二、时不变系统

若输入序列移动任意位后， 其输出序列除了跟着移位外， 数值应该保持不变，即

若 $T[x(n)] = y(n)$

则 $T[x(n-m)] = y(n-m)$ （m为任意整数）

例 $y(n) = 2x(n)+3$ 是否为时不变系统 ？

同时具有线性和时不变性的离散时间系统称为线性时不变（LSI）离散时间系统，简称LSI系统。

一、线性系统

满足叠加原理的系统称为线性系统。

如果系统在$x_1(n)$和$x_2(n)$单独输入时的输出分别为$y_1(n)$和$y_2(n)$ 即：

$$y_1(n) = T[x_1(n)]$$
$$y_2(n) = T[x_2(n)]$$

那么当且仅当下式成立时，该系统是线性的

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)] = aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)] = ay_1(n)+by_2(n)$$

对任意常数a和b都成立。

可加性和齐次性

例 $y(n) = 2x(n) + 3$ 是否为线性系统 ？

五、因果系统与稳定系统

因果：***n***时刻的输出只与***n***和***n***时刻以前的输入有关

稳定：有界输入产生有界的输出

线性时不变系统是因果系统的充分必要条件是单位冲激响应是因果序列 $h(n)=0 \quad n<0$

举例：判断下面系统是否为因果系统：

$$y_1(n)=T[x(n)]=nx(n) \qquad y_2(n)=T[x(n)]=nx(n+1)$$

线性时不变系统是稳定系统的充分必要条件是单位冲激响应绝对可和， 即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty$$

因果稳定的线性时不变系统的单位抽样响应既是因果的又是绝对可和的， 即：

$$\left.\begin{array}{l} h(n)=\begin{cases} h(n) & n\geq 0 \\ 0 & n\leq 0 \end{cases} \\ \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left|h(n)\right|<\infty \end{array}\right\}$$

三、序列的周期性

1.定义

对所有***n***，存在最小正整数N，满足

$$x(n) = x(n+N)$$

则称***x*(*n*)**为周期序列，周期为N

2.正弦序列的周期性

$$x(n) = A\sin(n\omega_0 + \phi)$$

$$x(n+N) = A\sin[(n+N)\omega_0 + \phi] = A\sin[n\omega_0 + N\omega_0 + \phi]$$

当 $N\omega_0 = 2k\pi$ 时 有 $x(n) = x(n+N)$

$$N\omega_0 = 2k\pi \quad \Rightarrow \quad N = \frac{2\pi}{\omega_0} k$$

k 和 N 必须是整数

分三种情况讨论：

1） $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 是整数　　　　**$x(n)$是周期序列，周期为：**

$$N = \frac{2\pi}{\omega_0} k = \frac{2\pi}{\omega_0} \cdot 1 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

2） $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 是有理数时

$$\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{P}{Q}$$

$$N = \frac{2\pi}{\omega_0} k = \frac{P}{Q} k$$

当$k=Q$ 时，才能保证N 为整数，得序列的周期$N=P$

3） $\dfrac{2\pi}{\omega_0}$ 是无理数时　　　　$x(n)$是非周期序列

例：判断下列序列是否为周期序列，并判断其周期

$$\sin(\frac{\pi}{8}n) \qquad \sin(\frac{3\pi}{10}n) \qquad \sin(0.4n)$$

wave

3. 复指数序列 $x(n)=e^{j\omega_0 n}$的周期性与正弦序列相同

4. 对复指数序列和正弦序列，ω_0 称为频率(数字域)

5. 由连续时间正弦信号采样也可得到正弦序列

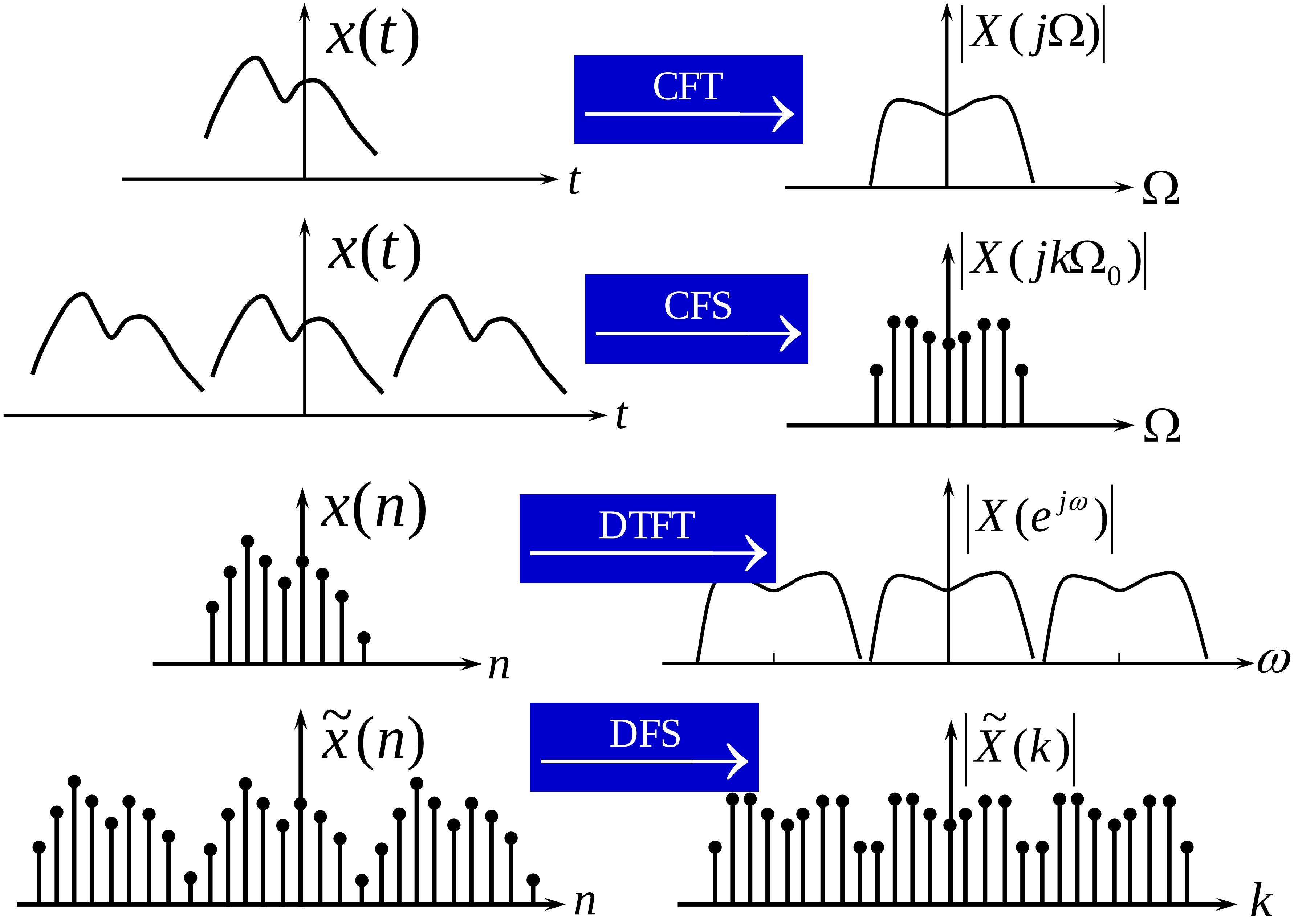
$$x(t)=A\sin(\Omega_0 t+\phi)$$

$$\Omega_0=2\pi f_0=\frac{2\pi}{T_0}$$

$$x(n)=x(t)\big|_{t=nT}=A\sin(\Omega_0 nT+\phi)=A\sin(\omega_0 n+\phi)$$

$$\Omega_0 T=\omega_0$$

数字频率与模拟频率的关系


$x(t)$
CFT
$|X(j\Omega)|$
t
Ω
$x(t)$
CFS
$|X(jk\Omega_0)|$
t
Ω
$x(n)$
DTFT
$|X(e^{j\omega})|$
n
ω
$\tilde{x}(n)$
DFS
$|\tilde{X}(k)|$
n
k

§3-3 离散傅立叶变换DFT
——有限长序列的离散频域表示

一、周期序列与有限长序列的本质联系

设**x(n)**为有限长序列，长度为N，即**x(n)**只在***n***=0~N-1点上有值，其他 ***n*** 时，**x(n)** = 0。即

$$x(n)=\begin{cases}x(n) & 0\le n\le N-1\\ 0 & \text{其他}\boldsymbol{n}\end{cases}$$

把**x(n)**看成周期为N的周期序列$\tilde{x}(n)$的一个周期，而把$\tilde{x}(n)$看成**x(n)**的以N为周期的周期延拓

主值区间 周期序列$\tilde{x}(n)$的 $n=0\sim N-1$的周期

主值序列 主值区间上的序列

$\tilde{x}(n)$与$x(n)$关系

$\tilde{x}(n)$是$x(n)$的周期延拓 $\tilde{X}(k)$是$X(k)$的周期延拓

$x(n)$是$\tilde{x}(n)$的主值区间 $X(k)$是$\tilde{X}(k)$的主值区间

$$\tilde{x}(n) = x((n))_N \qquad \tilde{X}(k) = X((k))_N$$

$$x(n) = \tilde{x}(n)R_N(n) \qquad X(k) = \tilde{X}(k)R_N(k)$$

二、DFT只有N个独立的值

$$
\begin{cases}
\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{nk} \\
\tilde{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)W_N^{-nk}
\end{cases}
$$

DFS公式的求和都只限定在**n=0~N-1**和**k=0~N-1**的主值区间进行，因此公式完全适用于主值序列**$x(n)$**与**$X(k)$**，从而可得有限长序列的离散傅里叶变换的定义：

$$
\begin{cases}
X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk} \qquad 0\le k\le N-1 \qquad \textbf{DFT} \\
x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk} \qquad 0\le n\le N-1 \qquad \textbf{IDFT}
\end{cases}
$$

2、有限长序列圆周移位定理

1）时域移位定理

$$y(n) = x((n+m))_N R_N(n)$$

$$\boldsymbol{Y(k) = X(k)W_N^{-km}}$$

有限长序列的圆周移位，在离散频域中只引入线性相移 $W_N^{-km} = e^{j\frac{2\pi}{N}km}$ 而对频谱的幅度没有影响。

2）频率移位定理(调制定理)

$X(k)$的圆周移位为$X((k+l))_N R_N(k)$

$$IDFT[X((k+l))_N R_N(k)] = x(n)W_N^{nl}$$

它说明，时域序列的调制等效于频域的圆周移位。

3) 对偶性

$$f(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} F(j\Omega)$$

$$F(jt) \xleftrightarrow{\text{FT}} 2\pi \cdot f(-\Omega)$$

$$\tilde{x}(n) \xleftrightarrow{\text{DFS}} \tilde{X}(k)$$

$$\tilde{X}(n) \xleftrightarrow{\text{DFS}} N \cdot \tilde{x}(-k)$$

$$x(n) \xleftrightarrow{\text{DFT}} X(k)$$

$$X(n) \xleftrightarrow{\text{DFT}} N \cdot x((-k))_N R_N(k)$$

$$N \cdot x((N-k))_N R_N(k)$$

练习：已知序列 $x(n)=\{1_{(n=0)},2,-3,0,C,5\}$，其中是未知常数C。

1．若 $\sum_{k=0}^{5}|X(k)|^2=288$ ，则C =?

$$\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|X(k)|^2$$

八、序列的和

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n) = ? \quad X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}$$

$$X(0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)$$

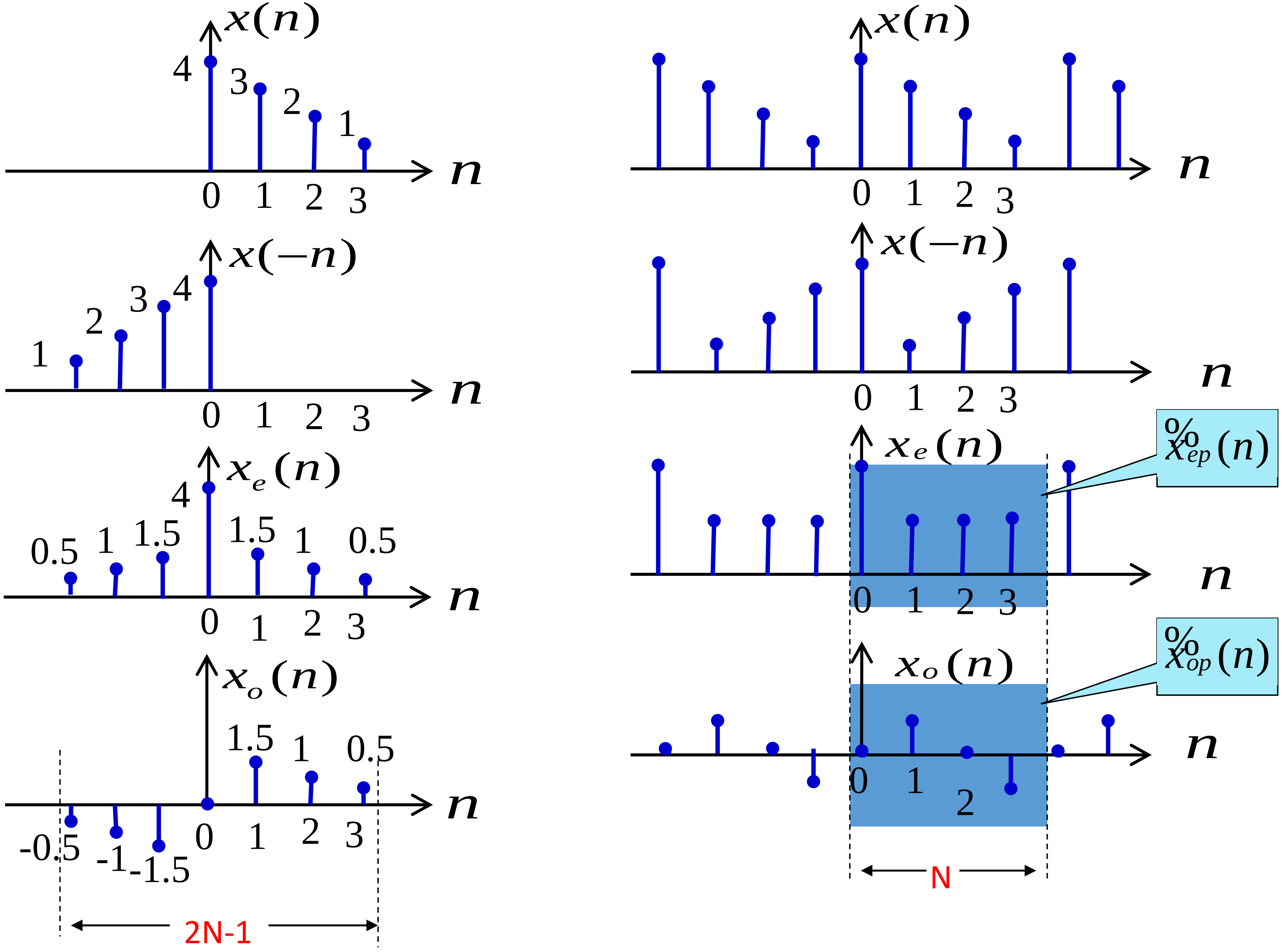
九、序列的初始值

$$x(0) = ? \quad x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}$$

$$x(0) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)$$

练习：已知序列x(n)={$1_{(n=0)}$,2,-3,c,2,1},

如果X(0)=0，求C=？



x(n)
4
3
2
1
0 1 2 3
n
x(−n)
x_e(n)
0.5
1.5
x_o(n)
-0.5
-1
-1.5
2N-1
x̃_ep(n)
x̃_op(n)
N

四、圆周共轭对称性（续）

(一)有限长序列 $x(n)$ 的周期延拓序列为：$\tilde{x}(n)=x((n))_N$

周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的共轭对称分量和共轭反对称分量为

$$\tilde{x}_e(n)=\frac{1}{2}[\tilde{x}(n)+\tilde{x}^*(-n)]=\frac{1}{2}[x((n))_N+x^*((N-n))_N]$$

$$\tilde{x}_o(n)=\frac{1}{2}[\tilde{x}(n)-\tilde{x}^*(-n)]=\frac{1}{2}[x((n))_N-x^*((N-n))_N]$$

$\tilde{x}_e(n)$、$\tilde{x}_o(n)$为周期序列，周期为N。

可以证明：$\tilde{x}_e(n)=\tilde{x}_e^*(-n)$　　$\tilde{x}_o(n)=-\tilde{x}_o^*(-n)$

且 $\tilde{x}(n)=\tilde{x}_e(n)+\tilde{x}_o(-n)$

$$x(n)=\tilde{x}(n)R_N(n)=\left[\tilde{x}_e(n)+\tilde{x}_o(n)\right]R_N(n)$$
$$=\tilde{x}_e(n)R_N(n)+\tilde{x}_o(n)R_N(n)$$
$$=x_{ep}(n)+x_{op}(n)$$

（二）圆周共轭对称分量和圆周共轭反对称分量

1、有限长序列 $x(n)$的圆周共轭对称分量 $x_{ep}(n)$

$$x_{ep}(n)=\tilde{x}_e(n)R_N(n)=\frac{1}{2}[x((n))_N+x^*((N-n))_N]R_N(n)$$

有限长序列 $x(n)$的圆周共轭反对称分量 $x_{op}(n)$ 演示

$$x_{op}(n)=\tilde{x}_o(n)R_N(n)=\frac{1}{2}[x((n))_N-x^*((N-n))_N]R_N(n)$$

2、 $x(n)=x_{ep}(n)+x_{op}(n)$

例 复序列$x(n)=\left\{2+j_{(n=0)},4+2j,3+3j\right\}$，求$x_{ep}(n),x_{op}(n)$.

解：$x((-n))_N R_N(n)=\left\{2+j_{(n=0)},3+j3,4+j2\right\}$

$$x^*((-n))_N R_N(n)=\left\{2-j_{(n=0)},3-j3,4-j2\right\}$$

$$x_{ep}(n)=\frac{1}{2}\left[x(n)+x^*((-n))_N\right]R_N(n)$$

$$=\left\{2_{(n=0)},3.5\text{-}j0.5,3.5\text{+}j0.5\right\}$$

$$x_{op}(n)=\frac{1}{2}\left[x(n)-x^*((-n))_N\right]R_N(n)$$

$$=\left\{j_{(n=0)},0.5+j2.5,-0.5+j2.5\right\}$$

$$x(n)=x_{ep}(n)+x_{op}(n)$$

b. 复数序列的DFT

$$\mathrm{Re}[x(n)] \Leftrightarrow X_{ep}(k)$$

$$j\,\mathrm{Im}[x(n)] \Leftrightarrow X_{op}(k)$$

$$x_{ep}(n) \Leftrightarrow \mathrm{Re}[X(k)]$$

$$x_{op}(n) \Leftrightarrow j\,\mathrm{Im}[X(k)]$$

例：利用共轭对称性，用一次DFT运算来计算两个实数序列的DFT，可以减少计算量

$$
\begin{array}{ccccc}
x(n) = & \mathrm{Re}[x(n)] & + & j\,\mathrm{Im}[x(n)] \\
\updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\
X(k) = & X_{ep}(k) & + & X_{op}(k)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
x(n) = & x_{ep}(n) & + & x_{op}(n) \\
\updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\
X(k) = & \mathrm{Re}[X(k)] & + & j\,\mathrm{Im}[X(k)]
\end{array}
$$

练习：若x(n)是一个实数序列，X(k)是它的7点DFT，已知X(0)=2j， X(1)=2.2-j， X(3)=6+2j， X(5)=-4-2j，求X(2)。

证明：***x*(*n*)**是实数偶对称→其DFT***X*(*k*)**实数偶对称

$$\textbf{x(n)}\text{是实数偶对称} \Rightarrow \begin{cases} x(n) = x((-n))_N R_N(n) \\ x(n) = x^*(n) \end{cases}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \quad 0 \le k \le N-1$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} R_N(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x((-n))_N R_N(n) W_N^{nk} R_N(k)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x((-n))_N W_N^{nk} R_N(k)$$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x((-n))_N W_N^{nk}R_N(k) \quad -n=m$$

$$=\sum_{m=0}^{-(N-1)}x((m))_N W_N^{-mk}R_N(k)=\sum_{m=0}^{N-1}x(m)W_N^{-mk}R_N(k)$$

$$=X((-k))_N R_N(k)$$ **X(k)是偶对称**

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}R_N(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x^*(n)W_N^{nk}R_N(k)$$

$$=\left[\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{-nk}\right]^* R_N(k)=X^*((-k))_N R_N(k)$$

$$\Rightarrow X((-k))R_N(k)=X^*((-k))R_N(k)$$ **X(k)是实数**

既X(k)实数偶对称

$x(n)$	$\leftrightarrow$	$X(k)$
$x^*(n)$	$\leftrightarrow$	$X^*((-k))_N R_N(n)$
$x^*((-n))_N R_N(n)$	$\leftrightarrow$	$X^*(k)$
$\mathrm{Re}[x(n)]$	$\leftrightarrow$	$X_{ep}(k)$ 实部偶对称，虚部奇对称
$j\,\mathrm{Im}[x(n)]$	$\leftrightarrow$	$X_{op}(k)$ 实部奇对称，虚部偶对称
$x_{ep}(n)$	$\leftrightarrow$	$\mathrm{Re}[X(k)]$
$x_{op}(n)$	$\leftrightarrow$	$j\,\mathrm{Im}[X(k)]$
$x(n)=x(N-n)$	$\leftrightarrow$	$X(k)=X(N-k)$
$x(n)=-x(N-n)$	$\leftrightarrow$	$X(k)=-X(N-k)$

1）周期卷积是线性卷积以L为周期的周期延拓

$$y(n)=\sum_{r=-\infty}^{\infty} y_l(n+rL)=y_l((n))_L$$

2）若周期 L< N_1+N_2-1，那么周期延拓会出现混叠；

只有周期 L≥ N_1+N_2-1 ，才没有混叠现象

此时，每一个周期L内，前N_1+N_2-1个序列值正好是$y_1(n)$的全部非零序列值，而剩下的点是补充的零值。

3）圆周卷积是周期卷积取主值序列

$$y(n)=x_1(n) \textcircled{L}\ x_2(n)=\tilde{y}(n)R_L(n)=y_l((n))_L R_L(n)$$

L点圆周卷积等于线性卷积以L为周期的周期延拓后取主值序列

4）圆周卷积 = 线性卷积的必要条件为：

$$L \geq N_1 + N_2 - 1$$

满足此条件后就有 $x_1(n) \; Ⓛ \; x_2(n) = x_1(n) * x_2(n)$

5）总结 圆周卷积、周期卷积、线性卷积的关系

$$\tilde{x}_1(n) * \tilde{x}_2(n) = ((x_1(n) * x_2(n)))_L$$

$$x_1(n) \; Ⓛ \; x_2(n) = [\tilde{x}_1(n) * \tilde{x}_2(n)] R_L(n)$$

$$x_1(n) \; Ⓛ \; x_2(n) = ((x_1(n) * x_2(n)))_L R_L(n)$$

当 $L \geq N_1 + N_2 - 1$ $\quad x_1(n) \; Ⓛ \; x_2(n) = x_1(n) * x_2(n)$

圆周卷积的另外一种求解方法：

先求线性卷积，
再周期延拓后混叠相加

例：

§3-6.3 利用DFT计算模拟信号的傅立叶变换(级数)对

一、利用DFT对非周期连续信号傅立叶变换的逼近过程

$$
\begin{tikzcd}
x_a(t) \arrow[r, "\text{采样}", "t=nT"'] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{FT}"] & x(n) \arrow[r, "\text{截断}", "x(n)d(n)"'] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{DTFT}"] & x_N(n) \arrow[r, "\text{周期}", "\text{延拓}"'] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{DTFT}"] & \tilde{x}_N(n) \arrow[r, "\text{主值}", "\text{序列}"'] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{DFS}"] & x_N(n) \arrow[d, leftrightarrow, "\text{DFT}"'] \\
X_a(j\Omega) \arrow[r, "\text{周期}", "\text{延拓}"'] & X(e^{j\omega}) \arrow[r, "\text{卷积}", "X(e^{j\omega})*D(e^{j\omega})"'] & X'(e^{j\omega}) \arrow[r, "\text{采样}", "\omega=\frac{2\pi}{N}"'] & \tilde{X}_N(k) \arrow[r, "\text{主值}", "\text{序列}"'] & X_N(k)
\end{tikzcd}
$$

$$\Omega_s = 2\pi f_s$$

$$\omega_s = \Omega_s T = 2\pi$$

184页 图3.16（第四版）
133页 图3-17（第三版）

一、DFT与连续时间信号傅立叶变换间的误差

1、混叠失真

时域采样应满足 $f_s \geq 2f_h$ 否则将产生频谱的混叠失真

$F_0 = f_s/N$ F_0表示频域的采样间隔

又称频率分辨力(单位:Hz)。所谓频率分辨力是指可分辨两频率分量峰值的最小间距。它的意思是，假设某频谱的频率分辨力=5Hz，那么信号中频率相差小于5Hz的两个频率分量在此频谱图中就分辨不出来。

$$F_0 = \frac{1}{T_0}$$

T_0信号的实际长度

(信号记录长度)

2、频谱泄漏

泄漏：频谱分量从正常频谱扩展开来

产生原因：数据截断

减少的方法：1）截取更长的数据

2）不要突然截断，即改变窗的形状

（使旁瓣能量减小）

泄漏只能抑制，不能消除

泄漏也会产生混叠

3、栅栏效应

栅栏效应：DFT计算频谱只限制在离散点上的频谱，而不是连续的，就像通过一个“栅栏”观看景象一样。

产生原因：频域抽样

减少的方法:增加频域抽样点数。在不改变时域数据的情况下，在记录末端添加零值点。

例：一信号的最高频率为4kHz，对该信号作DFT，要求频率分辨率为≤10Hz。为了做快速DFT要求采样点数为2的整数幂。

问：1、最小记录长度是多少？

2、采样点的最大时间间隔多少？

3、在一次记录中，最少记录点数是多少？

T_0：信号记录长度

F0　频率分辨力(单位:Hz)

N：采样点数

T：时域采样间隔

f_h：信号最高频率

f_s：信号采样频率

$$F_0 = \frac{1}{T_0} \quad f_s = \frac{1}{T}$$

$$F_0 = f_s / N$$

$$N = T_0 / T = f_s / F_0$$

$$f_s \geq 2 f_h$$

例：一信号的最高频率为4kHz，对该信号作DFT，要求频率分辨率为≤10Hz。为了做快速DFT要求采样点数为2的整数幂。

问：1、最小记录长度是多少？

2、采样点的最大时间间隔多少？

3、在一次记录中，最少记录点数是多少？

解：

$$F_0 = \frac{1}{T_0} \quad T_0 = \frac{1}{F_0} = 0.1s$$

$$f_s \geq 2f_h = 8kHz \quad T = \frac{1}{f_s} \leq \frac{1}{2f_h} = 0.125\times10^{-3}s$$

$$N = \frac{T_0}{T} = 800 \Rightarrow 1024$$

频率采样定理

若时域序列长度为M，则只有当频域采样点数N满足$N \geqq M$，才有

$$x_N(n) = \tilde{x}_N(n) R_N(n) = x((n))_N R_N(n) = x(n)$$

即可由频域采样$X(k)$不失真的恢复出原信号$x(n)$（不失真的恢复出原连续频谱），否则会产生时域（频域）混叠现象。

$$\underset{M\text{点}}{x(n)} \xrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j\omega}) \xrightarrow{N\text{点采样}} \underset{N\text{点}}{X(k)} \xrightarrow{\text{IDFT}} \underset{N\text{点}}{x_N(n)}$$

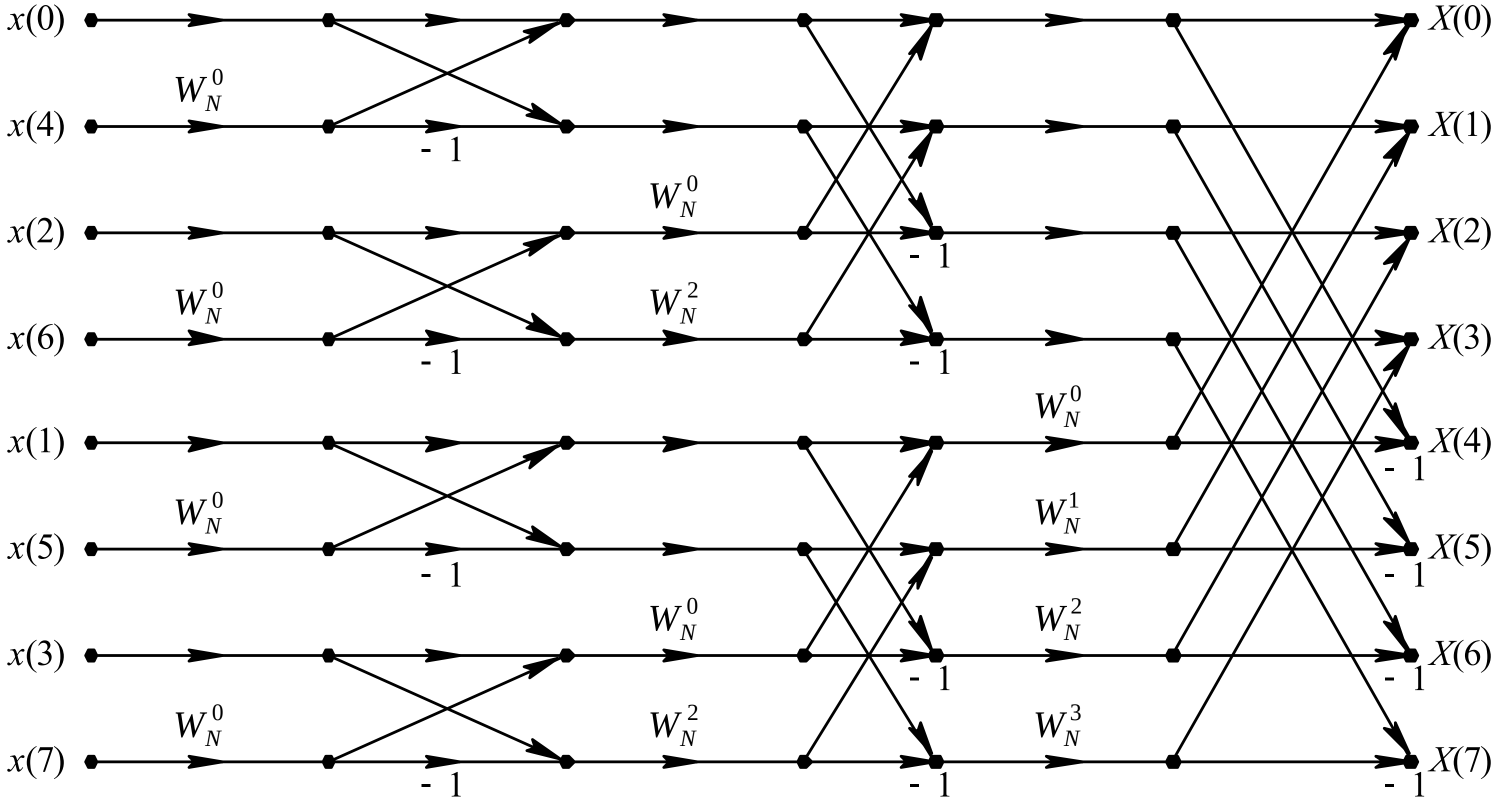
$$x_N(n) = x((n))_N R_N(n)$$

例：已知 $x(n)=R_8(n)$ $X(e^{j\omega})=DTFT[x(n)]$

对 $X(e^{j\omega})$ 采样得 $Y(k)=X(e^{j\omega})\big|_{\omega=\frac{2\pi}{6}k}, k=0,1,\cdots,5$

求：$y(n)=IDFT[Y(k)]$

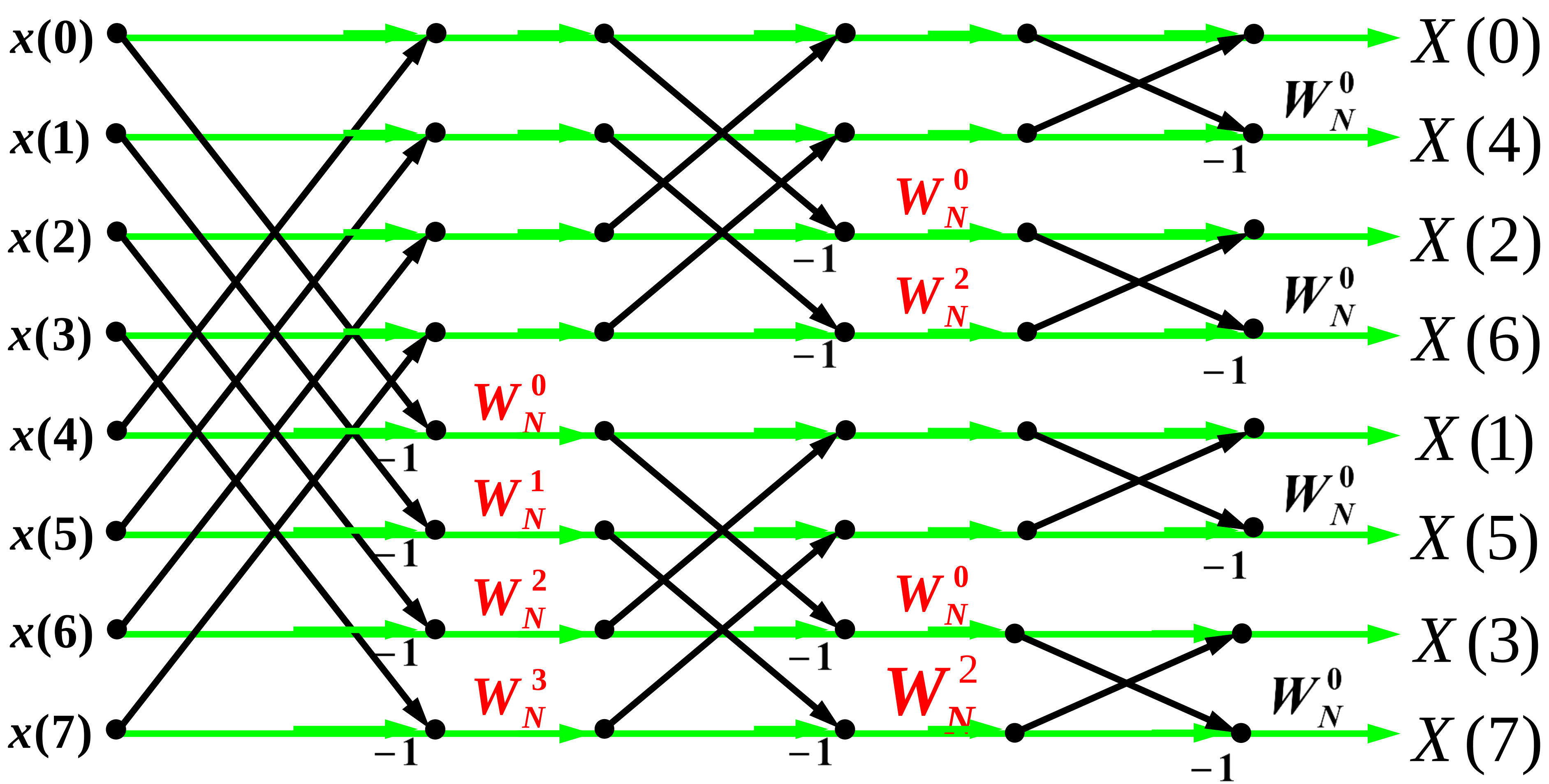
二、按时间抽取的FFT算法与直接计算DFT运算量的比较



$N=2^L$需要 L 级蝶形运算，每级有 N/2 个蝶形结

每个蝶形结需要1次复乘，两次复加；每级蝶形需要 N/2 次复乘，N 次复加；

L级蝶形共需要 (N/2)L 次复乘， NL 次复加



按频率抽取的FFT（N=8）信号流图

返回两点间距离

返回对比

§4.5 离散傅立叶反变换的快速算法（IFFT）

方法1：

$$\begin{cases} X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} \\ x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk} \end{cases}$$

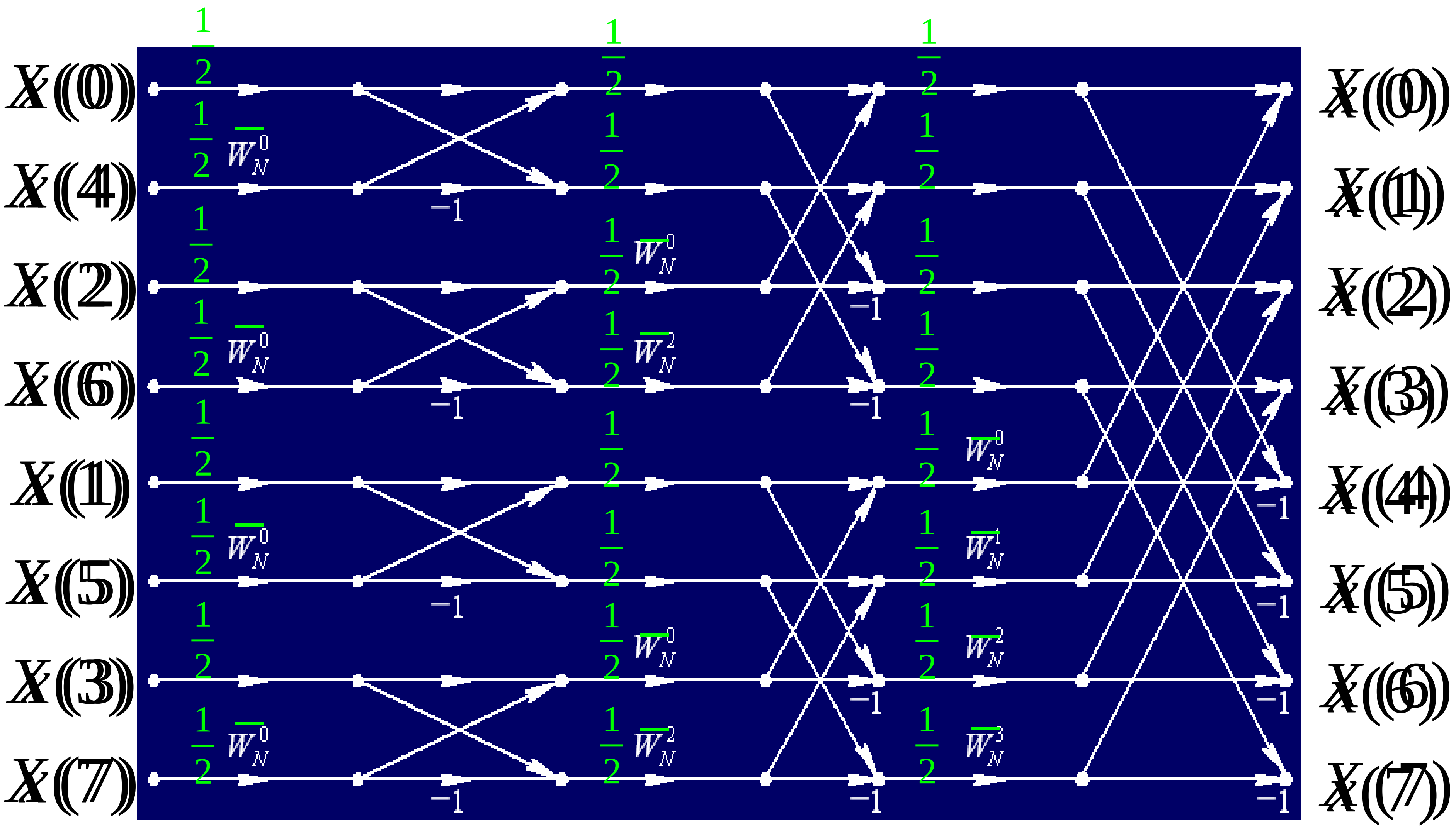
在FFT中： 1. 用W_N^{-r}代替W_N^{r}

2. 在L列中每列分别乘一个 ½ 因子

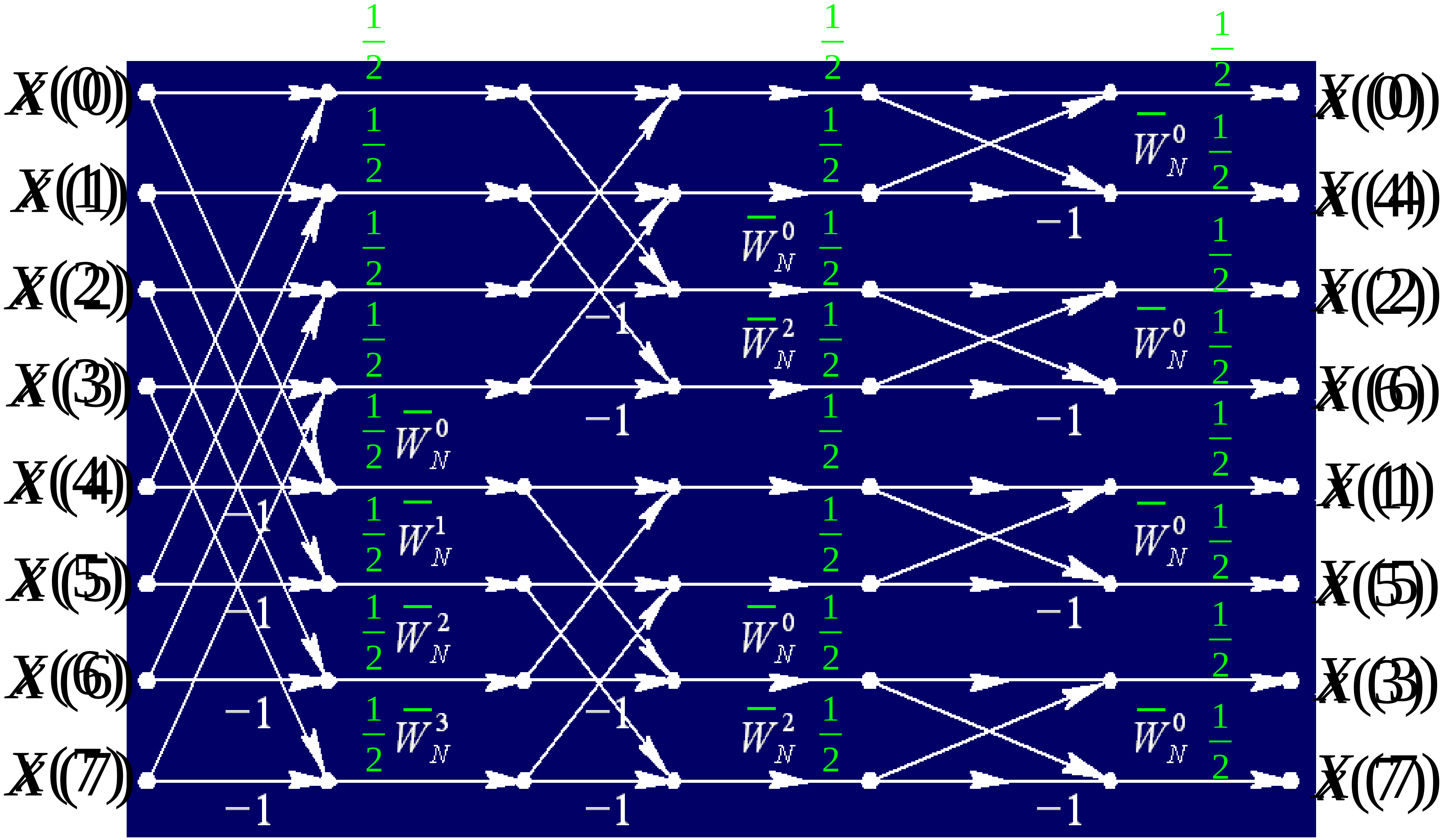
3. 输入输出对调

则：按时间抽取(DIT)FFT $\rightarrow$ 按频率抽取(DIF)IFFT

按频率抽取(DIF)FFT $\rightarrow$ 按时间抽取(DIT)IFFT



DIT FFT → DIF IFFT



DIF FFT $\longrightarrow$ DIT IFFT

方法2：

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk}$$

$$=\frac{1}{N}\left[\sum_{k=0}^{N-1}X^*(k)W_N^{nk}\right]^*$$

$$=\frac{1}{N}\left\{\ DFT\left[X^*(k)\right]\ \right\}^*$$

IFFT把FFT作为一个子程序块调用

$$X(k)\rightarrow \text{求共轭} \rightarrow \text{FFT} \rightarrow \text{求共轭} \rightarrow \frac{1}{N} \rightarrow x(n)$$

采用基-2 FFT后，N点序列需要的运算量为：

复乘：$\frac{N}{2}\log_2 N$　　复加：$N\log_2 N$

直接计算DFT，N点序列需要的运算量为：

复乘：N^2　　复加：$N(N-1)$

例：N＝7点DFT直接计算需要多少次复加、复乘？

采用基-2 FFT算法需要多少次复乘、复加？

FFT算法就是用圆周卷积来代替线性卷积

1）为了不产生混叠，其必要条件是使**x(n)**，**h(n)**都补零值点，补到N≥M+L−1，$N=2^m\ge L+M-1$即：

$$x(n)=\begin{cases}x(n) & 0\le n\le L-1\\ 0 & L\leqslant n\leqslant N-1\end{cases}\qquad h(n)=\begin{cases}h(n) & 0\le n\le M-1\\ 0 & M\le n\le N-1\end{cases}$$

2）然后计算圆周卷积

$$y(n)=x(n)\,Ⓝ\,h(n)$$

这时，**y(n)**就代表线性卷积的结果

$$y(n)=x(n)*h(n)=x(n)\,Ⓝ\,h(n)$$

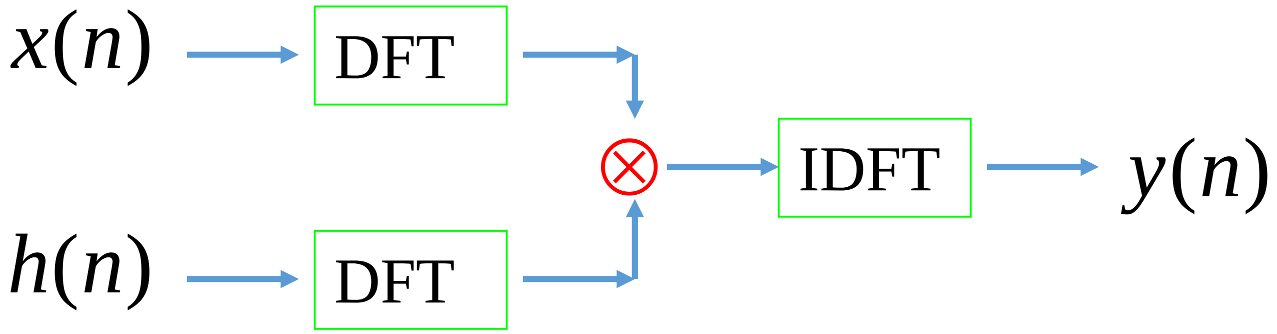
用FFT计算$y(n)$的步骤如下

① 计算 $H(k)$=DFT［$h(n)$］，N点

② 计算 $X(k)$=DFT［$x(n)$］，N点

③ 计算 $Y(k)=X(k)H(k)$;

④ 计算 $y(n)$=IDFT［$Y(k)$］，N点



快速卷积的工作量：

共需要相乘次数为

$$m_F=\frac{3}{2}N\ \log_2 N+N=N\left(1+\frac{3}{2}\log_2 N\right)$$

无限长单位冲激响应(IIR)滤波器的特点：

1） $h(n)$无限长

Infinite-duration Impulse Responses

2） $H(z)$在有限z平面存在极点

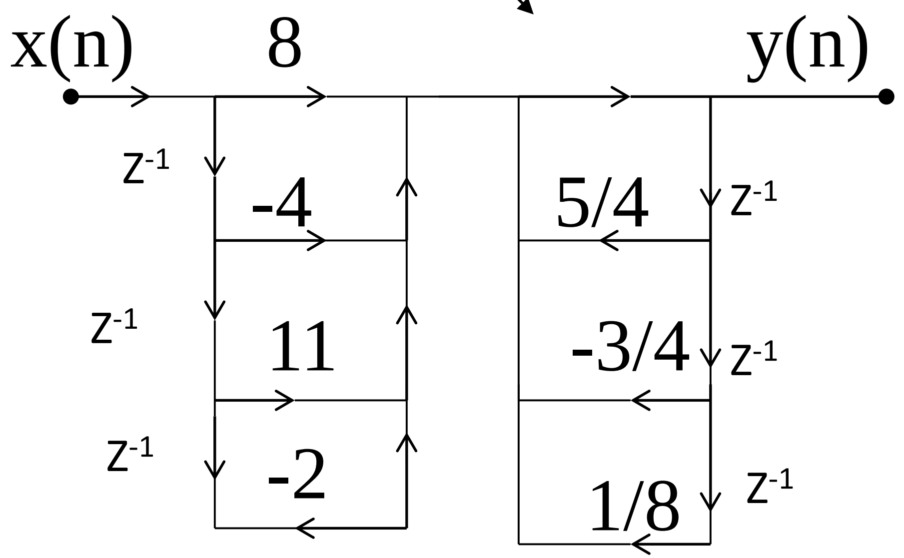
$$H(z)=\frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{1-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

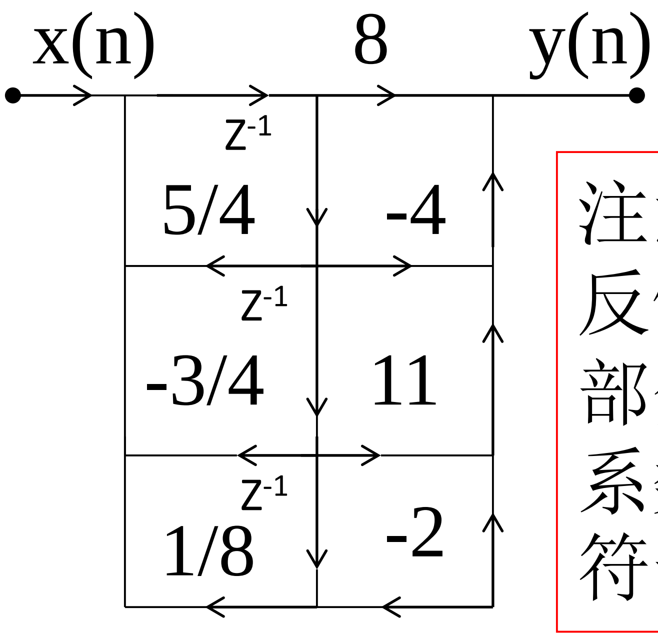
3） 结构上有反馈，即递归型结构

$$y(n)=\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)+\sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

$$H(z)=\frac{8z^3-4z^2+11z-2}{(z-\frac{1}{4})(z^2-z+\frac{1}{2})}=\frac{8-4z^{-1}+11z^{-2}-2z^{-3}}{1-(\frac{5}{4}z^{-1}-\frac{3}{4}z^{-2}+\frac{1}{8}z^{-3})}$$

解：为了得到直接I、II型结构，必须将H(z)代为Z^{-1}的有理式；



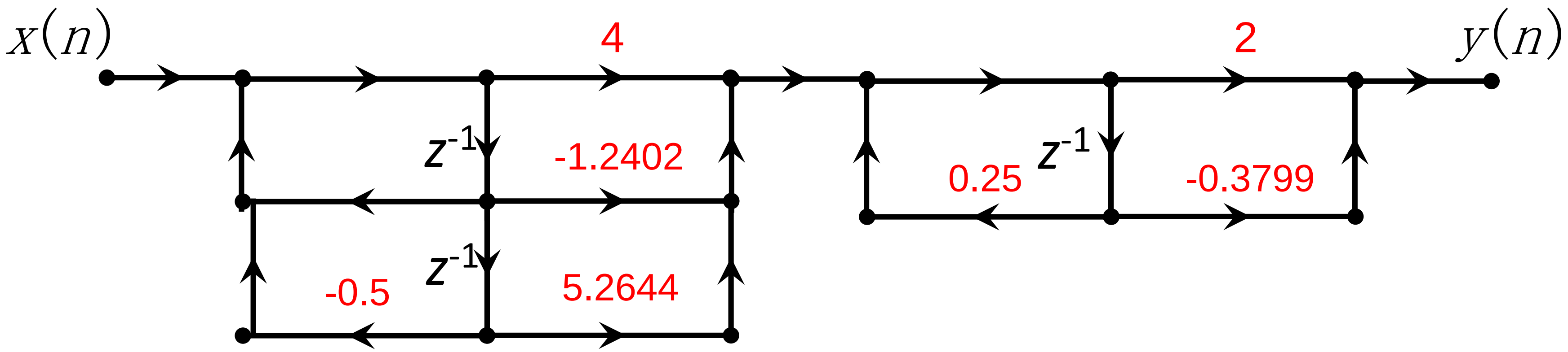


注意反馈部分系数符号

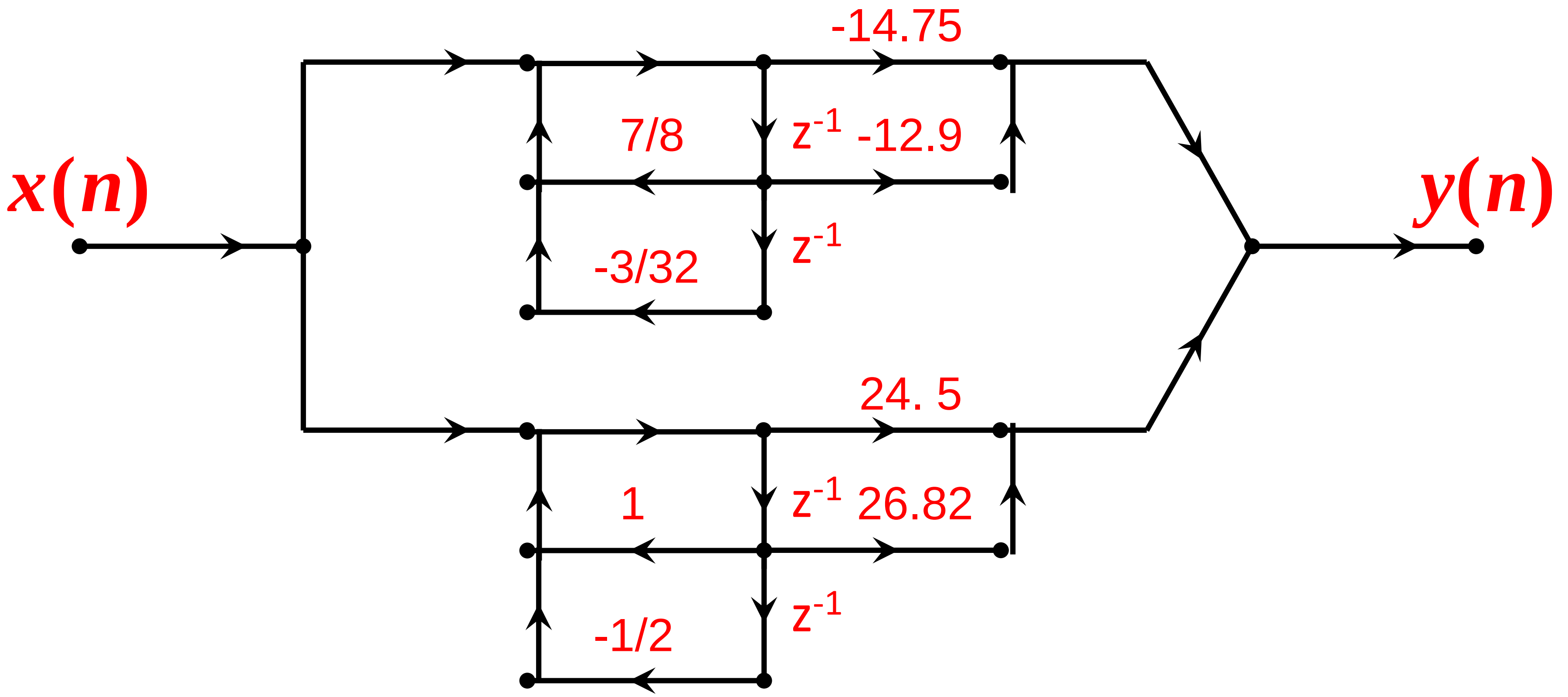
例： $$H(z)=\frac{8-4z^{-1}+11z^{-2}-2z^{-3}}{1-\frac{5}{4}z^{-1}+\frac{3}{4}z^{-2}-\frac{1}{8}z^{-3}}$$ 画出级联型结构图

$$H(z)=\frac{(2-0.3799z^{-1})(4-1.2402z^{-1}+5.2644z^{-2})}{(1-0.25z^{-1})(1-z^{-1}+0.5z^{-2})}$$

$$=\frac{(4-1.2402z^{-1}+5.2644z^{-2})}{(1-z^{-1}+0.5z^{-2})}\cdot\frac{(2-0.3799z^{-1})}{(1-0.25z^{-1})}$$



$$H(z)=\frac{-14.75-12.90z^{-1}}{1-\frac{7}{8}z^{-1}+\frac{3}{32}z^{-2}}+\frac{24.50+26.82z^{-1}}{1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$$



§5.3 有限长单位冲激响应(FIR)滤波器的基本结构

FIR数字滤波器的特点

1） $h(n)$ 0≤n≤N-1

Finite-duration Impulse Responses

2） 系统函数$H(z)$在有限z平面没有极点

3） 一般是非递归系统

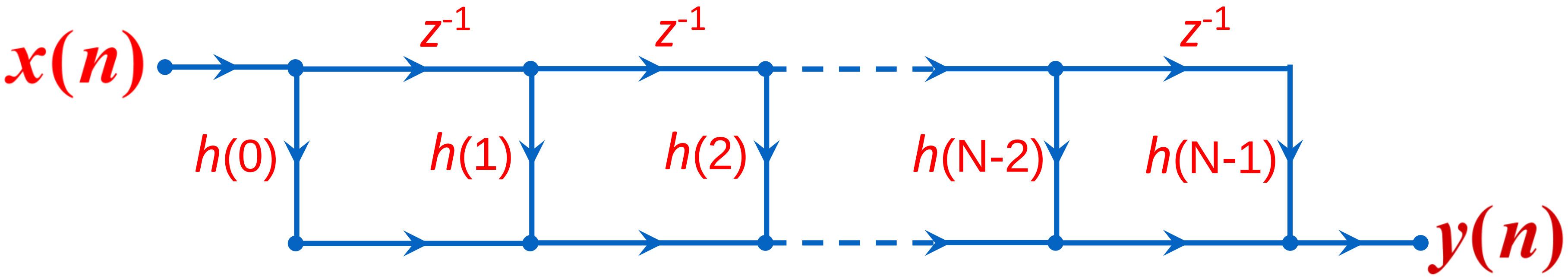
4） 可以设计成具有线性相位的形式

FIR滤波器的基本结构:　　　　　　直接型(卷积型、横截型)

级联型　　　快速卷积型　　　线性相位FIR滤波器的结构

一、直接型（卷积型、横截型）

$$y(n)=\sum_{k=0}^{N-1}h(k)x(n-k)=h(0)x(n)+h(1)x(n-1)+\ldots$$



例　$h(n)=2^n \qquad 0\le n\le 3$

画出直接型结构

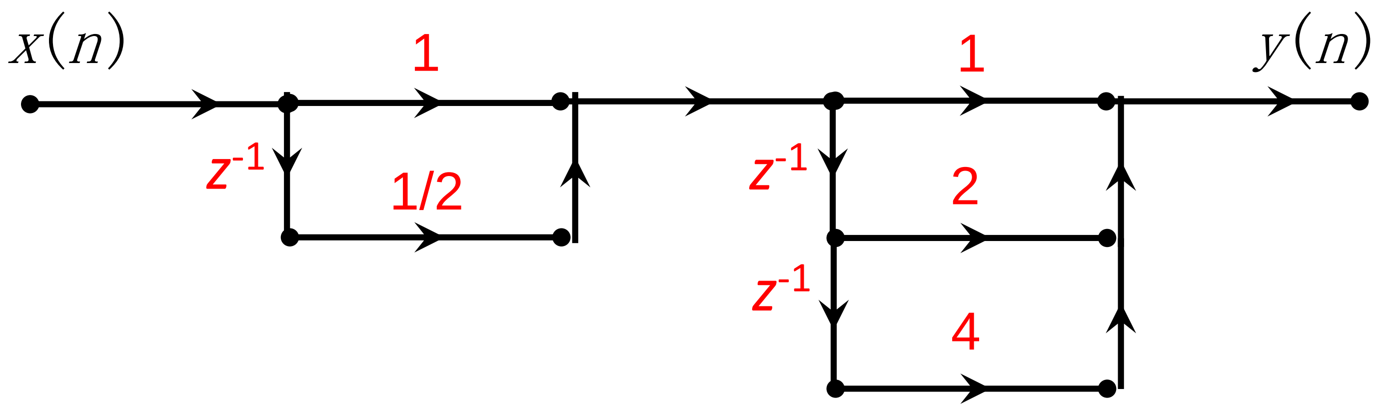
优点：便于控制零点

缺点：所需系数较多，所需乘法较多

注意：直接型和级联型结构不一定符合线性相位特性

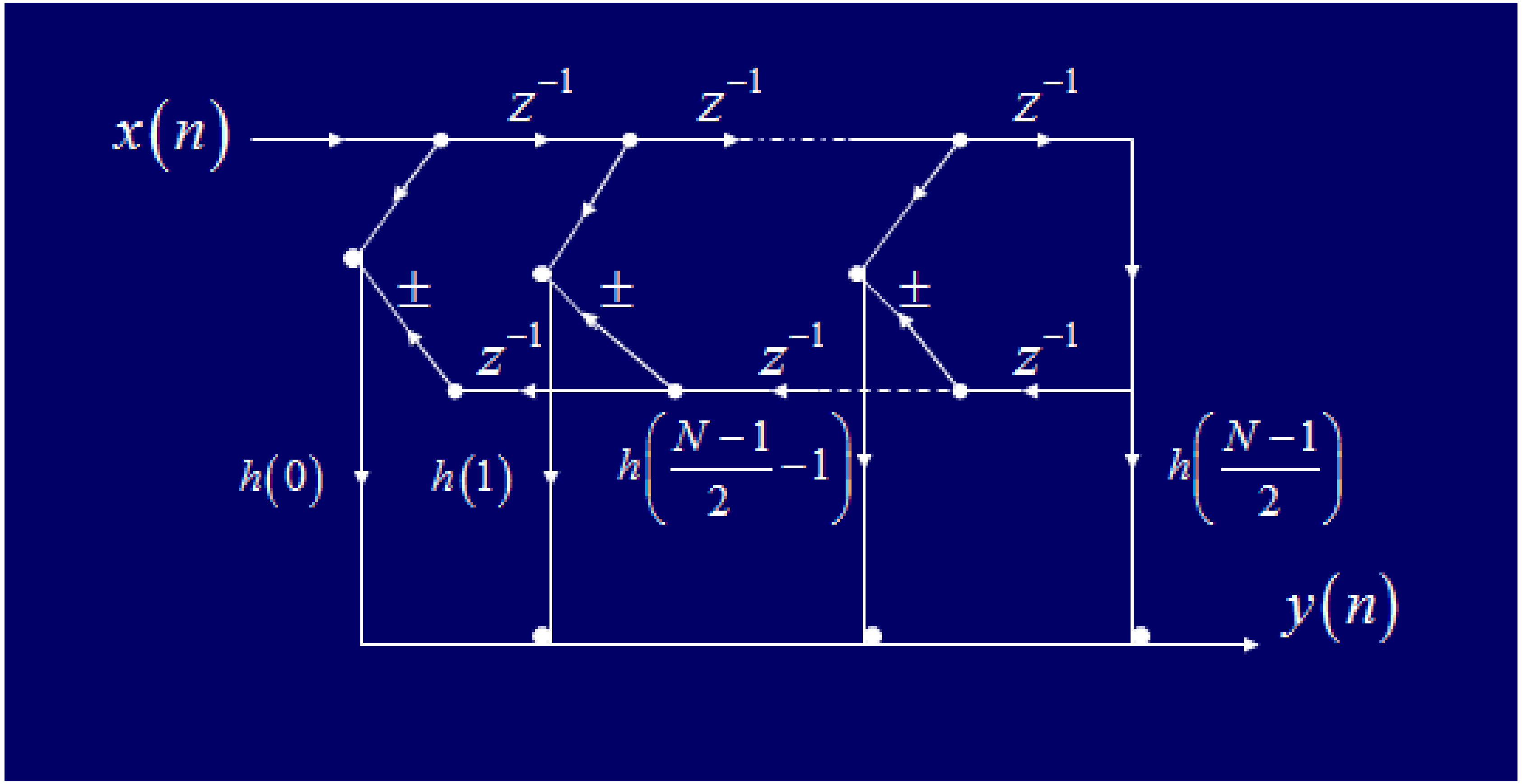
例 $$H(z)=\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+2z^{-1}+4z^{-2}\right)$$

画出级联型结构



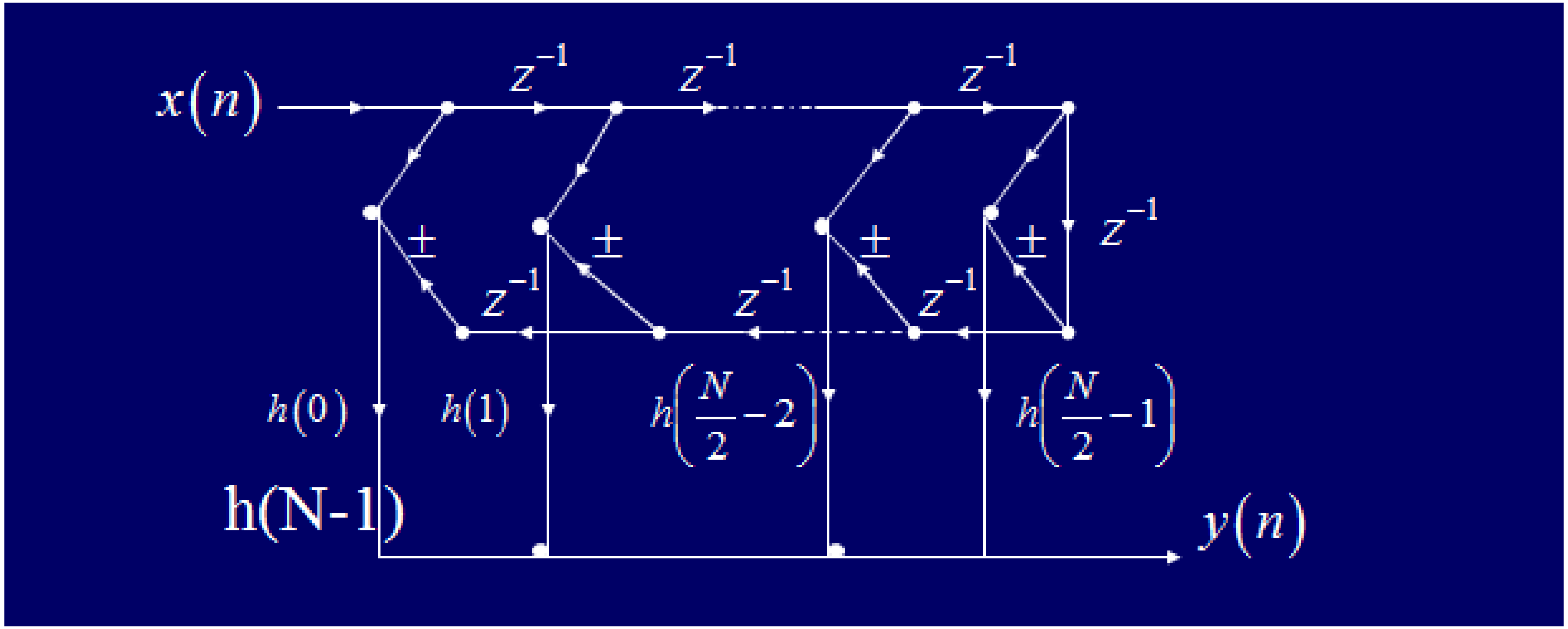
N为奇数

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n)[z^{-n}\pm z^{-(N-1-n)}]+h(\frac{N-1}{2})z^{-\frac{N-1}{2}}$$



N 为偶数

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)[z^{-n} \pm z^{-(N-1-n)}]$$



其中h(0)=h(N-1),h(2)=h(N-2)……

§6.2 最小与最大相位延时系统

对于一个LTI系统

$$H(z)=\frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}=K\frac{\prod_{m=1}^{M}(1-c_m z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_k z^{-1})}$$

对因果稳定系统　*H(z)*的全部极点必须在单位圆内

当全部零点在单位圆内时　称为最小相位延时系统

最小相位延时系统：全部零、极点都在单位圆内

当全部零点在单位圆外时 称为最大相位延时系统

最大相位延时系统：极点在单位圆内，零点在单位圆外

§6.3 全通系统

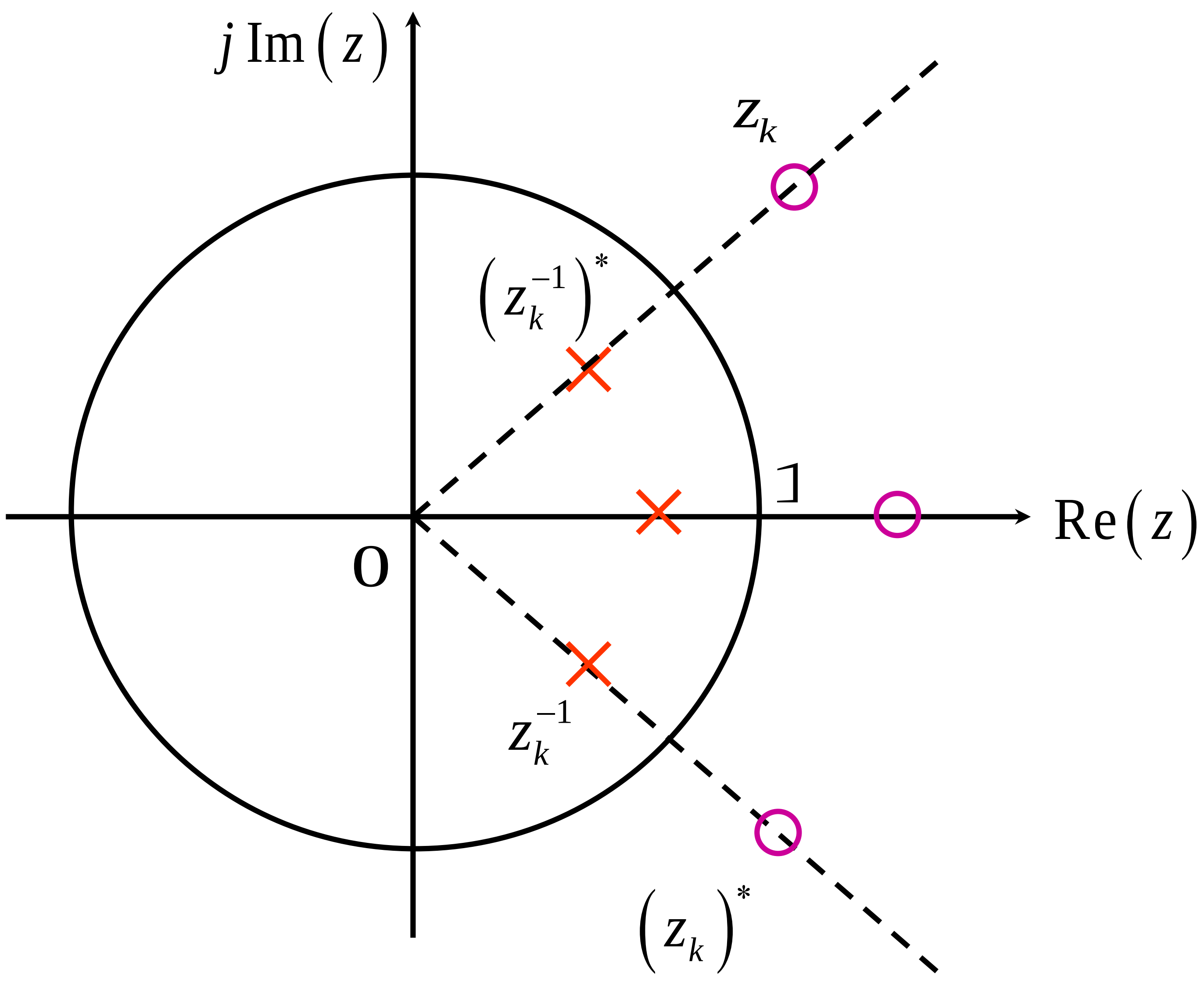
系统频响的幅度在所有频率 ω 下均为1或常数

$$H_{ap}(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = H_{ap}(e^{j\omega}) \qquad \left|H_{ap}(e^{j\omega})\right| = 1$$

1、全通系统的系统函数

$$H_{ap}(z) = \pm\frac{z^{-N} + a_1 z^{-N+1} + a_2 z^{-N+2} + \cdots + a_N}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_N z^{-N}}$$

N为全通系统的阶数，系数均为实数，且分子、分母多项式中的系数相同，仅排列的次序相反。



$j\,\mathrm{Im}(z)$
z_k
$(z_k^{-1})^*$
1
$\mathrm{Re}(z)$
O
z_k^{-1}
$(z_k)^*$

复习

一、变换原理　　6.5 冲激响应不变法

冲激响应不变法是使数字滤波器的单位脉冲响应 $h(n)$ 模仿模拟滤波器的冲激响应 $h_a(t)$，即将 $h_a(t)$ 进行等间隔采样，使 $h(n)$ 正好等于 $h_a(t)$ 的采样值：

$$h(n) = h_a(t)\big|_{t=nT}$$

$$h(n) \leftrightarrow H(z)$$

$$h_a(t) \leftrightarrow H_a(s)$$

序列的z变换与模拟信号的拉普拉斯变换的映射关系

$$\boxed{z = e^{sT}}$$

二、冲激响应不变法的优缺点

优点：①脉冲响应不变法时域逼近良好

②模拟频率Ω和数字频率ω之间呈线性关系 $\omega=\Omega T$。

缺点：有频率响应的混叠效应

所以，冲激响应不变法只适用于限带的模拟滤波器（例如，衰减特性很好的低通或带通滤波器），而且高频衰减越快，混叠效应越小。

对于高通和带阻滤波器，不易采用冲激响应不变法，否则必须加保护滤波器，滤掉高于折叠频率以上的频率，然后再使用冲激响应不变法转换。

设计过程

1、给定数字低通滤波器的指标 $\omega_p, \omega_s, \delta_1, \delta_2$

2、选择 T 进而求得模拟频率 $\Omega_p = \dfrac{\omega_p}{T}, \quad \Omega_s = \dfrac{\omega_s}{T}$

3、根据指标 $\Omega_p, \Omega_s, \delta_1, \delta_2$ 设计模拟滤波器 $H_a(s)$

4、将 $H_a(s)$ 展开成部分分式和的形式

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s - s_k}$$

5、将模拟滤波器转换为数字滤波器

$$H(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

模拟滤波器转化为数字滤波器：$H(s) \rightarrow H(z)$

冲激响应不变法
- 优点：频率变换呈线性关系 $\omega = \Omega T$
- 缺点：频率混叠失真

双线性变换法
- 优点：消除了频率混叠失真 $\Omega = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$
- 缺点：存在严重的非线性频率变换

$$H(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s - s_k} \Rightarrow H(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{TA_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

$$H(s) \quad s = \frac{2}{T}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \Rightarrow H(z)$$

例：设计一数字低通滤波器，要求：

① 3dB截止频率为 $\omega_c = 0.25\pi$；

② 使用双线性变换应用于一阶模拟巴特沃思滤波器。

解：一阶巴特沃思模拟滤波器为：

$$H_a(s) = \frac{1}{1+(s/\Omega_c)}$$

数字低通滤波器的3dB截止频率为ω_c=0.25π，相应的巴特沃思模拟滤波器的截止频率是Ω_c

$$\Omega_c = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right) = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{0.25\pi}{2}\right) = \frac{0.828}{T}$$

$$H_a(s)=\frac{1}{1+(s/\Omega_c)}=\frac{1}{1+(sT/0.828)} \qquad \Omega_c=\frac{0.828}{T}$$

将双线性变换应用于模拟滤波器，有

$$H(z)=H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$$=\frac{1}{1+(\frac{2}{0.828})\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$$=0.2920\frac{1+z^{-1}}{1-0.4159z^{-1}}$$

例2：用双线性变换法设计一个三阶巴特沃思数字低通滤波器，采样频率为f_s=4kHz，其3dB截止频率为f_c=1kHz。

解：查表得三阶模拟巴特沃思滤波器为：

$$H_a(s)=\frac{1}{1+2(s/\Omega_c)+2(s/\Omega_c)^2+(s/\Omega_c)^3}$$

确定数字域截止频率 $\omega_c = 2\pi \dfrac{f_c}{f_s} = 0.5\pi$

根据频率的非线性关系式，确定预畸变的模拟滤波器的截止频率

$$\Omega_c=\frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right)=\frac{2}{T}\tan\left(\frac{0.5\pi}{2}\right)=\frac{2}{T}$$

将 Ω_c代入三阶模拟巴特沃思滤波器$\boldsymbol{H_a(s)}$，得

$$H_a(s)=\frac{1}{1+2(sT/2)+2(sT/2)^2+(sT/2)^3}$$

将双线性变换关系代入就得到数字滤波器的系统函数

$$H(z)=H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}=\frac{1}{1+2\left(\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)+2\left(\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2+\left(\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^3}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1+3z^{-1}+3z^{-2}+z^{-3}}{3+z^{-2}}$$

例3：用冲激响应不变法设计巴特沃思低通滤波器，采样频率为10kHz，通带截止频率1.5kHz，通带最大衰减为3dB，阻带截止频率3kHz，阻带最小衰减为12dB

解：1)由已知条件求数字滤波器设计指标

$$f_s = 10kHz \quad f_p = 1.5kHz \quad f_{st} = 3kHz$$

$$\omega_p = 0.3\pi \quad \omega_{st} = 0.6\pi$$

$$\omega = \Omega T = 2\pi \frac{f}{f_s}$$

2) 求模拟滤波器设计指标

$$\omega = \Omega T \Rightarrow \Omega = \frac{\omega}{T} = \omega f_s$$

$$\Omega_p = 3\pi \times 10^3 \mathrm{rad/s} \quad \Omega_{st} = 6\pi \times 10^3 \mathrm{rad/s}$$

$$\delta_1 = 3dB \quad \delta_2 = 12dB$$

3) 模拟巴特沃思低通滤波器设计

$$N=\frac{\lg\left[\left(10^{\delta_2/10}-1\right)/\left(10^{\delta_1/10}-1\right)\right]}{2\lg(\Omega_{st}/\Omega_p)}=\frac{\lg\left[\left(10^{12/10}-1\right)/\left(10^{3/10}-1\right)\right]}{2\lg(\Omega_{st}/\Omega_p)}=1.9495$$

查表　261页表6-4

N=2

370页

$$H_{aN}(s)=\frac{1}{1+1.414s+s^2}$$

冲激响应不变法需要部分分式展开　查表 263页表6-6

$$H_{aN}(s)=\frac{1}{(s+0.707+j0.707)(s+0.707-j0.707)}$$

$$H_{aN}(s)=\frac{j0.707}{s+0.707+j0.707}-\frac{j0.707}{s+0.707-j0.707}$$

去归一化

$$H_a(s)=\frac{j0.707}{s/\Omega_c+0.707+j0.707}-\frac{j0.707}{s/\Omega_c+0.707-j0.707}$$

$$H_a(s)=\frac{j0.707}{s/\Omega_c+0.707+j0.707}-\frac{j0.707}{s/\Omega_c+0.707-j0.707}$$

$$=\frac{j0.707\Omega_c}{s+(0.707+j0.707)\Omega_c}-\frac{j0.707\Omega_c}{s+(0.707-j0.707)\Omega_c}$$

4）模拟低通滤波器转换为数字低通滤波器(冲激响应不变法)

$$\frac{A_k}{s+s_k}\Leftrightarrow\frac{A_kT}{1-e^{-s_kT}z^{-1}}$$

$$H(z)=\frac{j0.707\Omega_cT}{1-e^{-(0.7+j0.7)\Omega_cT}z^{-1}}-\frac{j0.707\Omega_cT}{1-e^{-(0.7-j0.7)\Omega_cT}z^{-1}}$$

因为通带最大衰减为3dB，所以：

$$\Omega_c=\Omega_p\qquad \Omega_cT=\omega_c=\omega_p=0.3\pi$$

例4：用双线性变换法设计巴特沃思低通滤波器，采样频率为10kHz，通带截止频率为2.5kHz，通带最大衰减为2dB，阻带截止频率3.5kHz，阻带最小衰减为15dB。

解：1)由已知条件求数字滤波器设计指标

$$\omega = \Omega T = 2\pi \frac{f}{f_s}$$

$$\omega_p = 0.5\pi \quad \omega_{st} = 0.7\pi \quad \delta_1 = 2dB \quad \delta_2 = 15dB$$

2) 求模拟滤波器设计指标

双线性变换需要预畸变

$$\Omega = \frac{2}{T}\tan(\frac{\omega}{2})$$

$$\Omega_p = 20000\text{rad/s} \quad \Omega_{st} = 39252\text{rad/s} \quad \delta_1 = 2dB \quad \delta_2 = 15dB$$

3) 模拟巴特沃思低通滤波器设计

$$N=\frac{\lg\left[\left(10^{\delta_2/10}-1\right)/\left(10^{\delta_1/10}-1\right)\right]}{2\lg(\Omega_{st}/\Omega_p)}=\frac{\lg\left[\left(10^{15/10}-1\right)/\left(10^{2/10}-1\right)\right]}{2\lg(\Omega_{st}/\Omega_p)}=2.935$$

N=3

查表 261页表6-4 $H_{a_N}(s)=\dfrac{1}{1+2s+2s^2+s^3}$

去归一化 $H_a(s)=\dfrac{1}{1+2(s/\Omega_c)+2(s/\Omega_c)^2+(s/\Omega_c)^3}$

$$\delta_1=20\lg\frac{|H(j0)|}{|H(j\Omega_p)|}=10\lg\left[1+\left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N}\right]$$

$$\Omega_c=\frac{\Omega_p}{\sqrt[2N]{10^{\delta_1/10}-1}}=\frac{2000}{\sqrt[6]{10^{0.2}-1}}=2.187\times10^4$$

4）模拟低通滤波器转换为数字低通滤波器(双线性变换法)

双线性变换

$$H(z)=H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$$=\frac{1}{1+2(s/\Omega_c)+2(s/\Omega_c)^2+(s/\Omega_c)^3}\Bigg|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$$=\frac{1}{1+2\left(\frac{2}{T\Omega_c}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)+2\left(\frac{2}{T\Omega_c}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2+\left(\frac{2}{T\Omega_c}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^3}$$

$$=\frac{1+3z^{-1}+3z^{-2}+z^{-3}}{5.33+0.8616z^{-1}+1.7924z^{-2}+0.079z^{-3}}$$

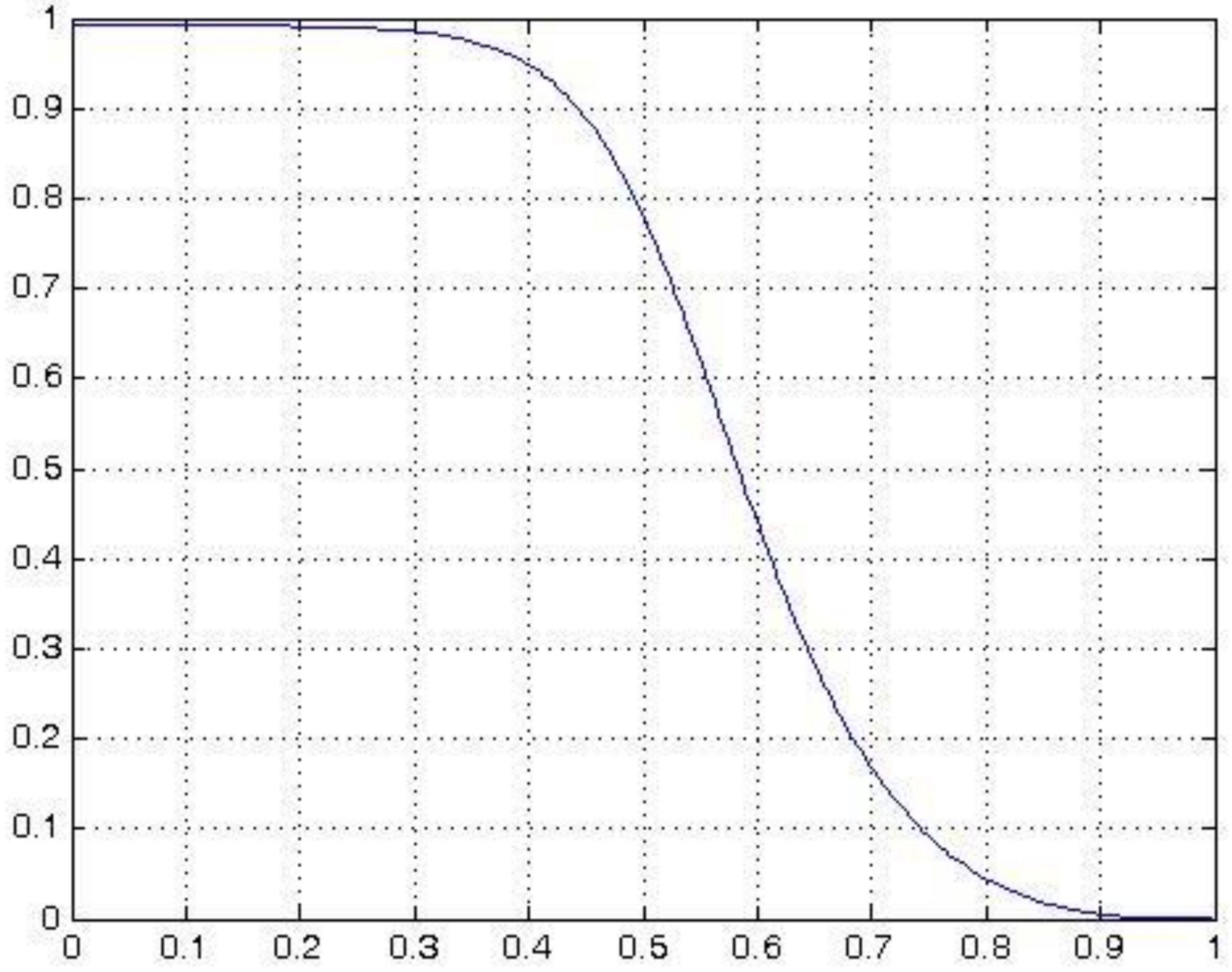
$$=\frac{0.1876+0.5628z^{-1}+0.5628z^{-2}+0.1876z^{-3}}{1-(-0.1616z^{-1}-0.3363z^{-2}-0.015z^{-3})}$$

画出系统的

直接II型(典范型)

级联、并联

$$H(z)=\frac{\sum_{r=0}^{M}b_r z^{-k}}{1-\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}}$$



低通滤波器 $\omega_p = 0.5\pi$ $\omega_{st} = 0.7\pi$ $\delta_1 = 2dB$ $\delta_2 = 15dB$

设计IIR数字滤波器的步骤

1) 由要求的选频滤波器（高通、带通、带阻）的设计指标，得出低通数字滤波器的设计指标

2) 由低通数字滤波器的设计指标得出模拟低通滤波器的设计指标（当用双线性法转换时需要预畸变）

3) 设计模拟低通滤波器（巴特沃思、切比雪夫I）

4) 将模拟低通滤波器转换为数字低通滤波器（冲激响应不变法、双线性变换法）

5) 将数字低通滤波器转换为所要求的选频滤波器（数字域转换）

(IIR)数字滤波器 $h(n)$ 是无限长的 $h(n) = 0.5^n u(n)$

(FIR)数字滤波器 $h(n)$ 是有限长的 $h(n) = \{1,2,3,2,1\}$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

$$H(e^{j\omega}) = H(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=0}^{M-1} h(n) e^{-j\omega n} = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\varphi(\omega)}$$

$$= \pm\left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\theta(\omega)} = H(\omega) e^{j\theta(\omega)}$$

$\left|H(e^{j\omega})\right|$ 幅频(Magnitude)特性 $H(\omega)$ 幅度(Amplitude)特性

$\varphi(\omega)$ 相频特性 $\theta(\omega)$ 相位特性

幅频特性反映了信号通过系统后各频率成分衰减的情况

相频特性反映了信号通过系统后各频率成分在时间上发生位移情况

线性相位

$$\begin{cases} \theta(\omega) = -\tau\omega & \Rightarrow \quad h(n) = h(N-1-n) \\ \theta(\omega) = \beta - \tau\omega & \Rightarrow \quad h(n) = -h(N-1-n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos[(\frac{N-1}{2} - n)\omega] \\ \theta(\omega) = -(\frac{N-1}{2})\omega \end{cases}$$

$$\tau = \frac{N-1}{2}$$

$$\begin{cases} H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin[(\frac{N-1}{2} - n)\omega] \\ \theta(\omega) = \frac{\pi}{2} - (\frac{N-1}{2})\omega \end{cases}$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} \quad \tau = \frac{N-1}{2}$$

五、线性相位FIR滤波器的零点位置

$$H(z) = \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1})$$

线性相位*FIR*：

1、*h*(*n*)是实数

2、*h*(*n*)=±*h*(*N*-1-*n*)

如果 $H(z)$ 存在零点 $z = z_1 = re^{j\theta}$

则一定存在零点：$z = \dfrac{1}{z_1} = \dfrac{1}{r}e^{-j\theta}$

由于$h(n)$是实数，所以$H(z)$的零点必然是以共轭对存在的：

$$z = z_1^* = re^{-j\theta} \qquad z = \frac{1}{z_1^*} = \frac{1}{r}e^{j\theta}$$

图

因此，线性相位FIR 滤波器的零点一般成四点组。

$$z_i,\ \frac{1}{z_i},\ z_i^*,\ \left(\frac{1}{z_i}\right)^*$$

例　一个FIR线性相位滤波器的单位冲激响应是实数的.如果$h(0)=1$且系统函数在$z=0.5e^{j\pi/3}$和$z=3$　各有一个零点，$H(z)$的表达式是什么？

窗函数的形状对滤波器的最小阻带衰减和过渡带的带宽都产生影响。

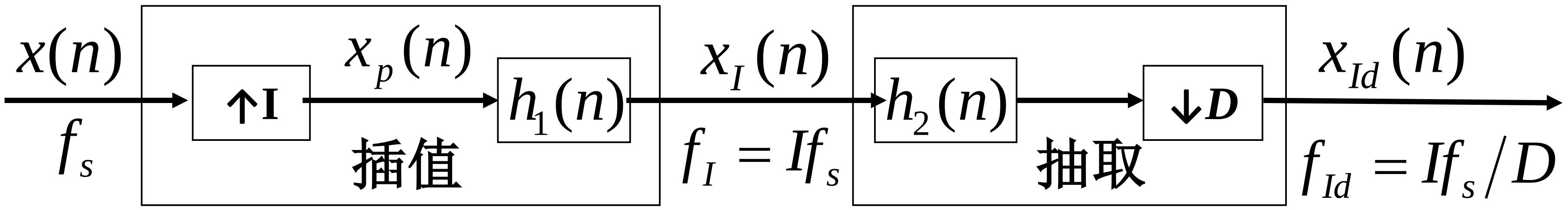
滤波器的最小阻带衰减只与窗函数形状有关，即最小阻带衰减取决于窗函数的频谱的主、副瓣面积之比；

滤波器的过渡带带宽既与窗函数的形状有关(与窗函数的频谱的主瓣宽度有关)又与窗函数的窗口宽度N有关，窗函数的窗口越宽，滤波器的过渡带越窄，形状越陡；

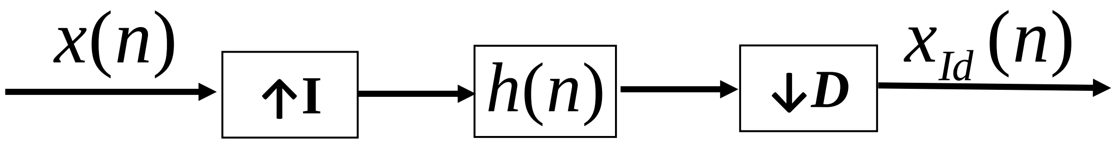
另外，为了设计线性相位的*FIR*滤波器，窗函数的形状必须是对称的。

§8.4 用有理数 I/D 做抽样率转换

将抽取和插值结合起来，就有可能用某一非整数因子来改变抽样率，插值和抽取的级联实现如下所示



a) 使用两个低通滤波器



b) 使用一个低通滤波器

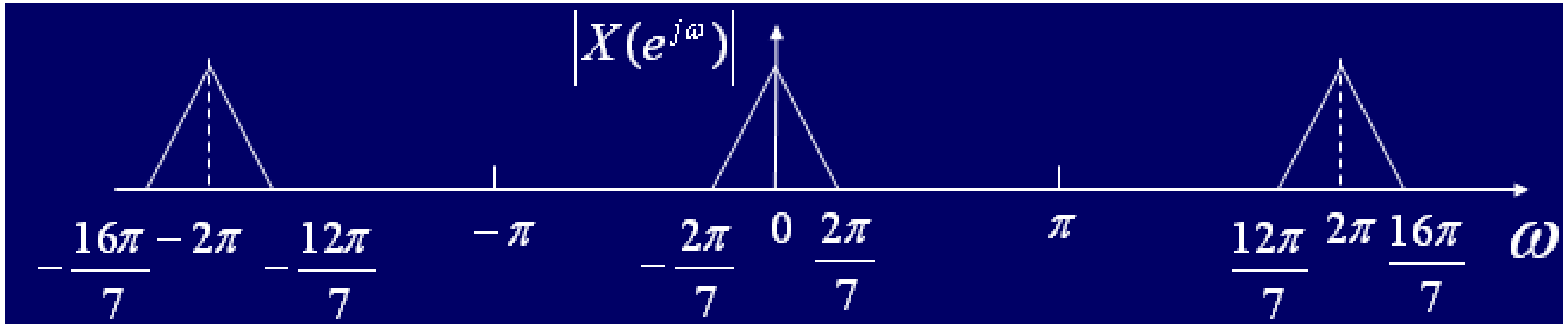
$$H(e^{j\omega})=\begin{cases} I & |\omega|\le \min\left(\dfrac{\pi}{D},\dfrac{\pi}{I}\right) \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

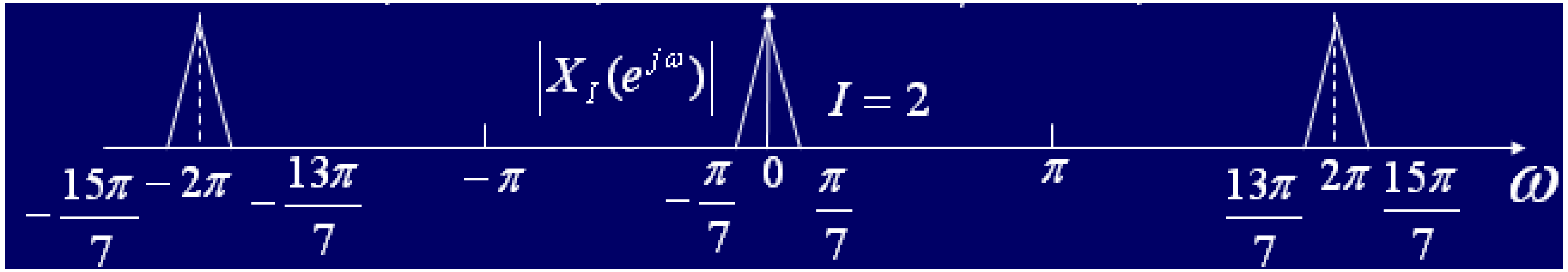
选择合适的I和D，就能够任意地改变抽样率

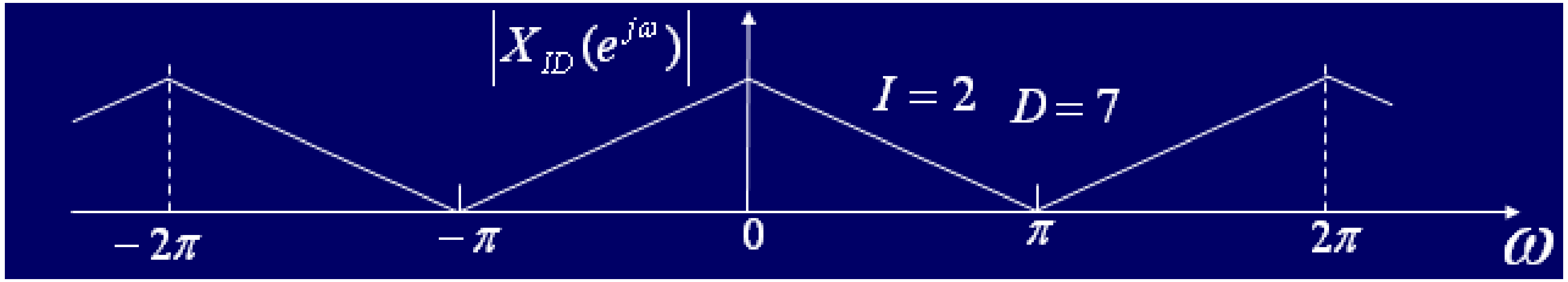
一般是先做I倍插值，再做D倍抽取

无论是抽取还是插值，其输入到输出的变换都相当于经过一个线性时变系统

注意：当抽样率减少到使序列频谱在一个周期内的非零部分已经扩展到－π～π的整个频带内时，就不能再减少抽样率了







新的抽样频率是原抽样频率的？倍 $f_s' = \frac{2}{7} f_s$