§8.3 对称变换，对称矩阵　习题参考答案

1. 求正交矩阵 Q, 使 Q^TAQ 为对角阵, 其中 A 为

$$(1)\ A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0\\ -2 & 2 & -2\\ 0 & -2 & 3\end{pmatrix};\qquad (2)\ A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4\\ 2 & 0 & 2\\ 4 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

解: $\det(\lambda E-A)=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 0\\ 2 & \lambda-2 & 2\\ 0 & 2 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-5)$. 因此 A 的特征值是: $\lambda_1=-1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$.

对特征值 λ_1, 解线性方程组 $(\lambda_1E-A)X=0$, 即 $\begin{cases} -2x_1+2x_2 &=0\\ 2x_1-3x_2+2x_3 &=0\\ 2x_2+4x_3 &=0\end{cases}$, 得基础解系 $\alpha_1=(2,2,1)^T$.

同理, 对特征值 λ_2, 解线性方程组 $(\lambda_2E-A)X=0$, 得基础解系 $\alpha_2=(-2,1,2)^T$. 对特征值 λ_3, 解线性方程组 $(\lambda_3E-A)X=0$, 得基础解系 $\alpha_3=(1,-2,2)^T$.

对 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 单位化: $\beta_1=\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|}=(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3})^T,\beta_2=\frac{\alpha_2}{|\alpha_2|}=(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})^T,\beta_3=\frac{\alpha_3}{|\alpha_3|}=(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})^T$.

令 $Q=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$, 则 $Q^TAQ=\mathrm{diag}\{-1,2,5\}$.

(2) $\det(\lambda E-A)=(\lambda+1)^2(\lambda-8)$. 因此 A 的特征值是: $\lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=8$.

对特征值 $\lambda_1=\lambda_2$, 解线性方程组 $(\lambda_1E-A)X=0$, 得基础解系 $\alpha_1=(0,-2,1)^T$, $\alpha_2=(1,-2,0)^T$.

对特征值 λ_3, 解线性方程组 $(\lambda_3E-A)X=0$, 得基础解系 $\alpha_3=(2,1,2)^T$.

将 α_1, α_2 正交化: $\beta_1=\alpha_1$, $\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(1,-\frac{2}{5},-\frac{4}{5})^T$.

再将 β_1, β_2, α_3 单位化, 得 $\gamma_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}=(0,-\frac{2}{\sqrt5},\frac{1}{\sqrt5})^T$, $\gamma_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=(\frac{\sqrt5}{3},-\frac{2}{3\sqrt5},-\frac{4}{3\sqrt5})^T$, $\gamma_3=\frac{\alpha_3}{|\alpha_3|}=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})^T$. 取 $Q=(\gamma_1,\gamma_3,\gamma_3)$, 则 $Q^TAQ=\mathrm{diag}\{-1,-1,8\}$.

2. 已知 $\lambda_1=6,\lambda_2=\lambda_3=3$ 是实对称矩阵的三个特征值, 且对应于 $\lambda_2=\lambda_3$ 的特征向量为 $\alpha_2=(-1,0,1)^T,\alpha_3=(1,-2,1)^T$. 求 A 的对应于 λ_1 的特征向量及 A.

解: 由于 A 是实对称矩阵, 则 A 的对应于不同特征值的特征向量正交. 设对应于 6 的特征向量为 $\alpha_1=(x_1,x_2,x_3)^T$, 则由 α_1 与 α_2,α_3 正交得线性方程组 $\begin{cases} -x_1+x_2=0\\ x_1-2x_2+x_3=0\end{cases}$. 解得对应于 6 的一个特征向量为 $\alpha_1=(1,1,1)$. 故对应于 6 的所有特征向量为 $k(1,1,1),(0\neq k\in\mathbb{R})$.

将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 单位化:

$$\beta_1=\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|}=(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3})^T,\beta_2=\frac{\alpha_2}{|\alpha_2|}=(-\frac{1}{\sqrt2},0,\frac{1}{\sqrt2})^T,\beta_3=\frac{\alpha_3}{|\alpha_3|}=(\frac{1}{\sqrt6},-\frac{2}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6})^T.$$

令 $Q=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, 则 $A=Q\mathrm{diag}\{6,3,3\}Q^T=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

3. 设 φ 是 n 维欧氏空间 V 的对称变换， $\varphi^2=\mathrm{id}_V$, 且 $\varphi\neq\mathrm{id}_V$, $\varphi\neq-\mathrm{id}_V$. 则存在 V 的一个标准正交基，使得 φ 在此基下的矩阵为 $\mathrm{diag}\{1,\cdots,1,-1,-1,\cdots,-1\}$.

证明：(法一) 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是 V 的一个标准正交基，因为 φ 是对称变换， $\varphi(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)A$, 其中 $A^T=A$. 又因为 $\varphi^2=\mathrm{id}_V$, 知 φ 的特征值 λ 满足 $\lambda^2=1$, 故 $\lambda=\pm1$. 而 $\varphi\neq\mathrm{id}_V$, $\varphi\neq-\mathrm{id}_V$, 所以 1 和 -1 都是 A 的特征值. 从而存在正交矩阵 Q, 使得 $A=Q\mathrm{diag}\{1,\cdots,1,-1,-1,\cdots,-1\}Q^T$. 令 $(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)Q$, 则 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是 V 的一个标准正交基，且 $\varphi(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)\mathrm{diag}\{1,\cdots,1,-1,-1,\cdots,-1\}$. □

(法二) 因 φ 是 n 维欧氏空间 V 的对称变换, 所以存在 V 的一个标准正交基，使得 $\varphi(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$. 又因为 $\varphi^2=\mathrm{id}_V$, 知 φ 的特征值只能是 1 或 -1. 而 $\varphi\neq\mathrm{id}_V$, $\varphi\neq-\mathrm{id}_V$, 所以 1 和 -1 都是 φ 的特征值. 不妨设前 s 个特征值为 1, 后 $n-s$ 个特征值为 -1(否则调整相应的 ξ_i 顺序即可), 从而命题得证. □

4. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 n 个有序实数，$\lambda_{\sigma_1},\lambda_{\sigma_2},\cdots,\lambda_{\sigma_n}$ 是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的一个排列, 则 $\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$ 正交相似于 $\mathrm{diag}\{\lambda_{\sigma_1},\lambda_{\sigma_2},\cdots,\lambda_{\sigma_n}\}$.

证明：对 n 用归纳法. 当 $n=1$ 时显然成立. 假设结论对 $n-1$ 成立. 对 n 时，记 $A=\mathrm{diag}\{\lambda_{\sigma_1},\lambda_{\sigma_2},\cdots,\lambda_{\sigma_n}\}$. 若 $\sigma_i=1$ 但 $i\neq1$, 则互换 A 的第 1 和第 σ_i 两行，再互换第 1 和第 σ_i 两列，即 $E^{-1}(1,\sigma_i)AE(1,\sigma_i)=E^T(1,\sigma_i)AE(1,\sigma_i)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \\ & A_1\end{pmatrix}$, 其中 A_1 是 $n-1$ 阶对角阵，对角元是 $\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的一个排列. 由归纳假设, 对 A_1, 存在 $n-1$ 阶正交矩阵 P, 使得 $P^TA_1P=\mathrm{diag}\{\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$. 令 $Q=E(1,\sigma_i)\begin{pmatrix}1 & \\ & P\end{pmatrix}$, 则 Q 为正交阵，且 $Q^TAQ=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$. □

5. 设 A,B 为实对称阵，求证下列条件是等价的：

(1)A 正交相似于 B;

(2)A 和 B 有相同的特征多项式;

(3)A 和 B 有相同的特征值.

证明： $(1)\Rightarrow(2)$. 因 A 正交相似于 B, 故 A 相似于 B, 从而 A,B 有相同的特征多项式.

$(2)\Rightarrow(3)$. 显然，因特征值是特征多项式的根.

$(3)\Rightarrow(1)$. 由已知设 A 和 B 的特征值同为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$. 注意到 A 对称，从而 A 正交相似于对角阵 $D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$. 同理， B 正交相似于 D, 由正交相似的传递性即知 A 正交相似于 B. □

6. 设 φ 是 n 维欧式空间 V 的对称变换. U 是 $\varphi-$ 不变子空间，则 $U^\perp$ 也是 $\varphi-$ 不变子空间.

证明： (法一) 设 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m$ 是 U 的一个标准正交基，将其扩为 V 一个标准正交基 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$. 则 $U^T=\langle\gamma_{m+1},\gamma_{m+2},\cdots,\gamma_n\rangle$. 由已知 U 是 $\varphi-$ 不变子空间，则

$$\varphi(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)\begin{pmatrix}A & C\\ 0 & B\end{pmatrix}.$$

又因为 φ 是对称变换，故 $\begin{pmatrix}A & C\\ 0 & B\end{pmatrix}$ 是对称阵，从而 $C=0$, 所以 $U^\perp$ 也是 $\varphi-$ 不变子空间.

(法二) 对任意的 $\alpha\in U^\perp$, 往证 $\varphi(\alpha)\in U^\perp$. 事实上，对任意的 $\beta\in U$, 因 U 是 $\varphi-$ 不变子空间，故 $\varphi(\beta)\in U$. 又因 φ 是对称变换，所以 $(\varphi(\alpha),\beta)=(\alpha,\varphi(\beta))=0$, 故 $\varphi(\alpha)\in U^\perp$, 即 $U^\perp$ 也是 $\varphi-$ 不变子空间. □

(黄雪娥解答)