中国传媒大学

2014 一 2015 学年第 1 学期期中考试试卷

考试科目： 数字信号处理 A **考试方式：** 闭卷考试

考试班级： 12 级广电工、电信、数媒、音工

题目	一	二	三	四	五	六	七	**总分**
得分								

得分	**评卷人**

一、填空题（每空 1 分，共 19 分）

1、对连续信号中的正弦信号进行等间隔取样，可得正弦序列。设连续信号 $x_a(t)=sin100\pi t$，取样频率为 300Hz，则 $x(n)=$ $\sin\frac{\pi}{3}$ ；所得正弦序列 $x(n)$ 的周期为 6 。

2、系统 $y(n)=nx(n)+2$ 为 非线性 （填“线性”或“非线性”）、 时变 （填“时变”或“是不变”）系统。

3、设信号 $x(n)$ 是一个离散的周期信号，那么其频谱一定是一个 离散 （填“离散”或“连续”）的 周期 （填“周期”或“非周期”）信号。

4、离散线性时不变系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 是 ω 的周期函数，其周期为 2π 。若 $h(n)$ 为实序列，则 $H(e^{j\omega})$ 的实部是 偶 函数，虚部是 奇 函数。（填“奇”或“偶”）。

5、对实数序列做频谱分析，要求频谱分辨率 $F \le 10\text{Hz}$，信号最高频率为 2kHz，则最小记录时间为 <u>0.1s</u>；最大取样间隔为 <u>0.25×10^{-3}s</u>；最少取样点数为 <u>400</u>。

6、已知 $x(n)$ 为实序列，则其离散频谱中的 $X(0)$ 一定为 <u>实数</u>（填“实数”或“复数”）。

7、计算 256 点的按时间抽取的基 2-FFT，在每一级有 <u>128</u> 个蝶形。

8、设某序列 $x(n)=\{\underset{\underset{n=0}{\uparrow}}{6},5,4,3,2\}$，则 $x((-3))_5$ 为 <u>4</u>，$x((1))_3$ 为 <u>7</u>，$x_{ep}(2)$ 为 <u>3.5</u>，$x_{op}(1)$ 为 <u>1.5</u>。

得分	评卷人

二、分析简答题（30 分）

1、（9 分）说明从离散时域到离散频域变换的三种途径，给出相应的表达式。

（1） DFT：$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$

（2） Z 变换后取样：$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n},\ X(k)=X(z)\big|_{z=W_N^{-k}}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{-nk}$

（3） DTFT 后取样：$X(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\omega n},X(k)=X(e^{j\omega})\big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$

（以上每问 3 分）

2、（6 分）利用 DFT 进行频谱分析时发生频谱混叠和频谱泄漏的原因是什么？如何减小这种效应？

答：

（1）产生混叠失真的原因：取样频率低，不满足 $f_s \geq 2f_h$

消除混叠失真的办法：提高取样频率 f_s

（2）产生频谱泄露的原因：对数据进行了截取

减轻频谱泄露的办法：a.取更长的数据 b.数据不要突然截断，即加各种缓变的窗

（以上每问 3 分）

3、（15 分）设某线性时不变系统的差 $y(n-1)-2.5y(n)+y(n+1)=x(n)$ 分方程为。求出该系统的零、极点，并给出三种可能的收敛域。对应于每一种收敛域，判断系统的因果稳定性，并说明系统单位脉冲 $h(n)$ 响应属于何种序列（有限长序列、左边序列、右边序列等）？

答：对差分方程两端求 z 变换：$z^{-1}Y(z)-2.5Y(z)+zY(z)=X(z)$

求系统函数：$H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}=\dfrac{1}{z+z^{-1}-2.5}=\dfrac{2z}{2z^2-5z+2}=\dfrac{2z}{(z-2)(2z-1)}$

求得零点为 0，极点为 2 和 0.5。（3 分）

所以三种可能收敛域为：

（1）$|z|>2$，此时系统为因果、非稳定，对应的 $h(n)$ 为右边序列；

（4 分）

（2）$0.5<|z|<2$，此时系统为非因果、稳定，对应的 $h(n)$ 为双边序列；

（4 分）

（3）$|z|<0.5$，此时系统为非因果、非稳定，对应的 $h(n)$ 为左边序列；

（4 分）

得分	评卷人

三、（8 分）已知一个有限长序列为：$x(n)=\delta(n)+2\delta(n-5)$，

1、求其 10 点离散傅立叶变换 $X(k)$；

2、已知 $y(n)$ 的 10 点离散傅立叶变换为 $Y(k)=W_{10}^{2k}X(k)$，求序列 $y(n)$；

3、已知 $g(n)$ 的 10 点离散傅立叶变换为 $G(k)=X(k)Y(k)$，求序列 $g(n)$。

解：利用时域圆周移位定理：$x((n+m))_N R_N(n) \leftrightarrow W_N^{-mk}X(k)$

1、$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}=\sum_{n=0}^{9}[\delta(n)+2\delta(n-5)]W_{10}^{nk}=1+2W_{10}^{5k}=1+2(-1)^k$

$k=0,1,2,\ldots,9$

（2 分）

2、由 $Y(k)=W_{10}^{2k}X(k)$ 可知，$y(n)$ 是 $x(n)$ 向右循环移 2 位的结果，即

$y(n)=x((n-2))_{10}R_{10}(n)=\delta(n-2)+2\delta(n-7)$

或者由 $Y(k)=W_{10}^{2k}X(k)=W_{10}^{2k}(1+2W_{10}^{5k})=W_{10}^{2k}+2W_{10}^{7k}$ 可知，

$y(n)=\delta(n-2)+2\delta(n-7)$（3 分）

3、因为：
$$\begin{aligned}G(k)&=X(k)Y(k)=(1+2W_{10}^{5k})(W_{10}^{2k}+2W_{10}^{7k})\\&=W_{10}^{2k}+2W_{10}^{7k}+2W_{10}^{7k}+4W_{10}^{2k}=5W_{10}^{2k}+4W_{10}^{7k}\end{aligned}$$

所以，$g(n)=5\delta(n-2)+4\delta(n-7)$（3 分）

得分	评卷人

四、（5 分）已知序列 $x(n)$ 的长度为 120 点，序列 $y(n)$ 的长度为 185 点，若计算 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的 256 点圆周

卷积，试分析结果中相当于 $x(n)$ 与 $y(n)$ 的线性卷积的范围是多少？

解：$x(n)$ 与 $y(n)$ 线性卷积 $x(n)*y(n)$ 的长度为 120+185-1=304（1 分）

$x(n)$ 与 $y(n)$ 圆周卷积 $x(n)$ e $y(n)$ 的长度为 256，（1 分）

两个序列的圆周卷积相当于这两个序列线性卷积的结果以圆周卷积的点数为周期进行周期延拓。所以，本题情况会产生混叠，混叠长度是 304-256=48，即：

当线性卷积以 256 为周期进行周期延拓形成圆周卷积序列时，一个周期内在 n=0~47 这些点处发生混叠，即 256 点圆周卷积中相当于 $x(n)$ 与 $y(n)$ 线性卷积的范围是 48~255。（3 分）

得分	评卷人

五、（8 分）设信号 $x(n)$ 和系统单位脉冲响应 $h(n)$ 的长度均为 N=1024 点。计算机完成 1 次实数乘法运算需要 10ns，完成 1 次实数加法运算需要 5ns。请写出利用 FFT 计算 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的线性卷积的步骤，并给出所需的计算时间（假设系统单位脉冲响应 $h(n)$ 的 2N 点 FFT 已经事先计算好并存放在计算机的存储器中）。

解：（1）利用 FFT 计算线性卷积的步骤：（4 分）

为了保证用 FFT 计算的卷积与线性卷积相等， FFT 的长度应满足：

$L \geq 2N-1$，取 $L=2N=2^{11}$（2 的整数次幂）

先将 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的尾部添加零，使其长度变为 $L=2N=2^{11}$，

计算 $x(n)$ 的 L 点 FFT：$X(k)$=DFT[$x(n)$]

计算$Y(k)=X(k)H(k)$

计算 $y(n)=\mathrm{IDFT}[X(k)H(k)]$

（2）所需时间（4 分）

所需复乘及复加次数：

复乘：$\frac{L}{2}log_2 L+L+\frac{L}{2}log_2 L=L\,log_2 L+L=2^{11}\times 12$

复加：$L\,log_2 L+L\,log_2 L=2L\,log_2 L=2^{12}\times 11$

所需实数乘法和加法次数：

实乘：$2^{11}\times 12\times 4=2^{15}\times 3$

实加：$2^{12}\times 11\times 2+2^{11}\times 12\times 2=2^{13}\times 11+2^{13}\times 6=2^{13}\times 17$

所需时间共计：

$$t=2^{15}\times 3\times 10\times 10^{-9}+2^{13}\times 17\times 5\times 10^{-9}=2^{13}\times 205\times 10^{-9}=1679360\times 10^{-9}\approx 1.68ms$$

得分	评卷人

六、（8 分）已知 $X(k)$为 8 点实序列$x(n)$的 DFT，且已知：

$X(0)=6,\ X(1)=4+j3,\ X(2)=-3-2j,\ X(3)=2-j,\ X(4)=4,$ 试利用 DFT 的性质来确定以下各表达式的值。

（1） $x(0)$；（2） $x(4)$；（3） $\sum_{n=0}^{7}x(n)$；（4） $\sum_{n=0}^{7}|x(n)|^2$

解：分析：第（1）（2）（3）问根据实序列的 DFT 的圆周共轭对称性质及圆周移位性质求解，第（4）问根据 DFT 形式的帕瑟瓦尔定理求解。（每问 2 分）

由于 $x(n)$ 为实序列，所以 $X(k)$ 是圆周共轭对称的，所以有：

$X(5)=X^*(3)=2+j;\ X(6)=X^*(2)=-3+j2;\ X(7)=X^*(1)=4-j3;$

（1）：

$$x(0)=\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7}X(k)W_8^{-0\cdot k}=\frac{1}{8}(6+4+j3-3-j2+2-j+4+2+j-3+j2+4-j3)=2$$

（2）
$$x(4)=\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7}X(k)W_8^{-4\cdot k}=\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7}X(k)(-1)^k$$
$$=\frac{1}{8}(6-4-j3-3-j2-2+j+4-2-j-3+j2-4+j3)=-1$$

（3）$\displaystyle\sum_{n=0}^{7}x(n)=X(0)=6$

（4）
$$\sum_{n=0}^{7}|x(n)|^2=\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7}|X(k)|^2$$
$$=\frac{1}{8}[6^2+2(4^2+3^2)+2(3^2+2^2)+2(2^2+1)+4^2]=17.25$$

得分	评卷人

七、（6 分）以 20Hz 的采样频率对最高频率为 10Hz 的带限信号 $x_a(t)$ 进行采样得到 $x(n)$，然后计算 $x(n)$ 的 N=1000 点的 DFT，得到 $X(k)$，试问：1、$X(k)$ 中相邻谱线之间的间隔是多少 Hz？2、k=150 对应的模拟频率为多少 Hz？

解：（每问 3 分）

N 点 $X(k)$ 是对 $X(e^{j\omega})$ 在区间 [0, 2π] 上的等间隔采样，即：

$\omega_k=\dfrac{2\pi}{N}k,\ k=0,1\ldots N-1$，　　$f_k=\dfrac{\omega f_s}{2\pi}k=\dfrac{2\pi}{N}\times\dfrac{f_s}{2\pi}k=\dfrac{f_s}{N}k$

（1）谱线间隔为

$f=\frac{f_s}{N}=\frac{20}{1000}=0.02\text{kHz}$

（2）k=150 时， $f_{150}=\frac{f_s}{N}\times150=\frac{20}{1000}\times150=3\text{kHz}$

得分	评卷人

八、（8 分）已知 $x(n)=R_8(n)$， $X(e^{j\omega})=DTFT[x(n)]$。对 $X(e^{j\omega})$ 采样得到 $X_1(k)=X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{6}k}$， $k=0,1,\ldots,5$

1、求 $x_1(n)=\text{IDFT}[X_1(k)]$

2、若 $Y(k)=X_1(k)X_2(k)$，其中，$X_2(k)$ 是 $R_3(n)$ 的 6 点 DFT，$Y(k)$ 是 $y(n)$ 的 6 点 DFT，求序列 $y(n)$。

解：（每问 4 分）

1、根据频域取样定理，频域取样，则时域周期延拓，延拓周期为频域采样点数。本题采样点数为 6，所以由 $X_1(k)$恢复的 $x_1(n)$相当于对 $x(n)$进行以 6 为周期的周期延拓，再取 6 点主值区间：

$x_1(n)=x((n))_6R_6(n)=\{2,2,1,1,1,1\}$。

2、根据圆周卷积定理，离散频谱相乘，对应于时域圆周卷积。

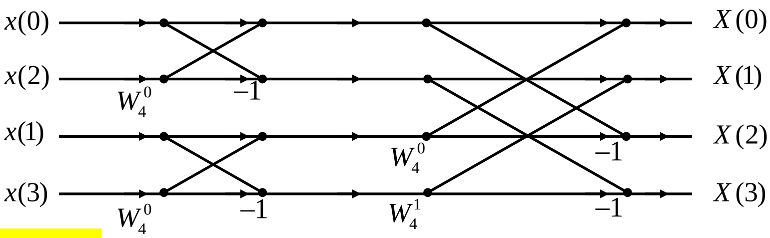
所以：$y(n)=x_1(n)⑥\ x_2(n)=\{2,2,1,1,1,1\}⑥\{1,1,1,0,0,0\}=\{4,5,5,4,3,3\}$

可以先利用不进位乘法求 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的线性卷积，结果为 $\{2,4,5,4,3,3,2,1\}$，然后利用线性卷积与圆周卷积的关系求 6 点圆周卷积。

得分	评卷人

九、（8 分）若已知有限长序列 $x(n)=\{2,-1,1,1\}$，画出其按时间抽取的基 2-FFT 流图，并根据流图计算 $X(k)$ 的值。

解：流图：（4 分）



计算：（4 分）

$$X(0)=[x(0)+x(2)W_N^0]+[x(1)+x(3)W_N^0]W_N^0=x(0)+x(2)+x(1)+x(3)=3$$

$$X(1)=[x(0)-x(2)W_4^0]+[x(1)-x(3)W_4^0]W_4^1=x(0)-x(2)+j[x(1)-x(3)]=1+j2$$

$$X(2)=[x(0)+x(2)W_4^0]-[x(1)+x(3)W_4^0]W_4^0=x(0)+x(2)-x(1)-x(3)=3$$

$$X(3)=[x(0)-x(2)W_4^0]-[x(1)-x(3)W_4^0]W_4^1=x(0)-x(2)-j[x(1)-x(3)]=1-j2$$