2.4.2 直方图规定化

直方图均衡化的优点是能自动地增强图像整体对比度，但其实际增强的效果却不易控制，结果总是得到全局均衡化的直方图。实际中有时需要变换直方图使之成为某个需要的分布形状，从而可以有选择地增强某个特定灰度值范围内的对比度或使图像灰度值的分布满足特定的要求。这时可以采用比较灵活的直方图规定化方法。一般来说，通过恰当地选择规定化的直方图函数，有可能获得比直方图均衡化更好的效果。

1. 直方图规定化原理

直方图规定化方法要调整原始图像的直方图去逼近所规定的目标直方图，主要有 3 个步骤（这里设 M 和 N 分别为原始图像和规定图像中的灰度级数，且只考虑 $N \leqslant M$ 的情况）。

(1) 如同均衡化方法中，对原始图的直方图进行灰度均衡化：

$$t_k = E_{\mathrm{H}_s}(s_i) = \sum_{i=0}^{k} p_s(s_i) \quad k = 0,1,\cdots,M-1 \tag{2.4.5}$$

(2) 规定需要的直方图，并计算能使规定的直方图均衡化的变换：

$$v_l = E_{\mathrm{H}_u}(u_j) = \sum_{j=0}^{l} p_u(u_j) \quad l = 0,1,\cdots,N-1 \tag{2.4.6}$$

(3) 将步骤(1)得到的变换反转过来，即将原始直方图对应映射到规定的直方图，也就是将所有 $p_s(s_i)$ 对应到 $p_u(u_j)$ 去。

步骤(3)采用什么样的对应规则在离散空间很重要，因为有取整误差的影响。常用的一种方法[Gonzalez 1987]是先从小到大依次找到能使下式最小的 k 和 l：

$$\left|\sum_{i=0}^{k} p_s(s_i) - \sum_{j=0}^{l} p_u(u_j)\right| \quad \begin{cases} k = 0,1,\cdots,M-1 \\ l = 0,1,\cdots,N-1 \end{cases} \tag{2.4.7}$$

然后将 $p_s(s_i)$ 对应到 $p_u(u_j)$ 去。由于这里每个 $p_s(s_i)$ 是分别对应过去的，可以称之为**单映射规则**(SML)。这个方法简单直观，但有时会有较大的取整误差。

较好的一种方法是使用**组映射规则**(GML)[Zhang 1992]。设有一个整数函数 $I(l)$，$l=0,1,\cdots,N-1$，满足 $0 \leqslant I(0) \leqslant \cdots \leqslant I(l) \leqslant \cdots \leqslant I(N-1) \leqslant M-1$。现在要确定能使下式达到最小的 $I(l)$：

$$\left|\sum_{i=0}^{I(l)} p_s(s_i) - \sum_{j=0}^{l} p_u(u_j)\right| \quad l = 0,1,\cdots,N-1 \tag{2.4.8}$$

如果 $l=0$，则将其 i 从 0 到 $I(0)$ 的 $p_s(s_i)$ 对应到 $p_u(u_0)$ 去；如果 $l \geqslant 1$，则将其 i 从 $I(l-1)+1$ 到 $I(l)$ 的 $p_s(s_i)$ 都对应到 $p_u(u_j)$ 去。

2. 直方图规定化的列表计算

参照对直方图均衡化列表计算的方法，可采用列表的方法逐步进行规定化计算。下面给出介绍具体计算方法(包括两种映射规则)的一个示例。

例 2.4.4 直方图规定化列表计算示例

仍借助图 2.4.3(a)中的直方图进行计算。运算步骤和结果见表 2.4.2。

表 2.4.2 直方图规定化计算列表

序号	运 算	步骤和结果							
1	原始图灰度级 k	0	1	2	3	4	5	6	7
2	原始直方图 s_k	0.19	0.25	0.21	0.16	0.08	0.06	0.03	0.02
3	用式(2.4.4)计算原始累积直方图	0.19	0.44	0.65	0.81	0.89	0.95	0.98	1.00
4	规定直方图	—	—	—	0.2	—	0.6	—	0.2
5	用式(2.4.4)计算规定累积直方图	—	—	—	0.2	0.2	0.8	0.8	1.0
6S	SML 映射	3	3	5	5	5	7	7	7
7S	确定映射对应关系	0,1→3		2,3,4→5			5,6,7→7		
8S	变换后直方图	—	—	—	0.44	—	0.45	—	0.11
6G	GML 映射	3	5	5	5	7	7	7	7
7G	查找映射对应关系	0→3	1,2,3→5			4,5,6,7→7			
8G	变换后直方图	—	—	—	0.19	—	0.62	—	0.19

注：表中步骤 6S～8S 对应 SML 映射方法，步骤 6G～8G 对应 GML 映射方法。

在图 2.4.5 中，图(a)为原始直方图；图(b)为希望变换得到的规定直方图；图(c)为用 SML 映射规则得到的结果，图(d)为用 GML 映射规则得到的结果。由图 2.4.5 可见用 SML 映射规则得到的结果与规定直方图的差距较大，而用 GML 映射规则得到的结果基本与规定直方图一致。两相比较，映射规则的优劣是很明显的，进一步的例子可见[Zhang 1992]。

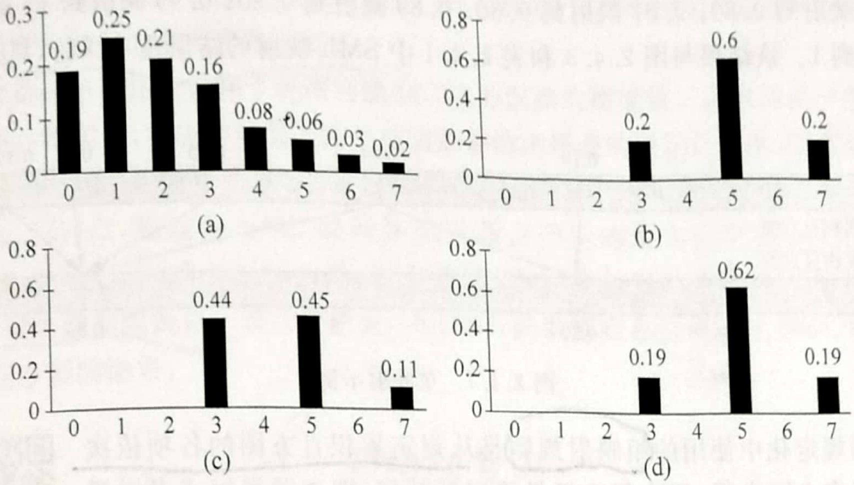

图 2.4.5　直方图规定化

例 2.4.5　直方图规定化示例

本例所用原始图见图 2.4.6(a),与例 2.4.3 中相同。那里采用直方图均衡化得到的结果主要是整幅图对比度的增加,但在一些较暗的区域有些细节仍不太清楚。这里,可利用如图(b)所示的规定化函数对原始图进行直方图规定化的变换,得到的结果图像见图(c)(其直方图见图(d))。由于规定化函数在高灰度区的值较大,所以变换的结果图像比均衡化更亮,从直方图上看高灰度值一侧更为密集。另外,对应于均衡化图中较暗区域的一些细节更为清晰,从直方图上看低灰度值一侧各列分得较开。最后,整幅图看起来更为柔和,不像均衡化的结果那么生硬。

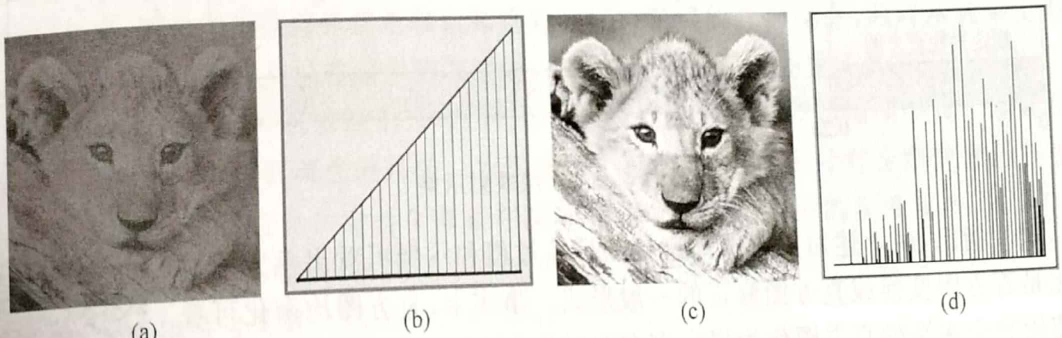

图 2.4.6　直方图规定化示例

3. 直方图规定化的绘图计算

直方图规定化的计算中,如果直接使用式(2.4.7)进行单映射或使用式(2.4.8)进行组映射不是很直观。下面介绍一种利用绘图比较直观和简便地进行计算的方法[章 2004c]。这里绘图是指将直方图画成一长条,每一段对应直方图中的一项,而整个长条表达了累积直方图。

直方图规定化中使用的单映射规则是从原始累积直方图的各项依次向规定累积直方图进行映射,每次都选择最接近的数值,即遵循最短或者说最垂直的连线。图 2.4.7 中的数据同图 2.4.5。在图 2.4.7 中,0.19 映射到 0.20,见实线;0.44 与 0.20 的连线(见实线)比 0.44 与 0.80 的连线(见虚线)更短,所以 0.44 映射到 0.20。依此类推,可得到其他映射结

果：0.65 映射到 0.80；0.81 映射到 0.80；0.89 映射到 0.80；0.95 映射到 1；0.98 映射到 1；1 映射到 1。该结果与图 2.4.3 和表 2.4.1 中 SML 映射的结果是一样的，只是这里表现形式不同。

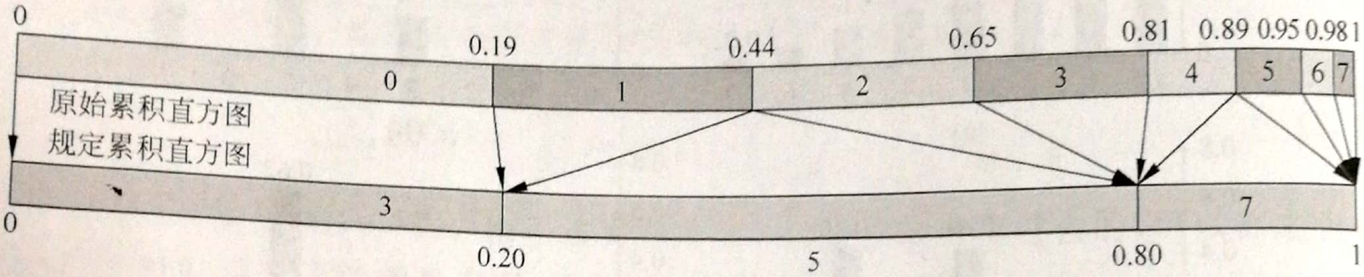

图 2.4.7 单映射示例

直方图规定化中使用的组映射规则是从规定累积直方图的各项依次向原始累积直方图进行，每次都选择最接近的数值，即遵循最短或者说最垂直的连线。图 2.4.8 中的数据同图 2.4.7。在图 2.4.8 中，0.20 映射到 0.19(见实线)，而不是映射到 0.44(见虚线)；同理0.80 映射到 0.81(见实线)，而不是映射到 0.65 或 0.89(见虚线)。建立了这样的映射关系后，再把原始直方图的各项映射到对应的规定直方图就可以了。在图 2.4.8 中，原始直方图的第 1 项映射到规定直方图的第 1 项；原始直方图的第 2、第 3、第 4 项均映射到规定直方图的第 2 项；原始直方图的后 4 项均映射到规定直方图的第 3 项。该结果除表现形式外与表 2.4.2 和图 2.4.5 中 GML 映射的结果也是一样的。

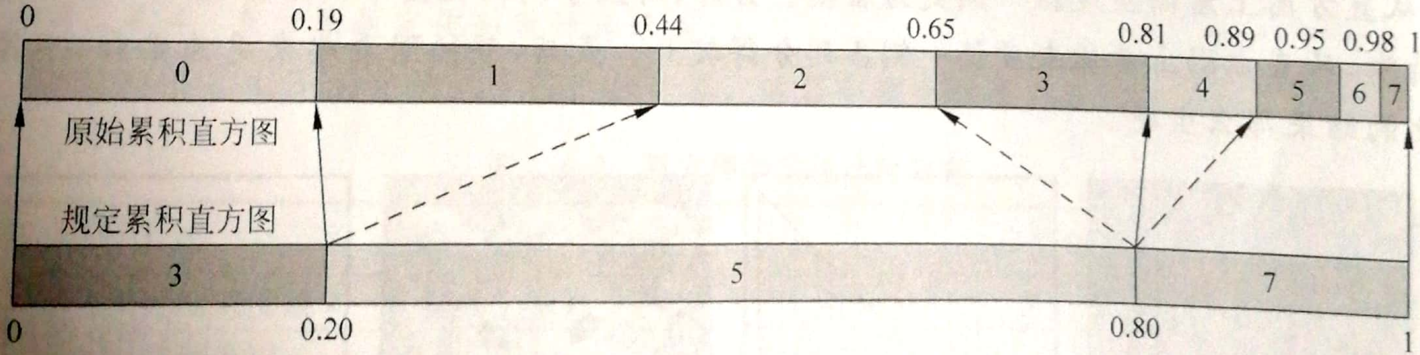

图 2.4.8 组映射示例

图 2.4.8　组映射示例

顺便指出，由上述对直方图规定化的计算过程和示例可看出直方图规定化是直方图变换或直方图修正的一般形式。事实上，直方图均衡化可看作使用完全水平的直方图作为规定直方图时的直方图规定化。所以，这里对直方图规定化绘图计算的方法也可用于直方图均衡化的计算，只需将其中的规定累积直方图根据图像的灰度级数等分画出即可。

4. 两种映射规则的比较

对比图 2.4.7 和图 2.4.8，直观上用组映射方法得到的映射线比较垂直，这表明此时规定累积直方图和原始累积直方图比较一致。另外由两图可以看出，SML 映射规则是一种有偏的映射规则，因为一些对应灰度级被有偏地映射到接近计算开始的灰度级，而 GML 映射规则是统计无偏的。

量化的比较可借助映射产生的误差来进行，这个误差可用对应映射之间数值的差值（取绝对值）的和来表示，和的数值越小，映射效果越好。在理想的情况下，这个和为 0。仍以图 2.4.7 和图 2.4.8 的数据为例，对单映射来说，这个和为 $|0.44-0.20|+|(0.89-0.44)-(0.80-0.20)|+|(1-0.89)-(1-0.80)|=0.48$；而对组映射来说，这个和为 $|0.20-$

$0.19|+|(0.80-0.20)-(0.81-0.19)|+|(1-0.80)-(1-0.81)|=0.04$。可见，组映射所产生的误差小于单映射所产生的误差。

最后讨论一下运用上述两个规则可能会产生的误差的期望值。这里误差产生的根源来自数字图像。事实上，在连续情况下两个规则都能给出精确的规定化结果，但在离散情况下精确程度常不一样。当把某个 $p_s(s_i)$ 对应到 $p_u(u_j)$ 时，运用 SML 映射规则可能会产生的最大误差是 $p_u(u_j)/2$，而运用 GML 映射规则可能会产生的最大误差是 $p_s(s_i)/2$。因为 $N \leqslant M$，所以必有 $p_s(s_i)/2 \leqslant p_u(u_j)/2$，也就是说 SML 映射规则的期望误差总大于等于 GML 映射规则的期望误差。所以结论是，用 GML 映射规则总会得到比 SML 映射规则更接近规定直方图的结果。