§4.2 线性映射和运算

1. 判断以下哪些映射是线性映射.

(1) $\varphi: F^3 \to F^3$, $(a,b,c)^T \mapsto (a-b, b-2c, c+3a)^T$;

(2) $\varphi: F^3 \to F^3$, $(a,b,c)^T \mapsto (a^2, b^2, c^2)^T$;

(3) 设 A 是给定的 $m \times n$ 阶方阵，　$\beta \in F^m$, $\varphi: F^n \to F^m$, $X \mapsto AX + \beta$;

(4) 设 A 是给定的 $m\times n$ 阶方阵, B 是给定的 $n\times m$ 阶方阵, $\varphi: F^{n\times n} \to F^{m\times m}$, $X \mapsto AXB$.

解　(1) 是；　(2) 不是；　(3) $\beta = 0$ 时，是；　$\beta \neq 0$ 时，不是；　(4) 是.

2. 在 $\mathbb{C}$ 上，定义变换 $\varphi: a+bi \mapsto a-bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$. 证明：

(1) $\mathbb{C}$ 作为 $\mathbb{R}$ 上的空间，　φ 是 $\mathbb{C}$ 的线性变换；

(2) $\mathbb{C}$ 作为 $\mathbb{C}$ 上的空间，　φ 不是 $\mathbb{C}$ 的线性变换.

证明　(1) 对任何 $a+bi, c+di \in \mathbb{C}$, $k\in\mathbb{R}$, $\varphi(a+bi+c+di) = (a+c)-(b+d)i = (a-bi)+(c-di) = \varphi(a+bi)+\varphi(a+bi)$, $\varphi(k(a+bi)) = \varphi(ka+kbi) = ka-kbi = k(a-bi) = k\varphi(a+bi)$, 所以，　$\mathbb{C}$ 作为 $\mathbb{R}$ 上的空间 φ 是 $\mathbb{C}$ 的线性变换；

(2) $\varphi(i(a+bi)) = \varphi(ai-b) = -b-ai \neq i(a-bi) = i\varphi(a+bi)$, 故 $\mathbb{C}$ 作为 $\mathbb{C}$ 上的空间，　φ 不保持数乘，所以 φ 不是 $\mathbb{C}$ 的线性变换.　□

3. 设 $\varphi: V \to U$ 是线性映射. 若 W 是 U 的子空间，则 $\varphi^{-1}(W) = \{\alpha \in V | \varphi(\alpha) \in W\}$ 是 V 的子空间.

证明　对任何 $\alpha, \beta \in \varphi^{-1}(W)$, 对任意的 $k \in F$, 有 $\varphi(\alpha), \varphi(\beta) \in W$, 因为 W 是子空间，　φ 是线性映射，所以 $\varphi(\alpha+\beta) = \varphi(\alpha)+\varphi(\beta) \in W$, $\varphi(k\alpha) = k\varphi(\alpha) \in W$, 即 $\alpha+\beta \in \varphi^{-1}(W)$, $k\alpha \in \varphi^{-1}(W)$, 所以 $\varphi^{-1}(W) = \{\alpha \in V|\varphi(\alpha)\in W\}$ 是 V 的子空间.　□

4. 设 V_1, V_2 是线性空间 V 的子空间且 $V = V_1 \bigoplus V_2$. 对 $i = 1,2$, 定义

$$\tau_i : V \to V_i,\quad \alpha_1 + \alpha_2 \mapsto \alpha_i;$$

$$\sigma_1 : V_1 \to V,\quad \alpha_1 \mapsto \alpha_1 + 0;$$

$$\sigma_2 : V_2 \to V,\quad \alpha_2 \mapsto 0 + \alpha_2.$$

验证 $\tau_i, \sigma_i (i=1,2)$ 是线性映射且满足

$$\tau_j\sigma_i = \delta_{ij}\mathrm{id}_{V_i}, (i,j=1,2) \quad \sigma_1\tau_1+\sigma_2\tau_2 = \mathrm{id}_V.$$

证明 对任何 $\alpha_1+\alpha_2, \beta_1+\beta_2 \in V_1 \bigoplus V_2$, $k \in F$, 其中 $\alpha_1, \beta_1 \in V_1$, $\alpha_2, \beta_2 \in V_2$, 有 $\tau_i(\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2) = \alpha_i+\beta_i = \tau_i(\alpha_1+\alpha_2)+\tau_i(\beta_1+\beta_2)$, $\tau_i(k(\alpha_1+\alpha_2)) = k(\alpha_i) = k\tau_i(\alpha_1+\alpha_2)$; 所以 $\tau_i(i=1,2)$ 是线性映射;

对任何 α_1, $\beta_1 \in V_1$, $k \in F$, 有 $\sigma_1(\alpha_1+\beta_1) = \alpha_1+\beta_1+0 = \alpha_1+0+\beta_1+0 = \sigma_1(\alpha_1)+\sigma_1(\alpha_2)$, $\sigma_1(k\alpha_1) = k\alpha_1+0 = k(\alpha_1+0) = k\sigma_1(\alpha_1)$; 所以 σ_1 是线性映射, 同理可证 σ_2 是线性映射.

而对任何 $\alpha_1 \in V_1$, $\alpha_2 \in V_2$, 有 $\tau_1\sigma_1(\alpha_1) = \tau_1(\alpha_1+0) = \alpha_1$, $\tau_1\sigma_2(\alpha_2) = \tau_1(0+\alpha_2) = 0$, $\tau_2\sigma_1(\alpha_1) = \tau_2(\alpha_1+0) = 0$, $\tau_2\sigma_2(\alpha_2) = \tau_2(0+\alpha_2) = \alpha_2$; 所以有 $\tau_j\sigma_i = \delta_{ij}\mathrm{id}_{V_i}, (i,j=1,2)$.

因 $V = V_1 \bigoplus V_2$, 所以对任何 $\alpha \in V$, α 可唯一分解为 $\alpha_1+\alpha_2$, 其中 $\alpha_1 \in V_1$, $\alpha_2 \in V_2$, 则 $(\sigma_1\tau_1+\sigma_2\tau_2)(\alpha) = \sigma_1\tau_1(\alpha_1+\alpha_2)+\sigma_2\tau_2(\alpha_1+\alpha_2) = \sigma_1(\alpha_1)+\sigma_2(\alpha_2) = \alpha_1+0+0+\alpha_2 = \alpha_1+\alpha_2 = \alpha$; 故 $\sigma_1\tau_1+\sigma_2\tau_2 = \mathrm{id}_V$. □

5. 设 V 是数域 F 上 n 维线性空间, U 是数域 F 上 m 维线性空间, $\varphi \in \mathfrak{L}(V,U)$. 证明存在 V 的一个基 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 和 U 的一个基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m$, 使得

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m)\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

证明 因 $\varphi \in \mathfrak{L}(V,U)$, 所以可设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 V 的一个基, $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 是 U 的一个基, 且 $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m)A$, 其中 $A \in F^{m\times n}$.

对 A, 存在可逆阵 P, Q, 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

令 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)Q$, $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m) = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m)P^{-1}$, 则 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是 V 的一个基, $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m$ 是 U 的一个基, 且

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m)\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

(万琴解答)