§4.6 不变子空间

习题

1. 设 V 是 4 维线性空间，φ 在基 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

求证：$U=\langle \xi_1+2\xi_2, \xi_2+\xi_3+2\xi_4\rangle$ 是 φ- 子空间.

证明　直接计算得 $\varphi(\xi_1+2\xi_2)=\xi_1+2\xi_3+2\xi_4+2\xi_2-2\xi_3-2\xi_4=\xi_1+2\xi_2\in U$, $\xi_2+\xi_3+2\xi_4=\xi_2-\xi_3-\xi_4+2\xi_1+4\xi_2-\xi_4-2\xi_1-4\xi_2+2\xi_3+4\xi_4=\xi_2+\xi_3+2\xi_4\in U$, 所以 U 是 $\varphi-$ 子空间. □

2. 设 φ,ψ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，且满足 $\varphi\psi=\psi\varphi$, 则 $\mathrm{Ker}\varphi$ 是 $\psi-$ 子空间，$\mathrm{Im}\varphi$ 是 $\psi-$ 子空间.

证明：(法一) 对任意 $\alpha\in\mathrm{Ker}\varphi$, $\varphi(\alpha)=0$. 因 ψ 是线性变换且 $\varphi\psi=\psi\varphi$, 所以 $\varphi(\psi(\alpha))=\psi(\varphi(\alpha))=\psi(0)=0$. 即 $\psi(\alpha)\in\mathrm{Ker}\varphi$, 因此 $\mathrm{Ker}\varphi$ 是 $\psi-$ 子空间.

对任意 $\beta\in\mathrm{Im}\varphi$, 存在 $\alpha\in V$, 使得 $\varphi(\alpha)=\beta$. 因 ψ 是 V 的线性变换，所以 $\psi(\alpha)\in V$. 又因为 $\varphi\psi=\psi\varphi$, 所以 $\psi(\beta)=\psi(\varphi(\alpha))=\varphi(\psi(\alpha))\in\mathrm{Im}\varphi$. 这就证明了 $\mathrm{Im}\varphi$ 是 $\psi-$ 子空间.

(法二) U 是 $\mathrm{Ker}\varphi$ 子空间的充要条件是 $\varphi(U)=0$. 显然 $\varphi(\mathrm{Ker}\varphi)=0$, 所以由 $\varphi\psi=\psi\varphi$ 及 ψ 是线性变换知 $\varphi(\psi(\mathrm{Ker}\varphi))=\psi(\varphi(\mathrm{Ker}\varphi))=\psi(0)=0$, 这就证明了 $\mathrm{Ker}\varphi$ 是 $\psi-$ 子空间.

因为 ψ 是 V 的线性变换，因此 $\psi(V)\subseteq V$. 又因为 $\varphi\psi=\psi\varphi$, 所以 $\psi(\mathrm{Im}\varphi)=\psi(\varphi(V))=\varphi(\psi(V))\subseteq\varphi(V)=\mathrm{Im}\varphi$. 故 $\mathrm{Im}\varphi$ 是 $\psi-$ 子空间. □

3. 设 φ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，U 是 V 的 $\varphi-$ 子空间. 若 φ 可逆. 求证：

(1) $\varphi|_U$ 可逆；

(2) U 是 $\varphi^{-1}-$ 子空间，且 $(\varphi|_U)^{-1}=(\varphi^{-1})|_U$.

证明：（法一）因 U 是 V 的 $\varphi-$ 子空间，所以 $\varphi|_U: U \to U$, $\alpha \mapsto \varphi(\alpha)$. 若 $\alpha \in U$, 使得 $0 = \varphi|_U(\alpha) = \varphi(\alpha)$. 因 φ 可逆，所以 $\alpha = 0$. 因此 $\varphi|_U$ 是单射，又其为线性变换，所以是满设，因此 $\varphi|_U$ 可逆.

因 $\varphi|_U$ 是 U 的可逆变换，所以对任意的 $\beta \in U$, 存在唯一的 $\alpha \in U$, 使得 $\beta = \varphi|_U(\alpha)$. 又因为 $\varphi|_U$ 是 φ 在 U 上的限制，所以 $\beta = \varphi|_U(\alpha) = \varphi(\alpha)$. 而 $\varphi|_U$ 和 φ 均可逆，因此 $(\varphi|_U)^{-1}(\beta) = \alpha = \varphi^{-1}(\beta)$, 这就证明了 U 是 $\varphi^{-1}-$ 子空间且 $(\varphi|_U)^{-1} = (\varphi^{-1})|_U$.

（法二）设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_r$ 是 U 的一个基，因 φ 可逆，所以 $\varphi(\xi_1), \varphi(\xi_2), \cdots, \varphi(\xi_r)$ 线性无关. 又因 U 是 $\varphi-$ 子空间，所以 $\varphi(\xi_1), \varphi(\xi_2), \cdots, \varphi(\xi_r) \in U$, 从而也是 U 的一个基.

若 $0 = \varphi|_U(\alpha)$, 即 $0 = \varphi(\alpha)$, 因 φ 可逆，因此 $\alpha = 0$. 另一方面，对任意 $\beta \in U$, $\beta = \sum_{i=1}^r a_i\varphi(\xi_i)$, 令 $\alpha = \sum_{i=1}^r a_i\xi_i$, 则 $\alpha \in U$ 且 $\beta = \varphi(\alpha) = \varphi|_U(\alpha)$. 从而 $\varphi|_U$ 可逆. 且 $\varphi|_U$ 和 φ 均可逆，所以对 β, $(\varphi|_U)^{-1}(\beta) = \alpha = \varphi^{-1}(\beta)$. 注意到 $\alpha \in U$, 说明 U 是 $\varphi^{-1}-$ 子空间且 $(\varphi|_U)^{-1} = (\varphi^{-1})|_U$.

（法三）将 U 的基 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_r$ 扩为 V 的一个基 $\xi_1, \cdots, \xi_r, \xi_{r+1}, \cdots, \xi_n$. 因 U 是 $\varphi-$ 子空间，所以

$$\varphi(\xi_1, \cdots, \xi_r, \xi_{r+1}, \cdots, \xi_n) = (\xi_1, \cdots, \xi_r, \xi_{r+1}, \cdots, \xi_n) \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},$$

其中 A_{11} 为 r 阶方阵. 且 $\varphi|_U(\xi_1, \cdots, \xi_r) = (\xi_1, \cdots, \xi_r)A_{11}$. 又 φ 是可逆变换，则

$$\varphi^{-1}(\xi_1, \cdots, \xi_r, \xi_{r+1}, \cdots, \xi_n) = (\xi_1, \cdots, \xi_r, \xi_{r+1}, \cdots, \xi_n) \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$$

$$(\varphi|_U)^{-1}(\xi_1, \cdots, \xi_r) = (\xi_1, \cdots, \xi_r)\, A_{11}^{-1},$$

说明 $\varphi|_U$ 可逆， U 是 $\varphi^{-1}-$ 子空间，且 $(\varphi|_U)^{-1} = \varphi^{-1}|_U$. □

4. 设 φ 是 n 维线性空间 V 的线性变换， U 是 V 的 $\varphi-$ 子空间. 证明

$$\dim(\mathrm{Ker}\varphi|_U) + \dim\varphi(U) = \dim U.$$

证明 （法一）因 U 是 V 的 $\varphi-$ 子空间，所以 $\varphi|_U$ 是 U 的线性变换，且

$$\mathrm{Im}\varphi|_U = \{\varphi|_U(\alpha) | \alpha \in U\} = \{\varphi(\alpha) | \alpha \in U\} = \varphi(U),$$

对 $\varphi|_U$ 用维数公式，得

$$\dim U = \dim(\mathrm{Ker}\varphi|_U) + \dim(\mathrm{Im}\varphi|_U) = \dim(\mathrm{Ker}\varphi|_U) + \dim\varphi(U).$$

(法二) 设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_r$ 是 $\mathrm{Ker}\varphi|_U$ 的一个基, 它们是 U 中线性无关向量, 可扩为 U 的一个基 $\xi_1, \cdots, \xi_r, \xi_{r+1}, \cdots, \xi_s$. 则只要证明 $\varphi(\xi_{r+1}), \cdots, \varphi(\xi_s)$ 是 $\varphi(U)$ 的一个基, 命题即得证. 事实上, 若 $a_{r+1}\varphi(\xi_{r+1}) + \cdots + a_s\varphi(\xi_s) = 0$, 则因为 φ 是线性变换, 所以 $\varphi(a_{r+1}\xi_{r+1} + \cdots + a_s\xi_s) = 0$. 注意到 $\varphi|_U$ 的定义有 $\varphi|_U(a_{r+1}\xi_{r+1} + \cdots + a_s\xi_s) = 0$. 该式说明 $a_{r+1}\xi_{r+1} + \cdots + a_s\xi_s \in \mathrm{Ker}\varphi|_U$. 故 $a_{r+1}\xi_{r+1} + \cdots + a_s\xi_s = a_1\xi_1 + \cdots + a_r\xi_r$, 而 $\xi_1, \cdots, \xi_r, \xi_{r+1}, \cdots, \xi_s$ 线性无关，因此 $a_i = 0$, $(i = 1, 2, \cdots, s)$. 此外，对任意 $\beta \in \varphi(U)$, 存在 $\alpha = \sum_{i=1}^{s} a_i\xi_i \in U$, 使得 $\beta = \varphi(\alpha) = \sum_{i=r+1}^{s} a_i\varphi(\xi_i)$. 这就证明了 $\varphi(\xi_{r+1}), \cdots, \varphi(\xi_s)$ 是 $\varphi(U)$ 的一个基. □

(林鹭解答)