§9.2 二次型的规范形，惯性定理　习题参考答案

1. 设 A 为 $\mathbb{C}$ 上对称阵，$\det A \neq 0$ 时，A^*, A^{-1} 均 A 与合同.

证明：因 $\mathbb{C}$ 上两同阶对称阵合同的充分必要条件是它们的秩相等. 当 $\det A \neq 0$ 时，$r(A^*) = r(A^{-1}) = r(A) = n$, 故 A^*, A^{-1} 均 A 与合同. □

2. 设 A 为 n 阶复对称阵，且 A 的秩为 r, 求证：A 必可分解为 $A = B^TB$, 其中 B 是秩为 r 的 n 阶矩阵.

证明：因 A 为 n 阶复对称阵且秩为 r, 则存在可逆阵 C, 使得 $A = C^T\begin{pmatrix} E_r & \\ & 0 \end{pmatrix}C$. 令 $B = \begin{pmatrix} E_r & \\ & 0 \end{pmatrix}C$, 则 B 是秩为 r 的 n 阶矩阵且 $A = B^TB$. □

3. 确定二次型 $f(x,y,z) = ayz + bzx + cxy$ 的秩和符号差.

解：设 f 的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{c}{2} & \frac{b}{2} \\ \frac{c}{2} & 0 & \frac{a}{2} \\ \frac{b}{2} & \frac{a}{2} & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\det A = \frac{1}{4}abc$. 对 A 存在正交阵 Q, 使得 $Q^TAQ = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$. λ_i 即 A 的特征值，其非零特征值个数即 A 的秩，正负特征值个数即 A 的正负惯性指数，且 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$.

当 $a = b = c = 0$ 时，$r(A) = 0$, 符号差 $s = 0$;

当 a, b, c 中有一个或两个为零时，$1 < r(A) < 3$, 故特征值必有一个为 0 又不全为 0. 注意到 A 的特征值的和为 0, 因此 A 的另两个特征值必须一正一负，因此 $r(A) = 2$, $s = 0$.

当 a, b, c 全不为零时，$\det A \neq 0$, 故 $r(A) = 3$, A 的特征值为两正一负，或两负一正. 若 $abc < 0$, 则特征值为两正一负，符号差为 1; 若 $abc > 0$, 特征值两负一正，符号差为 -1.

4. 设 A 是 n 阶实可逆阵，求 $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{pmatrix}$ 的正负惯性指数.

解：(法一) 作下列合同变换：将 $(A^T)^{-1}$ 乘以 B 的第二行 (块) 加到第一行 (块) 上去，再将 A^{-1} 乘以 B 的第二列 (块) 加到第一列 (块) 上，得到矩阵 $\begin{pmatrix} 2E_n & A \\ A^T & 0 \end{pmatrix}$. 再以 $-\frac{1}{2}A^T$ 乘以第一行 (块) 后加到第二行 (块), 以 $-\frac{1}{2}A$ 乘以第一列 (块) 加到第二列 (块) 上，得 $\begin{pmatrix} 2E_n & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}A^TA \end{pmatrix}$. 即

$$\begin{pmatrix} E_n & -\frac{1}{2}A \\ 0 & E_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ A^{-1} & E_n \end{pmatrix}^T B \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ A^{-1} & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & -\frac{1}{2}A \\ 0 & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2E_n & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}A^TA \end{pmatrix}.$$

显然这是一个合同变换. 又因为 A 是可逆阵，因此 A^TA 是正定阵，故 $-\frac{1}{2}A^TA$ 是负定阵，所以 B 的正负惯性指数和负惯性指数都是 n.

(法二) 因 $\begin{pmatrix} \lambda E_n & -A \\ -A^T & \lambda E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & A \\ 0 & \lambda E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda E_n & 0 \\ -A^T & \lambda^2 E_n - A^TA \end{pmatrix}$, 故 $f_B(\lambda) = \det(\lambda^2 E_n - A^TA)$. 而 A 是可逆阵，因此 A^TA 是正定阵，其特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 所以 B 的特征值为 $\pm\sqrt{\lambda_1}$, $\pm\sqrt{\lambda_2}$, $\cdots$, $\pm\sqrt{\lambda_n}$. 进而 B 的正负惯性指数都是 n.

5. 设 A 是 n 阶实可逆对称阵，A_{ij} 是 A 中的元素 a_{ij} 的代数余子式，$(i, j = 1, 2, \cdots, n)$, 考虑二次型 $f(x_1, \cdots, x_n) = \sum\sum \frac{A_{ij}}{\det A}x_ix_j$.

(1) 写出该二次型的矩阵，并证明它是 A^{-1}.

(2) 二次型 $g(x_1,\cdots,x_n)=(x_1,\cdots,x_n)A(x_1,\cdots,x_n)^T$ 与 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的规范性是否合同？说明理由.

解：(1) A 为 n 阶可逆实对称矩阵， $A_{ij}=A_{ji}$, 故 A^* 也是可逆实对称阵. 则二次型对应的矩阵为：

$$\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = A^{-1}.$$

(2) 因 A^{-1} 的特征值是 A 的特征值的倒数，因此 A^{-1} 与 A 的正负特征值个数一样，进而 A^{-1} 与 A 的正负惯性指数一样，故 A^{-1} 与 A 合同.

(李小凤解答)