§3.2 基和维数

1. 在 F 上的线性空间 V 中，设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，在 F 中任取给定的数 $a_1,a_2,\cdots,a_s$. 证明： $\beta_1=\alpha_1+a_1\alpha_s$, $\beta_2=\alpha_2+a_2\alpha_s$, $\cdots$, $\beta_{s-1}=\alpha_{s-1}+a_{s-1}\alpha_s$, $\beta_s=\alpha_s$ 线性无关.

证明　设

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_s\beta_s=0,$$

将 $\beta_1=\alpha_1+a_1\alpha_s$, $\beta_2=\alpha_2+a_2\alpha_s$, $\cdots$, $\beta_{s-1}=\alpha_{s-1}+a_{s-1}\alpha_s$, $\beta_s=\alpha_s$ 带入整理得,

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+(a_1k_1+a_2k_2+\cdots+a_{s-1}k_{s-1}+k_s)\alpha_s=0.$$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关,所以 $k_1=k_2=\cdots=a_1k_1+a_2k_2+\cdot+a_{s-1}k_{s-1}+k_s=0$, 得： $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$, 所以， $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关. □

2. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和 β_1,β_2,β_3 满足

$$\beta_1=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3,\beta_3=-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,$$

求证：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 β_1,β_2,β_3 等价.

证明　只要证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可由 β_1,β_2,β_3 线性表出即可. 由已知条件，直接计算即得

$$\alpha_1=\frac{1}{2}\beta_1+\frac{1}{2}\beta_2,\alpha_2=\frac{1}{2}\beta_2+\frac{1}{2}\beta_3,\alpha_3=\frac{1}{2}\beta_1+\frac{1}{2}\beta_3.$$

即向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 也可由 β_1,β_2,β_3 线性表示，所以两者等价. □

3. 求 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 作为 $\mathbb{Q}$ 上线性空间的一个基和维数.

解　$1,\sqrt{2}$ 是 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 作为 $\mathbb{Q}$ 上线性空间的一个基，所以维数等于 2.

4. 设 A 是数域 F 上的 $m\times n$ 矩阵，且 $r(A)=r<n$. 求齐次线性方程组 $AX=0$ 的解空间的一个基和维数.

解 齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系就是其解空间的一个基, 因此 $AX=0$ 的解空间的维数为 $n-r$.

5. 求证数域 F 上的全体 n 阶上三角阵对于矩阵的加法和数乘构成 F 上的线性空间 V. 并求 V 的维数和一个基.

解 $E_{ij}, 1 \leq i \leq j \leq n$ 为 V 的一个基，故 $\dim V = \frac{1}{2}n(n+1)$.

6. 将 $\alpha_1 = (1,1,1,1)^T, \alpha_2 = (1,0,1,0)^T$ 扩充成为 $\mathbb{R}^4$ 的一个基.

解 令 $\alpha_3 = (1,0,0,0)^T$, $\alpha_4 = (0,1,0,0)^T$, 因为

$$\det(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0.$$

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为 V 的一个基.

(万琴解答)