§5.5 多项式函数

思考 显然有重根必有重因式，反之如何？

解 反之不然. 例如在 $\mathbb{R}[x]$ 中， $f(x) = (x^2+1)^2$ 有 2 重因式，但在 $\mathbb{R}$ 上没有根.

习题

1. $\sin x$ 不是 $\mathbb{R}$ 上多项式.

证明 因为 $y = \sin x$ 在实数域内有无穷多个互异根 $k\pi(k \in \mathbb{Z})$, 而实数域内的 n 次多项式最多 n 个根，所以 $y = \sin x$ 在实数域内不能表示为 x 的多项式.

2. 求 $f(x) = (x-2)^{2011}(x^2-x+1)^{2012}$ 的展开式中各项系数之和.

解 因为 $f(x)$ 的展开式中各项系数之和为 $f(1)$, $f(x)$ 的展开式中偶次项系数之和减去奇次项系数之和为 $f(-1)$. 所以题中展开式中各项系数之和为 $f(1) = (1-2)^{2011}(1^2-1+1)^{2012} = -1$.

3. 用综合除法将 $f(x) = x^4+2x^3-3x^2+1$ 改写为关于 $x+1$ 的多项式.

解 由综合除法

	1	2	-3	0	1
-1		-1	-1	4	-4
	1	1	-4	4	-3
-1		-1	0	4	
	1	0	-4	8	
-1		-1	1		
	1	-1	-3		
-1		-1			
	1	-2			

所以 $f(x) = (x+1)(x^3+x^2-4x+3)-2 = (x+1)^4-2(x+1)^3-3(x+1)^2+8(x+1)-3$.

4. 设 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$, 若 $1+\sqrt{2}$ 是 $f(x)$ 的根，则 $1-\sqrt{2}$ 也是 $f(x)$ 的根.

证明 因为 $(x-(1+\sqrt{2}))(x-(1-\sqrt{2}))=x^2-2x-1$. 所以 $p(x)=x^2-2x-1$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 上不可约. 而 $p(x)$ 和 $f(x)$ 在 $\mathbb{C}$ 上有公共根 $1+\sqrt{2}$, 所以 $p(x)|f(x)$. 故 $1-\sqrt{2}$ 也是 $f(x)$ 的根.

5. 设 $0\neq f(x)\in F[x]$ 且 $f(x)|f(x^m)$, 这里 m 是大于 1 的整数. 求证: $f(x)$ 的根只能是 0 或 1 的某个方根.

证明 在 $\mathbb{C}[x]$ 上考虑 $f(x)$. 设 α 是 $f(x)$ 的根, 则 $f(\alpha)=0$. 因为 $f(x)$ 整除

也

是 $f(x)$ 的根. 同理可知 $\alpha^{m^2},\alpha^{m^3},\cdots$ 都是 $f(x)$ 的根. 而多项式的互异根只能有限个, 因此必有 $\alpha^{m^l}=\alpha^{m^k}$. 从而 $\alpha=0$, 或者 $\alpha^{m^{l-k}}=1$. 即或 α 是 0 或 α 是 1 的某个方根.

6. 求证 b 是 $f(x)$ 的 k 重根的充分必要条件是

$$f(b)=f'(b)=f''(b)=f^{(3)}(b)=\cdots=f^{(k-1)}(b)=0,\quad f^{(k)}(b)\neq 0.$$

证明 必要性. 因为 b 是 $f(x)$ 的 k 重根, 所以 $f(x)=(x-b)^k g(x)$, 而 $g(x)$ 不含因式 $(x-b)$. 对 $f(x)$ 求导可发现, $f^{(i)}(x)=(x-b)^{k-i}g_i(x)$, 而 $g_i(x)$ 不含因式

所

以 $f(b)=f'(b)=\cdots=f^{(k-1)}(b)=0$, $f^{(k)}(b)\neq 0$.

充分性. 因为 $f(b)=0$, 所以 b 是 $f(x)$ 的根, 不妨设 b 是 $f(x)$ 的 l 重根, $l\geq 1$. 若 $l<k$, 则由必要性可知 $f^{(l)}(b)\neq 0$, 与已知矛盾; 若 $l>k$, 则由必要性可知 $f^{(k)}(b)=0$, 与已知矛盾. 所以 $l=k$.