§5.9 对称多项式

习题

1. 设 $f(x_1,x_2,x_3)$ 是包含单项式 $x_1^3x_2$ 的项数最小的对称多项式，请写出 $f(x_1,x_2,x_3)$，并将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 用初等对称多项式表示.

解 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^3x_2+x_1^3x_3+x_2^3x_1+x_2^3x_3+x_3^3x_1+x_3^3x_2$.

$f(x_1,x_2,x_3)$ 是齐次对称多项式，次数为 4，按字典序排列法排列首项为 $x_1^3x_2$，指标组为 $(3,1,0)$. 故次数为 4，指标组比 $(3,1,0)$ 小的只可能是 $(2,2,0),(2,1,1)$，相应的单项式为 $\sigma_1^{2-2}\sigma_2^{2-0}\sigma_3^0=\sigma_2^2,\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^1=\sigma_1\sigma_3$. 于是我们可设 $f(x_1,x_2,x_3)=\sigma_1^2\sigma_2+a\sigma_2^2+b\sigma_1\sigma_3$. 分别用 $(1,1,1)$ 和 $(1,1,0)$ 替换上式中的 (x_1,x_2,x_3)，可得 $a=-2$, $b=-1$. 从而 $f(x_1,x_2,x_3)=\sigma_1^2\sigma_2-2\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_3$.

2. 用初等对称多项式表示下列对称多项式.

(1) $(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)$;

(2) $x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_1^2x_4^2+x_2^2x_3^2+x_2^2x_4^2+x_3^2x_4^2$.

解 (1) 记 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)$. 观察发现，此式按字典序排序的首项为 $x_1^2x_2$, 指标组为 $(2,1,0)$ 对应的单项式为 $\sigma_1\sigma_2$. 故次数为 3, 并且指标组比 $(2,1,0)$ 小的只有 $(1,1,1)$，其对应的单项式为 σ_3. 故可设 $f(x_1,x_2,x_3)=\sigma_1\sigma_2+a\sigma_3$, 用 $(1,1,1)$ 替换上式中的 (x_1,x_2,x_3), 得 $\sigma_1=\sigma_2=3,\sigma_3=1$, 进而有 $8=3\times3+a\times1$ 解得 $a=-1$. 故 $f(x_1,x_2,x_3)=\sigma_1\sigma_2-\sigma_3$.

(2) 记 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_1^2x_4^2+x_2^2x_3^2+x_2^2x_4^2+x_3^2x_4^2$. $x_1^2x_2^2$ 是该式按字典序排序得到的首项，且指标组为 $(2,2,0,0)$, 对应单项式为 $f(x_1,x_2,x_3)$, 则次数为 4, 且指标组比 $(2,2,0,0)$ 小的只有 $(2,1,1,0)$, $(1,1,1,1)$, 对应的单项式分别为 $\sigma_1\sigma_3$, σ_4. 故可设 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\sigma_2^2+a\sigma_1\sigma_3+b\sigma_4$, 分别用 $(1,1,1,1)$ 和 $(1,1,1,0)$ 替换上式中的 (x_1,x_2,x_3,x_4), 上式解得 $a=-2,b=2$. 故 $f(x_1,x_2,x_3)=\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3+2\sigma_4$.

3. 用 n 元初等对称多项式表示 n 元幂和对称多项式 s_1,s_2,s_3,s_4, 其中 $n\geq6$.

解 由 Newton 公式有

$$\begin{cases} s_1 - \sigma_1 & = 0 \\ s_2 - s_1\sigma_1 + 2\sigma_2 & = 0 \\ s_3 - s_2\sigma_1 + s_1\sigma_2 - 3\sigma_3 & = 0 \\ s_4 - s_3\sigma_1 + s_2\sigma_2 - s_1\sigma_3 + 4\sigma_4 & = 0 \end{cases}$$

解此方程组，我们可得

$$\begin{aligned} s_1 &= \sigma_1 \\ s_2 &= \sigma_1^2 - 2\sigma_2 \\ s_3 &= \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 \\ s_4 &= \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2^2 - 4\sigma_4. \end{aligned}$$

4. 用 n 元幂和对称多项式 $s_1, s_2, \cdots$ 表示 n 元初等对称多项式 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5$.

解 由 Newton 公式，有

$$\begin{cases} s_1 - \sigma_1 & = 0 \\ s_2 - s_1\sigma_1 + 2\sigma_2 & = 0 \\ s_3 - s_2\sigma_1 + s_1\sigma_2 - 3\sigma_3 & = 0 \\ s_4 - s_3\sigma_1 + s_2\sigma_2 - s_1\sigma_3 + 4\sigma_4 & = 0 \\ s_5 - s_4\sigma_1 + a_3\sigma_2 - s_2\sigma_3 + s_1\sigma_4 - 5\sigma_5 = 0 \end{cases}$$

解此方程组，

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= s_1 \\ \sigma_2 &= \tfrac{1}{2}(s_1^2 - s_2) \\ \sigma_3 &= \tfrac{1}{6}(s_1^3 - 3s_1s_2 + 2s_3) \\ \sigma_4 &= \tfrac{1}{4!}(s_1^4 - 6s_1^2s_2 + 3s_2^2 + 8s_1s_3 - 6s_4) \\ \sigma_5 &= \tfrac{1}{5!}(s_1^5 - 10s_1^3s_2 + 20s_1^2s_3 + 15s_1s_2^2 - 30s_1s_4 - 20s_2s_3 + 24s_5) \end{aligned} .$$

5. 设 $1 \le k \le n$. 求证：

(1)

$$\sigma_k = \frac{1}{k!}\begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{k-1} & s_{k-2} & s_{k-3} & \cdots & k-1 \\ s_k & s_{k-1} & s_{k-2} & \cdots & s_1 \end{vmatrix};$$

(2)

$$s_k = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2\sigma_2 & \sigma_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (k-1)\sigma_{k-1} & \sigma_{k-2} & \sigma_{k-3} & \cdots & 1 \\ k\sigma_k & \sigma_{k-1} & \sigma_{k-2} & \cdots & \sigma_1 \end{vmatrix}.$$

证明 (1) 由 Newton 公式得下列关于 σ_i 的线性方程组

$$\begin{cases} \sigma_1 & = s_1 \\ s_1\sigma_1 - 2\sigma_2 & = s_2 \\ s_2\sigma_1 - s_1\sigma_2 + 3\sigma_3 & = s_3 \\ \cdots\cdots\cdots & \\ s_{k-2}\sigma_1 - s_{k-3}\sigma_2 + \cdots + (-1)^{k-2}(k-1)\sigma_{k-1} & = s_{k-1} \\ s_{k-1}\sigma_1 - s_{k-2}\sigma_2 + \cdots + (-1)^{k-1}(k)\sigma_k & = s_k \end{cases}$$

该方程组系数行列式为

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ s_1 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ s_2 & -s_1 & 3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{k-2} & -s_{k-3} & s_{k-4} & \cdots & 0 \\ s_{k-1} & -s_{k-2} & s_{k-3} & \cdots & (-1)^{k-1}k \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}k! \neq 0.$$

又

$$A_k = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & s_1 \\ s_1 & -2 & 0 & \cdots & s_2 \\ s_2 & -s_1 & 3 & \cdots & s_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{k-2} & -s_{k-3} & s_{k-4} & \cdots & s_{k-1} \\ s_{k-1} & -s_{k-2} & s_{k-3} & \cdots & s_k \end{vmatrix},$$

将 A_k 的最后一列经 $k-1$ 次对换后换到第一列，再用 $(-1)^{i-2}$ 依次乘以第 i 列 $(i = 3, 4, \cdots, k)$, 得到

$$A_k = (-1)^{(k-1)+\frac{1}{2}(k-1)(k-2)} \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{k-1} & s_{k-2} & s_{k-3} & \cdots & k-1 \\ s_k & s_{k-1} & s_{k-2} & \cdots & s_1 \end{vmatrix}.$$

于是由 Cramer 法则知

$$\sigma_k = \frac{A_k}{A} = \frac{1}{k!}\begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{k-1} & s_{k-2} & s_{k-3} & \cdots & k-1 \\ s_k & s_{k-1} & s_{k-2} & \cdots & s_1 \end{vmatrix}.$$

(2) 由 Newton 公式得下列关于 s_i 的线性方程组

$$\begin{cases} s_1 & = \sigma_1 \\ s_2 - \sigma_1 s_1 & = 2\sigma_2 \\ s_3 - \sigma_1 s_2 + \sigma_2 s_1 & = 3\sigma_3 \\ \cdots\cdots\cdots & \\ s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \sigma_2 s_{k-2} + \cdots + (-1)^{k-1} s_1 \sigma_{k-1} & = (-1)^{k-1} k\sigma_k \end{cases}$$

该方程组系数行列式为

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\sigma_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \sigma_2 & -\sigma_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (-1)^{k-1}\sigma_{k-1} & (-1)^{k-2}\sigma_{k-2} & (-1)^{k-3}\sigma_{k-3} & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

又

$$A_k = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 1 & 0 & \cdots & -2\sigma_2 \\ \sigma_2 & -\sigma_1 & 1 & \cdots & -3\sigma_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (-1)^{k-1}\sigma_{k-1} & (-1)^{k-2}\sigma_{k-2} & (-1)^{k-3}\sigma_{k-3} & \cdots & (-1)^{k-1}k\sigma_k \end{vmatrix}$$

将 A_k 的最后一列经 $k-1$ 次对换后换到第一列，再用 -1 乘以偶数行和奇数列 (除第一列以外), 得到

$$A_k = (-1)^{2(k-1)}\begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2\sigma_2 & \sigma_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (k-1)\sigma_{k-1} & \sigma_{k-2} & \sigma_{k-3} & \cdots & 1 \\ k\sigma_k & \sigma_{k-1} & \sigma_{k-2} & \cdots & \sigma_1 \end{vmatrix}$$

于是由 Cramer 法则得

$$s_k = \frac{\Lambda_k}{A} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2\sigma_2 & \sigma_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (k-1)\sigma_{k-1} & \sigma_{k-2} & \sigma_{k-3} & \cdots & 1 \\ k\sigma_k & \sigma_{k-1} & \sigma_{k-2} & \cdots & \sigma_1 \end{vmatrix}.$$

6. 求一个 n 次多项式使 $s_2 = s_3 = \cdots s_n = 0$.

解 因为 $s_2 = s_3 = \cdots s_n = 0$, 根据 Newton 公式，得到

$$(-1)^{k-1}\sigma_1\sigma_{k-1} + (-1)^k k\sigma_k = 0.$$

所以

$$\sigma_k = \frac{1}{k}\sigma_1\sigma_{k-1}.$$

归纳得到

$$\sigma_k = \frac{1}{k!}\sigma_1^k.$$

所以，所求 n 次多项式为

$$f(x) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \frac{1}{2!}\sigma_1^2 x^{n-2} + \cdots + (-1)^k \frac{1}{k!}\sigma^k x^{n-k} + \cdots$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\sigma_1^{n-1}x + (-1)^n\frac{1}{n!}\sigma_1^n.$$

7. 设某个 6 次多项式满足 $s_1 = s_3 = 0$, 则

$$\frac{s_7}{7} = \frac{s_5}{5} \cdot \frac{s_2}{2}.$$

证明 因为 $s_1 = s_3 = 0$, 根据 Newton 公式得到

$$\sigma_1 = 0, s_2 + 2\sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0, s_5 - 5\sigma_5 = 0, s_7 + s_5\sigma_2 - s_2\sigma_5 = 0.$$

所以

$$\sigma_2 = -\frac{1}{2}s_2, \sigma_5 = \frac{1}{5}s_5, s_7 = s_2\sigma_5 - s_5\sigma_2,$$

即

$$s_7 = \frac{7}{10}s_1 s_5.$$

所以

$$\frac{s_7}{7} = \frac{s_5}{5} \cdot \frac{s_2}{2}.$$