第六章　特征值

§6.1 特征值和特征向量

思考 一个非零向量是否可以属于两个不同的特征值？

解 一个非零向量不可属于两个不同的特征值. 事实上，设 A 是 n 阶方阵，$0 \neq X \in F^n$，$AX = \lambda X$，$AX = \mu X$，则 $(\lambda - \mu)X = 0$. 因为 $X \neq 0$，所以 $\lambda = \mu$.

思考 n 阶零矩阵的特征值和特征向量是什么？ n 阶单位矩阵的特征值和特征向量是什么？

解 零是 n 阶零矩阵的 n 重特征值，任意 n 维非零向量都是 n 阶零矩阵的属于特征值零的特征向量，因为 $0X = 0X$. 1 是 n 阶单位矩阵的 n 重特征值，任意 n 维非零向量都是 n 阶单位矩阵的属于特征值 1 的特征向量，因为 $EX = 1X$.

习题

1. 求矩阵 A 的特征值和特征向量，其中

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix},$$

其中 $b \neq 0$.

解 (1) 矩阵 A 的特征多项式为

$$f_A(\lambda) = \det(\lambda E_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 & 1 \\ -2 & \lambda - 2 & 1 \\ -2 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

解得 A 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

对特征值 $\lambda_1=1$, 解线性方程组 $(E_3-A)X=0$, 即解线性方程组

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

得到基础解系 $X_1=(2,1,0)^T$.

同理, 对特征值 $\lambda_2=\lambda_3=2$, 解线性方程组 $(2E_3-A)X=0$, 即解线性方程组

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

得到基础解系 $X_2=(-\frac{1}{2},\frac{3}{2},1)^T$.

故综上所述, 属于特征值 $\lambda_1=1$ 的特征向量为 c_1X_1, 其中 c_1 为 F 中任意非零数. 属于特征值 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的特征向量为 c_2X_2, 其中 c_2 为 F 中非零数.

(2) 矩阵 A 的特征多项式为 $f_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-a)(\lambda-c)$. 分五种情况讨论.

第一种情况: $a=c=1$. 这时 $f_A(\lambda)=(\lambda-1)^3$, A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$. 解线性方程组 $(E_3-A)X=0$, 即解线性方程组 $-bx_3=0$. 其基础解系为 $X_1=(1,0,0)^T$, $X_2=(0,1,0)^T$.

所以, 属于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$ 的特征向量为 $c_1(1,0,0)^T+c_2(0,1,0)^T$, 其中 c_1,c_2 为 F 中不全为零的数.

第二种情况: $a=1$ 且 $c\neq 1$. 这时 $f_A(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-c)$, A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=c$.

对于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$, 解线性方程组 $(E_3-A)X=0$, 即解线性方程组

$$\begin{cases} -bx_3=0 \\ (1-c)x_3=0 \end{cases}.$$

其基础解系为 $X_1=(1,0,0)^T$, $X_2=(0,1,0)^T$.

对于特征值 $\lambda_3=c$, 解线性方程组 $(cE_3-A)X=0$, 即解线性方程组

$$\begin{cases} (c-1)x_1=0 \\ (c-1)x_2-bx_3=0 \end{cases}.$$

其基础解系为 $X_3=(0,b,c-1)^T$.

所以，属于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量为 $c_1(1,0,0)^T+c_2(0,1,0)^T$，其中 c_1,c_2 为 F 中不全为零的数. 属于特征值 $\lambda_3=c$ 的特征向量为 $c_3(0,b,c-1)^T$，其中 c_3 为 F 中非零数.

第三种情况：$a\neq 1$ 且 $c=1$. 这时 $f_A(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-a)$，$A$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=a$.

对于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$，解线性方程组 $(E_3-A)X=0$，即解线性方程组 $(1-a)x_2-bx_3=0$. 其基础解系为 $X_1=(1,0,0)^T$，$X_2=(0,b,1-a)^T$.

对于特征值 $\lambda_3=a$，解线性方程组 $(aE_3-A)X=0$，即解线性方程组

$$\begin{cases}(a-1)x_1=0\\ -bx_3=0\\ (a-1)x_3=0\end{cases}.$$

其基础解系为 $X_3=(0,1,0)^T$.

所以，属于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量为 $c_1(1,0,0)^T+c_2(0,b,1-a)^T$，其中 c_1,c_2 为 F 中不全为零的数. 属于特征值 $\lambda_3=a$ 的特征向量为 $c_3(0,1,0)^T$，其中 c_3 为 F 中非零数.

第四种情况：$a=c\neq 1$. 这时 $f_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-a)^2$，$A$ 的特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=\lambda_3=a$.

对于特征值 $\lambda_1=1$，解线性方程组 $(E_3-A)X=0$，即解线性方程组

$$\begin{cases}(1-a)x_2-bx_3=0\\ (1-a)x_3=0\end{cases}.$$

其基础解系为 $X_1=(1,0,0)^T$.

对于特征值 $\lambda_3=a$，解线性方程组 $(aE_3-A)X=0$，即解线性方程组

$$\begin{cases}(a-1)x_1=0\\ -bx_3=0\end{cases}.$$

其基础解系为 $X_2=(0,1,0)^T$.

所以，属于特征值 $\lambda_1=1$ 的特征向量为 $c_1(1,0,0)^T$，其中 c_1 为 F 中非零数. 属于特征值 $\lambda_2=\lambda_3=a$ 的特征向量为 $c_2(0,1,0)^T$，其中 c_2 为 F 中非零数.

第五种情况：$a,c,1$ 两两不同. 这时 $f_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-a)(\lambda-c)$，$A$ 的特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=a$，$\lambda_3=c$.

对于特征值 $\lambda_1=1$，解线性方程组 $(E_3-A)X=0$，即解线性方程组

$$\begin{cases}(1-a)x_2-bx_3=0\\ (1-c)x_3=0\end{cases}.$$

其基础解系为 $X_1=(1,0,0)^T$.

对于特征值 $\lambda_2=a$, 解线性方程组 $(aE_3-A)X=0$, 即解线性方程组

$$\begin{cases}(a-1)x_1=0\\-bx_3=0\\(a-c)x_3=0\end{cases}.$$

其基础解系为 $X_2=(0,1,0)^T$.

对于特征值 $\lambda_3=c$, 解线性方程组 $(cE_3-A)X=0$, 即解线性方程组

$$\begin{cases}(c-1)x_1=0\\(c-a)x_2-bx_3=0\end{cases}.$$

其基础解系为 $X_3=(0,b,c-a)^T$.

所以, 属于特征值 $\lambda_1=1$ 的特征向量为 $c_1(1,0,0)^T$, 其中 c_1 为 F 中非零数. 属于特征值 $\lambda_2=a$ 的特征向量为 $c_2(0,1,0)^T$, 其中 c_2 为 F 中非零数. 属于特征值 $\lambda_3=c$ 的特征向量为 $c_3(0,b,c-a)^T$, 其中 c_3 为 F 中非零数.

2. 设 X 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量, Y 是 A 的属于特征值 μ 的特征向量. 若 $\lambda\neq\mu$, 求证 $X+Y$ 不是 A 的特征向量.

证明 反证法. 若 $X+Y$ 是 A 特征向量, 必存在 $\nu\in F$ 为 A 的特征值, 则 $A(X+Y)=\nu(X+Y)$, 进而 $\lambda X+\mu Y=AX+AY=\nu X+\nu Y$, 所以 $(\lambda-\nu)X+(\mu-\nu)Y=0$. 因为 X,Y 是 A 的属于不同特征值的特征向量, 故 X,Y 线性无关. 因此 $\lambda-\nu=0$, $\mu-\nu=0$, 得到 $\lambda=\mu$, 矛盾.

3. 设三阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1$, $\lambda_3=4$.

(1) 求 $\det A$ 和 $\mathrm{tr}A$.

(2) 已知 $B=A-3A^2$, 求 B 的特征值, $\det B$ 和 $\mathrm{tr}B$.

解 (1) 由推论 6.1.1, 有 $\det A=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=4$, $\mathrm{tr}A=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2$.

(2) 因为 $B=A-3A^2$, 因此 B 的特征值为 $\lambda_1-3\lambda_1^2$, $\lambda_2-3\lambda_2^2$, $\lambda_3-3\lambda_3^2$, 即 $-4,-4,-44$ 是 B 的特征值. 故 $\det B=-704, \mathrm{tr}B=-52$.

4. 设 A 是数域 F 上 n 阶可逆矩阵, 设 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$. 证明:

(1) λ_1^{-1}, λ_2^{-1}, $\cdots,\lambda_n^{-1}$ 是 A^{-1} 的全部特征值;

(2) $(\det A)\lambda_1^{-1},(\det A)\lambda_2^{-1},\cdots,(\det A)\lambda_n^{-1}$ 是 A^* 的全部特征值.

证明 (1) 因为 A 可逆，所以 $\lambda_i \neq 0(i = 1,2,\cdots,n)$. 由题意知，$A$ 有 n 个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，所以 A 相似于上三角阵，即存在可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

因为可逆上三角阵的逆矩阵可逆，且对角元为原来对角元的逆，所以将上式两边同时取逆，得

$$P^{-1}A^{-1}P = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2^{-1} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}$$

故 $\lambda_1^{-1},\lambda_2^{-1},\cdots,\lambda_n^{-1}$ 是 A^{-1} 的全部特征值.

(2) A 可逆，故 $A^* = (\det A)A^{-1}$，则

$$P^{-1}A^*P = P^{-1}(\det A)A^{-1}P = (\det A)P^{-1}A^{-1}P = \begin{pmatrix} (\det A)\lambda_1^{-1} & * & \cdots & * \\ 0 & (\det A)\lambda_2^{-1} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (\det A)\lambda_n^{-1} \end{pmatrix}$$

因此 $(\det A)\lambda_1^{-1},(\det A)\lambda_2^{-1},\cdots,(\det A)\lambda_n^{-1}$ 是 A^* 的全部特征值.

5. 已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + (a+2)x_2 + (a+1)x_3 = a+3 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 3 \end{cases}$$

有无穷多解，A 是三阶方阵，$\alpha_1 = (1,a,0)^T$, $\alpha_2 = (-a,1,0)^T$, $\alpha_3 = (0,0,a)^T$ 为 A 的属于特征值 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -1$ 的特征向量.

(1) 求 A;

(2) 求 $\det(A^* + 2E)$.

解 (1) 已知该方程组有无穷多解，则其系数矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a+2 & a+1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = 0.$$

解得， $a=1$. 故 $\alpha_1=(1,1,0)^T$, $\alpha_2=(-1,1,0)^T$, $\alpha_3=(0,0,1)^T$ 是 A 的属于特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=-2,\lambda_3=-1$ 的特征向量. 显然它们线性无关. 令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$. 因此 $AP=P\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$, 从而

$$A=P\mathrm{diag}(1,-2,-1)P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&0\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

(2) 因为 A 的特征值为 $1,-2,-1$, 所以 $\det A=2$, 根据上题结论知 A^* 的特征值是 $2,-1,-2$. 从而 A^*+2E 的特征值为 $4,1,0$. 因此 $\det(A^*+2E)=0$.