§5.2 整除

思考 在 $F[x]$ 中，是否 $2|3$? 是否 $f(x)|0$? 什么情况下 $0|f(x)$? 什么情况下 $f(x)|1$?

解 在 $F[x]$ 中，总有 $2|3$. 因为总存在 $\frac{3}{2}$, 使得 $2\cdot\frac{3}{2}=3$.
总有 $f(x)|0$. 因为总存在 $0\in F[x]$, 使得 $0\cdot f(x)=0$.
当且仅当 $f(x)=0$ 时， $0|f(x)$.
当且仅当 $\deg f(x)=0$ 时， $f(x)|1$.

思考(1) 设 $f(x)\neq 0$, $g(x)|f(x)$, 则 $\deg f(x)\geq \deg g(x)$, 且等号成立的充分必要条件是 $f(x),g(x)$ 相伴.
(2) 若 $\deg f(x)<\deg g(x)$ 且 $g(x)|f(x)$, 则 $f(x)=0$.

解 (1) 因为 $g(x)|f(x)$, 所以存在 $h(x)$, 使得 $f(x)=g(x)h(x)$. 故

$$\deg f(x)=\deg g(x)+\deg h(x)\geq \deg g(x).$$

等号成立的充分必要条件是 $\deg h(x)=0$, 即 $h(x)$ 是非零常数. 所以等号成立的充分必要条件是 $f(x),g(x)$ 相伴.
(2) 由 (1) 即得.

思考 整除与数域扩大无关否？即，设 F,K 是两个数域，且 $F\subseteq K$, $f(x),g(x)\in F[x]$. 若在 $F[x]$ 中 $g(x)|f(x)$, 在 $K[x]$ 中是否 $g(x)|f(x)$? 反之，若在 $K[x]$ 中 $g(x)|f(x)$, 在 $F[x]$ 中是否 $g(x)|f(x)$?

解 整除与数域扩大无关. 事实上，带余除法与数域扩大无关. 而 $g(x)|f(x)$ 的充分必要条件是 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式为零.

习题

1. 在什么条件下 $x|f(x)$?

解 $x|f(x)$ 的充分必要条件是 $f(x)$ 的常数项为零.

2. 设 $f_1(x)\neq 0$, $g_1(x)g_2(x)|f_1(x)f_2(x)$, 且 $f_1(x)|g_1(x)$, 则 $g_2(x)|f_2(x)$.

证明 因为 $f_1(x)|g_1(x)$, $g_1(x)g_2(x)|f_1(x)f_2(x)$, 故存在多项式 $u(x)$, $v(x)$ 使得 $g_1(x)=u(x)f_1(x)$, $f_1(x)f_2(x)=v(x)g_1(x)g_2(x)$, 因此 $f_1(x)f_2(x)=u(x)v(x)f_1(x)g_2(x)$. 又因为 $f_1(x)\neq 0$, 由消去律即得 $f_2(x)=u(x)v(x)g_2(x)$, 故 $g_2(x)|f_2(x)$.

3. 求 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的商式和余式.

(1) $f(x)=4x^5+7x^3-2$, $g(x)=2x^3+x^2+3x-1$;

(2) $f(x)=x^4-4x^3-1$, $g(x)=x^2-2x+1$.

解 (1)

$$
\begin{array}{cccccc|l}
4x^5 & & +7x^3 & & & -2 & 2x^3+x^2+3x-1 \\
4x^5 & +2x^4 & +6x^3 & -2x^2 & & & 2x^2-x+1 \\
\hline
 & -2x^4 & +x^3 & +2x^2 & & -2 & \\
 & -2x^4 & -x^3 & -3x^2 & +x & & \\
\hline
 & & 2x^3 & +5x^2 & -x & -2 & \\
 & & 2x^3 & +x^2 & +3x & -1 & \\
\hline
 & & & 4x^2 & -4x & -1 &
\end{array}
$$

所以商式 $q(x)=x^2-x+1$, 余式 $r(x)=4x^2-4x-1$.

(2) (过程略) 商式 $q(x)=x^2-2x-5$, 余式 $r(x)=-8x+4$.

4. 当且仅当 a,b,c 满足什么条件时, x^2+ax+1 整除 x^4+bx^2+c?

解 (法一) 由带余除法, x^2+ax+1 除 x^4+bx^2+c 的商式为 $q(x)=x^2-ax+(b-1+a^2)$, 余式为 $r(x)=a(2-b-a^2)x+(c-b+1-a^2)$. 当且仅当 $r(x)=0$ 时 x^2+ax+1 整除 x^4+bx^2+c. 而 $r(x)=0$ 充要条件是 $a(2-b-a^2)=0$ 且 $(c-b+1-a^2)=0$, 即 $a=0$ 且 $c=b-1$ 或 $b=2-a^2$ 且 $c=1$.

(法二) 待定系数法. 设 $x^4+bx^2+c=(x^2+ax+1)(x^2+dx+e)$. 比较系数, 得到

$$
\begin{cases}
a+d=0 \\
ad+1+e=b \\
ae+d=0 \\
e=c
\end{cases}
$$

整理, 得

$$
\begin{cases}
a(c-1)=0 \\
1+c-a^2c=b
\end{cases}
$$

解得,

$$\begin{cases} a = 0 \\ 1 + c = b \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} c = 1 \\ 2 - a^2 = b \end{cases}$$

5. 证明: $x^d - 1$ 整除 $x^n - 1$ 的充分必要条件是 d 整除 n.

证明 充分性. 设 $n = dk$, k 为自然数, 则 $x^n - 1 = (x^d)^k - 1 = (x^d - 1)((x^d)^{k-1} + (x^d)^{k-2} + \cdots + x^d + 1) = (x^d - 1)(x^{dk-d} + x^{dk-2d} + \cdots + x^d + 1)$, 故 $x^d - 1$ 整除 $x^n - 1$.

必要性. 反证法. 若不然, 设 $n = dq + r$, $0 < r < d$, 则

$$x^n - 1 = x^n - x^r + x^r - 1 = x^r(x^{dq} - 1) + (x^r - 1).$$

由已知 $x^d - 1$ 整除 $x^n - 1$, 而 $x^d - 1$ 整除 $(x^{dq} - 1)$, 因此 $x^d - 1$ 整除 $(x^r - 1)$, 但这是不可能的, 因为 $x^d - 1$ 的次数 d 大于 $(x^r - 1)$ 的次数 r. 故命题得证.