第四章 频域图像增强（1）

1

第四章 频域图像增强（1）

1、可分离和正交图像变换 --- 课本10.1节

2、傅里叶变换 --- 课本4.2节

2

图像变换概述

- 为了有效和快速地对图像进行处理，常常需要将图像转换到另外一些空间，并利用在这些空间的特有性质方便地进行一定的加工，最后再转换回图象空间以得到所需的效果。
- 图像变换是双向的。
- 将从图像空间向其他空间的变换称为正变换，而将从其他空间向图象空间的变换称为反变换或逆变换

3

9.1 可分离和正交图像变换

1-D 变换

正变换

正向变换核

$$T(u)=\sum_{x=0}^{N-1} f(x)h(x,u) \qquad u=0,1,\cdots,N-1$$

反变换

反向变换核

$$f(x)=\sum_{u=0}^{N-1} T(u)k(x,u) \qquad x=0,1,\cdots,N-1$$

4

9.1 可分离和正交图像变换

2-D 变换

正向变换核

$$T(u,v)=\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)h(x,y,u,v)$$

$$f(x,y)=\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}T(u,v)k(x,y,u,v)$$

变换核与
原始函数及
变换后函数无关

反向变换核

做M个变换

9.1 可分离和正交图像变换

可分离

$$h(x,y,u,v)=h_1(x,u)h_2(y,v)$$

1个2-D变换分成2个1-D变换

$$T(x,v)=\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)h_2(y,v) \qquad T(u,v)=\sum_{x=0}^{N-1}T(x,v)h_1(x,u)$$

每一行做一维后.列变换再来一遍

对称

$$h(x,y,u,v)=h_1(x,u)h_1(y,v)$$

(h_1与h_2的函数形式一样)

9.1 可分离和正交图像变换

- 为了分析、推导方便，将可分离、对称变换写成矩阵的形式：

$$T = PFQ \qquad (1)$$

$$F = P^{-1}TQ^{-1} \qquad (2)$$

式中，F和T是二维M*N的矩阵，P是M*M矩阵，Q是N*N的矩阵

- **图像变换的矩阵表达式和代数表达式其本质相同，将(1)式写成代数表达式如下：**

$$T(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} P(x,u)f(x,y)Q(y,v)$$

7

9.1 可分离和正交图像变换

可分离且对称

变换结果 → $\boldsymbol{T = AFA}$ ← 对称变换矩阵；图象矩阵

反变换

反变换矩阵 → $\boldsymbol{BTB = BAFAB}$

$\boldsymbol{F = BTB}$ $\qquad \boldsymbol{B = A^{-1}}$

$\boldsymbol{\hat{F} = BAFAB}$ $\qquad \boldsymbol{B \neq A^{-1}}$

8

9.1 可分离和正交图像变换

正交

考虑变换矩阵： $B = A^{-1}$　　　$F = BTB$

酉矩阵（*代表共轭）： $A^{-1} = A^{*T}$

如果A为实矩阵，且： $A^{-1} = A^{T}$ 余弦变换

则A为正交矩阵，

式(5.1.3)和式(5.1.4)构成正交变换对

9

第四章　频域图像增强（1）

1、可分离和正交图像变换 --- 课本9.1节

2、傅里叶变换 --- 课本4.2节

10

4.2 傅里叶变换

1. 2-D傅里叶变换
2. 傅里叶变换性质
3. 快速傅里叶变换

11

4.2.1 2-D傅里叶变换

- **1-D傅立叶变换：** $f(x)(x=0,1,\cdots,M-1)$

$$F(u)=\frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1}f(x)e^{-j2\pi ux/M} \qquad u=0,1,\cdots,M-1$$

系数放哪里都行

- **1-D傅立叶逆变换：**

$$f(x)=\sum_{u=0}^{M-1}F(u)e^{j2\pi ux/M} \qquad x=0,1,\cdots,M-1$$

更关注相对值

幅度谱 $|F(u)|=\left[R^2(u)+I^2(u)\right]^{1/2}$

相位谱 $\phi(u)=\arctan\frac{I(u)}{R(u)}$

12

4.2.1 2-D傅里叶变换

- 二维离散函数 $f(x,y)(x=0,1,\cdots,M-1;y=0,1,\cdots,N-1)$ 的傅立叶变换定义为

$$F(u,v)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

其中 $u=0,1,\cdots,M-1,\quad v=0,1,\cdots,N-1$

- 对应的傅立叶逆变换为

$$f(x,y)=\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

其中 $x=0,1,\cdots,M-1,\quad y=0,1,\cdots,N-1$

13

4.2.1 2-D傅里叶变换

- 幅度谱

$$|F(u,v)|=\left[R^2(u,v)+I^2(u,v)\right]^{1/2}$$

- 相位谱

$$\phi(u,v)=\arctan\frac{I(u,v)}{R(u,v)}$$

- 功率谱

$$P(u,v)=|F(u,v)|^2=R^2(u,v)+I^2(u,v)$$

14

4.2.1 2-D傅里叶变换

- 性质：

$$1)\quad F(0,0)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)$$

2)当$f(x,y)$为实函数时，则

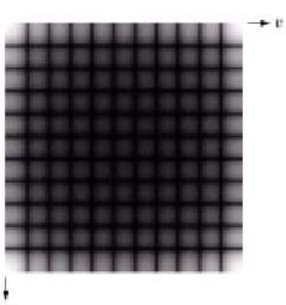
$$F(u,v)=F^{*}(-u,-v)\Rightarrow|F(u,v)|=|F(-u,-v)|$$

$$3)\quad f(x,y)(-1)^{x+y}\quad\Leftrightarrow\quad F(u-M/2,v-N/2)$$

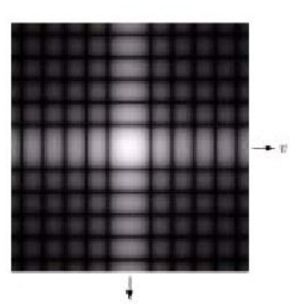
- 通常在对图像进行二维**DFT**变换之前，为了频率频率中心化，都要令 $f(x,y)(-1)^{x+y}$ ，然后再做变换。

15

4.2.1 2-D傅里叶变换



一幅二维图像的傅里叶频谱



中心化的傅里叶频谱

16

4.2.2 2-D傅里叶变换的性质

（1）平移性
（2）线性性质
（3）尺度变换（缩放）
（4）旋转性
（5）周期性和共轭对称性
（6）可分离性
（7）平均值
（8）卷积
（9）相关性

17

4.2.2 2-D傅里叶变换的性质

（1）平移性

以⇔ 表示函数和其傅里叶变换的对应性

$$f(x,y)e^{j2\pi(u_0x/M+v_0y/N)} \Leftrightarrow F(u-u_0, v-v_0) \qquad (1)$$

$$f(x-x_0, y-y_0) \Leftrightarrow F(u,v)e^{-j2\pi(ux_0/M+vy_0/N)} \qquad (2)$$

- ✓ 公式（1）表明将f(x,y)与一个指数项相乘就相当于把其变换后的频域中心移动到新的位置
- ✓ 公式（2）表明将F(u,v)与一个指数项相乘就相当于把其变换后的空域中心移动到新的位置
- ✓ 公式（2）表明对f(x,y)的平移不影响其傅里叶变换的幅值

18

4.2.2 2-D傅里叶变换的性质

当u_0=M/2且v_0=N/2,

$$e^{j2\pi(u_0x/M+v_0y/N)}=e^{j\pi(x+y)}=(-1)^{x+y}$$

带入（1）和（2），得到

$$f(x,y)(-1)^{x+y}\Leftrightarrow F(u-M/2,v-N/2)$$

$$f(x-M/2,y-N/2)\Leftrightarrow F(u,v)(-1)^{u+v}$$

19

4.2.2 2-D傅里叶变换的性质

（2）线性性质

$$\Im[f_1(x,y)+f_2(x,y)]=\Im[f_1(x,y)]+\Im[f_2(x,y)]$$

$$af(x,y)\Leftrightarrow aF(u,v)$$

（3）尺度变换

$$f(ax,by)\Leftrightarrow\frac{1}{|ab|}F(u/a,v/b)$$

20

4.2.2 2-D傅里叶变换的性质

（4）旋转性

引入极坐标 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, u=\omega\cos\varphi, v=\omega\sin\varphi$

将f(x,y)和F(u,v)转换为 $f(r,\theta)$ 和 $F(\omega,\varphi)$。将它们带入傅里叶变换对得到

$$f(r,\theta+\theta_0) \Leftrightarrow F(\omega,\varphi+\theta_0)$$

- ✓ f(x,y)旋转角度 θ_0，F(u,v)也将转过相同的角度
- ✓ F(u,v)旋转角度 θ_0，f(x,y)也将转过相同的角度

21

4.2.2 2-D傅里叶变换的性质

（5）周期性和共轭对称性

$$F(u,v)=F(u+M,v)=F(u,v+N)=F(u+M,v+N)$$
$$f(x,y)=f(x+M,y)=f(x,y+N)=f(x+M,y+N)$$

上述公式表明

- ✓ 尽管F(u,v)对无穷多个u和v的值重复出现，但只需根据在任一个周期里的N个值就可以从F(u,v)得到f(x,y)
- ✓ 只需一个周期里的变换就可将F(u,v)在频域里完全确定
- ✓ 同样的结论对f(x,y)在空域也成立

22

4.2.2 2-D傅里叶变换的性质

如果f(x,y)是实函数，则它的傅里叶变换具有共轭对称性

$$F(u,v)=F^*(-u,-v)$$

$$|F(u,v)|=|F(-u,-v)|$$

其中，$F^*(u,v)$为F(u,v)的复共轭。

4.2.2 2-D傅里叶变换的性质

（6）可分离性

$$F(u,v)=\frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1}e^{-j2\pi ux/M}\frac{1}{N}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi vy/N}$$
$$=\frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1}e^{-j2\pi ux/M}F(x,v)$$

F(x,v)是沿着f(x,y)的一行所进行的傅里叶变换。当x=0,1,…,M-1，沿着f(x,y)的所有行计算傅里叶变换。

4.2.2 2-D傅里叶变换的性质

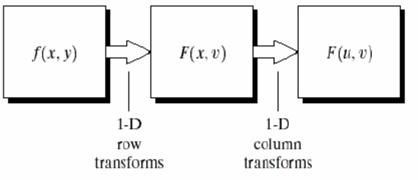


FIGURE 4.35 Computation of the 2-D Fourier transform as a series of 1-D transforms.

- ✓ 先通过沿输入图像的每一行计算一维变换
- ✓ 再沿中间结果的每一列计算一维变换
- ✓ 可以改变上述顺序，即先列后行
- ✓ 上述相似的过程也可以计算二维傅里叶反变换

4.2.2 2-D傅里叶变换的性质

（7）平均值

由二维傅里叶变换的定义

$$F(u,v)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

所以 $F(0,0)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)$

而 $\bar{f}(x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)$

4.2.2 2-D傅里叶变换的性质

（8）卷积定理

大小为M×N的两个函数f(x,y)和h(x,y)的离散卷积

$$f(x,y)*h(x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}f(m,n)h(x-m,y-n)$$

卷积定理

$$f(x,y)*h(x,y)\Leftrightarrow F(u,v)H(u,v)$$

$$f(x,y)h(x,y)\Leftrightarrow F(u,v)*H(u,v)$$

27

4.2.2 2-D傅里叶变换的性质

（9）相关性理论

大小为M×N的两个函数f(x,y)和h(x,y)的相关性定义为

$$f(x,y)\circ h(x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}f^{*}(m,n)h(x+m,y+n)$$

没有反折

多了取共轭

f^*表示f的复共轭。对于实函数，　$f^*=f$

相关定理

$$f(x,y)\circ h(x,y)\Leftrightarrow F^{*}(u,v)H(u,v)$$

$$f^{*}(x,y)h(x,y)\Leftrightarrow F(u,v)\circ H(u,v)$$

28

4.2.2 2-D傅里叶变换的性质

自相关

$$f(x,y)\circ f(x,y)\Leftrightarrow|F(u,v)|^2=R(u,v)^2+I(u,v)^2$$

$$|f(x,y)|^2\Leftrightarrow F(u,v)\circ F(u,v)$$

29

4.2.2 2-D傅里叶变换的性质

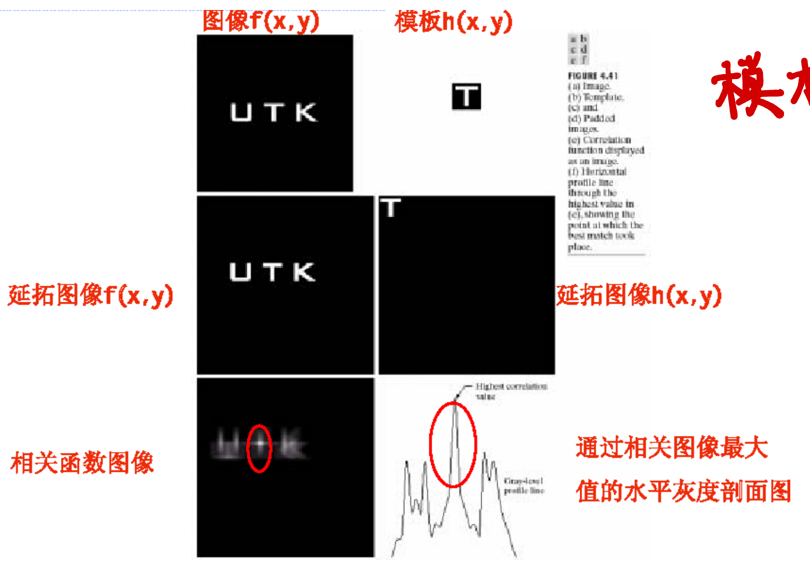
卷积和相关性理论总结

- ✓ 卷积是空间域过滤和频率域过滤之间的纽带
- ✓ 相关的重要应用在于匹配；确定是否有感兴趣的物体区域
  - f(x,y)是原始图像
  - h(x,y)作为感兴趣的物体或区域（模板）
  - 如果匹配，两个函数的相关值会在h找到f中相应点的位置上达到最大

30

图像相关例子

模板匹配



31

4.2.3 2-D傅里叶变换快速算法

- 对M*N二维图像直接进行2D-傅里叶变换，需要 M^2N^2 次复数乘法，$MN(MN-1)$ 次复数加法。
- 利用二维傅里叶变换的可分离性，可以通过连续两次一维傅里叶变换来实现二维傅里叶变换。
- 对**M*N**二维图像进行**2D-FFT**，需要的复数乘法次数是多少？复数加法的次数是多少？

$$M\left(\frac{N}{2}\log_2 N + N\log_2 N\right)$$
$$+\ N\left(\frac{M}{2}\log_2 M + M\log_2 M\right)$$

32

4.2.3 2-D傅里叶变换快速算法

- 二维傅里叶变换的逆变换可利用二维傅里叶正变换来实现：

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)e^{j2\pi(ux/M+vy/N)} \\
&= MN*\left(\frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F^*(u,v)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}\right)^*
\end{aligned}
$$

33