## §8.4 正交变换，正交矩阵 习题参考答案

1. (1) 设 $Q$ 是奇数阶正交矩阵，且 $\det Q = 1$, 则 1 是 $Q$ 的一个特征值;

(2) 设 $Q$ 是 $n$ 阶正交矩阵，且 $\det Q = -1$, 则 $-1$ 是 $Q$ 的一个特征值.

证明：由定理 8.4.3, $Q$ 正交相似于矩阵

$$P = \mathrm{diag}(E_r, -E_s, \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \cos\theta_l & -\sin\theta_l \\ \sin\theta_l & \cos\theta_l \end{pmatrix}),$$

其中 $r+s+2l=n$. 因为 $n$ 为奇数，故 $r+s$ 为奇数，表明 $Q$ 必有实特征值 1 或 $-1$. 注意到

$$\det Q = \det P = \det E_r \det(-E_s)\prod_{i=1}^{l}\det\begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix} = (-1)^s = 1.$$

故 $s$ 为偶数，从而 1 必是 $Q$ 的一个特征值.

(2) 同 (1), $\det Q = (-1)^s = -1$, 故 $s$ 为奇数，知 $-1$ 必是 $Q$ 的一个特征值. □

2. 设 $\eta$ 是欧氏空间中单位向量，定义

$$\varphi(\alpha) = \alpha - 2(\eta, \alpha)\eta.$$

证明：

(1) $\varphi$ 是正交变换 (称为镜面反射);

(2) $\varphi^2 = \mathrm{id}_V$;

(3) 存在 $V$ 的一个标准正交基，使得 $\varphi$ 在这个标准正交基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & E_{n-1} \end{pmatrix}$.

证明：(1) 取单位向量 $\varepsilon_1 = e$, 将它扩为 $V$ 的一个标准正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$. 直接计算得 $\varphi(\varepsilon_1) = -\varepsilon_1$, $\varphi(\varepsilon_i) = \varepsilon_i$, $(1 < i \le n)$. 从而 $\varphi$ 在这个标准正交基下的矩阵为 $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & E_{n-1} \end{pmatrix}$. 该矩阵为正交阵，所以 $\varphi$ 是正交变换.

(2) 由 (1) 知道 $\varphi$ 在上述标准正交基下的矩阵为 $P$, 直接计算知 $P^2 = E$, 由同构对应得 $\varphi^2 = \mathrm{id}_V$.

(3) 见 (1). □

3. 如果 $n$ 维欧氏空间 $V$ 上的正交变换 $\varphi$ 以 1 作为一个特征值，且属于特征值 1 特征子空间 $V_1$ 的维数为 $n-1$, 那么 $\varphi$ 是镜面反射.

证明：设 $\varphi$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. 因 $\varphi$ 是正交变换，则 $\varphi$ 特征值的模长为 1, 并且 $\varphi$ 的复特征值必成对出现. 由已知条件，$\varphi$ 的属于特征值 1 特征子空间 $V_1$ 的维数为 $n-1$, 故 1 至少是 $\varphi$ 的 $n-1$ 重特征值，不妨设 $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 1$, 从而 $\lambda_n$ 只能是 1 或 $-1$. 现证 $\lambda_1 = -1$. 若不然 $\lambda_1 = 1$, 则由正交变换的标准形理论知 $\varphi$ 在某个标准正交基下的矩阵为单位阵，从而 $\varphi = \mathrm{id}_V$, 与设属于特征值 1 特征子空间 $V_1$ 的维数为 $n-1$ 矛盾. 因此 $-1$ 为 $\varphi$ 的一个特征值，$\xi_1$ 为其相应的一个单位特征向量. 再设 $V_1$ 的一个标准正交基是 $\xi_2, \cdots, \xi_n$, 则 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是 $V$ 的一个标准正交基，且 $\varphi(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}$. 即 $\varphi(\xi_1) = -\xi_1$, $\varphi(\xi_i) = \xi_i$ $(1 < i \le n)$.

从而对任意 $\alpha \in V$, $\alpha = \sum_{i=1}^n k_i\xi_i$. $\varphi(\alpha) = \varphi(\sum_{i=1}^n k_i\xi_i) = \sum_{i=1}^n k_i\varphi(\xi_i) = -k_1\xi_1 + \sum_{i=2}^n k_i\xi_i = -2k_1\xi_1 + \sum_{i=1}^n k_i\xi_i = -2(\xi_1,\alpha)\xi_1 + \alpha = \alpha - 2(\xi_1,\alpha)\xi_1$. 由题 2 知 $\varphi$ 是镜面反射. $\square$

4. 设 $\varphi$ 是 $n$ 维欧式空间 $V$ 上的变换，对于任意的 $\alpha,\beta \in V$ 都有

$$(\varphi(\alpha),\varphi(\beta)) = (\alpha,\beta),$$

求证: $\varphi$ 是线性映射，从而必是正交变换.

证明：因为

$$\begin{aligned}
&(\varphi(\alpha+\beta)-\varphi(\alpha)-\varphi(\beta),\varphi(\alpha+\beta)-\varphi(\alpha)-\varphi(\beta))\\
=&(\varphi(\alpha+\beta),\varphi(\alpha+\beta))-(\varphi(\alpha+\beta),\varphi(\alpha))-(\varphi(\alpha+\beta),\varphi(\beta))-(\varphi(\alpha),\varphi(\alpha+\beta))\\
&+(\varphi(\alpha),\varphi(\alpha))+(\varphi(\alpha),\varphi(\beta))-(\varphi(\beta),\varphi(\alpha+\beta))+(\varphi(\beta),\varphi(\alpha))+(\varphi(\beta),\varphi(\beta))\\
=&(\alpha+\beta,\alpha+\beta)-(\alpha+\beta,\alpha)-(\alpha+\beta,\beta)-(\alpha,\alpha+\beta)\\
&-(\beta,\alpha+\beta)+(\alpha,\alpha)+(\alpha,\beta)+(\beta,\alpha)+(\beta,\beta)\\
=&0,
\end{aligned}$$

所以 $\varphi(\alpha+\beta)-\varphi(\alpha)-\varphi(\beta)=0$, 从而 $\varphi(\alpha+\beta)=\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)$. 同理可证 $\varphi(k\alpha)=k\varphi(\alpha)$. 所以 $\varphi$ 是线性映射，故 $\varphi$ 必是正交变换. $\square$

5. 设 $\varphi$ 是欧式空间 $V$ 的正交变换， $U$ 是 $\varphi-$ 不变子空间，则 $U^\perp$ 也是 $\varphi-$ 不变子空间.

证明：(法一) 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m$ 为 $U$ 的一个标准正交基, 将其扩为 $V$ 的一个标准正交基 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$, 则 $U^\perp = \langle \xi_{m+1},\cdots,\xi_n\rangle$, $V = U \bigoplus U^\perp$. 由假设 $U$ 是 $\varphi-$ 不变子空间，从而 $\varphi(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n) = (\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C\end{pmatrix}$. 又因为 $\varphi$ 是正交变换，则 $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C\end{pmatrix}$ 为正交阵，即 $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C\end{pmatrix}^T$, 直接计算即得 $C=0$, 因此 $U^\perp$ 也是 $\varphi-$ 不变子空间.

(法二) 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m$ 为 $U$ 的一个标准正交基，将其扩为 $V$ 的一个标准正交基 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$, 则 $U = \langle\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m\rangle$, $U^\perp = \langle\xi_{m+1},\cdots,\xi_n\rangle$. 因为 $\varphi$ 正交, 从而 $\varphi(\xi_1),\varphi(\xi_2),\cdots,\varphi(\xi_n)$ 是 $V$ 的一个标准正交基. 又因为 $U$ 是 $\varphi-$ 不变子空间，所以 $\varphi(\xi_1),\varphi(\xi_2),\cdots,\varphi(\xi_m)\in U$, 且由正交知它们线性无关, 个数为 $U$ 的维数, 因此是 $U$ 的一个基. 此外, $\varphi(\xi_{m+1}),\varphi(\xi_{m+2}),\cdots,\varphi(\xi_n)$ 与 $\varphi(\xi_1),\varphi(\xi_2),\cdots,\varphi(\xi_m)$ 均正交，故 $\varphi(\xi_{m+1}),\varphi(\xi_{m+2}),\cdots,\varphi(\xi_n)\in U^\perp$, 从而 $U^\perp$ 也是 $\varphi-$ 不变子空间.

(法三) 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m$ 为 $U$ 的一个标准正交基，将其扩为 $V$ 的一个标准正交基 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$. 因 $\varphi$ 是正交变换，因此 $\varphi(\xi_1),\varphi(\xi_2),\cdots,\varphi(\xi_n)$ 也是 $V$ 的一个标准正交基. 又 $U$ 是 $\varphi-$ 子空间，因此 $\varphi(\xi_1),\varphi(\xi_2),\cdots,\varphi(\xi_m)\in U$, 注意到它们正交,因此线性无关且个数为 $U$ 的维数,故 $\varphi(\xi_1),\varphi(\xi_2),\cdots,\varphi(\xi_m)$ 构成 $U$ 的一个基.

对任意 $\alpha\in U^\perp$, $\beta\in U$, $\beta=\sum_{i=1}^m a_i\varphi(\xi_i)$, 注意到 $\varphi$ 是正交变换，因此

$$(\varphi(\alpha),\beta) = (\varphi(\alpha),\sum_{i=1}^m a_i\varphi(\xi_i)) = \sum_{i=1}^m a_i(\varphi(\alpha),\varphi(\xi_i)) = \sum_{i=1}^m a_i(\alpha,\xi_i) = 0,$$

故 $\varphi(\alpha)\in U^\perp$, 这就证明了 $U^\perp$ 也是 $\varphi-$ 不变子空间.

注：该部分证明也可改为证明对 $i=1,2,\cdots,m$, $(\varphi(\alpha),\varphi(\xi_i)) = (\alpha,\xi_i) = 0$. $\square$

(黄雪娥解答)