

习题 1.5 行列式的展开式和 Laplace 定理

1. (1) 求排列 $246 \cdots (2n)13 \cdots (2n-1)$ 的逆序数;

(2) 写出四阶行列式取正号且含有 $a_{23}a_{31}$ 的项.

解: (1) 排列 $246 \cdots (2n)13 \cdots (2n-1)$ 的逆序数为 $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

(2) 含有 $a_{23}a_{31}$ 的项有 $a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$, $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$, 但只有 $a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$ 的符号取正号.

2. 设 A 是 n 阶方阵, B 是 m 阶方阵, C 是 $n \times m$ 阶矩阵, D 是 $m \times n$ 阶矩阵. 计算

$$\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C & A \\ B & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & A \\ B & D \end{vmatrix}.$$

解: 由 Laplace 定理, 将行列式按第 1 到 n 行展开, 得

$$\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = (-1)^{(1+2+\cdots+n)+(1+2+\cdots+n)} \det A \det B = \det A \det B;$$

$$\begin{vmatrix} C & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{(1+2+\cdots+n)+(m+1+m+2+\cdots+m+n)} \det A \det B = (-1)^{mn} \det A \det B;$$

$$\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & D \end{vmatrix} = (-1)^{(1+2+\cdots+n)+(m+1+m+2+\cdots+m+n)} \det A \det B = (-1)^{mn} \det A \det B.$$

(李小凤解答)