数字信号处理期末试卷

一、填空题：（每空 1 分，共 18 分）

1、数字频率 ω 是模拟频率 Ω 对采样频率 f_s 的归一化，其值是 连续（连续还是离散？）。

2、双边序列 z 变换的收敛域形状为 圆环或空集 。

3、某序列的 DFT 表达式为 $X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_M^{kn}$，由此可以看出，该序列时域的长度为 N ，变换后数字频域上相邻两个频率样点之间的间隔是 $\frac{2\pi}{M}$ 。

4、线性时不变系统离散时间因果系统的系统函数为 $H(z)=\frac{8(z^2-z-1)}{2z^2+5z+2}$，则系统的极点为 $z_1=-\frac{1}{2},z_2=-2$ ；系统的稳定性为 不稳定 。系统单位冲激响应 $h(n)$ 的初值 $h(0)=4$；终值 $h(\infty)$ 不存在 。

5、如果序列 $x(n)$ 是一长度为 64 点的有限长序列 $(0\le n\le 63)$，序列 $h(n)$ 是一长度为 128 点的有限长序列 $(0\le n\le 127)$，记 $y(n)=x(n)*h(n)$（线性卷积），则 $y(n)$ 为 64+128-1＝191 点 点的序列，如果采用基 $2FFT$ 算法以快速卷积的方式实现线性卷积，则 FFT 的点数至少为 256 点。

6、用冲激响应不变法将一模拟滤波器映射为数字滤波器时，模拟频率 Ω 与数字频率 ω 之间的映射变换关系为 $\Omega=\frac{\omega}{T}$。用双线性变换法将一模拟滤波器映射为数字滤波器时，模拟频率 Ω 与数字频率 ω 之间的映射变换关系为 $\Omega=\frac{2}{T}\tan(\frac{\omega}{2})$ 或 $\omega=2\arctan(\frac{\Omega T}{2})$ 。

7、当线性相位 FIR 数字滤波器满足**偶对称**条件时，其单位冲激响应 $h(n)$ 满足的条件为 $h(n)=h(N-1-n)$ ，此时对应系统的频率响应 $H(e^{j\omega})=H(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$，则其对应的相位函数为 $\varphi(\omega)=-\frac{N-1}{2}\omega$ 。

8、请写出三种常用低通原型模拟滤波器 巴特沃什滤波器 、 切比雪夫滤波器 、 椭圆滤波器 。

二、判断题（每题 2 分，共 10 分）

1、模拟信号也可以与数字信号一样在计算机上进行数字信号处理，只要加一道采样的工序就可以了。（╳）

2、已知某离散时间系统为 $y(n)=T[x(n)]=x(5n+3)$，则该系统为线性时不变系统。(╳)

3、一个信号序列，如果能做序列的傅里叶变换（$DTFT$），也就能对其做 DFT 变换。（╳）

4、用双线性变换法进行设计 IIR 数字滤波器时，预畸并不能消除变换中产生的所有频率点的非线性畸变。（√）

5、阻带最小衰耗取决于窗谱主瓣幅度峰值与第一旁瓣幅度峰值之比。

（╳）

三、（**15** 分）、已知某离散时间系统的差分方程为

$$y(n)-3y(n-1)+2y(n-2)=x(n)+2x(n-1)$$

系统初始状态为 $y(-1)=1$， $y(-2)=2$，系统激励为 $x(n)=(3)^n u(n)$，

试求：（1）系统函数 $H(z)$，系统频率响应 $H(e^{j\omega})$。

（2）系统的零输入响应 $y_{zi}(n)$、零状态响应 $y_{zs}(n)$ 和全响应 $y(n)$。

解：（1）系统函数为 $H(z)=\dfrac{1+2z^{-1}}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}=\dfrac{z^2+2z}{z^2-3z+2}$

系统频率响应 $H(e^{j\omega})=H(z)\big|_{z=e^{j\omega}}=\dfrac{e^{2j\omega}+2e^{j\omega}}{e^{2j\omega}-3e^{j\omega}+2}$

解一：（2）对差分方程两端同时作 z 变换得

$$Y(z)-3z^{-1}[Y(z)+y(-1)z]+2z^{-2}[Y(z)+y(-1)z+y(-2)z^2]=X(z)+2z^{-1}X(z)$$

即：$Y(z)=\dfrac{3y(-1)-2z^{-1}y(-1)-2y(-2)}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}+\dfrac{(1+2z^{-1})}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}X(z)$

上式中，第一项为零输入响应的 z 域表示式，第二项为零状态响应的 z 域表示式，将初始状态及激励的 z 变换 $X(z)=\dfrac{z}{z-3}$ 代入，得零输入响应、零状态响应的 z 域表示式分别为

$$Y_{zi}(z)=\frac{-1-2z^{-1}}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}=-\frac{z^2+2z}{z^2-3z+2}$$

$$Y_{zs}(z)=\frac{1+2z^{-1}}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}\cdot\frac{z}{z-3}=\frac{z^2+2z}{z^2-3z+2}\cdot\frac{z}{z-3}$$

将 $Y_{zi}(z),Y_{zs}(z)$ 展开成部分分式之和，得

$$\frac{Y_{zi}(z)}{z}=-\frac{z+2}{z^2-3z+2}=\frac{3}{z-1}+\frac{-4}{z-2}$$

$$\frac{Y_{zs}(z)}{z}=\frac{z^2+2z}{z^2-3z+2}\cdot\frac{1}{z-3}=\frac{\frac{3}{2}}{z-1}+\frac{-8}{z-2}+\frac{\frac{15}{2}}{z-3}$$

即 $\quad Y_{zi}(z)=\dfrac{3z}{z-1}+\dfrac{-4z}{z-2} \qquad Y_{zs}(z)=\dfrac{\frac{3}{2}z}{z-1}+\dfrac{-8z}{z-2}+\dfrac{\frac{15}{2}z}{z-3}$

对上两式分别取 z 反变换，得零输入响应、零状态响应分别为

$$y_{zi}(k)=[3-4(2)^k]\varepsilon(k)$$

$$y_{zs}(k)=[\frac{3}{2}-8(2)^k+\frac{15}{2}(3)^k]\varepsilon(k)$$

故系统全响应为

$$y(k)=y_{zi}(k)+y_{zs}(k)=[\frac{9}{2}-12(2)^k+\frac{15}{2}(3)^k]\varepsilon(k)$$

解二、（**2**）系统特征方程为 $\lambda^2-3\lambda+2=0$，特征根为：$\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$；

故系统零输入响应形式为 $\quad y_{zi}(k)=c_1+c_2(2)^k$

将初始条件 $y(-1)=1$， $y(-2)=2$ 带入上式得

$$\begin{cases} y_{zi}(-1)=c_1+c_2(\frac{1}{2})=1 \\ y_{zi}(-2)=c_1+c_2(\frac{1}{4})=2 \end{cases}$$

解之得 $\quad c_1=3$， $c_2=-4$，

故系统零输入响应为： $\quad y_{zi}(k)=3-4(2)^k \qquad k\ge 0$

系统零状态响应为

$$Y_{zs}(z)=H(z)X(z)=\frac{1+2z^{-1}}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}\cdot\frac{z}{z-3}=\frac{z^2+2z}{z^2-3z+2}\cdot\frac{z}{z-3}$$

$$\frac{Y_{zs}(z)}{z}=\frac{z^2+2z}{z^2-3z+2}\cdot\frac{1}{z-3}=\frac{\frac{3}{2}}{z-1}+\frac{-8}{z-2}+\frac{\frac{15}{2}}{z-3}$$

即 $\quad Y_{zs}(z)=\dfrac{\frac{3}{2}z}{z-1}+\dfrac{-8z}{z-2}+\dfrac{\frac{15}{2}z}{z-3}$

对上式取 z 反变换，得零状态响应为 $\quad y_{zs}(k)=[\frac{3}{2}-8(2)^k+\frac{15}{2}(3)^k]\varepsilon(k)$

故系统全响应为

$$y(k)=y_{zi}(k)+y_{zs}(k)=[\frac{9}{2}-12(2)^k+\frac{15}{2}(3)^k]\varepsilon(k)$$

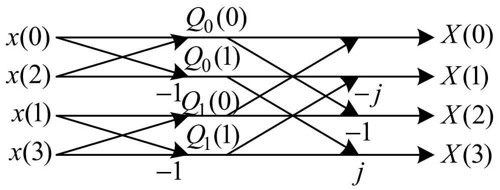
四、回答以下问题：

（1） 画出按**时域抽取** $N=4$ 点**基** $2\boldsymbol{FFT}$ 的信号流图。

（2） 利用流图计算 4 点序列 $x(n)=(2,1,3,4)$（$n=0,1,2,3$）的 DFT 。

（3） 试写出利用 FFT 计算 $IFFT$ 的步骤。

解：（1）



$k \backslash r$	0	1
0	W_2^0	W_2^0
1	W_2^0	W_2^1

$k \backslash l$	0	1
0	W_4^0	W_4^0
1	W_4^0	W_4^1
2	W_4^0	W_4^2
3	W_4^0	W_4^3

4 点按时间抽取 FFT 流图 加权系数

（2） $\begin{cases} Q_0(0)=x(0)+x(2)=2+3=5 \\ Q_0(1)=x(0)-x(2)=2-1=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} Q_1(0)=x(1)+x(3)=1+4=5 \\ Q_1(1)=x(1)-x(3)=1-4=-3 \end{cases}$

$$X(0)=Q_0(0)+Q_1(0)=5+5=10$$

$$X(1)=Q_0(1)+W_4^1Q_1(1)=-1+j\cdot 3$$

$$X(2)=Q_0(0)+W_4^2Q_1(0)=5-5=0$$

$$X(3)=Q_0(1)+W_4^3Q_1(1)=-1-3j$$

即： $X(k)=(10,-1+3j,0,-1-3j),k=0,1,2,3$

（3）1）对 $X(k)$ 取共轭，得 $X^*(k)$；

2）对 $X^*(k)$ 做 N 点 FFT；

3）对 2）中结果取共轭并除以 N。

五、（**12 分**）已知二阶巴特沃斯模拟低通原型滤波器的传递函数为

$$H_a(s)=\frac{1}{s^2+1.414s+1}$$

试用双线性变换法设计一个数字低通滤波器，其 3dB 截止频率为 $\omega_c=0.5\pi\,\mathrm{rad}$，写出数字滤波器的系统函数，并用**正准型**结构实现之。（要预畸，设 $T=1$）

解：（1）预畸

$$\Omega_c=\frac{2}{T}\arctan(\frac{\omega_c}{2})=\frac{2}{T}\arctan(\frac{0.5\pi}{2})=2$$

（2）反归一划

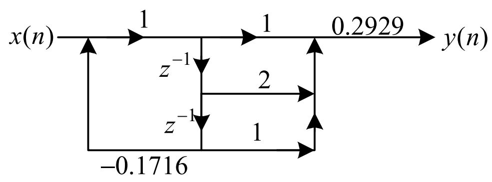
$$H(s)=H_a(s)\Big|_{s=\frac{s}{\Omega_c}}=\frac{1}{(\frac{s}{2})^2+1.414(\frac{s}{2})+1}=\frac{4}{s^2+2.828s+4}$$

（3） 双线性变换得数字滤波器

$$H(z)=H(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}=\frac{4}{s^2+2.828s+4}\Bigg|_{s=2\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}=\frac{4}{(2\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}})^2+2.828\cdot 2\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+4}$$

$$=\frac{4(1+2z^{-1}+z^{-2})}{13.656+2.344z^{-2}}=\frac{0.2929(1+2z^{-1}+z^{-2})}{1+0.1716z^{-2}}$$

（4）用**正准型**结构实现



六、（**12 分**）设有一 FIR 数字滤波器，其单位冲激响应 $h(n)$ 如图 1 所示：

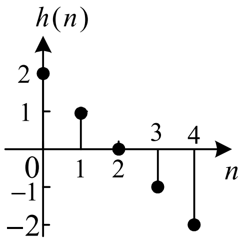


图 1

试求：（1）该系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$；

（2）如果记 $H(e^{j\omega})=H(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$，其中，$H(\omega)$ 为**幅度函数**（可以取负值），$\varphi(\omega)$ 为相位函数，试求 $H(\omega)$ 与 $\varphi(\omega)$；

（3）判断该线性相位 FIR 系统是何种类型的数字滤波器？（低通、高通、带通、带阻），说明你的判断依据。

（4）画出该 FIR 系统的**线性相位型**网络结构流图。

解：（1） $h(n)=(2,1,0,-1,-2)$

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{4}h(n)e^{-j\omega n}=h(0)+h(1)e^{-j\omega}+h(2)e^{-j2\omega}+h(3)e^{-j3\omega}+h(4)e^{-j4\omega}$$

$$=2+e^{-j\omega}-e^{-j3\omega}-2e^{-j4\omega}=2(1-e^{-j4\omega})+(e^{-j\omega}-e^{-j3\omega})$$

$$=2e^{-j2\omega}(e^{-j2\omega}-e^{j2\omega})+e^{-j2\omega}(e^{j\omega}-e^{-j\omega})=e^{-j2\omega}[4j\sin(2\omega)+2j\sin(\omega)]$$

（2） $H(e^{j\omega})=e^{-j2\omega}e^{j\frac{\pi}{2}}[4\sin(2\omega)+2\sin(\omega)]=e^{j(\frac{\pi}{2}-2\omega)}[4\sin(2\omega)+2\sin(\omega)]$

$$H(\omega)=4\sin(2\omega)+2\sin(\omega)\,,\qquad \varphi(\omega)=\frac{\pi}{2}-2\omega$$

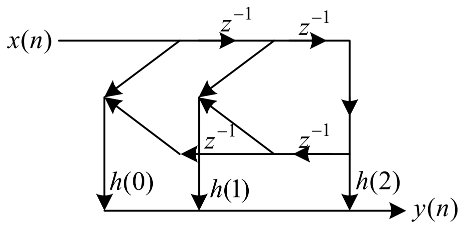
（3） $H(2\pi-\omega)=4\sin[2(2\pi-\omega)]+2\sin(2\pi-\omega)=-4\sin(2\omega)-2\sin(\omega)=-H(\omega)$

故 当 $\omega=0$ 时，有 $H(2\pi)=-H(0)=H(0)$，即 $H(\omega)$ 关于 0 点奇对称，$H(0)=0$；

当 $\omega=\pi$ 时，有 $H(\pi)=-H(\pi))$，即 $H(\omega)$ 关于 π 点奇对称，$H(\pi)=0$

上述条件说明，该滤波器为一个**线性相位带通滤波器**。

（4）线性相位结构流图



八、（**15** 分）简答题

（1） 试写出双线性变换法设计 *IIR* 数字高通滤波器的主要步骤。

（2） 简述利用窗函数来设计 FIR 滤波器时，对理想低通滤波器加矩形窗处理后的影响。为了改善 FIR 滤波器的性能，尽可能的要求窗函数满足哪两个条件？

解：（1）1）将数字高通滤波器的频率指标转换为模拟高通滤波器的频率指标(其中将高通截止频率通过预畸转换为模拟高通滤波器的截止频率)

2）将模拟高通滤波器技术指标转换为模拟低通滤波器技术指标

3）设计模拟低通原型滤波器

4）将模拟低通原型滤波器通过双线性映射为数字低通原型滤波器

5）将数字低通原型滤波器通过频域变换为数字高通滤波器

（3） 理想低通滤波器加窗后的影响有 3 点：

1）幅频特性的陡直的边沿被加宽，形成一个过渡带，过渡带的带宽取决于窗函数频响的主瓣宽度。

2）渡带的两侧附近产生起伏的肩峰和纹波，它是由窗函数频响的旁瓣引起的，旁瓣相对值越大起伏就越强。

3）截取长度 N，将缩小窗函数的主瓣宽度，但却不能减小旁瓣相对值。只能减小过渡带带宽，而不能改善滤波器通带内的平稳性和阻带中的衰减。

为了改善滤波器的性能，尽可能要求窗函数满足：

1）主瓣宽度窄，以获得较陡的过渡带

2）值尽可能小，以改善通带的平稳度和增大阻带中的衰减。