第六章　特征值

§6.3 极小多项式

习题

1. 举例说明特征值相同的矩阵未必相似，极小多项式相同的矩阵未必相似.

解 特征值相同的矩阵未必相似. 如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

因为 $f_A(\lambda) = f_B(\lambda)$, 所以 A 和 B 的特征值相等. 与 A 相似的矩阵只能是 A 本身，所以 A 和 B 不相似.

极小多项式相同的矩阵未必相似. 如

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

易见 $m_A(\lambda) = m_B(\lambda) = (\lambda - 1)^2$. 但是 $r(A) \neq r(B)$, 所以 A 和 B 不相似.

2. 设 n 阶可逆阵 A 的极小多项式是 $m_A(\lambda) = \lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\lambda + a_m$. 求 A^{-1} 的极小多项式.

解 因为 A 可逆，所以 $a_m \neq 0$. 由于

$$m_A(A) = A^m + a_1A^{m-1} + \cdots + a_{m-1}A + a_mE = 0.$$

两边同时乘以 A^{-m}, 得

$$A^{-m} + \frac{a_{m-1}}{a_m}A^{-m+1} + \cdots + \frac{a_1}{a_m}A^{-1} + \frac{1}{a_m}E = 0.$$

故
$$\lambda^m+\frac{a_{m-1}}{a_m}\lambda^{-m+1}+\cdots+\frac{a_1}{a_m}\lambda+\frac{1}{a_m}$$
是 A^{-1} 的零化多项式．我们断言它恰为 A^{-1} 的极小多项式．若不然，存在次数低于 m 的多项式 $g(\lambda)=\lambda^k+b_1\lambda^{k-1}+\cdots+b_k$, 其中 $k<m$, 使得

$$g(A^{-1})=(A^{-1})^k+b_1(A^{-1})^{k-1}+\cdots+b_{k-1}A^{-1}+b_kE=0.$$

因为 A^{-1} 可逆知 $b_k\neq 0$. 两边同时乘以 A^k, 可得
$$\lambda^k+\frac{b_{k-1}}{b_k}\lambda^{k-1}+\cdots+\frac{b_1}{b_k}\lambda+\frac{1}{b_k}$$
是 A 的零化多项式．因为 $k<m$ 与 $m_A(\lambda)$ 是 A 的零化多项式矛盾．所以
$$m_{A^{-1}}(\lambda)=\lambda^m+\frac{a_{m-1}}{a_m}\lambda^{-m+1}+\cdots+\frac{a_1}{a_m}\lambda+\frac{1}{a_m}.$$

3. 证明：若 n 阶矩阵 A 可对角化，则 A 的极小多项式是
$$m_A(\lambda)=\prod_{i=1}^{t}(\lambda-\lambda_i),$$
其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t$ 是 A 的所有互异特征值.

证明 因为 A 可对角化，所以存在可逆阵 P, 使得 $P^{-1}AP=B$, 这里
$$B=\begin{pmatrix}\lambda_1E_{n_1}&&&\\&\lambda_2E_{n_2}&&\\&&\cdots&\\&&&\lambda_tE_{n_t}\end{pmatrix},$$
$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t$ 为 A 的所有互异特征值，且
$$f_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{n_t},$$
其中 n_i 是 λ_i 的代数重数．令
$$g(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_t).$$
我们断言则
$$(B-\lambda_1E)(B-\lambda_2E)\cdots(B-\lambda_tE)=0.$$

事实上，因为

$$(B-\lambda_i E)(B-\lambda_j E)=(B-\lambda_j E)(B-\lambda_i E),\quad i,j=1,2,\cdots,t.$$

对于任意 $i(i=1,2,\cdots,t)$,

$$(B-\lambda_i E)e_j=0,\quad n_1+n_2+\cdots+n_{i-1}+1\le j\le n_1+n_2+\cdots+n_{i-1}+n_i.$$

所以

$$(B-\lambda_1 E)(B-\lambda_2 E)\cdots(B-\lambda_t E)e_j=0,\quad j=1,2,\cdots,n.$$

所以

$$(B-\lambda_1 E)(B-\lambda_2 E)\cdots(B-\lambda_t E)=0.$$

这样

$$g(A)=(A-\lambda_1 E)(A-\lambda_2 E)\cdots(A-\lambda_t E)=P(B-\lambda_1 E)(B-\lambda_2 E)\cdots(B-\lambda_t E)P^{-1}=0,$$

故 $m_A(\lambda)|g(\lambda)$. 因为 $m_A(\lambda)$ 无重根，且 $m_A(\lambda)$ 与 $f_A(\lambda)$ 在不计重数下有相同的根，所以

$$m_A(\lambda)=g(\lambda)=\prod_{i=1}^{t}(\lambda-\lambda_i).$$

4. 证明： $m_A(\lambda)=m_{A^T}(\lambda)$.

证明 由等式 $m_A(A)=0$ 转置得 $m_A(A^T)=0$, 即 $m_A(x)$ 是 A^T 的零化多项式，因此 $m_{A^T}(x)|m_A(x)$. 同理 $m_A(x)|m_{A^T}(x)$. 又 $m_A(x),m_{A^T}(x)$ 均为首一多项式，所以 $m_A(x)=m_{A^T}(x)$.

5. 设 A,B 为 n 阶矩阵. 若 $(m_A(\lambda),m_B(\lambda))=1$. 求证： $f_A(B)$ 是可逆阵.

证明 首先我们证明

$$(m_B(\lambda),f_A(\lambda))=1.$$

否则, $m_B(\lambda)$ 与 $f_A(\lambda)$ 在 $\mathbb{C}$ 上有公共根 c. 因为 $f_A(\lambda)$ 与 $m_A(\lambda)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的根在不计重数条件下是相同的, 所以 c 是 $m_A(\lambda)$ 和 $m_B(\lambda)$ 的公共根, 与 $(m_A(\lambda),m_B(\lambda))=1$ 矛盾. 所以 $(m_B(\lambda),f_A(\lambda))=1$. 故存在 $u(\lambda)$, $v(\lambda)$, 使得

$$u(\lambda)f_A(\lambda)+v(\lambda)m_B(\lambda)=1.$$

用 B 带入上式两边的 λ, 因 $m_B(B)=0$, 故有 $u(B)f_A(B)=E$, 从而 $f_A(B)$ 可逆.