§7.4 初等因子组，广义 Jordan 标准形　作业参考答案

1. 已知 $A(\lambda)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的不变因子为:

$$1,\cdots,1,\lambda,\lambda(\lambda^2-2),\lambda(\lambda^2-2)^2(\lambda^2+1),\lambda^2(\lambda^2-2)^4(\lambda^2+1)^2(\lambda-9).$$

写出 $A(\lambda)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的初等因子组.

解: $A(\lambda)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的初等因子组为: λ, λ, λ, λ^2, $\lambda-\sqrt{2}$, $(\lambda-\sqrt{2})^2$, $(\lambda-\sqrt{2})^4$, $\lambda+\sqrt{2}$, $(\lambda+\sqrt{2})^2$, $(\lambda+\sqrt{2})^4$, $\lambda-i$, $(\lambda-i)^2$, $\lambda+i$, $(\lambda+i)^2$, $\lambda-9$.

2. 已知 5 阶 λ- 矩阵 $A(\lambda)$ 的秩为 4, 初等因子组为:

$$\lambda,\lambda^2,\lambda^2,\lambda+1,\lambda-1,\lambda-1,(\lambda+1)^3.$$

求 $A(\lambda)$ 的行列式因子和不变因子.

解: $A(\lambda)$ 的不变因子为: 1, λ, $\lambda^2(\lambda-1)(\lambda+1)$, $\lambda^2(\lambda-1)(\lambda+1)^3$; $A(\lambda)$ 的行列式因子为: 1, λ, $\lambda^3(\lambda-1)(\lambda+1)$, $\lambda^5(\lambda-1)^2(\lambda+1)^4$.

3. 求下列矩阵的初等因子组.

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \lambda-2 & 1 & -1 \\ -2 & \lambda-2 & 1 \\ -1 & -2 & \lambda+1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \lambda^2+\lambda & & \\ & \lambda & \\ & & (\lambda+1)^2 \end{pmatrix}.$$

解: (1) 因为 $A(\lambda)$ 有一个二阶子式为非零常数, 因此 $D_2(\lambda)=1$. 所以所求行列式因子为: 1, 1, λ^3, 进而 $A(\lambda)$ 的不变因子为: 1, 1, λ^3, $A(\lambda)$ 的初等因子组为: λ^3.

(2) 因为 $A(\lambda)$ 有一个二阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \lambda-2 & 1 \end{vmatrix}=\lambda-1$, 又有个二阶子式 $\begin{vmatrix} -2 & \lambda-2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=\lambda-2$, 因此 $D_2(\lambda)=1$, 从而行列式因子为: 1, 1, $(\lambda-1)^3$, 从而 $A(\lambda)$ 的不变因子为: 1, 1, $(\lambda-1)^3$, 初等因子组为: $(\lambda-1)^3$.

(3) 注意到矩阵是对角矩阵, 因此可直接对对角元做因式分解, 即得矩阵的初等因子组为: $\lambda,\lambda,\lambda+1(\lambda+1)^2$.

4. 设 $A(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda+1 & \\ & \lambda-1 \end{pmatrix}$, $B(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda^2-1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$, 求 $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$ 的初等因子组, 问 $A(\lambda)$ 是否相抵于 $B(\lambda)$.

解: $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ 为对角阵, 直接计算即得初等因子组均为: $\lambda-1,\lambda+1$. 故 $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$ 相抵.

5. 写出例 2 中矩阵 A 分别在 $\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{C}$ 上的 Frobenius 标准型和广义 Jordan 标准型.

解: 由于最大公因式与数域扩大无关, k 行列式因子是所有 k 阶子式的最大公因式, 所以行列式因子与数域扩大无关, 进而不变因子与数域扩大无关. 但 Frobenius 标准形由不变因子唯一确定, 因此 A 在 $\mathbb{Q}$ 上的 Frobenius 标准形和在 $\mathbb{C}$ 上的 Frobenius 标准形一样.

A 的不变因子为：$1, 1, \cdots, 1, (\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2(\lambda+1), (\lambda-1)^2(\lambda+1)(\lambda^2+1)^2$, 所以 A 在 $\mathbb{Q}$ 上和在 $\mathbb{C}$ 上的的 Frobenius 标准形均为：

$$\begin{pmatrix}
0 & -1 & & & & & & & & & & \\
1 & 2 & & & & & & & & & & \\
 & & 0 & & -1 & & & & & & & \\
 & & 1 & 0 & 1 & & & & & & & \\
 & & & 1 & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & 0 & & & & & & -1 \\
 & & & & & 1 & 0 & & & & & 1 \\
 & & & & & & 1 & 0 & & & & -1 \\
 & & & & & & & 1 & 0 & & & 1 \\
 & & & & & & & & 1 & 0 & & 1 \\
 & & & & & & & & & 1 & 0 & -1 \\
 & & & & & & & & & & 1 & 1
\end{pmatrix}.$$

A 在 $\mathbb{Q}$ 上的初等因子组为：$(\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2, \lambda+1, \lambda+1, (\lambda^2+1)^2$, 所以 A 在 $\mathbb{Q}$ 上的广义 Jordan 标准形为：

$$\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & & \\
 & & 1 & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & & & & & & \\
 & & & & & & -1 & & & & & \\
 & & & & & & & -1 & & & & \\
 & & & & & & & & 0 & -1 & & \\
 & & & & & & & & 1 & 0 & & \\
 & & & & & & & & & 1 & 0 & -1 \\
 & & & & & & & & & & 1 & 0
\end{pmatrix}.$$

A 在 $\mathbb{C}$ 上的初等因子组为：$(\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2, \lambda+1, \lambda+1, (\lambda+i)^2, (\lambda-i)^2$, 所以 A 的 Jordan 标准形为：

$$\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & & \\
 & & 1 & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & & & & & & \\
 & & & & & & -1 & & & & & \\
 & & & & & & & -1 & & & & \\
 & & & & & & & & -i & & & \\
 & & & & & & & & 1 & -i & & \\
 & & & & & & & & & & i & \\
 & & & & & & & & & & 1 & i
\end{pmatrix}.$$

6. 写出例 4 中矩阵 A 在 $\mathbb{C}$ 上的 Frobenius 标准形和广义 Jordan 标准形.

解：A 在 $\mathbb{C}$ 上的不变因子为：$1,\ 1,\ \cdots,\ 1,\ (\lambda-2)^2(\lambda-\sqrt{2}i)(\lambda+\sqrt{2}i),\ (\lambda-2)^2(\lambda-\sqrt{2}i)^2(\lambda+\sqrt{2}i)^2$，所以 A 在 $\mathbb{C}$ 上的 Frobenius 标准形为：

$$\begin{pmatrix} 0 & & & -8 & & & & & & \\ 1 & 0 & & 8 & & & & & & \\ & 1 & 0 & -6 & & & & & & \\ & & 1 & 4 & & & & & & \\ & & & & 0 & & & & & -16 \\ & & & & 1 & 0 & & & & -16 \\ & & & & & 1 & 0 & & & -20 \\ & & & & & & 1 & 0 & & 16 \\ & & & & & & & 1 & 0 & -8 \\ & & & & & & & & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

A 在 $\mathbb{C}$ 上的初等因子组为：$(\lambda-2)^2,\ (\lambda-2)^2,\ \lambda-\sqrt{2}i,\ \lambda+\sqrt{2}i,\ (\lambda+\sqrt{2}i)^2,\ (\lambda-\sqrt{2}i)^2$，所以 A 在 $\mathbb{C}$ 上的广义 Jordan 标准形为：

$$\begin{pmatrix} 2 & & & & & & & & & \\ 1 & 2 & & & & & & & & \\ & & 2 & & & & & & & \\ & & 1 & 2 & & & & & & \\ & & & & -\sqrt{2}i & & & & & \\ & & & & & \sqrt{2}i & & & & \\ & & & & & & -\sqrt{2}i & & & \\ & & & & & & 1 & -\sqrt{2}i & & \\ & & & & & & & & \sqrt{2}i & \\ & & & & & & & & 1 & \sqrt{2}i \end{pmatrix}.$$

（李小凤解答）