习题 1.7 矩阵的秩

1. 计算下列矩阵的秩.

$$(1)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\qquad (2)\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

解：(1)

$$\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

故 $r(A)=4$.

(2)

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & a^2+a-2 \end{pmatrix}.$$

令 $a^2+a-2=0$, 得 $a=-2$ 或 $a=1$. 则当 $a=-2$ 时，$r(A)=2$; 当 $a=1$ 时，$r(A)=1$; 当 $a\neq-2$ 且 $a\neq1$ 时，$r(A)=3$.

2. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -3 & x \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & -1 & y \end{pmatrix}$, 且 $r(A)=2$. 求 x 和 y 的值.

解：对 A 做一系列行初等变换

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -3 & x \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & -1 & y \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -6 & x-3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y-x-2 \end{pmatrix}.$$

因为 $r(A)=2$, 所以 $x=0$ 且 $y-x-2=0$, 得 $x=0$, $y=2$.

3. 设 $m\times n$ 矩阵 A 的秩 $r(A)=r$, 求证：存在 $A_1,A_2,\cdots,A_r$, 使得 $r(A_i)=1(i=1,2,\cdots,r)$, 且

$$A=A_1+A_2+\cdots A_r.$$

证明：因为 $r(A)=r$, 所以存在可逆阵 P,Q, 使得

$$A=P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q=P(E_{11}+E_{22}+\cdots+E_{rr})Q=PE_{11}Q+PE_{22}Q+\cdots+PE_{rr}Q,$$

其中 E_{ii} 为 $m\times n$ 基础矩阵 $(i=1,2,\cdots,r)$. 令 $A_i=PE_{ii}Q(i=1,2,\cdots,r)$, 则由于 P, Q 可逆，故 $r(A_i)=1$, 且 $A=A_1+A_2+\cdots+A_r$. □

4. 设 $r(A_{m\times n})=r$, 求证：存在 $B_{m\times r}$, $C_{r\times n}$, $r(B)=r(C)=r$, 且 $A=BC$.

证明：因为 $r(A_{m\times n})=r$, 所以存在可逆矩阵 $P_{m\times m}$, $Q_{n\times n}$, 使得

$$A=P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q=P\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_r & 0 \end{pmatrix}Q.$$

令 $B_{m\times r}=P\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}$, $C_{r\times n}=\begin{pmatrix} E_r & 0 \end{pmatrix}Q$. 易知 $r(B)=r(C)=r$, 且 $A=BC$.
□

5. 证明：任意 n 阶方阵 A 可表为 $A=PB$, 其中 P 为可逆阵， $B^2=B$.

证明：设 $r(A)=r$, 则存在可逆阵 T,Q, 使得

$$A=T\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q=TQQ^{-1}\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q,$$

令 $P=TQ$, $B=Q^{-1}\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$, 则

$$A=PB, B^2=Q^{-1}\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}QQ^{-1}\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q=Q^{-1}\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q=B.$$

□

(万琴解答)