

## सरल बीजगणित

यहाँ 100 महत्वपूर्ण बिंदु हैं अंग्रेजी में रेखीय बीजगणित परीक्षा के बारे में, जो पहले उल्लिखित सामग्री के आधार पर हैं:

1. रेखीय बीजगणित एक गणित का शाखा है जो वेक्टर स्पेस और इन स्पेस के बीच रेखीय मैपिंग पर केंद्रित है।
2. यह रेखीय समीकरणों के प्रणाली को हल करने से संबंधित है।
3. एक वेक्टर एक ऐसी वस्तु है जो दोनों दिशा और दिशा का मापन रखता है।
4. वेक्टर  $\mathbb{R}^n$ -आयामी स्पेस में प्रतिनिधित्व किया जा सकता है।
5. वेक्टर अक्सर कॉलम या रॉक्स के रूप में लिखे जाते हैं, संदर्भ के आधार पर।
6. मैट्रिक्स गुणन नहीं है संयोजी ( $(AB)^T = B^T A^T$ )।
7. एक मैट्रिक्स एक रेखीय संख्या का एक आयतक है जो रॉक्स और कॉलम में व्यवस्थित है।
8. एक वर्ग मैट्रिक्स में समान संख्या में रॉक्स और कॉलम होते हैं।
9. एकता मैट्रिक्स एक वर्ग मैट्रिक्स है जिसमें डायगनल पर 1 और अन्य जगह 0 हैं।
10. एक शून्य मैट्रिक्स एक मैट्रिक्स है जिसमें सभी प्रविष्टियाँ शून्य हैं।
11. मैट्रिक्स जोड़ना केवल तब परिभाषित है जब दो मैट्रिक्स के समान आयाम होते हैं।
12. मैट्रिक्स गुणन संभव है यदि पहले मैट्रिक्स के कॉलम की संख्या दूसरे मैट्रिक्स के रॉक्स की संख्या के बराबर है।
13. एक मैट्रिक्स का निर्धारक महत्वपूर्ण गुणों को प्रदान करता है, जैसे कि उल्टा होने की क्षमता।
14. एक मैट्रिक्स तब और केवल तब उल्टा है जब उसका निर्धारक शून्य नहीं है।
15. एक रॉक्स वेक्टर एक मैट्रिक्स है जिसमें एकमात्र एक रॉक्स है।
16. एक कॉलम वेक्टर एक मैट्रिक्स है जिसमें एकमात्र एक कॉलम है।
17. एक मैट्रिक्स का ट्रांसपोज एक मैट्रिक्स है जो उसके रॉक्स और कॉलम को बदल देता है।
18. एक मैट्रिक्स का ट्रेस मुख्य डायगनल पर प्रविष्टियों का योग है।
19. एक मैट्रिक्स का रैंक सबसे अधिक संख्या में रॉक्स या कॉलम है जो रेखीय स्वतंत्र हैं।
20. यदि एक मैट्रिक्स का रैंक उसके रॉक्स (या कॉलम) की संख्या के बराबर है, तो कहा जाता है कि वह पूर्ण रैंक है।
21. एक वर्ग मैट्रिक्स तब और केवल तब डायगनल कहा जाता है जब उसके मुख्य डायगनल के बाहर सभी प्रविष्टियाँ शून्य हैं।
22. एक मैट्रिक्स के एवेल्यूव हैं जो चरित्र समीकरण को संतुष्ट करते हैं।
23. एक मैट्रिक्स के एवेनवेक्टर वे नॉन-शून्य वेक्टर हैं जो केवल तब स्केल होते हैं जब मैट्रिक्स को उन्हें लागू किया जाता है।
24. चरित्र समीकरण  $(\lambda - \text{tr}(A)) = 0$  से प्राप्त होता है, जहाँ  $\lambda$  मैट्रिक्स है,  $\text{tr}(A)$  एवेल्यूव है, और  $I$  एकता मैट्रिक्स है।
25. एवेल्यूव और एवेनवेक्टर विभिन्न अनुप्रयोगों में महत्वपूर्ण हैं, जिसमें मैट्रिक्सों का डायगनलाइजेशन शामिल है।

26. एक डायगनल मैट्रिक्स एक मैट्रिक्स है जिसमें मुख्य डायगनल के बाहर सभी प्रविष्टियाँ शून्य हैं।
27. एक मैट्रिक्स  $A$  का उल्टा  $A^{-1}$  से दर्शाया जाता है और समीकरण  $A * A^{-1} = I$  को संतुष्ट करता है।
28. एक मैट्रिक्स तब और केवल तब उल्टा है जब वह वर्ग है और पूर्ण रैंक है।
29. क्रैमर का नियम एक विधि है रेखीय प्रणालियों को हल करने के लिए निर्धारकों का उपयोग करके।
30. एक रेखीय समीकरणों के प्रणाली तब और केवल तब संतुलित है जब उसमें कम से कम एक हल है।
31. एक रेखीय समीकरणों के प्रणाली तब और केवल तब असंतुलित है जब उसमें कोई हल नहीं है।
32. एक रेखीय समीकरणों के प्रणाली तब और केवल तब निर्भर है जब उसमें अनंत हल हैं।
33. एक रेखीय समीकरणों के प्रणाली तब और केवल तब स्वतंत्र है जब उसमें एकमात्र एक हल है।
34. गॉसियन एलिमिनेशन एक रेखीय समीकरणों के प्रणाली को हल करने के लिए एक एल्गोरिथम है।
35. एक मैट्रिक्स का रेड्यूस्ड रॉक्स इंचेलॉन फॉर्म ( $RREF$ ) एक सरल रूप है जो रेखीय प्रणालियों को हल करने के लिए उपयोग किया जाता है।
36. एक समरूप रेखीय समीकरणों के प्रणाली हमेशा कम से कम एक हल है: त्रिवियल हल (जहाँ सभी चर शून्य हैं)।
37. एक असमरूप रेखीय समीकरणों के प्रणाली में हल हो सकता है या नहीं हो सकता।
38. एक वेक्टर स्पेस एक वेक्टरों का एक सेट है जो एक साथ जोड़े जा सकते हैं और स्केलर द्वारा गुणा किए जा सकते हैं।
39. शून्य वेक्टर एक वेक्टर स्पेस में एक जोड़ने का पहला है।
40. एक उपस्पेस एक वेक्टर स्पेस का एक उपसेट है जो भी एक वेक्टर स्पेस है।
41. एक वेक्टरों के सेट का स्पैन उन वेक्टरों के सभी संभव रेखीय संयोजन का सेट है।
42. एक वेक्टरों का सेट तब और केवल तब रेखीय स्वतंत्र है जब उसमें से कोई वेक्टर भी अन्य वेक्टरों के रेखीय संयोजन के रूप में लिखा जा सके।
43. एक वेक्टरों का सेट तब और केवल तब रेखीय निर्भर है जब कम से कम एक वेक्टर अन्य वेक्टरों के रेखीय संयोजन के रूप में लिखा जा सके।
44. एक वेक्टर स्पेस का एक आधार एक रेखीय स्वतंत्र वेक्टरों का सेट है जो स्पेस को स्पैन करता है।
45. एक वेक्टर स्पेस का आयाम किसी भी आधार के लिए स्पेस में वेक्टरों की संख्या है।
46. एक उपस्पेस का आयाम हमेशा मूल वेक्टर स्पेस के आयाम से कम या बराबर होता है।
47. एक मैट्रिक्स का रैंक मैट्रिक्स के कॉलम स्पेस के आयाम के बराबर है।
48. एक मैट्रिक्स का नल स्पेस समरूप प्रणाली  $AX = 0$  के सभी हल का सेट है।
49. एक रेखीय परिवर्तन एक दो वेक्टर स्पेस के बीच एक फलन है जो वेक्टर जोड़ने और स्केलर गुणन को संरक्षित करता है।
50. एक रेखीय परिवर्तन का नल स्पेस (नल स्पेस) सभी वे वेक्टरों का सेट है जो शून्य वेक्टर पर नक्शा बनाते हैं।
51. एक रेखीय परिवर्तन का इमेज (रेंज) सभी संभव आउटपुट का सेट है।
52. रैंक-नल्लिटी प्रमेय रैंक और नल्लिटी को संबंधित करता है।
53. एक मैट्रिक्स तब और केवल तब डायगनलाइज किया जा सकता है जब उसमें एक पूर्ण सेट रेखीय स्वतंत्र एवेनवेक्टर हैं।

54. एक मैट्रिक्स का डायगनलाइजेशन एक डायगनल मैट्रिक्स को खोजने में शामिल है जो मूल मैट्रिक्स के समान है।
55. एक द्विघात रूप एक फलन है जो एक वेक्टर लेता है और एक स्केलर बनाता है, अक्सर  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  के रूप में व्यक्त किया जाता है, जहां  $\mathbf{A}$  एक सममिति मैट्रिक्स है।
56. एक सममिति मैट्रिक्स का गुण है कि  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ ।
57. ग्राम-शमिट प्रक्रिया एक एल्गोरिथम है जो एक वेक्टरों का सेट को एक इनर प्रोडक्ट स्पेस में ऑर्थोगोनल करने के लिए है।
58. ऑर्थोगोनल वेक्टर वे वेक्टर हैं जिनका डॉट उत्पाद शून्य है।
59. एक ऑर्थोगोनल मैट्रिक्स एक वर्ग मैट्रिक्स है जिसके रॉक्स और कॉलम ऑर्थोगोनल यूनिट वेक्टर हैं।
60. एक ऑर्थोनॉर्मल सेट एक ऑर्थोगोनल वेक्टरों का सेट है जिनका लंबाई एक है।
61. एक मैट्रिक्स तब और केवल तब ऑर्थोगोनल कहा जाता है जब वह उल्टा है और उसका उल्टा उसका ट्रांसपोज के बराबर है।
62. एक वेक्टर को दूसरे वेक्टर पर प्रोजेक्ट किया जा सकता है प्रोजेक्शन सूत्र का उपयोग करके।
63. एक मैट्रिक्स का निर्धारक एक स्केलर मान है जो उसके तत्वों से गणना किया जा सकता है।
64. एक  $2 \times 2$  मैट्रिक्स का निर्धारक  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  के लिए  $ad - bc$  के रूप में गणना किया जा सकता है।
65. एक  $3 \times 3$  मैट्रिक्स का निर्धारक कोफैक्टर विस्तार का उपयोग करके गणना किया जा सकता है।
66. एक त्रिकोण मैट्रिक्स का निर्धारक डायगनल तत्वों का गुणन है।
67. एक मैट्रिक्स तब और केवल तब एकल है जब उसका निर्धारक शून्य है।
68. एक मैट्रिक्स तब और केवल तब एकल नहीं है (उल्टा) जब उसका निर्धारक शून्य नहीं है।
69. एक रेखीय समीकरणों के प्रणाली को एक मैट्रिक्स समीकरण  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  के रूप में दर्शाया जा सकता है।
70. रॉक्स ऑपरेशन एक मैट्रिक्स को सरल बनाने के लिए उपयोग किया जा सकता है ताकि निर्धारक की गणना आसान हो सके।
71. एक मैट्रिक्स तब और केवल तब रॉक्स इंचेलॉन फॉर्म में कहा जाता है जब उसमें निम्नलिखित गुण हैं: प्रत्येक रॉक्स में लीडिंग 1, और लीडिंग 1 के नीचे सभी प्रविष्टियाँ शून्य हैं।
72. एक मैट्रिक्स तब और केवल तब रेड्यूस्ड रॉक्स इंचेलॉन फॉर्म में है जब, रॉक्स इंचेलॉन फॉर्म के अतिरिक्त, लीडिंग 1 उनके कॉलम में एकमात्र नॉन-शून्य प्रविष्टियाँ हैं।
73. कैली-हैमिल्टन प्रमेय कहता है कि प्रत्येक वर्ग मैट्रिक्स अपना चरित्र समीकरण संतुष्ट करता है।
74. एक परिमाण मैट्रिक्स एक वर्ग मैट्रिक्स है जो दूसरे मैट्रिक्स के रॉक्स या कॉलम को पुनर्व्यवस्थित करता है।
75. एक मैट्रिक्स का उल्टा एडजॉइंट विधि या गॉसियन एलिमिनेशन का उपयोग करके गणना किया जा सकता है।
76. एक मैट्रिक्स को उसके एवेल्यू और एवेनवेक्टर को खोजकर डायगनलाइज किया जा सकता है।
77. मैट्रिक्सों के गुणन का निर्धारक उनके निर्धारकों के गुणन के बराबर है।
78. मैट्रिक्सों के गुणन का ट्रांसपोज ट्रांसपोजों का गुणन उल्टा क्रम में है।
79. दो मैट्रिक्सों के गुणन का उल्टा उनके उल्टों का गुणन उल्टा क्रम में है।

80. एक वेक्टर स्पेस में प्रत्येक वेक्टर को एकमात्र रूप में एक आधार वेक्टरों के रेखीय संयोजन के रूप में दर्शाया जा सकता है।
81. कॉलम स्पेस का आयाम मैट्रिक्स के रैंक के बराबर है।
82. रॉक्स स्पेस का आयाम भी मैट्रिक्स के रैंक के बराबर है।
83. एक मैट्रिक्स के रॉक्स स्पेस और कॉलम स्पेस के आयाम समान हैं।
84. एवेल्यूव समस्या समीकरण  $AX = B$  को हल करने में है, जहां  $A$  मैट्रिक्स है,  $B$  एक स्केलर है, और  $X$  एक वेक्टर है।
85. एक मैट्रिक्स का निर्धारक उसके उल्टा होने की क्षमता और अन्य गुणों के बारे में महत्वपूर्ण जानकारी प्रदान करता है।
86. ऑर्थोगोनल मैट्रिक्स वेक्टरों को परिवर्तित करते समय लंबाई और कोण को संरक्षित करते हैं।
87. एक मैट्रिक्स का डायगनलाइजेशन रेखीय समीकरणों के प्रणाली को हल करने को सरल बना सकता है।
88. कम-स्क्वेयर विधि ओवरडिटर्माइंड प्रणालियों को हल करने के लिए उपयोग की जाती है।
89. वास्तविक दुनिया में अनुप्रयोगों में, रेखीय बीजगणित को कंप्यूटर ग्राफिक्स, ऑप्टिमाइजेशन, इंजीनियरिंग और डेटा साइंस में उपयोग किया जाता है।
90. एक असममिति मैट्रिक्स एक वर्ग मैट्रिक्स है जो अपने ट्रांसपोज का नकारात्मक है।
91. एकल मान डिकम्पोजिशन ( $SVD$ ) एक मैट्रिक्स का एक त्रिकोणीकरण है जो तीन मैट्रिक्स में है जो महत्वपूर्ण गुणों को प्रकट करता है।
92. मैट्रिक्स रैंक को रॉक्स रिडक्शन का उपयोग करके प्राप्त किया जा सकता है ताकि उसका रॉक्स इंचेलॉन फॉर्म प्राप्त हो सके।
93. एक डायगनलाइजेबल मैट्रिक्स एक मैट्रिक्स है जो अपने एवेनवेक्टर और एवेल्यूव के गुणन के रूप में प्रतिनिधित्व किया जा सकता है।
94. एक अपर त्रिकोण मैट्रिक्स में डायगनल के नीचे सभी प्रविष्टियाँ शून्य हैं।
95. एक निचला त्रिकोण मैट्रिक्स में डायगनल के ऊपर सभी प्रविष्टियाँ शून्य हैं।
96. मैट्रिक्स डिकम्पोजिशन विधियाँ जैसे  $SVD$  डिकम्पोजिशन बड़े प्रणालियों को हल करने में उपयोगी हैं।
97. मैट्रिक्स उल्टा रेखीय समीकरणों के प्रणाली को हल करने में उपयोग किया जा सकता है।
98. ग्राम-स्मिट प्रक्रिया एक वेक्टरों का सेट को ऑर्थोगोनल बनाता है।
99. निर्धारक एक प्रणाली के समीकरणों में एकमात्र हल है या नहीं, यह तय करने में मदद करता है।
100. रेखीय बीजगणित को समझना गणित, भौतिकी, अर्थशास्त्र और कंप्यूटर विज्ञान में अधिक उन्नत विषयों के लिए आवश्यक है।