1. 已知连续信号 $x(t)$ 是频率为 300 Hz 的正弦波，对 $x(t)$ 以 1000 Hz 的频率进行采样得到序列 $x(n)$，则 $x(n)$ 对应的数字频率为____，$x(n)$ 的周期为____。 $\frac{3}{5}\pi\,rad$，10

解析：数字频率：w_0　模拟频率 Ω_0

(1) $\underline{w_0=\Omega_0 T_0}$（$T_0$ 为采样周期）

故：$\Omega_0 = 2\pi f = 600\pi\,rad$

$w_0 = \Omega_0 T_0 = \frac{600\pi}{1000} = \frac{3}{5}\pi\,rad$

(2) $N=\frac{2\pi}{w_0}=\frac{10}{3}$（取整）　$N=10$.

2. 直接计算 30 点序列的 DFT 需要__次复数乘法和__次复数加法；采用基 2 FFT 计算 30 点序列的 DFT 需要___次复数乘法和__次复数加法，该 FFT 有__级蝶形运算，每一级有__个蝶形运算.

答：900，870，80，160，5，16

解析：(1) 直接计算：N^2（乘）　$N(N-1)$（加）

(2) 基 2 FFT：$N=2^L$

$\frac{N}{2}\log_2 N$（乘）　$N\log_2 N$（加）

(3) L 级蝶形运算，每一级 $\frac{N}{2}$ 个蝶形运算

3. 已知 M 点的有限长序列 $x(n)$，对其进行频域采样，若要不失真恢复原时域序列，则频域采样点数 N 应满足____.

$N \geq M$.（频域采样定理）.

4. $x(n)$ 是对模拟信号 $x_a(t)$ 以采样频率 32 kHz 采样得到，现通过采样率变换得到以采样频率 48 kHz 采样得到的序列。首先对 $x(n)$ 进行插值运算（插值因子 $L=$__），利用滤波器滤波，最后再进行抽取运算（抽取因子 $D=$__）。变换后序列数字域带宽为原带宽的___倍，该滤波器频响 $H(e^{jw})=$___，滤波器为__通。

3，2，$\frac{2}{3}$　$H(e^{jw})=\begin{cases}3, & \min(\frac{\pi}{L},\frac{\pi}{D}) \\ 0, & others\end{cases}$　低

解析：

(1) 正整数 D 抽取，降低采样率 ✓

时域抽取，频域展宽

$x(n) \to f_s$　$\boxed{x_D(n) \to \frac{f_s}{D}}$

(2) 正整数 L 插值，提高采样率 ✓

时域插值，频域压缩

$x(n) \to f_s$　$\boxed{x_L(n) \to Lf_s}$

(3) ★用正有理数 L/D 做抽样率转换★

$\boxed{x_n} \to \boxed{\uparrow L} \xrightarrow{Lf_s} \boxed{\text{低通滤波器}} \xrightarrow{Lf_s} \boxed{\downarrow D} \xrightarrow{\frac{L}{D}f_s} \boxed{x_{LD}(n)}$

抽样频率 f_s

$H(e^{jw})=\begin{cases}L, & |w|\leq \min(\frac{\pi}{L},\frac{\pi}{D}) \\ 0, & others\end{cases}$

5. N点长序列 $x(n)$ 的N点DFT是 $x(n)$ 的Z变换在——上N点等间隔抽样；$x(n)$ 的N点DFT与 $x(n)$ 的DTFT的关系是—。

单位圆　$X(k)=X(e^{jw})|_{w=\frac{2\pi}{N}k}$

解析: DFT（$X(k)$）、Z变换（$X(z)$）、DTFT（$X(e^{jw})$）

关系：$X(k)\downarrow$

(1) $X(z)$ 在Z平面上单位圆等间隔角 $\frac{2\pi}{N}$ 取样

(2) $X(e^{jw})$ 在 $[0,2\pi]$ 上N点等间隔抽样

6. 序列 $x(n)$ 的长度为5（$0\le n\le 4$），其5点DFT为 $X(k)$。若 $x(n)=x((-n))_5R_5(n)$，则 $X(k)=\{0,1+4j,2+3j,——,——\}$；若 $x(n)=x^*(n)$，则 $X(k)=\{0,1+4j,2+3j,——,——\}$

$2+3j, 1+4j$　　$2-3j, 1-4j$

解析: ★ DFT的奇偶性、对称性归纳：

$x(n)=x_{ep}(n)+x_{op}(n)$　（基础）

$x_{ep}(n)=\frac{x(n)+x^*(N-n)}{2}$（圆周共轭对称）

$x_{op}(n)=\frac{x(n)-x^*(N-n)}{2}$（圆周共轭反对称）

□ $x_{ep}(n)=x_{ep}^*(N-n)$ [实部偶，虚部奇对称]

$x_{op}(n)=-x_{op}^*(N-n)$ [实部奇，虚部偶对称]

(性质)：

1. 共轭对称：$x(n)\leftrightarrow X(k)$　$x^*(n)\leftrightarrow X^*(N-k)$

② $Re[x(n)]\leftrightarrow X_{ep}(k)$　★ 虚实部与圆周共轭、反共轭的关系.

$jIm[x(n)]\leftrightarrow X_{op}(k)$

$x_{ep}(n)\leftrightarrow Re[X(k)]$

$x_{op}(n)\leftrightarrow jIm[X(k)]$

3. 奇偶对称：

$x(n)=x(N-n)$　　$X(k)=X(N-k)$

$x(n)=-x(N-n)$　　$X(k)=-X(N-k)$

$x(n)$ 奇(偶)对称，$X(k)$ 奇(偶)对称.

故：$x(n)=x((-n))_5R_5(n)\rightarrow$ 偶对称

$x(n)=x^*(n)\rightarrow Re[x(n)]\rightarrow X_{ep}(k)$

而 $X_{ep}(k)$ 实部偶对称，虚部奇对称.

二. 简答题:

1. 利用DFT进行连续信号频谱分析时会产生哪3种误差？产生误差的原因分别是什么？如何减小这3种误差？

答: (1) 混叠失真：原因：抽样频率不满足抽样定理要求。减小：时域采样满足 $f_s\ge 2f_h$

(2) 频谱泄漏。原因：数据截断。减小：①截取更长的数据；②改变窗的形状，使旁瓣能量减小。

(3) 栅栏效应。原因：频域抽样。减小：增加频域抽样点数。在不改变时域数据的情况下，在记录末端添加零值点。

（科目：　　　）

数 学 作 业 纸

班级：　　姓名：　　编号：　　第　　页

2. 已知 $x(n)$ 是128点的实数序列，其128点离散傅里叶变换为 $X(k)=DFT[x(n)]$，请叙述如何用一次64点DFT运算来求此 $X(k)$，要求写出表达式。

解：① 将128点 $x(n)$ 拆成 $x_1(n)$, $x_2(n)$

即：$x_1(0)=x(0)$　$x_1(1)=x(2)$ ...　$x_1(63)=x(126)$

$x_2(0)=x(1)$　$x_2(1)=x(3)$ ...　$x_2(63)=x(127)$

② 令 $y(n)=x_1(n)+jx_2(n)$

③ 对 $y(n)$ 进行64点DFT变换，得到 $Y(k)$

④ $x_1(n) \leftrightarrow Y_{ep}(k)=\frac{1}{2}[Y(k)+Y^*(N-k)]=X_1(k)$

$x_2(n) \leftrightarrow Y_{op}(k)=\frac{1}{2}[Y(k)-Y^*(N-k)]=X_2(k)$

⑤ $X(k)=X_1(k)+X_2(k)\cdot W_{128}^{k}$, $k=0,1,\dots 63$.

三. 计算题

1. 已知 $x(n)$ 的共轭对称分量 $x_e(n)=\{1,0,0.5,\underline{2},0.5,0,1\}$，周期共轭反对称分量 $x_{op}(n)=\{\underline{0},-0.5,0,0.5\}$，$X(k)$ 为 $x(n)$ 的4点DFT，$x(n)$ 的DTFT为 $X(e^{jw})$，计算：

(1) $\int_{-\pi}^{\pi}|X(e^{jw})|^2dw$，(2) $IDTFT\{Re[X(e^{jw})]\}$

(3) $IDTFT\{X_e(e^{jw})\}$，(4) $X(0)$，(5) $X(2)$，

(6) $\sum_{k=0}^{3}X(k)$　(7) $\sum_{k=0}^{3}|X(k)|^2$；(8) $x(n)$ 的4点DFT

解：由 $x_e(n)$ 可求 $x(n)=\{\underline{2},1,0,2\}$

(1) $\int_{-\pi}^{\pi}|X(e^{jw})|^2dw = 2\pi\sum_{n=0}^{3}|x(n)|^2 = 18\pi$

★ DTFT 帕塞瓦定理

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X(e^{jw})|^2dw$$

DFT 帕塞瓦

$$\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|X(k)|^2$$

(2) $Re[X(e^{jw})] \leftrightarrow x_e(n)$

即 $\{1,0,0.5,\underline{2},0.5,0,1\}$

□ 对称性 （非常重要）

$Re[X(e^{jw})] \leftrightarrow x_e(n)$，$jIm[X(e^{jw})] \leftrightarrow x_o(n)$

$Re[X(k)] \leftrightarrow x_{ep}(n)$，$jIm[X(k)] \leftrightarrow x_{op}(n)$

（同样，$x(n)$ 的实虚部也有类似对应关系）

(3) $X_e(e^{jw}) \leftrightarrow Re[x(n)]=\{2,1,0,2\}$

(4) $X(0)=\sum_{n=0}^{3}x(n)=5$

$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \rightarrow X(0)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)$　(1)

(5) $X(2)=2W_4^0+(1-j)W_4^2+(2+j)W_4^6=-1$

$\boxed{X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}}$ （定义）

(6) $\sum_{k=0}^{3}X(k)=Nx(0)=8$

$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}$　$\sum_{k=0}^{N-1}X(k)=Nx(0)$　(2)

(7) $\sum_{k=0}^{3}|X(k)|^2=N\sum_{n=0}^{3}|x(n)|^2=4\times9=36$

(8) $x(n) \leftrightarrow X(k)$　　$X(n) \leftrightarrow x(N-k)\cdot N$

$X(0)=4x(0)=8$　　$X(1)=4x(3)=8$

$X(2)=4x(2)=0$　　$X(3)=4x(1)=4$

- DFT对偶性　$x(n) \leftrightarrow X(k)$

$$\underline{X(n) \leftrightarrow N x(N-k)}$$

（常用于求 $X(n)$ 的DFT变换）.

2. 已知序列 $x(n)=\delta(n)+2\delta(n-1)+\delta(n-2)+3\delta(n-3)$，其离散时间傅利叶变换为DTFT，$X(e^{jw})$，6点DFT为 $X(k)$，求：

(1) $y(n)$ 的6点DFT为 $Y(k)$，设 $Y(k)=X(k)(-1)^k$，求 $y(n)$. (2) $z(n)$ 的6点DFT为 $Z(k)=X(k)Y(k)$ 求 $z(n)$. (3) 若有限长序列 $q(n)$ 的三点DFT满足 $Q(k)=X(2k)$，求 $q(n)$.

解：(1)　$x(n)=\{1,2,1,3,0,0\}$

$(-1)^k = e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot m\cdot k} = e^{-j\frac{\pi}{3}\cdot m\cdot k}$　　$m=3+6b$

取 $m=3$　　频域 $Y(k)=X(k)\cdot e^{-j\frac{\pi}{3}\cdot 3\cdot k}$

故：$IDFT[Y(k)]=x(n+3)$

$y(n)=\{\underline{3},0,0,1,2,1\}$

(2)　$Z(k)=X(k)Y(k)$　　$z(n)=x(n)$ ⑥ $y(n)$

$z(n)=$