線性代數

以下是關於線性代數考試的 100 個關鍵點，根據之前提到的內容：

1. 線性代數是一個專注於向量空間及其之間線性映射的數學分支。
2. 它處理解決線性方程組。
3. 向量是一個具有大小和方向的物體。
4. 向量可以表示在 n 維空間中。
5. 向量通常寫成列或行，具體取決於上下文。
6. 矩陣乘法不交換（即 $AB \neq BA$）。
7. 矩陣是一個按行和列排列的數字矩陣。
8. 方陣有相同數量的行和列。
9. 單位矩陣是一個對角線上有 1，其他地方有 0 的方陣。
10. 零矩陣是一個所有條目都是零的矩陣。
11. 矩陣加法僅在兩個矩陣具有相同維度時定義。
12. 如果第一個矩陣的列數等於第二個矩陣的行數，則可以進行矩陣乘法。
13. 矩陣的行列式提供了重要的屬性，例如可逆性。
14. 矩陣可逆的充要條件是其行列式非零。
15. 行向量是一個具有單行的矩陣。
16. 列向量是一個具有單列的矩陣。
17. 矩陣的轉置是通過交換其行和列形成的。
18. 矩陣的軌跡是其主對角線上條目的總和。
19. 矩陣的秩是線性獨立行或列的最大數量。
20. 如果矩陣的秩等於其行數（或列數），則稱其具有滿秩。
21. 方陣如果其主對角線外的所有條目都是零，則稱為對角矩陣。
22. 矩陣的特徵值是滿足特徵方程的標量。
23. 矩陣的特徵向量是當矩陣作用於它們時只會縮放的非零向量。
24. 特徵方程是從行列式 $(A - \lambda I) = 0$ 獲得的，其中 A 是矩陣，λ 是特徵值，I 是單位矩陣。
25. 特徵值和特徵向量在各種應用中至關重要，包括矩陣的對角化。

26. 對角矩陣是一個其主對角線外的所有條目都是零的矩陣。

27. 矩陣 A 的逆矩陣表示為 A^{-1}，並滿足方程 $A * A^{-1} = I$。

28. 矩陣可逆的充要條件是其為方陣且具有滿秩。

29. 克拉默法則是一種使用行列式解決線性系統的方法。

30. 線性方程組是一致的，如果它至少有一個解。

31. 線性方程組是不一致的，如果它沒有解。

32. 線性方程組是相依的，如果它有無限多個解。

33. 線性方程組是獨立的，如果它有且僅有一個解。

34. 高斯消元法是一種解決線性方程組的算法。

35. 矩陣的簡化行列式形式（RREF）是一個用於解決線性系統的簡化版本。

36. 同質線性方程組總是至少有一個解：平凡解（所有變量都是零）。

37. 非同質線性方程組可能有解，也可能沒有解。

38. 向量空間是一組可以相加並乘以標量的向量。

39. 零向量是向量空間中的加法單位元。

40. 子空間是向量空間的子集，也是向量空間。

41. 一組向量的張量是這些向量所有可能線性組合的集合。

42. 一組向量是線性獨立的，如果該組中的任何向量都不能寫成其他向量的線性組合。

43. 一組向量是線性相依的，如果至少有一個向量可以寫成其他向量的線性組合。

44. 向量空間的基是一組線性獨立的向量，它們張量該空間。

45. 向量空間的維數是該空間任何基中的向量數。

46. 子空間的維數總是小於或等於原向量空間的維數。

47. 矩陣的秩等於矩陣的列空間的維數。

48. 矩陣的零空間由同質系統 $Ax = 0$ 的所有解組成。

49. 線性變換是兩個向量空間之間的函數，保留向量加法和標量乘法。

50. 線性變換的核（零空間）由所有映射到零向量的向量組成。

51. 線性變換的像（值域）由所有可能的輸出組成。

52. 秩-零化定理關聯線性變換的秩和零化。

53. 如果矩陣有一組線性獨立的特徵向量，則可以對角化矩陣。

54. 矩陣的對角化涉及找到一個與原矩陣相似的對角矩陣。

55. 二次型是一個將向量轉換為標量的函數，通常表示為 x☒Ax，其中 A 是對稱矩陣。

56. 對稱矩陣具有 A = A☒ 的性質。

57. 格拉姆-施密特過程是一種在內積空間中正交化向量集的算法。

58. 正交向量是其點積為零的向量。

59. 正交矩陣是一個其行和列都是正交單位向量的方陣。

60. 正交集是一組正交向量，具有單位長度。

61. 矩陣可逆且其逆等於其轉置，則稱其為正交矩陣。

62. 可以使用投影公式將向量投影到另一個向量上。

63. 矩陣的行列式是一個可以從其元素計算出的標量值。

64. 2x2 矩陣的行列式可以計算為 ad - bc，對於矩陣 [[a, b], [c, d]]。

65. 3x3 矩陣的行列式可以使用共同因子展開計算。

66. 三角矩陣的行列式是對角元素的乘積。

67. 如果矩陣的行列式為零，則稱其為奇異矩陣。

68. 如果矩陣的行列式非零，則稱其為非奇異（可逆）矩陣。

69. 線性方程組可以表示為矩陣方程 Ax = b。

70. 行操作可以用於簡化矩陣，以便更容易計算行列式。

71. 如果矩陣具有以下屬性，則稱其為行階梯形：每行的首 1 和首 1 以下的所有條目都是零。

72. 如果在行階梯形之外，首 1 是其列中的唯一非零條目，則矩陣處於簡化行階梯形。

73. 開利-漢密爾頓定理指出，每個方陣都滿足其特徵方程。

74. 排列矩陣是一個重新排列另一個矩陣的行或列的方陣。

75. 可以使用伴隨法或高斯消元法計算矩陣的逆。

76. 可以通過找到其特徵值和特徵向量來對角化矩陣。

77. 矩陣積的行列式等於其行列式的積。

78. 矩陣積的轉置是轉置的積，順序相反。

79. 兩個矩陣積的逆是其逆的積，順序相反。

80. 在向量空間中，每個向量都有唯一的表示，作為基向量的線性組合。

81. 列空間的維數等於矩陣的秩。

82. 行空間的維數也等於矩陣的秩。
83. 矩陣的行空間和列空間具有相同的維數。
84. 特徵值問題是解方程 $Av = \lambda v$，其中 A 是矩陣，λ 是標量，v 是向量。
85. 矩陣的行列式提供了關於其可逆性和其他屬性的重要信息。
86. 正交矩陣在轉換向量時保留長度和角度。
87. 矩陣的對角化可以簡化解決線性方程組。
88. 最小二乘法用於解決過定方程組。
89. 在實際應用中，線性代數用於計算機圖形、優化、工程和數據科學。
90. 反對稱矩陣是一個等於其轉置的負矩陣的方陣。
91. 奇異值分解（SVD）是一種將矩陣分解為三個矩陣的分解，揭示了重要屬性。
92. 可以通過行減少來確定矩陣的秩，以獲得其行階梯形。
93. 可對角化矩陣是一個可以表示為其特徵向量和特徵值積的矩陣。
94. 上三角矩陣的對角線以下的所有條目都是零。
95. 下三角矩陣的對角線以上的所有條目都是零。
96. 矩陣分解方法如 LU 分解對於解決大型方程組非常有用。
97. 矩陣逆可以用於解決線性方程組。
98. 格拉姆-施密特過程確保一組向量是正交的。
99. 行列式有助於確定方程組是否有唯一解。
100. 理解線性代數對於更高級的數學、物理、經濟學和計算機科學主題至關重要。