习题 2.1　消元法

1. 已知方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

无解. 求 a.

解：系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{pmatrix}$, 增广矩阵 $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 3 \\ 1 & a & -2 & 0 \end{pmatrix}$, 对增广矩阵施行一系列行初等变换，化为行阶梯形

$$\overline{A} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & a-2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & 0 & a^2-2a-3 & a-3 \end{pmatrix}.$$

方程组无解，当且仅当 $r(A) < r(\overline{A})$, 此时即 $a^2-2a-3=0$, $a-3 \neq 0$, 解得 $a=-1$.

2. 设方程组

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

有无穷多个解. 求 a.

解：对增广矩阵施行一系列行初等变换，化为行阶梯形

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & -2 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 3 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1+2a \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 3 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 2a+4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

方程组有无穷多解当且仅当 $r(A) = r(\overline{A})$, 即 $2-a-a^2=0$ 且 $2a+4=0$, 解得 $a=-2$.

3. 用消元法解线性方程组

$$(1)\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=4 \\ 3x_1+5x_2+7x_3=9 \\ 2x_1+3x_2+5x_3=5 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4 \\ x_1+4x_2-x_3+2x_4=-2 \\ -7x_2+3x_3+x_4=-3 \\ x_1+3x_2+x_4=1 \end{cases}$$

解： (1) 线性方程组的增广矩阵为 $\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}$.

$$\overline{A}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

因此，解为 $x_1=-2$, $x_2=3$, $x_3=0$.

(2) 解：线性方程组的增广矩阵为 $\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 1 & 4 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \overline{A} \;\longrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 6 & -4 & 6 & -6 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 5 & -3 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 7 & -9 \\ 0 & 5 & -3 & 5 & -3 \end{pmatrix} \\ \longrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 8 & -12 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 12 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \\ \longrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

因此，所求解为 $x_1=-8$, $x_2=3$, $x_3=6$, $x_4=0$.

4. 设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} (1+a)x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ 2x_1+(2+a)x_2+2x_3+2x_4=0 \\ 3x_1+3x_2+(3+a)x_3+3x_4=0 \\ 4x_1+4x_2+4x_3+(4+a)x_4=0 \end{cases}$$

问 a 取何值时，该方程组有非零解？并求其所有解.

解：系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3+a & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4+a \end{pmatrix}.$$

直接计算知： $\det A = a^3(a+10)$.

当 $a \neq 0$ 且 $a \neq -10$ 时，方程组仅有零解.

当 $a = 0$ 时，

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

方程组与方程 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ 同解. 所以解为 $x_1 = -c_2 - c_3 - c_4$, $x_2 = -c_2$, $x_3 = -c_3$, $x_4 = -c_4$. (c_2, c_3, c_4 是 F 中任意的数)

当 $a = -10$ 时，

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} -9 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以解为 $x_1 = c$, $x_2 = 2c$, $x_3 = 3c$, $x_4 = 4c$. (c 是 F 中任意的数)

(李小凤解答)