§4.5 线性变换

1. 设 A 是给定的二阶方阵，　$\varphi : F^{2\times 2} \to F^{2\times 2}$, $X \mapsto AX - XA$, 求证：

(1) φ 是线性变换；

(2) 求 φ 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵.

证明：　(1) 对任意的 $X, Y \in F^{2\times 2}$, 有

$$\varphi(X) = AX - XA, \varphi(Y) = AY - YA,$$

$$\varphi(X+Y) = A(X+Y) - (X+Y)A = AX - XA + AY - YA = \varphi(X) + \varphi(Y).$$

对任意 $c \in F$, 有

$$\varphi(cX) = A(cX) - (cX)A = c(AX - XA) = c\varphi(X).$$

故 φ 是线性变换.

(2) 设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 则有

$$\varphi(E_{11}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -bE_{12} + cE_{21}.$$

同理可得 $\varphi(E_{12}) = -cE_{11} + (a-d)E_{12} + cE_{22}$, $\varphi(E_{21}) = bE_{11} - (a-d)E_{12} - bE_{22}$, $\varphi(E_{22}) = bE_{12} - cE_{21}$. 所以

$$\varphi(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}) = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})\begin{pmatrix} 0 & -c & b & 0 \\ -b & a-d & 0 & b \\ c & 0 & d-a & -c \\ 0 & c & -b & 0 \end{pmatrix}.$$

即 φ 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & -c & b & 0 \\ -b & a-d & 0 & b \\ c & 0 & d-a & -c \\ 0 & c & -b & 0 \end{pmatrix}.$$

2. 设线性变换 $\varphi : F^3 \to F^3$, $(a_1, a_2, a_3)^T \mapsto (a_3, 2a_1, a_2 + a_3)^T$.

(1) 求 φ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵;

(2) 求 φ 在基 $\varepsilon_3,\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 下的矩阵;

(3) 求 φ 在基 $\varepsilon_1+\varepsilon_2,\varepsilon_2+\varepsilon_3,\varepsilon_3+\varepsilon_1$ 下的矩阵;

(4) 记 $\alpha=(1,1,1)^T$, 求 $\varphi(\alpha)$ 在基 $\varepsilon_1+\varepsilon_2,\varepsilon_2+\varepsilon_3,\varepsilon_3+\varepsilon_1$ 下的坐标;

(5) 问 φ 是否是可逆的？若是，写出 φ^{-1}.

解: (1) $\varphi(\varepsilon_1)=2\varepsilon_2,\varphi(\varepsilon_2)=\varepsilon_3,\varphi(\varepsilon_3)=\varepsilon_1+\varepsilon_3$, 所以 $\varphi(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)A$, 其中 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\2&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$.

(2) $\varphi(\varepsilon_3,\varepsilon_1,\varepsilon_2)=(\varepsilon_3,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&0\\0&2&0\end{pmatrix}$.

(3) 因 $(\varepsilon_1+\varepsilon_2,\varepsilon_2+\varepsilon_3,\varepsilon_3+\varepsilon_1)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)P$, 其中 $P=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$, 从而 φ 在 $\varepsilon_1+\varepsilon_2,\varepsilon_2+\varepsilon_3,\varepsilon_3+\varepsilon_1$ 下的矩阵为 $P^{-1}AP$, 即

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&0&1\\2&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}.$$

(4) (法一) $\varphi(\alpha)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)A(1,2,2)^T=(\varepsilon_1+\varepsilon_2,\varepsilon_2+\varepsilon_3,\varepsilon_3+\varepsilon_1)P^{-1}A(1,2,2)^T$, 故 $\varphi(\alpha)$ 在基 $\varepsilon_1+\varepsilon_2,\varepsilon_2+\varepsilon_3,\varepsilon_3+\varepsilon_1$ 下的坐标为 $P^{-1}A(1,2,2)^T$.

(法二) $\varphi(\alpha)=(1,2,2)^T=(\varepsilon_1+\varepsilon_2,\varepsilon_2+\varepsilon_3,\varepsilon_3+\varepsilon_1)(x,y,z)^T$, 解得 $x=\frac{1}{2},y=\frac{3}{2},z=\frac{1}{2}$. $\varphi(\alpha)=(\varepsilon_1+\varepsilon_2,\varepsilon_2+\varepsilon_3,\varepsilon_3+\varepsilon_1)(\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2})^T$.

(5) 由 φ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵 A 的行列式 $\begin{vmatrix}0&0&1\\2&0&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq 0$, 故 φ 是可逆的. $\varphi^{-1}:F^3\to F^3$, $\varphi^{-1}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)A^{-1}$.

3. 设 A 相似于 B, 则对于任意正整数 m 和任意 $c\in F$, 有

(1) A^m 相似于 B^m;

(2) cA 相似于 cB;

(3) A^T 相似于 B^T;

(4) $\det(A)=\det(B)$;

(5) $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B)$;

(6) A 可逆当且仅当 B 可逆，且 A^{-1} 相似于 B^{-1};

(7) $A^2=A$ 当且仅当 $B^2=B$.

证明：因为 A 相似于 B, 则存在可逆矩阵 P, 使得 $B=P^{-1}AP$.

(1) $B^m=(P^{-1}AP)^m=P^{-1}A^mP$, 故 A^m 相似于 B^m;

(2) $cB=cP^{-1}AP=P^{-1}(cA)P$, 故 cA 相似于 cB;

(3) $B^T=(P^{-1}AP)^T=P^TA^T(P^{-1})^T=P^TA^T(P^T)^{-1}$, 故 A^T 相似于 B^T;

(4) $\det(B)=\det(P^{-1}AP)=\det(P^{-1})\det(A)\det(P)=\det(A)$;

(5) $\mathrm{tr}(B)=\mathrm{tr}(P^{-1}AP)=\mathrm{tr}(APP^{-1})=\mathrm{tr}(A)$;

(6) 若 A 可逆，且有 $B=P^{-1}AP$ 可得 $\det(B)=\det(P^{-1}AP)\neq 0$, 所以 B 可逆. 反之若 B 可逆，则 A 可逆. 由 $B=P^{-1}AP$ 可知， $B^{-1}=(P^{-1}AP)^{-1}=P^{-1}A^{-1}P$, 故 A^{-1} 相似于 B^{-1};

(7) 由 $A^2=A, B=P^{-1}AP$, 可得 $A=PBP^{-1}=A^2=(PBP^{-1})^2=PB^2P^{-1}$, 又因 P 可逆，所以 $B^2=B$. 同理可得 $B^2=B$ 时 $A^2=A$.

4. 设 A 相似于 B, C 相似于 D, 证明：

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \text{相似于} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

证明：因为 A 相似于 B, C 相似于 D, 则分别存在相应的可逆矩阵 P,Q 使得 $B=P^{-1}AP$, $D=P^{-1}CP$. 构造可逆阵 $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$. 则

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P^{-1}AP & 0 \\ 0 & Q^{-1}CQ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

5. 设 φ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，满足 $\varphi^2=\varphi$, 且 $\dim\mathrm{Im}\varphi=r<n$. 证明存在 V 的一个基 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$, 使得

$$\varphi(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

证明: 设 $\eta_{r+1},\cdots,\eta_n$ 为 $\mathrm{Ker}\varphi$ 的一个基, 将其扩为 V 的一个基 $\eta_1,\cdots,\eta_r,\eta_{r+1},\cdots,\eta_n$, 则 $\varphi(\eta_1),\cdots,\varphi(\eta_r)$ 线性无关.

令 $\xi_i=\varphi(\eta_i)(i=1,\cdots,r)$, $\xi_j=\eta_j(j=r+1,\cdots,n)$, 可证 $\xi_1,\cdots,\xi_r,\xi_{r+1},\cdots,\xi_n$ 是 V 的一个基. 事实上，设 $a_1\xi_1+\cdots+a_r\xi_r+a_{r+1}\xi_{r+1}+\cdots+a_n\xi_n=0$, 将线性变

换 φ 作用于上式两边，得 $0 = a_1\varphi(\xi_1) + \cdots + a_r\varphi(\xi_r) = a_1\varphi^2(\eta_1) + \cdots + a_r\varphi^2(\eta_r)$. 因 $\varphi^2 = \varphi$, 因此上式化为 $a_1\varphi(\eta_1) + \cdots + a_r\varphi(\eta_r) = 0$. 由 $\varphi(\eta_1), \cdots, \varphi(\eta_r)$ 线性无关，得 $a_1 = \cdots = a_r = 0$, 从而 $a_{r+1}\xi_{r+1} + \cdots + a_n\xi_n = 0$, 而 $\xi_{r+1}, \cdots, \xi_n$ 即 $\eta_{r+1}, \cdots, \eta_n$ 线性无关，因此 $a_{r+1} = \cdots = a_n = 0$.

注意到 $\varphi^2 = \varphi$, 因此对 $1 \le i \le r$, $\varphi(\xi_i) = \varphi^2(\eta_i) = \varphi(\eta_i) = \xi_i$; 对 $r+1 \le i \le n$, $\varphi(\xi_i) = \varphi(\eta_i) = 0$, 故 $\varphi(\xi_1, \cdots, \xi_r, \xi_{r+1}, \cdots, \xi_n) = (\xi_1, \cdots, \xi_r, \xi_{r+1}, \cdots, \xi_n)\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. □

6. 设 φ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换，满足 $\varphi^n = 0$, $\varphi^{n-1} \neq 0$. 求证：存在 V 的一个基，使得 φ 在这个基下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

证明: 因 $\varphi^{n-1} \neq 0$, 故存在 $\alpha \in V$, 使得 $\varphi^{n-1}(\alpha) \neq 0$. 只要证明 $\alpha, \varphi(\alpha), \cdots, \varphi^{n-1}(\alpha)$ 为 V 的一个基，则

$$\varphi(\varphi^{n-1}(\alpha), \cdots, \varphi(\alpha), \alpha) = (\varphi^{n-1}(\alpha), \cdots, \varphi(\alpha), \alpha)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

事实上，设

$$a_0\alpha + a_1\varphi(\alpha) + \cdots + a_{n-1}\varphi^{n-1}(\alpha) = 0, \tag{1}$$

将 φ^{n-1} 作用于式 (1) 两边，由 $\varphi^n = 0$, 得 $a_0\varphi^{n-1}(\alpha) = 0$. 而 $\varphi^{n-1}(\alpha) \neq 0$, 从而 $a_0 = 0$, 将其代入 (1) 式. 再将 φ^{n-2} 作用于 (1) 式两边，同理可得 $a_1 = 0$, 以此类推，即得 $a_2 = \cdots = a_{n-1} = 0$. □

(李小凤解答)