)^{\perp}\subseteq V_1^{\perp}\bigcap V_2^{\perp}$.

另一方面，对任意的 $v \in V_1^{\perp} \cap V_2^{\perp}$, $u_1+u_2 \in V_1+V_2$, 有 $(v,u_1)=0$, $(v,u_2)=0$. 从而 $(v,u)=(v,u_1)+(v,u_2)=0$, 于是 $v \in (V_1+V_2)^{\perp}$, 即 $V_1^{\perp} \cap V_2^{\perp} \subseteq (V_1+V_2)^{\perp}$. 综上所述，成立 $(V_1+V_2)^{\perp}=V_1^{\perp} \cap V_2^{\perp}$.

(4) 由 (1) 及 (3), 我们可得 $(V_1^{\perp}+V_2^{\perp})^{\perp}=(V_1^{\perp})^{\perp} \cap (V_2^{\perp})^{\perp}=V_1 \cap V_2$, 从而有 $(V_1 \cap V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}+V_2^{\perp}$. $\square$

4. (1) 实对角阵是正交阵，则其对角元为 ± 1;

(2) 上 (下) 三角阵是正交阵，则其为对角阵且对角元为 ± 1;

(3) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ 是正交阵;

(4) 设 Q 是二阶正交阵，则 Q 只能是 (3) 中出现的两种形式.

证明： (1) 设 Q 为实对角阵是正交阵，设 $Q=\mathrm{diag}(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n)$, 由 $QQ^T=I$, 有 $\lambda_i^2=1$, 得到 $\lambda_i=\pm 1$, 结论成立.

(2) 设 Q 为上 (下) 三角阵且为正交阵，则设 Q^T 为下 (上) 三角阵. 又 Q^{-1} 是上 (下) 三角阵则由 $QQ^T=I$, 有 $Q^T=Q^{-1}$. 故 Q 只能是对角阵. 由 (1) 知其对角元为 ± 1.

(3) 因 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^T=E$, $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}^T=E$, 因此 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ 是正交阵.

(4) 设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 为正交阵. 由 $A^TA=AA^T=E$, 即

$$a_{11}^2+a_{12}^2=a_{11}^2+a_{21}^2=a_{21}^2+a_{22}^2=1, a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}=0.$$

因此不妨设 $a_{11}=\cos\theta$, $a_{21}=\sin\theta$, 则 $a_{12}=\pm\sin\theta$, $a_{22}=\mp\cos\theta$. $\square$

5. 设 α_1, α_2, $\cdots$, α_m 是欧氏空间 V 的非零正交向量组， α 是 V 中的任一向量，证明下面的 Bessel 不等式

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{|(\alpha,\alpha_k)|^2}{|\alpha_k|^2} \le |\alpha_k|^2;$$

且等号成立的充分必要条件是

$$\alpha \in \langle \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \rangle.$$

证明： (法一) 将 α_1, α_2, $\cdots$, α_m 扩为 V 的一个正交基： α_1, α_2, $\cdots$, α_n. 则对 $\alpha \in V$, $\alpha=\sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i$, 其中 $(\alpha,\alpha_k)=\sum_{i=1}^{n} a_i(\alpha_i,\alpha_k)=a_k|\alpha_k|^2$, 从而 $|\alpha|^2=(\alpha,\alpha)=\sum_{k=1}^{n} a_k^2|\alpha_k|^2=\sum_{k=1}^{n} \frac{|(\alpha,\alpha_k)|^2}{|\alpha_k|^2}$. 而 $\sum_{k=1}^{m} \frac{|(\alpha,\alpha_k)|^2}{|\alpha_k|^2}=\sum_{k=1}^{m} a_k^2|\alpha_k|^2 \le \sum_{k=1}^{n} a_k^2|\alpha_k|^2=|\alpha|^2$ 当且仅当 $m=n$ 即 $V=\alpha \in \langle \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \rangle$ 时等号成立.

(法二) 将正交向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 单位化后记为 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$, 其中 $\beta_i=\frac{\alpha_i}{|\alpha_i|}(i=1,2,\cdots,m)$. 将 β_1, β_2, $\cdots$, β_m 扩为 V 的一个标准正交基 β_1, $\cdots$, β_m, β_{m+1}, $\cdots$, β_n, 则 V 中任意向量 α, $\alpha=\sum_{i=1}^{m}(\alpha,\beta_i)\beta_i$, 从而 $|\alpha|^2=\sum_{i=1}^{n}(\alpha,\beta_i)^2 \ge \sum_{i=1}^{m}(\alpha,\beta_i)^2$ 且等号成立当且仅当 $(\alpha,\beta_i)=0(i=m+1,\cdots,n)$ 即 $\beta \in \langle \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m \rangle$. 将 $\beta_i=\frac{\alpha_i}{|\alpha_i|}(i=1,2,\cdots,m)$ 代入上式即得结论. $\square$

6. 写出 §8.1 的例 1 和例 2 中 $\mathbb{R}^n$ 作为不同两种内积的不同的欧氏空间之间的同构映射.

解：将例 1 和例 2 中的欧氏空间分别记为 V_1 和 V_2.

(法一) 定义映射： $\varphi: V_1 \longrightarrow V_2$, $(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \longmapsto (x_1,\frac{x_2}{\sqrt{2}},\cdots,\frac{x_n}{\sqrt{n}})^T$. 则 φ 为所求.

首先 φ 是线性的. 事实上, 对任意实数 $k,l\in\mathbb{R}$, $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T\in V_1$, $\varphi(kX+lY)=(kx_1+ly_1,\frac{1}{\sqrt{2}}(kx_2+ly_2),\cdots,\frac{1}{\sqrt{n}}(kx_n+ly_1n))^T=(kx_1,k\frac{1}{\sqrt{2}}x_2,\cdots,k\frac{1}{\sqrt{n}}x_n)^T+(ly_1,l\frac{1}{\sqrt{2}}y_2,\cdots,l\frac{1}{\sqrt{n}}y_1n)^T=k\varphi(X)+l\varphi(Y)$.

其次, φ 是可逆的. 若 $\varphi(X)=(x_1,\frac{x_2}{\sqrt{2}},\cdots,\frac{x_n}{\sqrt{n}})^T=0$, 则 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$, 故 φ 是单的. 此外, 对任意 $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T\in V_2$, 取 $X=(x_1,\sqrt{2}x_2,\cdots,\sqrt{n}x_n)^T\in V_1$, 则 $\varphi(X)=Y$, 因此 φ 是满的.

现证 φ 保持内积. 对任意的

$$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T,Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T\in V_1,$$

有

$$\varphi(X)=(x_1,\frac{x_2}{\sqrt{2}},\cdots,\frac{x_n}{\sqrt{n}})^T,\varphi(Y)=(y_1,\frac{y_2}{\sqrt{2}},\cdots,\frac{y_n}{\sqrt{n}})^T\in V_2,$$

按 V_1 和 V_2 的内积 (用 $(-,-)_{V_1}$ 和 $(-,-)_{V_2}$ 表示) 定义计算得

$$(\varphi(X),\varphi(Y))_{V_2}=x_1y_1+2\frac{x_2}{\sqrt{2}}\frac{y_2}{\sqrt{2}}+\cdots+n\frac{x_n}{\sqrt{n}}\frac{y_n}{\sqrt{n}}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n=(X,Y)_{V_1},$$

故 φ 保持内积.

综上, φ 为所求同构映射.

(法二) 容易验证 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是例 1 的欧氏空间 V_1 的一个标准正交基, ε_1, $\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_2$, $\cdots$, $\frac{1}{\sqrt{n}}\varepsilon_n$ 是例 2 的欧氏空间 V_2 的一个标准正交基, 定义 $\varphi:V_1\to V_2$, 使得 $\varepsilon_i\longmapsto\frac{1}{\sqrt{i}}\varepsilon_i$, 即 φ 将 V_1 的标准正交基变为 V_2 的标准正交基, 因此 φ 是 V_1 到 V_2 的同构映射. □

7. 证明 V 的子空间 U 的正交补空间是唯一的, 即若 $V=U\oplus W$, 且对于任意的 $\alpha\in U$ 和任意的 $\beta\in W$, 都有 $(\alpha,\beta)=0$, 则 $W=U^{\perp}$.

证明: (法一) 先证明 $W\subseteq U^{\perp}$. 事实上, 由已知条件, 对任意的 $\beta\in W\subseteq V$, $\alpha\in U$, 都有 $(\alpha,\beta)=0$, 故 $\beta\in U^{\perp}$.

此外, 因 $V=U\oplus W$, 所以 $\dim W=n-\dim U=\dim U^{\perp}$. 结合 (1) 的结论即得 $W=U^{\perp}$.

(法二) $W\subseteq U^{\perp}$ 证明同上.

现证 $U^{\perp}\subseteq W$. 事实上, 对任意的 $\gamma\in U^{\perp}\subseteq V$, 由已知条件知, 存在 $u\in U,w\in W$, 使得 $\gamma=u+w$, 且 $(u,w)=0$. 故 $0=(\gamma,u)=(u+w,u)=(u,u)+(w,u)=(u,u)=0$, 得 $u=0$, 因此 $\gamma\in W$ 即 $U^{\perp}\subseteq W$. 综上, $W=U^{\perp}$. □

(黄雪娥解答)