§7.5 Jordan 标准形　作业参考答案

1. 已知矩阵 A 的初等因子组如下：求矩阵 A 的 Jordan 标准形.

(1) $(\lambda+1)^2, \lambda-2, (\lambda-2)^3$

(2) $(\lambda+\sqrt{2})^2, \lambda+1, (\lambda+1)^2, (\lambda+1)^3$

解：(1) A 的 Jordan 标准形为：

$$J=\begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ 1 & -1 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & 1 & 2 & \\ & & & & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(2) A 的 Jordan 标准形为：

$$J=\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & & & & & & & \\ 1 & -\sqrt{2} & & & & & & \\ & & -1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & 1 & -1 & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & 1 & -1 & \\ & & & & & & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. 求下列矩阵的 Jordan 标准形.

$$(1)\ A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (2)\ A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -6 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

解：(1) 直接计算得 $f_A(\lambda)=(\lambda-2)^3$, 由 Cayley-Hamilton 定理，可知 $m_A(\lambda)|f_A(\lambda)$, 且在不考虑根的重数情况下和 $f_A(\lambda)$ 有完全相同的根，因此只可能是下列三种形式之一：$\lambda-2, (\lambda-2)^2, (\lambda-2)^3$. 但 $A-2E\neq 0, (A-2E)^2=0$, 故 $m_A(\lambda)=(\lambda-2)^2$, 进而 A 的初等因子只能是 $(\lambda-2)^2$ 的因式，且至少有一个是 $(\lambda-2)^2$. 注意到 A 是三阶的，所以 A 的初等因子组为：$(\lambda-2), (\lambda-2)^2$, 从而 A 的 Jordan 标准形为：$J=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(2) (略)

3. 求下列矩阵的行列式因子，不变因子，初等因子组和 Jordan 标准形.

$$(1)\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad (2)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

解：(1) 直接计算得 $f_A(\lambda)=(\lambda+1)^3$, 由 Cayley-Hamilton 定理，可知 $m_A(\lambda)|f_A(\lambda)$, 且在不考虑根的重数情况下和 $f_A(\lambda)$ 有完全相同的根，因此 $m_A(\lambda)$ 只可能是 $\lambda+1$, $(\lambda+1)^2$ 或 $(\lambda+1)^3$. 但 $A+E\neq 0$, $(A+E)^2=0$, 故 $m_A(\lambda)=(\lambda+1)^2$. 进而结合矩阵阶数得初等因子组为：$\lambda+1$, $(\lambda+1)^2$. 故 Jordan 标准形为：$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(2) 直接计算得 $f_A(\lambda)=\lambda^2(\lambda-2)$, $m_A(\lambda)|f_A(\lambda)$, 且在不考虑根的重数情况下和 $f_A(\lambda)$ 有完全相同的根, 因此 $m_A(\lambda)$ 只可能是 $\lambda(\lambda-2)$ 或 $\lambda^2(\lambda-2)$. 直接计算得 $A(A-2E)=0$, 因此 $m_A(\lambda)=\lambda(\lambda-2)$, 进而初等因子为 λ, $\lambda-2$, 结合特征多项式即得 A 的初等因子组为：λ, λ, $\lambda-2$. 故 Jordan 标准形为：$\mathrm{diag}\{0,0,2\}$.

4. 设 C 上三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求出 A 所有可能的 Jordan 标准形;

(2) 给出 A 可对角化的充分必要条件.

解：(法一)

(1) 直接计算得 $f_A(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-1)$. 因此 A 可能的极小多项式为 $(\lambda-2)(\lambda-1)$ 或 $(\lambda-2)^2(\lambda-1)$.

若 $m_A(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)$, 则 A 的初等因子组为 $\lambda-2$, $\lambda-2$, $\lambda-1$, 从而 Jordan 标准形是 $\mathrm{diag}\{2,2,1\}$.

若 $m_A(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-1)$, 则 A 的初等因子组为 $(\lambda-2)^2$, $\lambda-1$, 从而 Jordan 标准形是 $\begin{pmatrix} 2 & & \\ 1 & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$.

(2) A 可对角化的充分必要条件是 A 的每个特征值的代数重数等于几何重数. 这里只有特征值 2 是重根, 因此仅考虑 $3-r(A-2E)$ 何时为 2 即可. 直接计算可得 $3-r(A-2E)=2$ 的充分必要条件是 $a=0$.

(法二) $\lambda E-A=\begin{pmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ -a & \lambda-2 & 0 \\ -b & -c & \lambda-1 \end{pmatrix}$, 则 A 的行列式因子为:

$D_1(\lambda)=1$,

$D_2(\lambda)=((\lambda-2)^2,0,ac+b(\lambda-2),(\lambda-2)(\lambda-1),a(\lambda-1),c(\lambda-2))$,

$D_3(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-1)$.

若 $a=0$, 则 $D_2(\lambda)=\lambda-2$, 此时初等因子组为：$\lambda-2$, $\lambda-2$, $\lambda-1$, 从而 Jordan 标准形为：$\mathrm{diag}\{2,2,1\}$.

若 $a\neq 0$, 则 $D_2(\lambda)=1$, 此时初等因子组为：$(\lambda-2)^2$, $\lambda-1$, 所以 Jordan 标准形为：$J=\begin{pmatrix} 2 & & \\ 1 & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$.

(2) 由 (1) 可知 A 可对角化的充要条件是 $a=0$.

5. 设 $a\neq 0$, 求 n 阶矩阵 A 的 Jordan 标准型：

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & a & 0 & \cdots & 0 \\ a & a & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & a \end{pmatrix}.$$

解：（法一）依题意，A 的特征多项式 $f_A(\lambda)=(\lambda-a)^n$, 由 Cayley-Hamilton 定理，可知 A 的极小多项式 $m_A(\lambda)|f_A(\lambda)$, 故可设 $m_A(\lambda)=(\lambda-a)^r$, 其中 $1\le r\le n$. 但 $(aI_n-A)^n=0$, 而

$$(aI_n-A)^{n-1}=\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ (-a)^{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}\neq 0,$$

故只能有 $m_A(\lambda)=(\lambda-a)^n$. 从而 A 的不变因子为：$1,1,\ldots,1,(\lambda-a)^n$, 进而初等因子组为 $(\lambda-a)^n$, 因此 A 的 Jordan 标准型为：

$$\begin{pmatrix} a & & & & \\ 1 & a & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & a & \\ & & & 1 & a \end{pmatrix}.$$

（法二）$\lambda E-A$ 有一个 $n-1$ 阶子式为

$$g_1(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-a & & & \\ -a & \lambda-a & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ -a & -a & \cdots & \lambda-a \end{vmatrix}=(\lambda-a)^{n-1},$$

还有一个 $n-1$ 阶子式

$$g_2(\lambda)=\begin{vmatrix} -a & \lambda-a & & & \\ -a & -a & \lambda-a & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \lambda-a \\ -a & -a & \cdots & -a & -a \end{vmatrix},\ g_2(a)\neq 0,$$

说明 $(g_1(\lambda),g_2(\lambda))=1$, 因此 $D_{n-1}(\lambda)=1$, 故 $m_A(\lambda)=f_A(\lambda)=(\lambda-a)^n$, 从而 A 的初等因子组为 $(\lambda-a)^n$, 进而得 Jordan 标准形：

$$\begin{pmatrix} a & & & & \\ 1 & a & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & a & \\ & & & 1 & a \end{pmatrix}.$$

（李小凤解答）