第六章：图像校正与修补

2.1 图像坐标变换

6.1 图像仿射变换

6.2 几何失真校正

2.1 图像坐标变换---基本变换

坐标变换示例：平移变换

$$X' = X + X_0$$
$$Y' = Y + Y_0$$
$$Z' = Z + Z_0$$

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X_0 \\ 0 & 1 & 0 & Y_0 \\ 0 & 0 & 1 & Z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X_0 \\ 0 & 1 & 0 & Y_0 \\ 0 & 0 & 1 & Z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

齐次坐标

可以进行逆变换

2.1 图像坐标变换---基本变换

坐标变换一般形式（**3-D**）：

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}$$

$$K \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}' = \begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

一般的

2.1 图像坐标变换---基本变换

坐标变换一般形式（**2-D**）：

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}$$

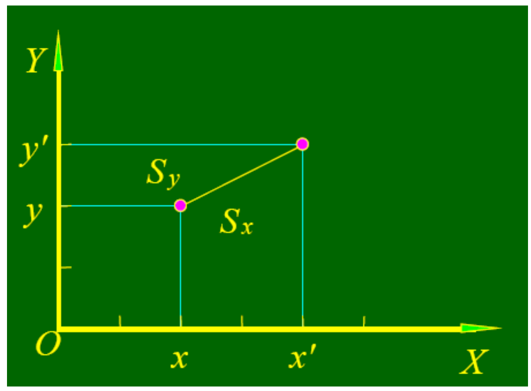
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.1 图像坐标变换---基本变换

平移变换（**2-D**）：

$$
\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1 & 0 & x_0\\ 0 & 1 & y_0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 3\\ 1\end{bmatrix}
$$



2.1 图像坐标变换---基本变换

尺度放缩变换（**2-D**）：

$$
\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}S_x & 0 & 0\\ 0 & S_y & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

缩放倍数

$$
\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1.5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 2\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 3\\ 1\end{bmatrix}
$$

2.1 图像坐标变换---基本变换

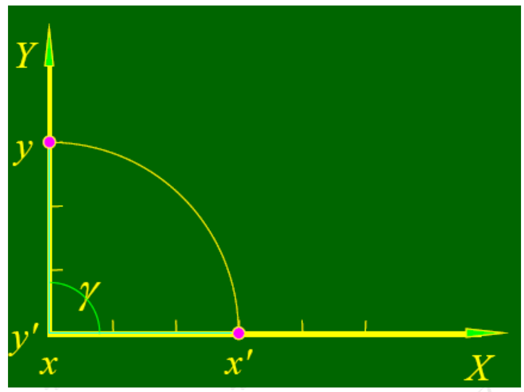
记住基本矩阵

旋转变换（**2-D**）:

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}\cos\gamma & \sin\gamma & 0\\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

rotation

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 3\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$



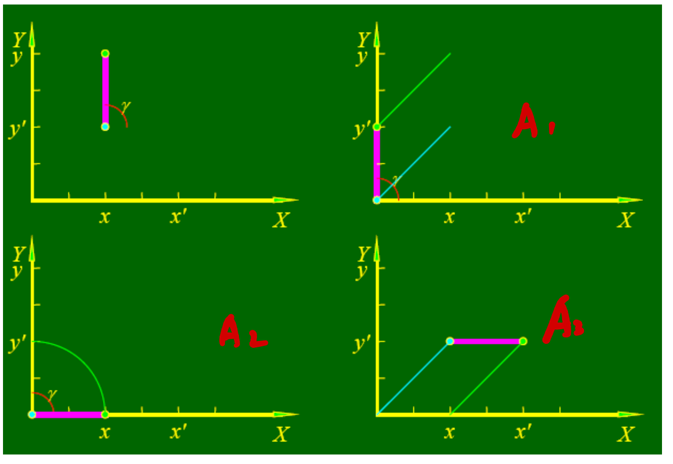
2.1 图像坐标变换---基本变换

旋转变换

$$\gamma=-45^\circ \qquad \boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0\\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

2.1 图像坐标变换---基本变换

- 绕非原点旋转=平移至原点+绕原点旋转+平移回去



$A = A_3A_2A_1$

左乘!

2.1 图像坐标变换 --- 扩展

变换级连

对一个坐标为$\boldsymbol{v}$的点的平移、放缩、绕Z轴旋转变换（级联起来）可表示为：

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{R}_\gamma\left[\boldsymbol{S}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{v})\right] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}$$

等价于用单个变换矩阵$\boldsymbol{A}$对点$\boldsymbol{v}$进行变换

这些矩阵的运算次序一般不可互换

2.1 图像坐标变换 --- 扩展

级连示例

$$T=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&4\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad S=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad v=\begin{bmatrix}1&2&1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$v'_{ST}=\begin{bmatrix}9&1&21\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\qquad v'_{TS}=\begin{bmatrix}5&8&1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

先平移后放缩≠先放缩后平移

2.1 图像坐标变换 --- 扩展

反变换 ---逆矩阵

$$T^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&-x_0\\0&1&-y_0\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad S^{-1}=\begin{bmatrix}1/S_x&0&0\\0&1/S_y&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$R_\gamma^{-1}=\begin{bmatrix}\cos(-\gamma)&\sin(-\gamma)&0\\-\sin(-\gamma)&\cos(-\gamma)&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

2.1 图像坐标变换 --- 扩展

其他3-点映射变换

拉伸变换 $$L = \begin{bmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & 1/L & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

剪切变换

$$J_h = \begin{bmatrix} 1 & J_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad J_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ J_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

左右　　　　上下

5.1 图像坐标变换 --- 扩展

基本坐标变换:

平移变换　放缩变换　旋转变换

拉伸变换　剪切变换

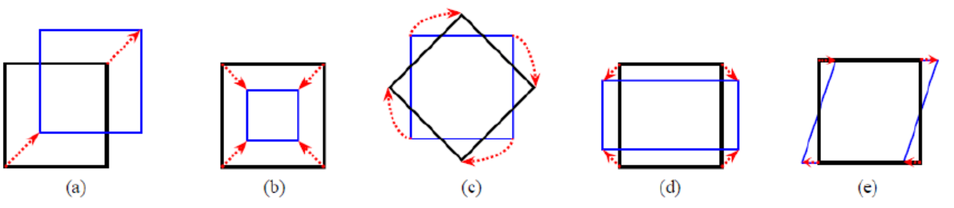


图 2.1.2　五种典型的坐标变换示意

2.1 图像坐标变换 --- 扩展

旋转变换的分解 垂直 拆成剪切+缩放

$$
\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -\tan\theta & 1/\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned} x'' &= x' \\ y'' &= y'/\cos\theta - x'\tan\theta \end{aligned}
\qquad
\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' &= y \end{aligned}
$$

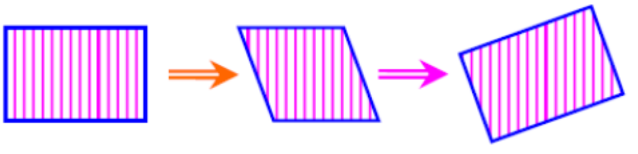


图 2.1.3 通过结合剪切以及水平和垂直方向的放缩来实现快速旋转

2.1 图像坐标变换 --- 扩展

旋转变换的分解

$$
\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \tan(\theta/2) & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -\sin\theta & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \tan(\theta/2) & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

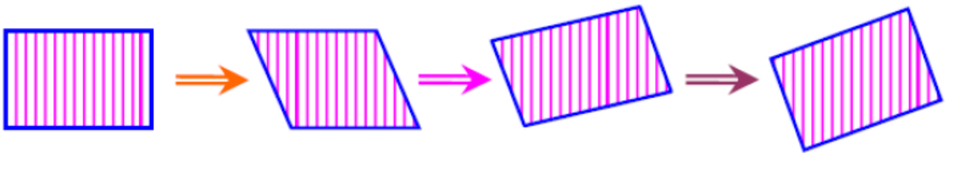


图 2.1.4 将图像旋转分解为 3 个 1-D 剪切变换

第六章：图像校正与修补

2.1 图像坐标变换

6.1 图像仿射变换

6.2 几何失真校正

6.1 图像仿射变换 --- 一般仿射变换

1. 定义

一个非奇异线性变换接一个平移变换

矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

分块矩阵形式：

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{H}_A \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{v}$$

一个平面上的仿射变换有6个自由度

6.1 图像仿射变换 --- 一般仿射变换

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$t_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} \quad t_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad t_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

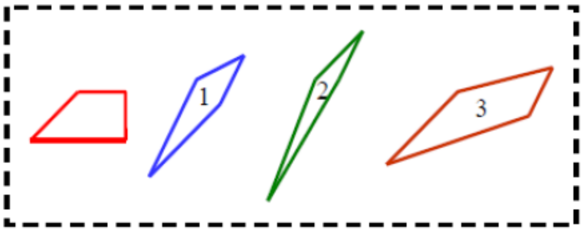


图 6.1.1　对多边形目标进行仿射变换得到的结果

平形 $\xrightarrow{\text{变换}}$ 平形

6.1 图像仿射变换 --- 一般仿射变换

2. 分解

可以把$\boldsymbol{A}$分解成两个基本变换的组合：一个非各向同性放缩和一个旋转

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}(\theta)\boldsymbol{R}(-\phi)\boldsymbol{D}\boldsymbol{R}(\phi)$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

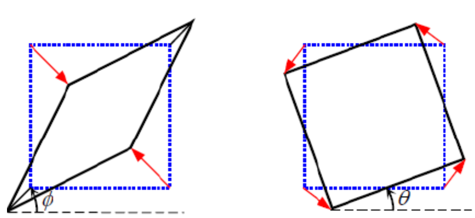


图 6.1.2　仿射变换的分解结果

6.1 图像仿射变换 --- 一般仿射变换

仿射变换也可看作平移、放缩、旋转和剪切变换的一种综合。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & J_x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} 1 & J_x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & J_x+\tan(\theta/2) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\sin\theta & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \tan(\theta/2) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. 系数

从(x,y)到(x',y')和从(x',y')到(x,y)的变换

$$x'=S_x x+J_x y+T_x$$

$$y'=J_y x+S_y y+T_y$$

$$\begin{bmatrix} x'-T_x \\ y'-T_y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} S_x & J_x \\ J_y & S_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\frac{1}{D}\begin{bmatrix} S_y & -J_x \\ -J_y & S_x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x'-T_x \\ y'-T_y \end{bmatrix}$$

6.1 图像仿射变换 --- 一般仿射变换

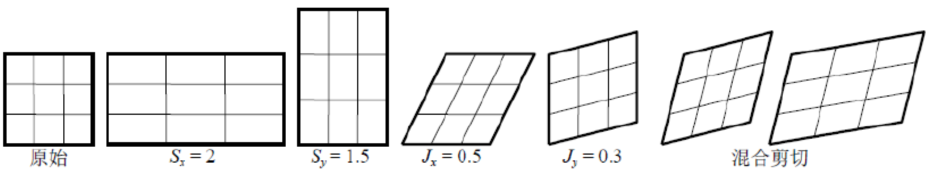


图 6.1.3　4 个系数 S_x、S_y、J_x 和 J_y 在仿射变换中的作用示意

6.1 图像仿射变换 --- 一般仿射变换

4. 性质

(1) 仿射变换将有限点映射为有限点，即仿射变换能建立一对一的关系

(2) 仿射变换仍将直线映射为直线

(3) 仿射变换将平行直线映射为平行直线

(4) 当区域P和Q是没有退化的三角形（即面积不为0），那么存在一个惟一的仿射变换$\boldsymbol{A}$可将P映射为Q，即Q=$\boldsymbol{A}$(P)

(5)仿射变换会导致区域面积的变化

6.1 图像仿射变换 --- 一般仿射变换

(5)仿射变换会导致区域面积的变化

- 仿射变换可分解为包括剪切变换的多个变换
- 正方形受到沿X方向的剪切作用后变成菱形
- 在短对角线方向有所压缩而在长对角线方向有所拉伸

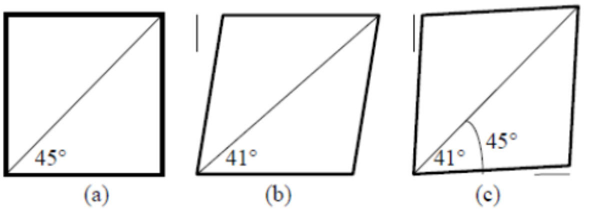


图 6.1.4 剪切造成的变形

6.1 图像仿射变换 --- 一般仿射变换

(5)仿射变换会导致区域面积的变化

- 剪切后单方向的伸缩会导致面积变化

$$S_{\text{area}} = S_x S_y - J_x J_y$$

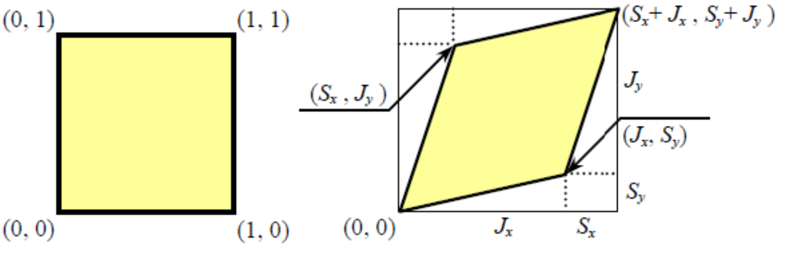


图 6.1.5 剪切前和剪切后的正方形

第六章：图像校正与修补

2.1 图像坐标变换

6.1 图像仿射变换

6.2 几何失真校正

当镜头没有正对拍摄目标物时，即目标物不是垂直于成像面上时，就会发生几何失真。

6.2 几何失真校正

1. 空间变换

对图象平面上的象素进行重新排列以恢复原空间关系

2. 灰度插值

对空间变换后的象素赋予相应的灰度值以恢复原位置的灰度值

1. 空间变换

图象f(x,y)受几何形变的影响变成失真图象g(x ', y')

1) 线性失真

$$\begin{cases} x' = k_1 x + k_2 y + k_3 \\ y' = k_4 x + k_5 y + k_6 \end{cases}$$

2) 非线性二次失真

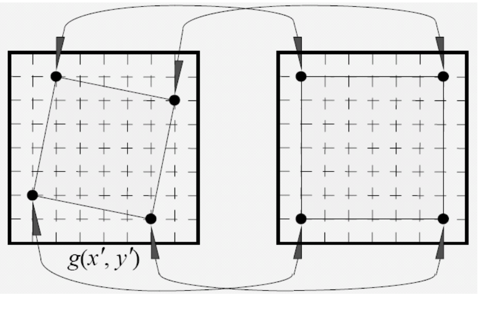
$$\begin{cases} x' = k_1 + k_2 x + k_3 y + k_4 x^2 + k_5 xy + k_6 y^2 \\ y' = k_7 + k_8 x + k_9 y + k_{10} x^2 + k_{11} xy + k_{12} y^2 \end{cases}$$

镜头引入

变换公式中的参数可通过对应点的坐标来确定。

1. 空间变换

- 在输入图（失真图）和输出图（校正图）上找一些位置确切知道的点，然后利用这些点建立两幅图空间位置的对应关系



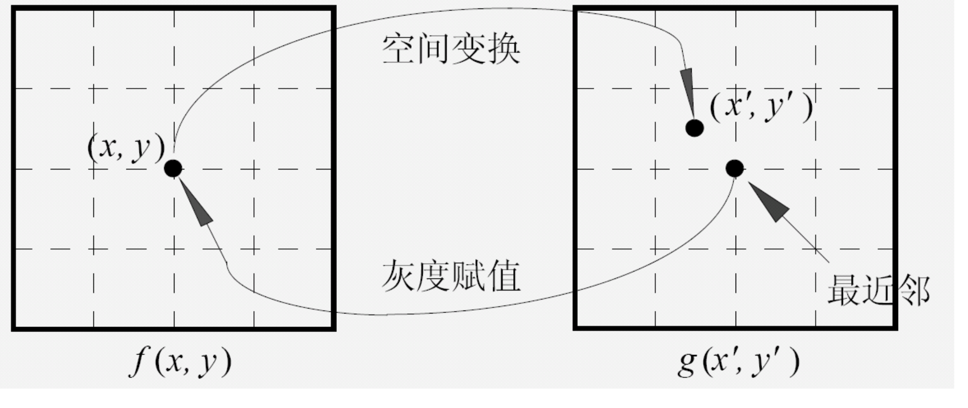
$$\begin{cases} x' = k_1 x + k_2 y + k_3 xy + k_4 \\ y' = k_5 x + k_6 y + k_7 xy + k_8 \end{cases}$$

2. 灰度插值

- 用整数坐标处的像素灰度值计算得到非整数位置处的像素灰度值
- (x, y) 总是整数，但 (x', y') 值可能不是整数
- 最近邻插值：

  将离 (x', y') 点最近的象素的灰度值作为 (x', y') 点的灰度值赋给原图 (x, y) 处象素

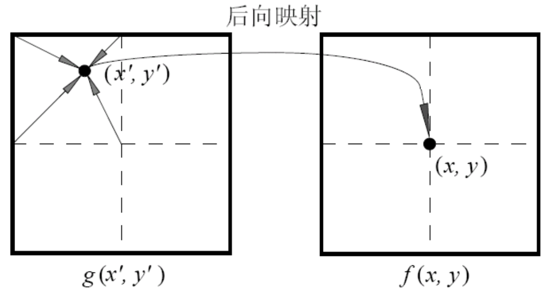
2. 灰度插值



2. 灰度插值

后向映射

实际失真图中四个象素之间的位置对应不失真图的某个象素，则先根据插值算法计算出该位置的灰度，再将其映射给不失真图的对应象素



2. 灰度插值

双线性插值:

A、B、C、D是离(x', y') 最近的4个像素

$$g(E) = (x'-i)[g(B) - g(A)] + g(A)$$

$$g(F) = (x'-i)[g(D) - g(C)] + g(C)$$

$$g(x', y') = (y'-j)[g(F) - g(E)] + g(E)$$