习题 2.2 n 维列向量

1. 设三维列向量 $\alpha_1=(1+\lambda,1,1)^T$, $\alpha_2=(1,1+\lambda,1)^T$, $\alpha_3=(1,1,1+\lambda)^T$, $\beta=(0,\lambda,\lambda^2)^T$. 问 λ 取何值时,

(1) β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，且表示法唯一;

(2) β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出且表示法不唯一;

(3) β 不可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出.

解：记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),\overline{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)$. 则有

$$\begin{aligned}\overline{A}&=\begin{pmatrix}1+\lambda&1&1&0\\1&1+\lambda&1&\lambda\\1&1&1+\lambda&\lambda^2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1+\lambda&1&\lambda\\0&1-(\lambda+1)^2&-\lambda&-\lambda(\lambda+1)\\0&-\lambda&\lambda&\lambda^2-\lambda\end{pmatrix}\\&\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1+\lambda&1&\lambda\\0&-\lambda&\lambda&\lambda(\lambda-1)\\0&\lambda^2+2\lambda&-\lambda&-\lambda^2-\lambda\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1+\lambda&1&\lambda\\0&-\lambda&\lambda&\lambda(\lambda-1)\\0&0&\lambda^2+\lambda&\lambda(\lambda^2-3)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

当 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda^2+\lambda\neq 0$ 时， $r(A)=r(\overline{A})=3$, 方程组有且仅有一解，则 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，且表示法唯一;

当 $\lambda=0$ 时， $r(A)=r(\overline{A})=1$, 故方程组有无穷多解. 则 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，且表示法不唯一;

当 $\lambda=-1$ 时， $r(A)<r(\overline{A})$, 方程组无解. 故 β 不可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出.

2. 设三阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{pmatrix},$$

三维列向量 $\alpha=(a,1,1)^T$. 已知 $A\alpha$ 与 α 线性相关. 求 a 的值.

解：由

$$A\alpha=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\2a+3\\3a+4\end{pmatrix},$$

由 $A\alpha$ 与 α 线性相关，得 $A\alpha=k\alpha$, 所以 $a=ka,2a+3=ka,3a+4=ka$, 得 $k=1,a=-1$.

3. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，判断 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$, $\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$, $\cdots$, $\beta_{n-1}=\alpha_{n-1}+\alpha_n$, $\beta_n=\alpha_n+\alpha_1$ 的线性相关性.

解：(法一) 设 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_n\beta_n=0$, 整理得 $(k_1+k_n)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+\cdots+(k_{n-1}+k_n)\alpha_n=0$. 因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，因此上式成立的充要条件是 $k_1+k_n=0$, $k_1+k_2=0$, $\cdots$, $k_{n-1}+k_n=0$. 从而当 n 为奇数时，$-k_n=k_1=-k_2=k_3=\cdots=k_n=0$, 即方程组只有零解；当 n 为偶数时，$-k_n=k_1=-k_2=k_3=\cdots=k_{n-1}=k_n=k\in F$, 有无穷多解.

(法二) 由已知条件可形式上记 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)A$, 其中

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

则由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，得 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关的充要条件是 A 可逆. 又

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}=1+(-1)^{s+1}=\begin{cases} 2 & ,\ \text{当 } s \text{ 为奇数时}\\ 0 & ,\ \text{当 } s \text{ 为偶数时} \end{cases}$$

故 (1) 当 s 为奇数时，$r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=r(A)=s$, 此时 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关；

(2) 当 s 为偶数时，$r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=r(A)<s$, 此时 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性相关.

4. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s>1)$ 线性无关，且 $\beta_i=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_i(i=1,2,\cdots,s)$. 证明：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关.

证明：由已知条件可形式上记 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)A$, 其中

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，得 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关的充要条件是 A 可逆. 直接计算得 $\det A=1$, 因此 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 也是线性无关的. □

5. 设向量组 $\alpha_1=(1,0,2,3)^T$, $\alpha_2=(1,1,3,5)^T$, $\alpha_3=(1,-1,t+2,1)^T$, $\alpha_4=(1,2,4,t+9)^T$ 线性相关. 求 t.

解：由 $\alpha_1=(1,0,2,3)^T$, $\alpha_2=(1,1,3,5)^T$, $\alpha_3=(1,-1,t+2,1)^T$, $\alpha_4=(1,2,4,t+9)^T$ 线性相关知，存在一组不全为零的常数 x_1,x_2,x_3,x_4, 使得 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=0$.

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & t+2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & t+9 \end{vmatrix}=(t+1)(t+2)=0,$$

故 $t=-1$ 或 $t=-2$.

6. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}(s\geq 3)$ 线性相关，向量组 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_s$ 线性无关. 问

(1) α_1 能否由 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{s-1}$ 线性表示？

(2) α_s 能否由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$ 线性表示？

解:由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}(s\geq 3)$ 线性相关,存在一组不全为零的数 $x_1,x_2,\cdots,x_{s-1}$, 使得 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_{s-1}\alpha_{s-1}=0$.

(1) 若 $x_1=0$, 则 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{s-1}$ 线性无关（因 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_s$ 线性无关）矛盾；所以 $x_1\neq 0$, 从而 α_1 能由 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{s-1}$ 线性表示.

(2) α_s 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$ 线性表示. 若不然，α_s 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$ 线性表示，由 (1) 知，α_1 能由 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{s-1}$ 线性表示，从而 α_s 能由 $\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$ 线性表示，与 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_s$ 线性无关矛盾. □

(李小凤解答)