§7.6 若当标准形进一步讨论　习题参考答案

1. 设有理数域上 $f_A(\lambda)$ 的所有不可约因子是 $\lambda^2+\lambda+1, \lambda^2-2$. 而 $\deg m_A(\lambda)=4$. 求证：在复数域上 A 必相似于对角阵.

证明：因为 $m_A(\lambda)|f_A(\lambda)$, 则 $\lambda^2+\lambda+1, \lambda^2-2$ 是 $m_A(\lambda)$ 的因子. 又 $\deg m_A(\lambda)=4$, 只能是 $m_A(\lambda)=(\lambda^2+\lambda+1)(\lambda^2-2)=(\lambda-\frac{-1+\sqrt{3}}{2})(\lambda-\frac{-1-\sqrt{3}}{2})(\lambda+\sqrt{2})(\lambda-\sqrt{2})$, 即 $m_A(\lambda)$ 在复数域上无重根，故 A 必相似于对角阵. □

2. 设 A 是非零 n 阶方阵满足 $A^2=A, r(A)=r<n$, 求 A 的 Jordan 标准形.

解：设 λ 为 A 的一特征值，则由 $A^2=A$, 知 λ 满足 $\lambda^2=\lambda$, 得 $\lambda=0$ 或 1, 且 $g(\lambda)=\lambda^2-\lambda$ 是 A 的一个零化多项式. 而 A 的极小多项式 $m_A(\lambda)$ 整除 A 的任意零化多项式，自然也整除 λ^2-1, 从而 $m_A(\lambda)$ 无重根，因此 A 必相似于对角元非 0 即 1 的对角阵 J. 又 $r(J)=r(A)=r<n$, 说明 1 对角元有 r 个，进而 0 对角元有 $n-r$ 个. 所以 A 的 Jordan 标准形为 $\mathrm{diag}(0,0,\cdots,0,1,1,\cdots,1)$, 对角线上有 $n-r$ 个 0.

3. 设 A 是复数域上 n 阶方阵满足 $A^2=E$, 求 A 的 Jordan 标准形.

解：设 λ 为 A 的一特征值，则由 $A^2=E$, 知 λ 满足 $\lambda^2=1$, 得 $\lambda=1$ 或 -1, 且 $g(\lambda)=\lambda^2-1$ 是 A 的一个零化多项式. 进而 A 的极小多项式 $m_A(\lambda)$ 无重根，故 A 必相似于对角阵. 设 1 是 A 的 $n-r$ 重根，-1 是 A 的 r 重根. 所以 A 的 Jordan 标准形为 $\mathrm{diag}(1,1,\cdots,1,-1,-1\cdots,-1)$, 其中对角线上有 $n-r$ 个 1.

4. n 阶矩阵 A 有一个特征值 1, 又 A 只有一个线性无关的特征向量，求 A 的 Jordan 标准形.

解：（法一）设 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m \end{pmatrix}$ 是 A 的 Jordan 标准形，J_i 是特征值为 λ_i 的 r_i 阶 Jordan 块，且 $\lambda_1=1$. 设 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, 记 $l_i=r_1+r_2+\cdots+r_i$ $(i=1,2,\cdots,m)$, 则 $A\alpha_{l_1}=\lambda_1\alpha_{l_1}$, $A\alpha_{l_2}=\lambda_2\alpha_{l_2}$, $\cdots$, $A\alpha_{l_m}=\lambda_k\alpha_{l_m}$. 即 α_{l_1}, α_{l_2}, $\cdots$, α_{l_m} 是 A 的线性无关的特征向量. 由已知，A 只有一个线性无关的特征向量，可得 $k=1$. 即 A 只有一个 Jordan 块. 故 A 相似于 $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

（法二）因为 A 只有一个特征值，故 A 的特征值为 $1(n)$ 重. 又每个特征值的几何重数即特征子空间的维数等于该特征值的 Jordan 块的个数. 由已知 A 只有一个线性无关特征向量，说明 1 的几何重数是 1, 从而对应于特征值 1 的 Jordan 标准形只含一个 Jordan 块，即 A 相似于 $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. 设 A 是奇异阵但不是幂零阵，则 A 相似于下列矩阵：

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

其中 B 是幂零阵，C 是非奇异阵.

证明：因为 A 是奇异阵，所以 0 是 A 的特征值，又因为 A 不是幂零阵，所以 A 有非零的特征值，从而 A 的 Jordan 标准形中有部分 Jordan 块的主对角线上的元素为 0, 又有部分 Jordan 块的主对角线上的元素非零. 施行相同的初等行列块置换变换可将主对角线上的元素为 0 的 Jordan 块移动到一起所组成的矩阵记为 B, 显然 B 是幂零阵且相似于 A; 再将其余的 Jordan 块组成的矩阵记为 C. 因为 C 中 Jordan 块的主对角线元素都不为 0, 故可逆. 从而 A 相似于 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$. □

6. 求证：n 阶方阵 A 的秩为 r 的充分必要条件是 A 的形如 λ^k 的初等因子恰有 $n-r$ 个.

证明：设 J 是 A 的 Jordan 标准形，则 A 相似与 J, 从而 $r(A)=r(J)$. 假如 J 的某个 Jordan 块是 r 阶矩阵且主对角线上的元素为 0, 则该块的秩等于 $r-1$; 若该块主对角线上的元素不为 0, 则该块的秩等于 r. 而块对角矩阵的秩等于每个对角块的秩的和，因此 A 的秩等于 r 的充分必要条件是 A 正好有 $n-r$ 个 Jordan 块其主对角线上的元素等于 0, 这样的 Jordan 块对应的初等因子组具有 λ^k 的形状 (k 可能不同). □

(黄雪娥解答)