第二章　总复习题

1. 已知 $\alpha_1=(1,0,2,3)^T$, $\alpha_2=(1,1,3,5)^T$, $\alpha_3=(1,-1,2+a,1)^T$, $\alpha_4=(1,2,4,8+a)^T$ 及 $\beta=(1,1,3+b,5)^T$,

(1) a,b 为何值时，β 不能表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性组合？

(2) a,b 为何值时，β 有 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的唯一线性表示式？并写出表示式.

解　记 $A=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$, $\overline{A}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta\}$, 则有

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\2&3&2+a&4&3+b\\3&5&1&8+a&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&0&1+a&0&b\\0&0&0&1+a&0\end{pmatrix}$$

当 $a=-1, b\neq 0$ 时，$r(\overline{A})>r(A)$, 方程组 $AX=\beta$ 无解，β 不能表示成 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性组合.

当 $a\neq -1$ 时，$r(\overline{A})=r(A)=n$, 方程组 $AX=\beta$ 有唯一解 $(-\frac{2b}{a+1},\frac{b}{a+1}+1,b,0)^T$, β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 唯一线性表示，表示式为

$$\beta=-\frac{2b}{a+1}\alpha_1+(\frac{b}{a+1}+1)\alpha_2+b\alpha_3.$$

2. 设三阶非零矩阵 A 的每一个列向量都是方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3=0\\2x_1-x_2+ax_3=0\\3x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$$

的解. 求 a 和 $\det A$.

解 记该方程组系数矩阵为 B, 因为三阶非零矩阵 A 的每一个列向量都是方程组 $BX=0$ 的解，所以 $BX=0$ 有非零解，进而 $\det B=2a-7=0$, 得 $a=\frac{7}{2}$. 由 $BA=0$, B 显然非零，那么 A 不可逆，所以 $\det A=0$.

3. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，若 $\beta_1=\alpha_1+t\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+t\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+t\alpha_4,\beta_4=\alpha_4+t\alpha_1$, 当 t 满足什么条件时，$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 也是 $AX=0$ 的一个基础解系.

解　显然，$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 是线性方程组 $AX=0$ 的解. 由习题 2.4 第 3 题，当 $1^4+(-1)^{4+1}t^4\neq 0$ 时, 即 $t\neq\pm 1$ 时 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性无关, 因此它们也是 $AX=0$ 的一个基础解系.

4. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是四维非零列向量，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$. 已知方程组 $AX=0$ 的通解为 $k(0,1,1,0)^T$. 求方程组 $A^*X=0$ 的基础解系.

解　由方程组 $AX=0$ 的通解为 $k(0,1,1,0)^T$ 知，$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)(0,1,1,0)^T=\alpha_2+\alpha_3=0$, 且 $r(A)=4-1=3$, 因此 $r(A^*)=1$, 从而 $A^*X=0$ 的基础解系含三个线性无关解向量. 注意到 $A^*A=(\det A)E=0$, 故 A 的每一列都是方程组 $A^*X=0$ 的解，$r(A)=3$, 所以 A 的任何三个线性无关的列向量都是 $A^*X=0$ 的基础解系. 又 α_2,α_3 线性相关，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 或 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 是方程组 $A^*X=0$ 的基础解系.

5. 设 $A=(a_{ij})\in F^{n\times n}$. 设方程组 $AX=0$ 的系数行列式 $\det A=0$, 而 A 中一个元素 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij}\neq 0$. 求方程组的基础解系.

解　由 $\det A=0$, 所以 $r(A)\leq n-1$, $AA^*=0$. 又由 A 中一个元素 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij}\neq 0$, 说明 $r(A^*)\geq 1$, 进而 $r(A)\geq n-1$. 故 $r(A)=n-1$. 所以 $AX=0$ 的基础解系只含一个线性无关解向量，A^* 的第 i 列就是 $AX=0$ 的一个基础解系.

6. 已知齐次线性方程组

$$(I)\ \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0\\ 2x_1+3x_2+5x_3=0\\ x_1+x_2+ax_3=0\end{cases}\quad 和\quad (II)\ \begin{cases} x_1+bx_2+cx_3=0\\ 2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0\end{cases}$$

同解. 求 a, b, c 的值.

解　记 $(I),(II)$ 的系数矩阵分别为 A,B, 因为 $(I),(II)$ 同解，所以 $r(A)=r(B)\leq 2$. 因为

$$A\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a-2\end{pmatrix}, B\to\begin{pmatrix}1&b&c\\0&b^2-2b&1-c\end{pmatrix},$$

所以 $r(A)=2$ 时，$(-1,-1,1)^T$ 是方程组 (I) 的一个基础解系，它也是方程组 (II) 的解，将它代入 (II) 解得 $b=0$, $c=1$ 或 $b=1$, $c=2$, 但当 $b=0$, $c=1$ 时，$r(B)=1\neq r(A)$, 舍去. 所以 $a=2$, $b=1$, $c=2$.

7. 设 n 元线性方程组 $AX=\beta$, 其中

$$A=\begin{pmatrix} 2a & 1 & & \\ a^2 & 2a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & a^2 & 2a \end{pmatrix},$$

$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, $\beta=(1,0,\cdots,0)^T$.

(1) 证明行列式 $\det A=(n+1)a^n$;

(2) 当 a 为何值时，方程组有唯一解？并求 x_1.

(3) 当 a 为何值时，方程组有无穷多解？求通解.

证明 (1) 记 $D_n=\det A$, 将 A 的行列式按第一列展开易得 $D_n=2aD_{n-1}-a^2D_{n-2}$, 因此， $\det A=D_n=(n+1)a^n$.

(2) 当 $\det A=(n+1)a^n\neq 0$, 即 $a\neq 0$ 时，方程组有唯一解. 且由 Cramer 法则，易得 $x_1=\frac{n}{(n+1)a}$;

(3) 当 $a=0$ 时，方程组有无穷多解. 此时

$$(A,\beta)\rightarrow\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以通解为 $(c,1,0,\cdots,0)^T$, 其中 c 是 F 中的任意数.

8. 已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1 \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1 \\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1 \end{cases}$$

有三个线性无关的解.

(1) 证明方程组的系数矩阵 A 的秩为 2;

(2) 求 a,b 的值和方程组的通解.

证明 (1) 因为

$$\overline{A}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 4-2a & 4a+b-5 & 4-2a \end{pmatrix}.$$

所以 $r(A)\geq 2$, 又原方程组有三个线性无关的解，对应齐次线性方程组至少有两个线性无关解，则 $r(A)\leq 4-2=2$, 所以可得方程组的系数矩阵 A 的秩为 2;

(2) 因 $r(A)=2$, 所以 $4-2a=0$ 且 $4a+b-5=0$, 求得 $a=2, b=-3$. 这时 $\eta=(2,-3,0,0)^T$ 为方程组的一个特解， $\eta_1=(-2,1,1,0)^T, \eta_2=(4,-5,0,1)^T$ 为对应齐次线性方程组的一个基础解系，因此原方程组通解为 $\eta+a_1\eta_1+a_2\eta_2$, 其中 a_1, a_2 是 F 中的任意数.

9. 设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix},\quad \alpha_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(1) 求满足 $A\alpha_2=\alpha_1$, $A^2\alpha_3=\alpha_1$ 的所有向量 α_2, α_3;

(2) 对 (1) 的任意向量 α_2, α_3, 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

解 直接计算得

$$A^2=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(A,\alpha_1)\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},(A^2,\alpha_1)\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

则 $AX=\alpha_1$ 的通解为： $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,)^T+k(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,)^T$, $A^2X=\alpha_1$ 的通解为: $(-\frac{1}{2},0,0)^T+k_1(-1,1,0)^T+k_2(0,0,1)^T$.

所以, 满足 $A\alpha_2=\alpha_1$ 的 $\alpha_2=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,)^T+k(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,)^T=(\frac{k}{2}-\frac{1}{2},-\frac{k}{2}+\frac{1}{2},k)^T$; 满足 $A^2\alpha_3=\alpha_1$ 的 $\alpha_3=(-\frac{1}{2},0,0)^T+k_1(-1,1,0)^T+k_2(0,0,1)^T=(-k_1-\frac{1}{2},k_1,k_2)^T$, 其中 k, k_1, k_2 是 F 中的任意数.

(2)

$$\det(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\det\begin{pmatrix} -1 & \frac{k}{2}-\frac{1}{2} & -k_1-\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{k}{2}+\frac{1}{2} & k_1 \\ -2 & k & k_2 \end{pmatrix}=-\frac{1}{2},$$

所以对 (1) 的任意向量 α_2, α_3, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关. □

10. 设线性方程组

$$(I)\ \begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$$

与方程组

$$(II)\ x_1+2x_2+x_3=a-1$$

有公共解，求 a 的值和所有公共解.

解 记 $(I),(II)$ 的系数矩阵分别为 A,B,

$$A\to\left(\begin{array}{ccc}1&0&2-a\\0&1&a-1\\0&0&a^2-3a+2\end{array}\right),\overline{B}=\left(\begin{array}{cccc}1&2&1&a-1\end{array}\right).$$

当 $a\neq 1,2$ 时，方程组 (I) 只有零解，但方程组 (II) 没有零解，此时没有公共解.

当 $a=1$ 时，方程组 (I) 的基础解系为 $\eta=(-1,0,1)^T$, 方程组 (II) 的基础解系为 $\eta_1=(-2,1,0)^T,\eta_2=(-1,0,1)^T$. 令 $k\eta=k_1\eta_1+k_2\eta_2$, 解得 $k_1=0,k=k_2$, 此时公共解为 $k(-1,0,1)^T$. 其中 k,k_1,k_2 是 F 中的任意数.

当 $a=2$ 时，方程组 (I) 的基础解系为 $\eta=(0,-1,1)^T$, 方程组 (II) 的特解 $\gamma=(1,0,0,)$, 对应齐次线性方程组的基础解系为 $\eta_1=(-2,1,0)^T,\eta_2=(-1,0,1)^T$. 令 $k\eta=\gamma+k_1\eta_1+k_2\eta_2$, 解得 $-k_1=k=k_2=-1$, 此时公共解为 $(0,1,-1)^T$.

注：$(I),(II)$ 的公共解也就是联立 $(I),(II)$ 的线性方程组

$$\left\{\begin{array}{l}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+ax_3=0\\x_1+4x_2+a^2x_3=0\\x_1+2x_2+x_3=a-1\end{array}\right.$$

的解.

11. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵， B 是 $n\times m$ 矩阵， $m<n$. 若 $AB=E$, 求证 B 的列向量线性无关.

证明 因为 E 为 m 阶单位阵，所以 $m\le r(E)=r(AB)\le r(B)\le m$, 因此 $r(B)=m$, 即得 B 的列向量线性无关. □

12. 设 $A\in F^{n\times n}$, $A^{m-1}\neq 0, A^m=0$. 证明:存在 $\alpha\in F^n$, 使得 $\alpha,A\alpha,A^2\alpha,\cdots,A^{m-1}\alpha$ 线性无关.

证明 由 $A^{m-1}\neq 0$ 知 A^{m-1} 至少存在一列不为零，不妨设第 j 列不为零，记这一列为 ξ 下证 ε_j 就是我们要找的 α. 设 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使得

$$k_1\varepsilon_j+k_2A\varepsilon_j+\cdots+k_mA^{m-1}\varepsilon_j=0,\tag{1}$$

对 (1) 两边同时左乘以 A^{m-1}. 由 $A^m=0$, 可得 $k_1A^{m-1}\varepsilon_j=k_1\xi=0$, 从而 $k_1=0$. 此时 (1) 变为

$$k_2A\varepsilon_j+\cdots+k_mA^{m-1}\varepsilon_j=0, \tag{2}$$

再对 (2) 两边同时左乘 A^{m-2}, 可得 $k_2A^{m-1}\varepsilon_j=k_2\xi=0$, 得到 $k_2=0$. 依此类推可得 $k_1=k_2=\cdot=k_m$, 即证 $\varepsilon_j,A\varepsilon_j,A^2\varepsilon_j,\cdots,A^{m-1}\varepsilon_j$ 线性无关. □

13. 已知两个向量组有相同的秩, 且其中一个可由另一个线性表出. 证明这两个向量组等价.

证明 设 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)=r$, 不妨设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表出. 则 $r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)=r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$, 所以 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 也可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出. □

14. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵, 设 B 是 $n\times s$ 矩阵. 求证: $r(AB)\geq r(A)+r(B)-n$.

证明 因为

$$\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ A & E_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -E_n & B \\ A & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & B \\ 0 & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -E_n & 0 \\ 0 & AB \end{pmatrix}.$$

所以

$$r(A)+r(B)\leq r\begin{pmatrix} -E_n & B \\ A & 0 \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} -E_n & 0 \\ 0 & AB \end{pmatrix}=n+r(AB),$$

故 $r(AB)\geq r(A)+r(B)-n$. □

15. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵, 且 $r(A)=n$. 证明: 存在 $n\times m$ 矩阵 B, 使得 $BA=E_n$.

证明 因为 $r(A)=n$, 所以存在可逆矩阵 $P_{m\times m},Q_{n\times n}$ 使得

$$A=P\begin{pmatrix} E_n \\ 0 \end{pmatrix}Q=P\begin{pmatrix} Q \\ 0 \end{pmatrix},$$

令 $B_{n\times m}=\begin{pmatrix} Q^{-1} & 0 \end{pmatrix}_{n\times m}P^{-1}_{m\times m}$, 则 $BA=E_n$ 且 B 是 $n\times m$ 矩阵. □

16. 设 A,B 都是 $m\times n$ 矩阵. 证明:

(1) 方程组 $AX=0$ 的解都是方程组 $BX=0$ 的解的充分必要条件是 B 的行向量组可以由 A 的行向量组线性表出;

(2) 方程组 $AX=0$ 和方程组 $BX=0$ 同解的充分必要条件是 A 的行向量组与 B 的行向量组等价.

证明：(1) 方程组 $AX=0$ 的解都是方程组 $BX=0$ 的解的充分必要条件是方程组 $AX=0$ 与方程组 $\begin{cases} AX=0 \\ BX=0 \end{cases}$ 同解. 注意到 $\begin{cases} AX=0 \\ BX=0 \end{cases}$ 的解必为 $AX=0$ 的解，因此方程组 $AX=0$ 与方程组 $\begin{cases} AX=0 \\ BX=0 \end{cases}$ 同解的充分必要条件是 $r(A)=r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ 的充分必要条件是 B 的行向量可由 A 的行向量线性表出.

(2) 由 (1) 即得结论. □

(万琴解答)