§5.7 有理系数和整系数多项式

习题

1. 求下列多项式的有理根.

(1) $f(x)=x^3-6x^2+15x-14$;

(2) $f(x)=4x^4-7x^2-5x-1$.

解 设既约分数 $\frac{q}{p}$ 是整系数多项式 $f(x)$ 的有理根，则 p 必是 $f(x)$ 首项系数的因数， q 必是 $f(x)$ 常数项的因数. 且若 c 是整系数多项式的整数根，必有 $\frac{f(1)}{c-1}$, $\frac{f(-1)}{c+1}$ 均为整数. 因此,

(1) 可能的有理根是 ±1, ±2, ±7, ±14. 再由 $\frac{f(1)}{c-1}$, $\frac{f(-1)}{c+1}$ 不全为整数，排除 ±1, -2, ±7, ±14, 最后用综合除法可知 2 是唯一的有理根.

(2) 可能的有理根是 ±1, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{4}$. 令 $y=4x$, 则 $f(x)=4x^4-7x^2-5x-1=\frac{1}{64}(y^4-28y^2-80y-64)=\frac{1}{64}g(y)$. 结合 $f(x)$ 可知 $g(y)$ 可能的有理根是 ±1, ±2, ±4. $-\frac{1}{2}$. 由 $\frac{f(1)}{c-1}$, $\frac{f(-1)}{c+1}$ 不全为整数，排除 ±1, 2, ±4, 最后用综合除法得 $g(y)$ 的有理根是 -2, 从而 $f(x)$ 的有理根是 $-\frac{1}{2}$.

2. 写一个次数最小的首项系数为 1 的有理系数多项式，使得它含以下根：

$$1+\sqrt{2}, 3-i.$$

解 因 $g(x)=(x-(1+\sqrt{2}))(x-(1-\sqrt{2}))$ 和 $h(x)=(x-(3-i))(x-(3+i))$ 分别是以 $1+\sqrt{2}$, $3-i$ 为根的有理数域上的不可约多项式，且 $(g(x),h(x))=1$. 因此若 $f(x)$ 是有根 $1+\sqrt{2}$, $3-i$ 中次数最小的有理系数首一多项式，则

$$f(x)=g(x)h(x)=x^4-8x^3+21x^2-14x-10.$$

3. 下列多项式在 $\mathbb{Q}$ 上是否可约？

(1) $x^4-2x^3+8x-10$;

(2) x^6+x^3+1.

解 (1) 记 $f(x)=x^4-2x^3+8x-10$. 考虑素数 $p=2$, 用 Eisenstein 判别法可知 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

(2) 记 $f(x)=x^6+x^3+1$, 作代换 $x=y+1$, 得

$$f(x)=(y+1)^6+(y+1)^3+1=y^6+6y^5+15y^4+21y^3+18y^2+9y+3.$$

记

$$g(y)=y^6+6y^5+15y^4+21y^3+18y^2+9y+3.$$

取 $p=3$, 用 Eisenstein 判别法可知 $g(y)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约，所以 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

都是奇

数，则 $f(x)$ 没有整数根.

证明 (法一) 设 $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$. 假设 $f(x)$ 有整数根 c, 则必有 $c|a_0$. 又因为 $f(0)=a_0$ 是奇数，所以 c 是奇数，从而 $c-1$ 是偶数. 由已知条件 $f(1)$ 是奇数，故 $c-1\nmid f(1)$, 即 $\frac{f(1)}{c-1}\notin\mathbb{Z}$, 矛盾. 因此 $f(x)$ 没有整数根.

(法二) 设 $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$. 因为 $f(0)$ 是奇数，所以 a_0 是奇数. 又从 $f(1)$ 是奇数可知 $1+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0$ 是奇数. 设 c 是 $f(x)$ 任一整数根，则

$$c^n+a_{n-1}c^{n-1}+\cdots+a_1c+a_0=0.$$

其

中 b 是整数，得

$$(2b+1)^n+a_{n-1}(2b+1)^{n-1}+\cdots+a_1(2b+1)+a_0=0.$$

用二项式定理展开后将看到上式左边等于一个偶数加上 $1+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0$, 因此必是奇数，也不可能等于 0, 故任何整数都不是 $f(x)$ 的根.

(法三) 由已知设 $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$. 若其存在整数根 c, 则 c 必为 a_0 的因数，且可设 $f(x)=(x-c)h(x)$. 因 $x-c$ 是本原多项式， $f(x)$ 是整系数多项式，因此 $h(x)$ 是整系数多项式. 又 $a_0=f(0)$ 是奇数，因此 c 是奇数，$1-c$ 是偶数，进而 $f(1)=(1-c)h(1)$ 是偶数，与已知 $f(1)$ 是奇数矛盾.