## 习题 1.4 行列式

1. 设 $n$ 阶行列式 $\det A$ 的值为 $c$.

(1) 将 $\det A$ 的每个元素 $a_{ij}$ 换成 $(-1)^{i+j}a_{ij}$, 得到的行列式的值是多少？

(2) 将 $\det A$ 的每个元素 $a_{ij}$ 换成 $b^{i-j}a_{ij}$, $b \neq 0$, 得到的行列式的值是多少？

(3) 从 $\det A$ 的第二行开始每行加上它前面的一行, 同时第一行加上 $\det A$ 的第 $n$ 行, 得到的行列式的值是多少？

(4) 将 $\det A$ 的第一行移到最后一行, 其余各行依次保持原来次序向上移动, 得到的行列式的值是多少？

(5) 将 $\det A$ 的每第 $i$ 行移到第 $n-i+1$ 行, 得到的行列式的值是多少？

(6) 将 $\det A$ 的每第 $(i,j)$ 元素 $a_{ij}$ 换到第 $(n-i+1, n-j+1)$ 位置上, 得到的行列式的值是多少？

解: (1) 将第 $i$ 行提取公因数 $(-1)^i$, 再将第 $j$ 列提取公因数 $(-1)^j$, 则

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} (-1)^{1+1}a_{11} & (-1)^{1+2}a_{12} & \cdots & (-1)^{1+n}a_{1n} \\ (-1)^{2+1}a_{21} & (-1)^{2+2}a_{22} & \cdots & (-1)^{2+n}a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (-1)^{n+1}a_{n1} & (-1)^{n+2}a_{n2} & \cdots & (-1)^{n+n}a_{nn} \end{vmatrix} \\
= \quad & (-1)^{1+2+\cdots+n} \begin{vmatrix} -a_{11} & (-1)^2a_{12} & \cdots & (-1)^n a_{1n} \\ -a_{21} & (-1)^2a_{22} & \cdots & (-1)^n a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & (-1)^2a_{n2} & \cdots & (-1)^n a_{nn} \end{vmatrix} \\
= \quad & (-1)^{1+2+\cdots+n}(-1)^{1+2+\cdots+n} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
= \quad & c.
\end{aligned}
$$

(2) 将第 $i$ 行提取公因数 $b^i$, 再将第 $j$ 列提取公因数 $b^{-j}$, 则

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} b^{1-1}a_{11} & b^{1-2}a_{12} & \cdots & b^{1-n}a_{1n} \\ b^{2-1}a_{21} & b^{2-2}a_{22} & \cdots & b^{2-n}a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{n-1}a_{n1} & b^{n-2}a_{n2} & \cdots & b^{n-n}a_{nn} \end{vmatrix} \\
= \quad & b^{1+2+\cdots+n} \begin{vmatrix} b^{-1}a_{11} & b^{-2}a_{12} & \cdots & b^{-n}a_{1n} \\ b^{-1}a_{21} & b^{-2}a_{22} & \cdots & b^{-n}a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{-1}a_{n1} & b^{-2}a_{n2} & \cdots & b^{-n}a_{nn} \end{vmatrix} \\
= \quad & b^{1+2+\cdots+n}b^{-(1+2+\cdots+n)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
= \quad & c.
\end{aligned}
$$

(3) 将行列式 $\det B$ 拆成两个行列式的和

$$\det B = \begin{vmatrix} a_{11}+a_{n1} & a_{12}+a_{n2} & \cdots & a_{1,n}+a_{nn} \\ a_{21}+a_{11} & a_{22}+a_{12} & \cdots & a_{2n}+a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}+a_{n-1,1} & a_{n2}+a_{n-1,2} & \cdots & a_{n,n}+a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{21}+a_{11} & a_{22}+a_{12} & \cdots & a_{2n}+a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}+a_{n-1,1} & a_{n2}+a_{n-1,2} & \cdots & a_{n,n}+a_{n-1,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ a_{21}+a_{11} & a_{22}+a_{12} & \cdots & a_{2n}+a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}+a_{n-1,1} & a_{n2}+a_{n-1,2} & \cdots & a_{n,n}+a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

将第 1 个行列式的第 1 行乘以 $-1$ 加到第 2 行，将新的第 2 行乘以 $-1$ 加到第 3 行，一直做到将新的第 $n-1$ 行乘以 $-1$ 加到第 $n$ 行. 再将上式第 2 个行列式的第 1 行乘以 $-1$ 加到第 $n$ 行，再将新的第 $n-1$ 行乘以 $-1$ 加到第 $n-2$ 行，如此一直做到将新的第 3 行乘以 $-1$ 加到第 2 行，得

$$\det B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

依次将第 2 个行列式的第 1 行和第 2 行互换，新的第 2 行和第 3 行互换，一直做下去，直到新的第 $n-1$ 行与第 $n$ 行互换，共互换 $n-1$ 次，故 $\det B = c + (-1)^{n-1}c$.

(4) 所求行列式

$$\det B = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n} \end{vmatrix}$$

依次将该行列式的第 $n$ 行和第 $n-1$ 行互换，再互换新的第 $n-1$ 行和第 $n-2$ 行，直至互换新的第 2 行和第 1 行，得原行列式，这个互换共经历了 $n-1$ 次. 故得 $\det B = (-1)^{n-1}c$.

(5) 所求行列式为

$$\det B = \begin{vmatrix} a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{1,n} \end{vmatrix}$$

从第一行开始依次互换相邻的两行，直至互换第 $n-1$ 行和第 $n$ 行，即将 $\det B$ 的第一行移到最后一行，其他行顺移到前 $n-1$ 行上，这个过程做了 $n-1$ 次行互换，得

$$\det B = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

再将此行列式的第一行开始依次互换相邻两行，直至互换第 $n-2$ 行和第 $n-1$ 行，共经过 $n-2$ 次行互

换，得

$$\det B=(-1)^{n-1}(-1)^{n-2}\begin{vmatrix} a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & \cdots & a_{n-2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

重复上述过程，得

$$\det B=(-1)^{n-1}(-1)^{n-2}\cdots(-1)^{1}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}c$$

(6) 所求行列式为

$$\det B=\begin{vmatrix} a_{n,n} & a_{n,n-1} & \cdots & a_{n,1} \\ a_{n-1,n} & a_{n-1,n-1} & \cdots & a_{n-1,1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{1,1} \end{vmatrix}$$

从第一行开始依次互换相邻的两行，直至互换第 $n-1$ 行和第 $n$ 行，即将 $\det B$ 的第一行移到最后一行，其他行顺移到前 $n-1$ 行上，这个过程做了 $n-1$ 次行互换，得

$$\det B=(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} a_{n-1,n} & a_{n-1,n-1} & \cdots & a_{n-1,1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{1,1} \\ a_{n,n} & a_{n,n-1} & \cdots & a_{n,1} \end{vmatrix}$$

再将此行列式的第一行开始依次互换相邻两行，直至互换第 $n-2$ 行和第 $n-1$ 行，共经过 $n-2$ 次行互换，得

$$\det B=(-1)^{n-1}(-1)^{n-2}\begin{vmatrix} a_{n-2,n} & a_{n-2,n-1} & \cdots & a_{n-2,1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{1,1} \\ a_{n-1,n} & a_{n-1,n-1} & \cdots & a_{n-1,1} \\ a_{n,n} & a_{n,n-1} & \cdots & a_{n,1} \end{vmatrix}$$

重复上述过程，得

$$\begin{aligned}\det B &= (-1)^{n-1}(-1)^{n-2}\cdots(-1)^{1}\begin{vmatrix} a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{1,1} \\ a_{2,n} & a_{2,n-1} & \cdots & a_{2,1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,n} & a_{n-1,n-1} & \cdots & a_{n-1,1} \\ a_{n,n} & a_{n,n-1} & \cdots & a_{n,1} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{1,1} \\ a_{2,n} & a_{2,n-1} & \cdots & a_{2,1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,n} & a_{n-1,n-1} & \cdots & a_{n-1,1} \\ a_{n,n} & a_{n,n-1} & \cdots & a_{n,1} \end{vmatrix}\end{aligned}$$

上述方法同样应用到列上，可得

$$\det B=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{n(n-1)}c=c.$$

2. 设 $\alpha,\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ 是四维列向量, $A=(\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$, $B=(\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$. 已知 $\det A=5$, $\det B=2$, 计算 $\det(A+B)$.

解: 由 $A=(\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$, $B=(\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$. $\det A=5$, $\det B=2$, 知

$$\det(A+B)=\det(\alpha+\beta,2\gamma_2,2\gamma_3,2\gamma_4)=2^3\det(\alpha+\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)=8(\det A+\det B)=56.$$

3. 设 $\det A=\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & a_1 & & \\ c_2 & & a_2 & \\ c_3 & & & a_3 \end{vmatrix}$, 其中 $a_i\neq 0(i=0,1,2,3)$. 计算:

(1) $A_{11}+A_{21}+A_{31}+A_{41}$;

(2) $M_{11}+2M_{12}+3M_{13}+4M_{14}$.

解: (1) (法一) 因为 $A_{11}=(-1)^{1+1}a_1a_2a_3$, $A_{21}=(-1)^{2+1}b_1a_2a_3$, $A_{31}=(-1)^1a_1b_2a_3$, $A_{41}=(-1)^1a_1a_2b_3$, 所以

$$A_{11}+A_{21}+A_{31}+A_{41}=a_1a_2a_3-b_1a_2a_3-a_1b_2a_3-a_1a_2b_3.$$

(法二)

$$A_{11}+A_{21}+A_{31}+A_{41}=\begin{vmatrix} 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & a_1 & & \\ 1 & & a_2 & \\ 1 & & & a_3 \end{vmatrix}=1-\prod_{i=1}^{3}a_i\sum_{j=1}^{3}\frac{b_j}{a_j}.$$

(2) (法一) 因为 $M_{11}=a_1a_2a_3$, $M_{12}=c_1a_2a_3$, $M_{13}=-a_1c_2a_3$, $M_{14}=a_1a_2c_3$, 所以

$$M_{11}+2M_{12}+3M_{13}+4M_{14}=a_1a_2a_3+2c_1a_2a_3-3a_1c_2a_3+4a_1a_2c_3.$$

(法二)

$$M_{11}+2M_{12}+3M_{13}+4M_{14}=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ c_1 & a_1 & & \\ c_2 & & a_2 & \\ c_3 & & & a_3 \end{vmatrix}=1-\prod_{i=1}^{3}a_i\sum_{j=1}^{3}(-1)^j\frac{(j+1)c_j}{a_j}.$$

4. 计算下列行列式.

(1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & -5 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 0 & -E_{n-1} \\ -1 & 0 \end{vmatrix};$$

(3)

$$\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \cdots & & & \cdots & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \cdots & & & \cdots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}_{2n};$$

(4)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 4 & 8 & \cdots & 2^n \\ 3 & 9 & 27 & \cdots & 3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n^2 & n^3 & \cdots & n^n \end{vmatrix};$$

(5) 设 $y \neq z$.

$$\begin{vmatrix} x & y & \cdots & y \\ z & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z & z & \cdots & y \\ z & z & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

解：(1) 分别将第 1 行乘以 $-1$, $-2$ 和 $-3$ 加到第 2 行，第 3 行和第 4 行上，得

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & -4 & -5 & -4 \\ 0 & -7 & -4 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -4 & -5 & -4 \\ -7 & -4 & -5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -4 & -5 & -4 \\ -7 & -4 & -5 \end{vmatrix} \\ &= 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & -8 \\ -7 & 10 & -12 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & -8 \\ 10 & -12 \end{vmatrix} = 88. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 0 & -E_{n-1} \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & E_{n-1} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n+(n+1)}\det E_{n-1} = -1.$$

(3) (法一) 当 $a = 0$ 时，原式 $= (-1)^n b^{2n}$.
当 $a \neq 0$ 时，对 $i = 1, 2, \cdots, n$, 将第 $i$ 行乘以 $-\frac{b}{a}$ 加到第 $2n - i$ 行，得

$$\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \cdots & & & \cdots & \\ & & a & b & & \\ & & 0 & \frac{a^2-b^2}{a} & & \\ & \cdots & & & \cdots & \\ 0 & & & & & \frac{a^2-b^2}{a} \end{vmatrix} = (a^2 - b^2)^n.$$

(法二) 将 $\det A$ 按第 1 列展开，得

$$A_{2n} = \begin{vmatrix} a & 0 & & & & & 0 & b \\ 0 & a & & & & & b & 0 \\ & & \cdots & & & \cdots & & \\ & & & a & b & & & \\ & & & b & a & & & \\ & & \cdots & & & \cdots & & \\ 0 & b & & & & & a & 0 \\ b & 0 & & & & & 0 & a \end{vmatrix}_{2n}$$

$$= (-1)^{1+1}a\begin{vmatrix} a & & & & & b & 0 \\ & \cdots & & & \cdots & & \\ & & a & b & & & \\ & & b & a & & & \\ & \cdots & & & \cdots & & \\ b & & & & & a & 0 \\ 0 & & & & & 0 & a \end{vmatrix}_{2n-1} + (-1)^{2n+1}b\begin{vmatrix} 0 & & & & & 0 & b \\ a & & & & & b & 0 \\ & \cdots & & & \cdots & & \\ & & a & b & & & \\ & & b & a & & & \\ & \cdots & & & \cdots & & \\ b & & & & & a & 0 \end{vmatrix}_{2n-1}$$

再分别按两个矩阵的最后 1 列展开，得

$$\begin{aligned} A_{2n} &= (-1)^{2n-1+1}a^2\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \cdots & & & \cdots & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \cdots & & & \cdots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}_{2n-2} - (-1)^{2n-1+1}b^2\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \cdots & & & \cdots & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \cdots & & & \cdots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}_{2n-2} \\ &= (a^2-b^2)A_{2n-2} = \cdots = (a^2-b^2)^n. \end{aligned}$$

(法三) 对第 1 行和第 $2n$ 行用 Laplace 定理，得

$$\begin{aligned} A_{2n} &= A\begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 1 & 2n \end{bmatrix}\widehat{A}\begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 1 & 2n \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \cdots & & & \cdots & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \cdots & & & \cdots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}_{2n-2} \\ &= (a^2-b^2)A_{2n-2} = \cdots = (a^2-b^2)^n. \end{aligned}$$

(4) 记原式为 $A_n$. 将其第 $i$ 列乘以 $-n$ 加到第 $i+1$ 列 $(i=n-1,n-2,\cdots,1)$, 得

$$\begin{aligned} A_n &= \begin{vmatrix} 1 & 1-n & 1-n & \cdots & 1-n \\ 2 & 2^2-2n & 2^3-2^2n & \cdots & 2^n-2^{n-1}n \\ 3 & 3^2-3n & 3^3-3^2n & \cdots & 3^n-3^{n-1}n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & (n-1)^2-(n-1)n & (n-1)^3-(n-1)^2n & \cdots & (n-1)^n-(n-1)^{n-1}n \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}_n \\ &= (-1)^{n+1}n(1-n)(2-n)\cdots 1\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 4 & 8 & \cdots & 2^{n-1} \\ 3 & 9 & 27 & \cdots & 3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & (n-1)^2 & (n-1)^3 & \cdots & (n-1)^{n-1} \end{vmatrix}_{n-1} \\ &= n!D_{n-1} = \cdots = \prod_{i=1}^n i!. \end{aligned}$$

(5)

$$D_n = \begin{vmatrix} x & y & \cdots & y & 0+y \\ z & x & \cdots & y & 0+y \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ z & z & \cdots & x & 0+y \\ z & z & \cdots & y & (x-y)+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & \cdots & y & 0 \\ z & x & \cdots & y & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ z & z & \cdots & x & 0 \\ z & z & \cdots & y & x-y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & \cdots & y & y \\ z & x & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ z & z & \cdots & x & y \\ z & z & \cdots & y & y \end{vmatrix}$$

$$= (x-y)D_{n-1} + y \begin{vmatrix} x-z & y-z & \cdots & y-z & 1 \\ 0 & x-z & \cdots & y-z & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & x-z & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x-y)D_{n-1} + y(x-z)^{n-1}.$$

注意到矩阵转置的行列式值不变，同理有： $D_n = (x-z)D_{n-1} + z(x-y)^{n-1}$.

把 $D_n$ 和 $D_{n-1}$ 当做未定元，联立两个线性方程组

$$\begin{cases} D_n + (y-x)D_{n-1} = y(x-z)^{n-1} \\ D_n + (z-x)D_{n-1} = z(x-y)^{n-1} \end{cases}$$

则 $D_n = \dfrac{\begin{vmatrix} y(x-z)^{n-1} & y-x \\ z(x-y)^{n-1} & z-x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & y-x \\ 1 & z-x \end{vmatrix}} = \frac{z(x-y)^n - y(x-z)^n}{z-y}$. 这里利用了 $y \neq z$.

5. 证明：奇数阶反对称矩阵的行列式为零.

证明：因为 $A = -A^T$, 所以 $\det A = \det(-A^T) = (-1)^n \det A^T = (-1)^n \det A$. 又因 $n$ 为奇数, 所以 $\det A = -\det A$, 即 $\det A = 0$.

(李小凤解答)