§7.2 $\lambda-$ 矩阵的法式 习题参考答案

1. 用 λ 矩阵的初等变换的方法求下列矩阵的法式.

(1) $A(\lambda)=\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2\lambda-1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ \lambda^2+1 & \lambda^2+\lambda-1 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$　(2) $A(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda+2 \end{pmatrix}$.

解：(1) $A(\lambda)=\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2\lambda-1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ \lambda^2+1 & \lambda^2+\lambda-1 & -\lambda^2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & \lambda^2+2\lambda-1 & 0 \\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ \lambda^2+1 & \lambda^2+\lambda-1 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & \lambda^2+2\lambda-1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & -\lambda \\ 1 & \lambda^2+\lambda-1 & -\lambda^2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & \lambda^2+2\lambda-1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & -\lambda^2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & -\lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & -\lambda-\lambda^3 & -\lambda^2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3+\lambda \end{pmatrix}.$$

(2) $A(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda+2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -2 & \lambda-1 \\ -1 & \lambda-1 & 0 \\ \lambda+2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & -2 & \lambda-1 \\ 0 & \lambda-3 & \lambda-1 \\ \lambda+2 & 2(\lambda+2) & -(\lambda+2)(\lambda-1) \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & \lambda-1 \\ 0 & 2(\lambda+2) & -(\lambda+2)(\lambda-1) \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & 2 \\ 0 & (\lambda+2)(\lambda-1) & -(\lambda+2)(\lambda-1) \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+2)(\lambda-1)^2 \end{pmatrix}.$$

2. 若 $(f(\lambda),g(\lambda))=1$, 证明下列 3 个 $\lambda-$ 矩阵相抵:

$$\begin{pmatrix} f(\lambda) & 0 \\ 0 & g(\lambda) \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} g(\lambda) & 0 \\ 0 & f(\lambda) \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f(\lambda)g(\lambda) \end{pmatrix}.$$

证明：由已知 $(f(\lambda),g(\lambda))=1$, 存在多项式 $u(\lambda)$, $v(\lambda)$, 使 $f(\lambda)u(\lambda)+g(\lambda)v(\lambda)=1$. 则

$$\begin{pmatrix} g(\lambda) & 0 \\ 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} g(\lambda) & 0 \\ f(\lambda)u(\lambda) & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} g(\lambda) & 0 \\ f(\lambda)u(\lambda)+g(\lambda)v(\lambda) & f(\lambda) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} g(\lambda) & 0 \\ 1 & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} g(\lambda) & -f(\lambda)g(\lambda) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & f(\lambda)g(\lambda) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f(\lambda)g(\lambda) \end{pmatrix}.$$

从而 $\begin{pmatrix} f(\lambda) & 0 \\ 0 & g(\lambda) \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f(\lambda)g(\lambda) \end{pmatrix}$ 相抵. 又

$$\begin{pmatrix} f(\lambda) & 0 \\ 0 & g(\lambda) \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & f(\lambda) \\ g(\lambda) & 0) \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} f(\lambda) & 0 \\ 0 & g(\lambda) \end{pmatrix}.$$

从而 $\begin{pmatrix} f(\lambda) & 0 \\ 0 & g(\lambda) \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} g(\lambda) & 0 \\ 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}$ 相抵. 所以上述三个 3 个 $\lambda-$ 矩阵相抵. □

3. 设 $A\in F^{n\times n}$. 证明:

(1) $(\lambda E-A)$ 与 $\mathrm{diag}\{1,\cdots,1,d_1(\lambda),\cdots,d_m(\lambda)\}$ 相抵，其中 $d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)$ ($i=1,2,\cdots,n-1$), $d_j(\lambda)$ ($j=1,2,\cdots,n$) 为首一多项式，且 $f_A(\lambda)=d_1(\lambda)\cdots d_m(\lambda)$.

(2) 上式中 $\mathrm{deg}d_1(\lambda)\neq 0$ 的充分必要条件是 $A=aE_n$.

证明：由定理 7.2.1 知 $\lambda E-A$ 是一个 n 阶 $\lambda-$ 矩阵，且 $r(\lambda E-A)=n$, 则 $\lambda E-A$ 与矩阵 $\mathrm{diag}\{d_1(\lambda),\cdots,d_n(\lambda)\}$ 相抵，其中 $d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)$ ($i=1,2,\cdots,n-1$), $d_j(\lambda)$ ($j=1,2,\cdots,n$) 为首一多项式，即有可逆 $\lambda-$ 矩阵 $M(\lambda),N(\lambda)$, 使得

$$M(\lambda)(\lambda E-A)N(\lambda)=\mathrm{diag}\{d_1(\lambda),\cdots,d_n(\lambda)\}.$$

对可逆 $\lambda-$ 矩阵 $M(\lambda),N(\lambda)$, 有 $\mathrm{det}M(\lambda)=c_1$, $\mathrm{det}N(\lambda)=c_2$, 其中 c_1,c_2 为非零常数. 从而

$$\mathrm{det}(\lambda E-A)=c_1^{-1}c_2^{-1}\mathrm{det}(\mathrm{diag}\{d_1(\lambda),\cdots,d_n(\lambda)\})=c_1^{-1}c_2^{-1}d_1(\lambda),\cdots,d_n(\lambda).$$

又 $\mathrm{det}(\lambda E-A)$, $d_j(\lambda)$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 均为首一多项式，所以 $c_1^{-1}c_2^{-1}=1$, 即 $\mathrm{det}(\lambda E-A)=d_1(\lambda)\cdots d_n(\lambda)$. □

(2) 必要性：若 $\mathrm{deg}d_1(\lambda)\neq 0$, 则 $\mathrm{deg}d_1(\lambda)\geq 1$. 又由 $d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)$ 可知 $\mathrm{deg}d_i(\lambda)\geq 1$. $f_A(\lambda)$ 是 n 次多项式，且 $f_A(\lambda)=\mathrm{det}(\lambda E-A)=d_1(\lambda)\cdots d_n(\lambda)$, 所以 $\mathrm{deg}d_1(\lambda)$ 只能是 1 次多项式. 注意到 $d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)$ ($i=1,2,\cdots,n-1$), $d_j(\lambda)$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 首一，因此 $d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=\cdots=d_n(\lambda)=x-a$, 则 $A=aE_n$.

充分性：若 $A=aE_n$, 有 $\lambda E-A=\mathrm{diag}\{\lambda-a,\cdots,\lambda-a\}$ 已是 $\lambda E-A$ 的法式，故 $d_1(\lambda)=\lambda-a$, 有 $\mathrm{deg}d_1(\lambda)=1\neq 0$. □

(李小风解答)