§4.1 映射

1. 找一个全体实数集到全体正实数集的双射.

解 取 $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto= 2^x$.

2. 映射 $\varphi: F^3 \to F^3$, $(a,b,c)^T \mapsto (a-b, b-2c, c+3a)^T$ 是不是双射？映射 $\psi: F^3 \to F^3$, $(a,b,c)^T \mapsto (a^2, b^2, c^2)^T$ 是不是双射？

解 (1) 对任意 $(a,b,c)^T \in F^3$, 存在 $(\frac{a+b+2c}{7}, \frac{b+2c-6a}{7}, \frac{c-3a-3b}{7})^T \in F^3$, 使得 $\varphi((\frac{a+b+2c}{7}, \frac{b+2c-6a}{7}, \frac{c-3a-3b}{7})^T) = (a,b,c)^T$, 故 φ 是满射. 又若 $\varphi((a_1,b_1,c_1)^T) = \varphi((a_2,b_2,c_2)^T)$, 即 $(a_1-b_1, b_1-2c_1, c_1+3a_1)^T = (a_2-b_2, b_2-2c_2, c_2+3a_2)^T$, 经计算可得： $a_1=a_2$, $b_1=b_2$, $c_1=c_2$, 故 φ 是单射. 又综上， φ 是双射.

(2) 因为 $\varphi((1,1,1)^T) = \varphi((-1,-1,-1)^T) = (1,1,1)^T$, 故 ψ 不是单射，那么必不是双射.

3. 设 A 是给定的 n 阶可逆方阵，求证 $\varphi_A: F^n \to F^n$, $X \mapsto AX$, 是可逆映射.

证明 若 $\varphi_A(X_1) = \varphi_A(X_2)$, 即 $AX_1 = AX_2$, 又 A 可逆，所以 $X_1 = X_2$, 即 φ_A 是单射. 对任意 $X \in F^n$, 存在 $A^{-1}X \in F^n$, 使得 $\varphi_A(A^{-1}X) = AA^{-1}X = X$, 即 φ_A 是满射，综上 φ_A 是双射.

4. (1) 设映射 $\varphi: S \to T$ 是单射， $\psi: T \to U$ 是单射，则 $\psi\varphi: S \to U$ 也是单射；

(2) 设映射 $\varphi: S \to T$ 是满射， $\psi: T \to U$ 是满射，则 $\psi\varphi: S \to U$ 也是满射；

(3) 设映射 $\varphi: S \to T$ 是可逆映射， $\psi: T \to U$ 是可逆映射，则 $\psi\varphi: S \to U$ 也是可逆映射，且 $(\psi\varphi)^{-1} = \varphi^{-1}\psi^{-1}$.

证明 (1) 当 $\psi\varphi(\alpha_1) = \psi\varphi(\alpha_2)$ 时，其中 $\alpha_1, \alpha_2 \in S$; 因为 ψ 是单射，所以 $\varphi(\alpha_1) = \varphi(\alpha_2)$, 又 φ 是单射，所以 $\alpha_1 = \alpha_2$, 即得 $\psi\varphi: S \to U$ 也是单射；

(2) 对任何 $\gamma \in U$, 因为 ψ 是满射，所以存在 $\beta \in T$, 使得 $\psi(\beta) = \gamma$, 又 φ 是满射，所以对 $\beta \in T$, 存在 $\alpha \in S$, 使得 $\varphi(\alpha) = \beta$, 而 $\psi\varphi(\alpha) = \psi(\varphi(\alpha)) = \psi(\beta) = \gamma$, 即得 $\psi\varphi: S \to U$ 也是满射；

(3) 因为 $\varphi : S \to T$ 是可逆映射， $\psi : T \to U$ 是可逆映射，所以 φ, ψ 都是双射，再由 (1),(2) 结论知， $\psi\varphi$ 是双射，故 $\psi\varphi : S \to U$ 是可逆映射；且 $(\psi\varphi)\varphi^{-1}\psi^{-1} = \psi(\varphi\varphi^{-1})\psi^{-1} = \psi\psi^{-1} = id_U, (\varphi^{-1}\psi^{-1})\psi\varphi = \varphi^{-1}(\psi^{-1}\psi)\varphi = \varphi^{-1}\varphi = id_S$, 故 $(\psi\varphi)^{-1} = \varphi^{-1}\psi^{-1}$.

(万琴解答)