§9.3 正定性　习题参考答案

1. 判断下面二次型是否为正定二次型.

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2-x_1x_2$;

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2-2x_1x_2$;

(3) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2-3x_1x_2$;

解： (1) 二次型所对应的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$. A 的一阶顺序主子式为 $1>0$; A 的二阶顺序主子式为 $\begin{vmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1\end{vmatrix}=\frac{3}{4}>0$, 所以 A 是正定的.

(2), (3) 同 (1) 的方法可知都不是正定的.

2. 当 a 取何值时，下面二次型是正定二次型.

$$3x_1^2+4x_2^2+x_3^2-2ax_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3.$$

解：二次型所对应的矩阵为： $A=\begin{pmatrix}3 & -a & 1\\ -a & 4 & 3\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}$. 因 A 的三阶顺序主子式为 $\begin{vmatrix}3 & -a & 1\\ -a & 4 & 3\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}=-(a^2+6a+35)$ 对任意实数 a 恒小于零，因此对任意 a, A 均不可能正定.

3. 问当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足什么条件时，二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+\cdots+(x_n+a_nx_1)^2$ 是正定矩阵.

解：记 $B=\begin{pmatrix}1 & a_1 & & & \\ & 1 & a_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & a_{n-1}\\ a_n & & & & 1\end{pmatrix}$, $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, 则 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TB^TBX$, 故 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 正定的充分必要条件是 B^TB 正定的充要条件是 B 可逆. □

4. (1) 设 A,B 为 n 阶正定阵，则 $A+B$ 是正定阵， ABA 也是正定阵;

(2) 设 A 为正定阵， $c>0$, 则 cA 也是正定阵;

(3) 设 A 为正定阵，则 A^{-1},A^* 是正定的.

证明： (1) 因为 A,B 为 n 阶正定阵，故对任意的非零向量 X, 都有 $X^TAX>0, X^TBX>0$, 从而 $X^T(A+B)X=X^TAX+X^TBX>0$, 由此 $A+B$ 是正定的.

因 A 正定，故 A 可逆且对称，因此 $ABA=A^TBA$ 表明 A^TBA 合同于 B. 又 B 是正定，因此 ABA 也是正定阵.

(2) 因为 A 为 n 阶正定阵，故对任意的非零向量 X, 都有 $X^TAX>0$. 又 $c>0$, 故 $X^T(cA)X=cX^TAX>0$, 从而 cA 是正定的.

(3) 因为 A 是正定，则 A 的特征值全大于零，进而 A^{-1},A^* 的特征值全大于零，从而 A^{-1},A^* 是正定的. □

5. A 是正定的，则 A 中绝对值最大元必在主对角线上.

证明：假设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 中第 (i,j) 个元素 a_{ij} 的绝对值最大. 则 A 有二阶主子式 $\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ij} & a_{jj} \end{vmatrix} = a_{ii}a_{jj}-a_{ij}^2 \le 0$ 和 A 正定矛盾. 故 A 中绝对值最大元必在主对角线上. $\square$

6. 设 A 是 n 阶正定阵, 求证： $\mid A+E \mid > 0$.

证明：因 A 是 n 阶正定阵, 则 A 的特征值 $\lambda_i > 0 (i=1,2,\cdots,n)$, 从而 $A+E$ 的特征值为 $\lambda_i + 1 > 0 (i=1,2,\cdots,n)$, 故 $\det A = \Pi_{i=1}^{n}(\lambda_i+1) > 0$. $\square$