§3.1 线性空间

1. 判断下列集合对于运算是否构成 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.

(1) 区间 $[0,1]$ 上单调递增的实连续函数全体对于函数的加法和数乘;

(2) 区间 $[0,1]$ 上满足 $f(1)=0$ 的实连续函数全体对于函数的加法和数乘;

(3) 平面上的全体向量，对于向量的加法和如下定义的数乘：

$$c \circ \alpha = \alpha;$$

(4) 平面上的全体向量，对于向量的加法和如下定义的数乘：

$$c \circ \alpha = 0.$$

(5) 数域 $\mathbb{R}$ 上所有行列式为 1 的 n 阶方阵全体，对于矩阵的加法和数乘;

(6) 与给定的实 n 阶方阵 A 可交换的实 n 阶矩阵全体对于矩阵的加法和数乘.

解 (1) 否; (2) 是; (3) 否; (4) 否; (5) 否; (6) 是;

2. 在 $\mathbb{R}^+ = \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$.

(1) 如果定义加法和数乘为数的加法和数的乘法，问 $\mathbb{R}^+$ 是否为 $\mathbb{R}$ 上的线性空间？

(2) 如果定义加法和数乘为

$$a \oplus b = ab, \quad k \odot \alpha = a^k;$$

问 $\mathbb{R}^+$ 是否为 $\mathbb{R}$ 上的线性空间？

解 (1) $\mathbb{R}^+$ 不是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间 (没有零元);

(2) $\mathbb{R}^+$ 是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，证明如下：

首先， $1 \in \mathbb{R}^+$, 即 $\mathbb{R}^+$ 非空;

其次，对任何 $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, $k, l \in \mathbb{R}$, 都有

$$a \oplus b = ab \in \mathbb{R}^+, \quad k \odot \alpha = a^k \in \mathbb{R}^+;$$

所以加法和数乘都封闭;

(1) $a \oplus b = ab = ba = b \oplus a = ab$, 即满足加法交换律;

(2) $(a \oplus b) \oplus c = (ab)c = a(bc) = a \oplus (b \oplus c)$, 即满足结合律;

(3) 对任何 $a \in \mathbb{R}^+$, 有 $a \oplus 1 = a1 = a$, 即存在加法零元;

(4) 对任何 $a \in \mathbb{R}^+$, 有 $a^{-1} \in \mathbb{R}^+$ 且 $a \oplus a^{-1} = aa^{-1} = 1$, 即存在加法负元;

(5) $k \odot (a \oplus b) = (ab)^k = a^k b^k = (k \odot a) \oplus (k \odot b)$, 即满足数乘和加法协调;

(6) $(k+l) \odot a = a^{k+l} = a^k a^l = (k \odot a) \oplus (l \odot a)$, 即满足数的加法和数乘的协调;

(7) $(kl) \odot a = a^{kl} = (a^l)^k = k \odot (l \odot a)$, 即满足数的乘法与数乘的协调;

(8) $1 \odot a = a^1 = a$, 即满足数 1 与数乘的协调.

综上所述, $\mathbb{R}^+$ 是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间. $\square$

3. 在 $V = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a,b) | a, b \in \mathbb{R}\}$ 中.

(1) 定义加法和数乘为

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d), \quad k \circ (a,b) = (a,b).$$

问 V 是否为 $\mathbb{R}$ 上的线性空间?

(2) 定义加法和数乘为

$$(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d+ac), \quad k \odot (a,b) = (ka, kb + \frac{1}{2}k(k-1)a^2).$$

问 V 是否为 $\mathbb{R}$ 上的线性空间?

解 (1) V 不是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间. 因 $(1,0) \in V$, $(1,0) + (1,0) = (2,0)$, 但 $2 \circ (1,0) = (1,0) \neq (2,0)$, 即不满足数的加法与数乘的协调.

(2) V 是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, 证明如下:

首先, $(0,0) \in V$, 故 V 非空;

其次, 对任何 $a, b, c, d, m, n \in \mathbb{R}$, $k, l \in \mathbb{R}$, 都有

$$(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d+ac) \in V, \ k \odot (a,b) = (ka, kb + \frac{1}{2}k(k-1)a^2) \in V.$$

所以加法和数乘都封闭;

(1) $(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d+ac) = (c+a, d+b+ca) = (c,d) \oplus (a,b)$, 即满足加法交换律;

(2) $((a,b) \oplus (c,d)) \oplus (m,n) = (a+c+m, b+d+ac+n+am+cm)$,

而 $(a,b) \oplus ((c,d) \oplus (m,n)) = (a+c+m, b+d+n+cm+ac+am)$,

所以 $((a,b) \oplus (c,d)) \oplus (m,n) = (a,b) \oplus ((c,d) \oplus (m,n))$, 即满足加法结合律;

(3) $(a,b) \oplus (0,0) = (a,b)$, 即存在加法零元;

(4) $(a,b) \oplus (-a, a^2-b) = (0,0)$, 即存在加法负元;

(5) $k \odot ((a,b) \oplus (c,d)) = (k(a+c), k(b+d+ac) + \frac{1}{2}k(k-1)(a+c)^2)$,

而 $(k \odot (a,b)) \oplus (k \odot (c,d)) = (ka+kc, kb+kd+\frac{1}{2}k(k-1)a^2+\frac{1}{2}k(k-1)c^2+k^2ac) = (k(a+c), k(b+d)+\frac{1}{2}k(k-1)(a^2+c^2+2ac)+kac) = k \odot ((a,b) \oplus (c,d))$, 即满足数乘和加法协调;

(6) $(k+l) \odot (a,b) = ((k+l)a, (k+l)b + \frac{1}{2}(k+l)(k+l-1)a^2) = (ka, kb + \frac{1}{2}k(k-1)a^2) \oplus (la, lb+\frac{1}{2}l(l-1)a^2) = (k \odot a) \oplus (l \odot a)$, 即满足数的加法和数乘的协调;

(7) $(kl) \odot (a,b) = (kla, klb + \frac{1}{2}kl(kl-1)a^2)$, 而 $k \odot (l \odot (a,b)) = k \odot (la, lb + \frac{1}{2}l(l-1)a^2) = (kla, k(lb+\frac{1}{2}l(l-1)a^2) + \frac{1}{2}k(k-1)(la)^2) = (kla, klb+\frac{1}{2}kl(kl-1)a^2)$, 所以 $(kl) \odot (a,b) = k \odot (l \odot (a,b))$, 即满足数的乘法与数乘的协调;

(8) $1 \odot (a,b) = (a,b)$, 即满足数 1 与数乘的协调.

综上所述, V 是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.

4. 求证:

(1) $c(\alpha - \beta) = c\alpha - c\beta$;

(2) $(c-d)\alpha = c\alpha - d\alpha$.

证明

(1) $c(\alpha-\beta) = c[\alpha+(-\beta)] = c\alpha+c(-\beta) = c\alpha+(-c)\beta = c\alpha+[-(c\beta)] = c\alpha-c\beta$;

(2) $(c-d)\alpha = [c+(-d)]\alpha = c\alpha+(-d)\alpha = c\alpha+[-(d\alpha)] = c\alpha - d\alpha$.□

(万琴解答)