习题 1.2 矩阵和运算

1. 设

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&3&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&3&2\end{pmatrix}.$$

求 $A+B$, $A-B$, $3A-2B$.

解：$A+B=\begin{pmatrix}3&1&-2\\2&6&3\end{pmatrix}$, $A-B=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\2&0&-1\end{pmatrix}$, $3A-2B=\begin{pmatrix}-1&-2&-1\\6&3&-1\end{pmatrix}$.

2. 计算

(1) $\begin{pmatrix}1&0\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}^n$

(3) $\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}^n$　　(4) $\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&-2&4\\-1&1&-2\end{pmatrix}^n$.

解：(1) $\begin{pmatrix}1&0\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times2+0\times3&1\times1+0\times2\\1\times2+3\times3&1\times3+3\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\11&9\end{pmatrix}$.

(2) 可证 $\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos n\theta&\sin n\theta\\-\sin n\theta&\cos n\theta\end{pmatrix}$.

指数为 $n=1$ 时，显然成立.

归纳假设结论对 $n-1$ 成立.

指数为 n 时,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}^n&=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\cos(n-1)\theta&\sin(n-1)\theta\\-\sin(n-1)\theta&\cos(n-1)\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos n\theta&\sin n\theta\\-\sin n\theta&\cos n\theta\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

故得 $\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos n\theta&\sin n\theta\\-\sin n\theta&\cos n\theta\end{pmatrix}$.

(3) 直接计算得 $\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}$.

因此，当 n 为偶数时

$$\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}2^n&0&0&0\\0&2^n&0&0\\0&0&2^n&0\\0&0&0&2^n\end{pmatrix},$$

当 n 为奇数时

$$\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}2^{n-1}&-2^{n-1}&-2^{n-1}&-2^{n-1}\\-2^{n-1}&2^{n-1}&-2^{n-1}&-2^{n-1}\\-2^{n-1}&-2^{n-1}&2^{n-1}&-2^{n-1}\\-2^{n-1}&-2^{n-1}&-2^{n-1}&2^{n-1}\end{pmatrix}.$$

(4) 因 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}^2 = (-3)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, 所以

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}^n = (-3)^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $n > 2$, 计算 $A^n - 2A^{n-1}$.

解: 由 $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2A$, 所以

$$A^n - 2A^{n-1} = 2^{n-1}A - 2(2)^{n-2}A = 0.$$

4. 举例说明一般 $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ 不成立. 指出等式成立的充分必要条件并证明.

解: 令 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 但 $A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq (A+B)^2$.

$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ 的充分必要条件 $AB = BA$.

(必要性) 一方面直接计算知 $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$, 而已知 $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, 比较即得 $AB = BA$.

(充分性) 因 $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$, 又 $AB = BA$, 故 $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. □

5. 求与下列矩阵可交换的矩阵全体.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

解: (1) 设与 A 可交换的矩阵为 B, 则 B 是 2 阶方阵.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = E + C$, 其中 $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. 因为任意矩阵必与单位阵乘积可交换, 因此本题等价于求与 C 乘积可交换的矩阵.

设 $B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$. 直接计算, 可得

$$CB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}, BC = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

由 $CB = BC$, 即得 $a_2 = 0, a_1 = b_2$. 从而与 A 乘积可交换的矩阵形如 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$.

(2) 同 (1), $A = E + C$, 其中 $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 题目等价于求与 C 乘积可交换的矩阵.

设 $B=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$, 直接计算得

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a_3 & 0 & 2a_1 \\ 2b_3 & 0 & 2b_1 \\ 2c_3 & 0 & 2c_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 \end{pmatrix}.$$

所以 $a_3=c_1, a_2=c_2=b_1=b_3=0, a_1=c_3$, 即所求矩阵形如 $\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$.

6. 证明：(1) 对任意 n 阶方阵 A, $(A+A^T)$ 是对称阵，$(A-A^T)$ 是反对称阵;

(2) 任何一个方阵可以表为一个对称阵与一个反对称阵的和.

证明：(1) 直接计算可得 $(A+A^T)^T=A^T+(A^T)^T=A^T+A$, 且 $(A-A^T)^T=A^T-(A^T)^T=-(A-A^T)$, 因此 $(A+A^T)$ 是对称阵，$(A-A^T)$ 是反对称阵.

(2) 设 A 是任一方阵，令 $B=\frac{1}{2}(A+A^T)$, $C=\frac{1}{2}(A-A^T)$, 则 $A=B+C$, 且由 (1) 知 B 是对称阵，C 是反对称阵，命题得证. □

(李小风解答)