习题 3.5 直和分解

1. 在 $\mathbb{R}^3$ 中，记

$$V_1=\{(a,a,c)^T\ |a,c\in\mathbb{R}\},V_2=\{(a,2a,a)^T\ |a\in\mathbb{R}\}.$$

求证：

(1) V_1,V_2 是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间；

(2) $\mathbb{R}^3=V_1\oplus V_2$.

证明： (1) 首先， $(0,0,0)\in V_1$, 故 V_1 是非空的．其次，对于任意的 $(a,a,c)^T$, $(b,b,d)^T\in V_1$, 有 $(a,a,c)^T+(b,b,d)^T=(a+b,a+b,c+d)^T\in V_1$. 即 V_1 关于加法封闭．最后，对于任意的 $b\in F$, $(a,a,c)^T\in V_1$, 总有 $b(a,a,c)^T=(ba,ba,bc)^T\in V_1$, 即 V_1 关于数乘封闭．综上， V_1 是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间．同理可证 V_2 是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间.

(2) (法一) 首先， $\dim V_1=2,\dim V_2=1$, 故 $\dim\mathbb{R}^3=3=\dim V_1+\dim V_2$; 其次，对任意的 $\alpha\in V_1\bigcap V_2$, 即 $\alpha=(a,a,c)^T=(b,2b,b)^T$, 解得 $a=b=c=0$, 从而 $\alpha=(0,0,0)^T$, 即 $V_1+V_2=V_1\oplus V_2$. 综上， $\mathbb{R}^3=V_1\oplus V_2$.

(法二) 对任意的 $\alpha=(a,b,c)^T\in\mathbb{R}^3$, 总有 $\beta=(2a-b,2a-b,c-b+a)^T\in V_1$, $\gamma=(b-a,2(b-a),b-a)^T\in V_2$, 使得 $\alpha=\beta+\gamma$, 即 $\mathbb{R}^3=V_1+V_2$; 此外， V_1 的基 $(1,1,0)^T$, $(0,0,1)^T$ 和 V_2 的基 $(1,2,1)^T$ 一起凑成 $\mathbb{R}^3$ 的基．因此， $R^3=V_1\oplus V_2$.
□

2. 设齐次线性方程组 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 的解空间为 V, 齐次线性方程组 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ 的解空间为 U. 求证： $F^n=V\oplus U$.

证明： (法一) 首先，对任意 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T\in F^n$, 令 $a=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, $\beta=(a,a,\cdots,a)^T\in V$, $\gamma=(a_1-a,a_2-a,\cdots,a_n-a)^T\in U$, 则 $\alpha=\beta+\gamma$, 因此 $F^n=V+U$. 其次，对任意 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T\in V\cap U$, $a_1=a_2=\cdots=a_n$, $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$, 因此 $a_i=0,i=1,2,\cdots,n$, 即 $\alpha=0$. 故 $F^n=V\oplus U$.

(法二) 首先，对任意 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T\in F^n$, 令 $a=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, $\beta=(a,a,\cdots,a)^T\in V$, $\gamma=(a_1-a,a_2-a,\cdots,a_n-a)^T\in U$, 则 $\alpha=\beta+\gamma$, 因此 $F^n=V+U$. 其次，直接验证知 $(1,1,\cdots,1)^T$ 和 $(1,-1,\cdots,0)^T$, $(0,1,-1,\cdots,0)^T$,

$\cdots, (0,\cdots,1,-1)^T$ 分别是 V 和 U 的一个基. 故 $\dim V=1$, $\dim U=n-1$, 从而 $\dim F^n=n=\dim V+\dim U$. 综上, $F^n=V\oplus U$. □

3. 设 $V=V_1\oplus V_2$, $V_2=U_1\oplus U_2$, 则 $V=V_1\oplus U_1\oplus U_2$.

证明：因为 $V=V_1\oplus V_2$, 所以对任意 $v\in V$, 存在唯一 $u\in V_1$, $w\in V_2$, 使得 $v=u+w$. 又因为 $V_2=U_1\oplus U_2$, 所以对 $w\in V_2$, 存在唯一 $u_1\in U_1, u_2\in U_2$, 使得 $u=u_1+u_2$. 故存在唯一的 u_1,u_2,w, 使得 $v=u_1+u_2+w$. 故 $V=V_1\oplus U_1\oplus U_2$. □

4. 设 $V_1,V_2,\cdots,V_m$ 是有限维空间 V 的子空间，求证： $V_1+V_2+\cdots+V_m=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_m$ 的充分必要条件是对于任意的 $i(1\le i\le m)$ 都有

$$V_i\cap(V_1+\cdots+V_{i-1}+V_{i+1}\cdots+V_m)=0.$$

证明： (必要性) 对任意的 $\alpha\in V_i\cap(V_1+\cdots+V_{i-1}+V_{i+1}\cdots+V_m)$, 即 $\alpha=\alpha_i=\alpha_1+\cdots+\alpha_{i-1}+a_{i+1}+\cdots+\alpha_n$, 其中 $a_k\in V_k$, $k=1,2,\cdots,n$, 则 $0=\alpha_1+\cdots+\alpha_{i-1}-\alpha_i+a_{i+1}+\cdots+\alpha_n=\sum_{i=1}^n 0$. 因为 $V_1+V_2+\cdots+V_m=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_m$, 0 向量的分解式唯一，故 $\alpha_i=0$, $i=1,2,\cdots,n$.

(充分性) 对任意 $\alpha\in V_1+V_2+\cdots+V_m$, 设 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m=\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_m$, 往证 $\alpha_i=\beta_i$.

事实上，由上式可得对任意的 i, $1\le i\le m$, 总有 $\alpha_i-\beta_i=\sum_{j\ne i}(\beta_j-\alpha_j)\in V_i\cap(V_1+\cdots+V_{i-1}+V_{i+1}\cdots+V_m)$. 由已知 $V_i\cap(V_1+\cdots+V_{i-1}+V_{i+1}\cdots+V_m)=0$, 故 $\alpha_i-\beta_i=0$, 即 $\alpha_i=\beta_i$. 由 i 的任意性, 知 α 的分解式唯一, 即 $V_1+V_2+\cdots+V_m=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_m$. □

5. 求证： n 维线性空间可以表示成为 n 个一维子空间的直和.

证明：设 V 是 F 上的 n 维线性空间， $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是 V 的一个基，往证 $V=\langle\xi_1\rangle\oplus\langle\xi_1\rangle\oplus\cdots\oplus\langle\xi_1\rangle$.

事实上，对任意的 $\alpha\in V$, 因 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是 V 的一个基，所以必存在唯一的 $a_i\in F$, 使得 $\alpha=\sum_{i=1}^n a_i\xi_i$, $a_i\xi\in\langle\xi_i\rangle$, $i=1,2,\cdots,n$. 故命题得证. □

(李小凤解答)