§5.1 一元多项式和运算

思考 (1) $\deg(f(x)g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$;

(2) 当 $c \neq 0 \in F$ 时， $\deg(cf(x)) = \deg f(x)$;

(3) $\deg(f(x)+g(x)) \leq \max\{\deg f(x), \deg g(x)\}$.

解 (1) 当 $f(x)=0$ 或 $g(x)=0$ 时，等式两边都等于 $-\infty$. 所以等式成立.

其

中 $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$. 则 $f(x)g(x)$ 的首项系数为 $a_nb_mx^{n+m}$, 其中 $a_nb_m \neq 0$. 所以

$$\deg(f(x)g(x)) = n+m = \deg f(x) + \deg g(x).$$

(2) 当 $f(x)=0$ 时，等式两边都等于 $-\infty$. 所以等式成立.

当 $f(x) \neq 0$ 时，记 $f(x)$ 的首项为 a_nx^n, 其中 $a_n \neq 0$. 则 $cf(x)$ 的首项系数为 ca_nx^n, 其中 $ca_n \neq 0$. 所以 $\deg(cf(x)) = n = \deg f(x)$.

(3) 当 $f(x)=0$ 或 $g(x)=0$ 时，等式成立.

当 $f(x) \neq 0$ 且 $g(x) \neq 0$ 时，记 $f(x)$ 的首项为 a_nx^n, $g(x)$ 的首项为 b_mx^m, 其中 $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$. 不妨设 $n \geq m$. 只有当 $m=n$ 且 $a_n = -b_m$ 时，

所以

总有 $\deg(f(x)+g(x)) \leq n = \max\{\deg f(x), \deg g(x)\}$.

习题

1. 设 $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{R}[x]$, 满足 $xf^2(x) + xg^2(x) = h^2(x)$. 证明： $f(x) = g(x) = h(x) = 0$. 问这个结论在复数域上成立否？

证明 (方法一) 不失一般性，不妨设 $\deg f(x) \geq \deg g(x)$.

若 $f(x)=0$, 则 $g(x)=0$, 进而因为 $0 = xf^2(x)+xg^2(x) = h^2(x)$, 从而 $h(x)=0$.

若 $f(x) \neq 0$, 设 a_nx^n 是 $f(x)$ 的首项，其中 $a_n \neq 0$. 故 $xf^2(x)+xg^2(x)$ 的最高次项为 $a_n^2x^{2n+1}$ 或 $(a_n^2+b_n^2)x^{2n+1}$. 注意到 $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$, 因此 a_n^2 及 $a_n^2+b_n^2$ 均非 0, 从而 $xf^2(x)+xg^2(x)$ 次数为 $2n+1$, 是奇数的.

另一方面， $0 \neq xf^2(x)+xg^2(x)=h^2(x)$, 故 $h(x)\neq 0$, 从而 $\deg h^2(x)=2\deg h(x)$ 为 0 或者偶数. 这样等式两边不相等. 矛盾. 命题得证.

(方法二) 若 $h(x)\neq 0$, 则 $f(x),g(x)$ 不全为零，否则与设 $xf^2(x)+xg^2(x)=h^2(x)$ 矛盾. 不失一般性，可设 $\deg f(x)\geq \deg g(x)$, 且 a_nx^n, b_mx^m, c_lx^l 分别是 $f(x),g(x),h(x)$ 的首项，其中 $a_n\neq 0, c_l\neq 0$. 从而 $x(f^2(x)+g^2(x))$ 的最高次项为 $a_n^2x^{2n+1}$ 或 $(a_n^2+b_n^2)x^{2n+1}$. 注意到 $f(x),g(x)\in\mathbb{R}[x]$, 因此 a_n^2 及 $a_n^2+b_n^2$ 均非 0, 从而 $xf^2(x)+xg^2(x)$ 次数为 $2n+1$, 是奇数的. 但 $h^2(x)$ 的次数为偶数 $2l$, 从而 $xf^2(x)+xg^2(x)\neq h^2(x)$ 与设矛盾.

可

证 $f(x)=g(x)=0$. 若不然， $f(x),g(x)$ 不全为零，不失一般性可设 $\deg f(x)\geq$

的

最高次项为 $a_n^2x^{2n}$ 或 $(a_n^2+b_n^2)x^{2n}$ 均非零，故 $f^2(x)+g^2(x)\neq 0$, 与题设矛盾.

综上可知 $f(x)=g(x)=h(x)=0$.

(方法三) 把 $f(x),g(x),h(x)$ 看作 $\mathbb{R}$ 上的函数，则对任意 $x<0, x(f^2(x)+g^2(x))\leq 0, h^2(x)\geq 0$, 所以 $h(x)=0$, 从而 $f^2(x)+g^2(x)=0$. 又因为 $f^2(x),g^2(x)$ 均为非负函数，因此 $f^2(x)=0, g^2(x)=0$. 从而 $f(x)=g(x)=h(x)=0$. (注：此方法非目前已学的代数方法，因此不建议采用)

此结论在 $\mathbb{C}[x]$ 上不成立. 例如， $h(x)=0, f(x)=x, g(x)=ix$.

2. 设 $f(x)=2x^2-x+1$.

(1) 求 $f(A)$, 其中 $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$;

(2) 求 $f(i)$, 其中 $i^2=-1$;

(3) 求 $f(f(x))$;

(4) 求 $f(x^3)$.

解 (1) $f(A)=2\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}^2-\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\3&2\end{pmatrix}$.

(2) $f(i)=2i^2-i+1=-1-i$.

(3) $f(f(x))=2(2x^2-x+1)^2-(2x^2-x+1)+1=8x^4-8x^3+8x^2-3x+2$.

(4) $f(x^3)=2(x^3)^2-(x^3)+1=2x^6-x^3+1$.

3. 在线性空间 $F[x]$ 中，记

$$F[x]_n = \{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_i \in F, i = 0, 1, \cdots, n\}.$$

(1) 证明 $F[x]_n$ 是 $F[x]$ 的子空间;

(2) 求 $F[x]_n$ 的基和维数;

(3) 证明:

$$F[x]_n \cong F^{n+1}.$$

证明 (1) 首先，因为 $0 \in F[x]_n$, 故 $F[x]_n \neq \emptyset$. 其次，对任意 $F[x]_n$ 中多项式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$, $a_i, b_i \in F$ $(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$, 及任意 $k \in F$, 有 $f(x) + g(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$, $kf(x) = ka_n x^n + ka_{n-1}x^{n-1} + \cdots + ka_1 x + ka_0$, 且 $a_i + b_i, ka_i \in F$ $(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$, 因此 $f(x) + g(x), kf(x) \in F[x]_n$.

(2) 由 $F[x]_n$ 的定义，$F[x]_n$ 中任意元素 $f(x)$ 可以表示为 $x^n, x^{n-1}, \cdots, x, 1$ 的线性组合. 设 $k_n x^n + k_{n-1}x^{n-1} + \cdots + k_1 x + k_0 = 0$, 则由于右边是零多项式，利用多项式相等的定义，即得 $k_i = 0$ $(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$. 即 $x^n, x^{n-1}, \cdots, x, 1$ 线性无关. 所以 $x^n, x^{n-1}, \cdots, x, 1$ 是 $F[x]_n$ 的一个基. 从而 $\dim F[x]_n = n + 1$.

(3) 因 $F[x]_n$ 和 F^{n+1} 都是 F 上的 $n + 1$ 维线性空间，所以同构.

4. 对任意非零多项式 $f(x)$, 证明 $\deg f(f(x)) = (\deg f(x))^2$.

证明 不妨设 $f(x)$ 的首项为 $a_n x^n, (a_n \neq 0)$, 那么 $\deg f(x) = n$; 而 $f(f(x))$ 的首项为 $a_n^{n+1} x^{n^2}$. $\deg f(f(x)) = (\deg f(x))^2 = n^2$.