一、　　填空题（每题 2 分，共 10 题）

1、1、对模拟信号（一维信号，是时间的函数）进行采样后，就是__________信号，再进行幅度量化后就是____________信号。

2、2、$FT[x(n)]=X(e^{j\omega})$，用 $x(n)$ 求出 $\mathrm{Re}[X(e^{j\omega})]$ 对应的序列为__________________。

3、序列 $x(n)$ 的 N 点 DFT 是 $x(n)$ 的 Z 变换在 ________________的 N 点等间隔采样。

4、$x_1=R_4(n)$　$x_2=R_5(n)$，只有当循环卷积长度 L____________时，二者的循环卷积等于线性卷积。

5、用来计算 N＝16 点 DFT，直接计算需要____________次复乘法，采用基 2FFT 算法，需要_______ 次复乘法，运算效率为______________ 。

6、FFT 利用____来减少运算量。

7、数字信号处理的三种基本运算是：____________________________________。

8、FIR 滤波器的单位取样响应 $h(n)$ 是圆周偶对称的，N=6，$h(0)=h(5)=1.5$，$h(1)=h(4)=2$，$h(2)=h(3)=3$，其幅度特性有什么特性？____________，相位有何特性？________________________。

9、数字滤波网络系统函数为 $H(z)=\dfrac{1}{1-\sum_{K=1}^{N}a_k z^{-k}}$，该网络中共有_________条反馈支路。

10、用脉冲响应不变法将 $H_a(s)$ 转换为 $H(Z)$，若 $H_a(s)$ 只有单极点 s_k，则系统 $H(Z)$ 稳定的条件是__________________（取 $T=0.1s$）。

二、　　选择题（每题 3 分，共 6 题）

1、1、$x(n)=e^{j(\frac{n}{3}-\frac{\pi}{6})}$，该序列是__________。

A.非周期序列　B.周期 $N=\frac{\pi}{6}$　C.周期 $N=6\pi$　D. 周期 $N=2\pi$

2、2、序列 $x(n)=-a^n u(-n-1)$，则 $X(Z)$ 的收敛域为__________。

A. $|Z|<|a|$　B. $|Z|\le|a|$　C. $|Z|>|a|$　D. $|Z|\ge|a|$

3、3、对 $x(n)\quad(0\le n\le 7)$ 和 $y(n)\quad(0\le n\le 19)$ 分别作 20 点 DFT，得 $X(k)$ 和 $Y(k)$，$F(k)=X(k)\cdot Y(k),\quad k=0,1,\cdots 19$，$f(n)=IDFT[F(k)],\quad n=0,1,\cdots 19$，

n 在__________范围内时，$f(n)$ 是 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的线性卷积。

A. $0\le n\le 7$　B. $7\le n\le 19$　C. $12\le n\le 19$　D. $0\le n\le 19$

4、4、$x_1(n)=R_{10}(n)$，$x_2(n)=R_7(n)$，用 DFT 计算二者的线性卷积，为使计算量尽可能的少，应使 DFT 的长度 N 满足__________。

A. $N>16$　B. $N=16$　C. $N<16$　D. $N\ne 16$

5、已知某线性相位 FIR 滤波器的零点 Z_i，则下面那些点仍是该滤波器的零点__________。

A　Z_I^*　B　$1/Z_I^*$　C　$1/Z_i$　D　0

6、在 IIR 数字滤波器的设计中，用__________方法只适合于片断常数特性滤波器的设计。

A.脉冲响应不变法　B.双线性变换法　C.窗函数法　D.频率采样法

三、 三、 分析问答题（每题 5 分，共 2 题）

1、1、 已知 $x(n)=\begin{cases}\beta^{n-n_0} & n_0 \le n \\ 0 & n > n_0\end{cases}$，$h(n)=\begin{cases}\alpha^{n} & 0 \le n < N \\ 0 & 其它\end{cases}$，$y(n)$ 是 $h(n)$ 和 $x(n)$ 的线性卷积，讨论关于 $y(n)$ 的各种可能的情况。

2、2、 加有限窗截断序列引起的截断效应对谱分析的影响主要表现在哪些方面，如何减弱？

四、 画图题（每题 8 分，共 2 题）

1、已知有限序列的长度为 8，试画出基 2 时域 FFT 的蝶形图，输出为顺序。

2、已知滤波器单位取样响应为 $h(n)=\begin{cases}0.2^{n},0 \le n \le 5 \\ 0,其它\end{cases}$，求其直接型结构流图。

五、 计算证明题（每题 9 分，共 4 题）

1、1、 对实信号进行谱分析，要求谱分辨率 $F \le 20Hz$，信号最高频率 $f_c = 2kHz$。

① ① 试确定最小记录时间 $T_{p\min}$，最少采样点数 $N_{\min}$ 和最大采样间隔 $T_{\max}$；

② ② 要求谱分辨率增加一倍，确定这时的 $T_{p\min}$ 和 $N_{\min}$。

2、设 $X(k)=DFT[x(n)]$，$x(n)$ 是长为 N 的有限长序列。证明

（1） 如果 $x(n)=-x(N-1-n),则X(0)=0$

（2）当 N 为偶数时，如果 $x(n)=x(N-1-n),则X(\frac{N}{2})=0$

3、FIR 滤波器的频域响应为 $H(e^{j\omega})=H_g(\omega)e^{-j\theta(\omega)}$，设 $\theta(\omega)=-\tau\omega,\tau为\frac{N-1}{2}$，N 为滤波器的长度，则对 FIR 滤波器的单位冲击响应 h（n）有何要求，并证明你的结论。

4、已知模拟滤波器传输函数为 $H_a(s)=\frac{5}{s^2+3s+2}$，设 $T=0.5s$，用双线性变换法将 $H_a(s)$ 转换为数字滤波器系统函数 $H(z)$。

数字信号处理期末试卷 2

四、　填空题（每题 2 分，共 10 题）

3、若线性时不变系统是有因果性，则该系统的单位取样响应序列 h(n)应满足的充分必要条件是__________________。

4、已知 $X(e^{j\omega})=\begin{cases}2 & |\omega|<\dfrac{\pi}{2}\\ 0 & \dfrac{\pi}{2}<|\omega|\le\pi\end{cases}$，$X(e^{j\omega})$ 的反变换 $X(n)=$__________________。

3、$x(n)=\delta(n-3)$，变换区间 $N=8$，则 $X(k)=$__________________。

4、$x_1(n)=\{1_{(n=0)},2,1,1,2,1,1,2\}$，$x_2(n)=\{0_{(n=0)},1,3,2,0\}$，$x_3(n)$ 是 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的 8 点循环卷积，则 $x_3(2)=$__________________。

5、用来计算 N＝16 点 DFT 直接计算需要__________________次复加法，采用基 2FFT 算法，需要__________________次复乘法

6、基 2DIF-FFT 算法的特点是__________________

7、有限脉冲响应系统的基本网络结构有__________________

8、线性相位 FIR 滤波器的零点分布特点是__________________

9、IIR 系统的系统函数为 $H(z)$，分别用直接型，级联型，并联型结构实现，其中__________________的运算速度最高。

１０、用双线性变换法设计理想低通数字滤波器，已知理想低通模拟滤波器的截止频率 $\Omega_c=2\pi(2000)\ rad/s$，并设 $T=0.4ms$，则数字滤波器的截止频率 $\omega_c=$__________（保留四位小数）。

五、　选择题（每题 3 分，共 6 题）

5、以下序列中__________的周期为 5。

A. $x(n)=\cos(\frac{3}{5}n+\frac{\pi}{8})$　　B. $x(n)=\sin(\frac{3}{5}n+\frac{\pi}{8})$　　C. $x(n)=e^{j(\frac{2}{5}n+\frac{\pi}{8})}$

D. $x(n)=e^{j(\frac{2}{5}\pi n+\frac{\pi}{8})}$

6、FIR 系统的系统函数 $H(Z)$ 的特点是__________。

A.只有极点，没有零点　　B.只有零点，没有极点　　C.没有零、极点　　D. 既有零点，也有极点

7、有限长序列 $x(n)=x_{ep}(n)+x_{op}(n)\quad 0\le n\le N-1$，则 $x^*(N-n)=$__________。

A. $x_{ep}(n)+x_{op}(n)$　　B. $x_{ep}(n)+x_{op}(N-n)$　　C. $x_{ep}(n)-x_{op}(n)$

D. $x_{ep}(n)-x_{op}(N-n)$

8、对 $x(n)\quad(0\le n\le 9)$ 和 $y(n)\quad(0\le n\le 19)$ 分别作 20 点 DFT，得 $X(k)$ 和 $Y(k)$，$F(k)=X(k)\cdot Y(k),\quad k=0,1,\cdots 19$，$f(n)=IDFT[F(k)],\quad n=0,1,\cdots 19$，

n 在__________范围内时，$f(n)$ 是 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的线性卷积。

A. $0\le n\le 9$　　B. $0\le n\le 19$　　C. $9\le n\le 19$　　D. $10\le n\le 19$

5、线性相位 FIR 滤波器有__________种类型

A　1　　B　2　　C 3　　D　4

6、利用模拟滤波器设计 IIR 数字滤波器时，为了使系统的因果稳定性不变，在将 $H_a(s)$ 转

换为$H(Z)$时应使 s 平面的左半平面映射到 z 平面的__________。

A.单位圆内　　B.单位圆外　　C.单位圆上　　D.单位圆与实轴的交点

六、　分析问答题（每题 5 分，共 2 题）

3、某线性时不变因果稳定系统单位取样响应为$h(n)$（长度为 N），则该系统的频率特性、复频域特性、离散频率特性分别怎样表示，三者之间是什么关系？

4、用DFT对连续信号进行谱分析时，主要关心哪两个问题以及怎样解决二者的矛盾？

七、　画图题（每题 8 分，共 2 题）

1、已知系统$y(n)=\frac{1}{2}y(n-1)+x(n)$，画出幅频特性$|H(e^{j\omega})|$（$\omega$的范围是$0-2\pi$）。

2、已知系统$y(n)=\frac{14}{15}y(n-1)-\frac{1}{5}y(n-2)+\frac{1}{6}x(n)+\frac{1}{3}x(n-1)+\frac{1}{6}x(n-2)$，用直接Ⅱ型结构实现。

八、　计算证明题（每题 9 分，共 4 题）

2、对实信号进行谱分析，要求谱分辨率$F\le 100Hz$，信号最高频率$f_c=1kHz$。

① 试确定最小记录时间$T_{p\min}$，最少采样点数$N_{\min}$和最低采样频率$f_{\min}$；

② 在频带宽度不变的情况下，将频率分辨率提高一倍的N值。

3、设$x(n)$是长度为 2N 的有限长实序列，$X(k)$为$x(n)$的 2N 点 DFT。试设计用一次 N 点 FFT 完成$X(k)$的高效算法。

3、FIR 数字滤波器的单位脉冲响应为$h(n)=2\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-3)+2\delta(n-4)$

（1）　写出频率采样型结构中复数乘法器系数的计算公式，采样点数为 N＝5。

（2）　该滤波器是否具有线性相位特性？为什么？

4、已知模拟滤波器传输函数为$H_a(s)=\frac{3}{s^2+5s+6}$，设$T=0.5s$，

用脉冲响应不变法（令$h(n)=Th_a(nT)$）将$H_a(s)$转换为数字滤波器系统函数$H(z)$。

《数字信号处理》考试试题

考试时间：120 分钟　　　　　　　　　　　　　　　　考试日期：　　年　月　日

班级：________________ 序号：___________ 姓名：______________ 成绩：__________

一、（8 分）　求序列

(a)　$\{h[n]\} = \{-2+j5, 4-j3, 5+j6, 3+j, -7+j2\}$ 的共扼对称、共扼反对称部分；

(b)　$\{h[n]\} = \{-2+j5, 4-j3, \underset{\uparrow}{5}+j6, 3+j, -7+j2\}$ 周期共扼对称、周期共扼反对称部分。

二、（8 分）系统的输入输出关系为

$$y[n] = a + nx[n] + x[n-1], \qquad a \neq 0$$

判定该系统是否为线性系统、因果系统、稳定系统和时移不变系统，并说明理由。

三、（8 分）求下列 Z 变换的反变换

$$H(z) = \frac{z(z+2)}{(z-0.2)(z+0.6)}, \quad |z| < 0.2$$

四、（3 分）一个 FIR 滤波器的系统函数为

$$H(z) = 1 + 0.3z^{-1} + 2.5z^{-2} - 0.8z^{-3} - 1.5z^{-4}$$

求另一个 $n > 4$ 时 $h[n] = 0$，且具有相同幅度响应的因果 FIR 滤波器。

五、（8 分）已知单位脉冲响应长度为 9 的类型 3 实系数线性相位 FIR 滤波器具有零点：$z_1 = 4$，$z_2 = 1 + j$。

（a）　求其他零点的位置

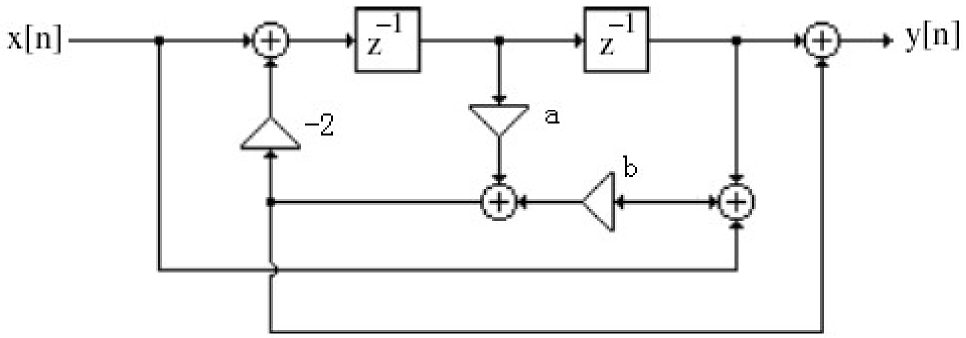
（b）　求滤波器的传输函数

六、（8 分）已知 $x[n]$（$0 \le n \le N-1$）为长度为 N（N 为偶数）的序列，其 DFT 变换为 $X[k]$，

（1）　用 $X[k]$ 表示序列 $v[n] = x[\langle n-3 \rangle_N]$ 的 DFT 变换。

（2）　如果 $x[n] = \alpha^n$（$0 \le n \le N-1$），求其 N 点 DFT。

七、（10 分）确定以下数字滤波器的传输函数 $H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)}$



八（10 分）分别用直接型和并联型结构实现如下滤波器

$$G(z)=\frac{18z^3}{18z^3+3z^2-4z-1}=\frac{0.36}{1-0.5z^{-1}}+\frac{0.24}{1+0.3333z^{-1}}+\frac{0.4}{\left(1+0.3333z^{-1}\right)^2}$$

九、(10 分)低通滤波器的技术指标为：$\omega_p=0.2\pi$，$\omega_s=0.3\pi$，$\delta_p=\delta_s=0.001$，请在附录中选择合适的窗函数，用窗函数法设计满足这些技术指标的线性相位 FIR 滤波器。

十、（20 分）用双线性变换法设计一个离散时间巴特沃兹(Butterworth)高通滤波器，技术指标为： $\omega_s=0.1\pi$， $\omega_p=0.3\pi$， $A=10$， $\varepsilon=0.4843$

十一、（7 分）信号 $y[n]$ 包含一个原始信号 $x[n]$ 和两个回波信号：

$$y[n]=x[n]+0.5x[n-n_d]+0.25x[n-2n_d]$$

求一个能从 $y[n]$ 恢复 $x[n]$ 的可实现的滤波器.

附录：

表 1　一些常用的窗函数

矩形窗(rectangular window)	$w[n]=\begin{cases}1 & 0\le \lvert n\rvert \le \lvert M\rvert \\ 0 & 其它\end{cases}$
汉宁窗(Hann window)	$w[n]=\begin{cases}0.5+0.5\cos(\frac{2\pi n}{2M+1}) & -M\le n\le M \\ 0 & 其它\end{cases}$
汉明窗(Hamming window)	$w[n]=\begin{cases}0.54+0.46\cos(\frac{2\pi n}{2M+1}) & -M\le n\le M \\ 0 & 其它\end{cases}$
布莱克曼窗(Blackman window)	$w[n]=\begin{cases}0.42+0.5\cos(\frac{2\pi n}{2M+1})+0.08\cos(\frac{4\pi n}{2M+1}) & -M\le n\le M \\ 0 & 其它\end{cases}$

表 2　一些常用窗函数的特性

Window	Main Lobe width Δ_{ML}	Relative sidelobe level A_{sl}	Minimum stopband attenuation	Transition bandwidth $\Delta\omega$
Rectangular	$4\pi/(2M+1)$	13.3dB	20.9dB	$0.92\pi/M$
Hann	$8\pi/(2M+1)$	31.5dB	43.9dB	$3.11\pi/M$
Hamming	$8\pi/(2M+1)$	42.7dB	54.5dB	$3.32\pi/M$
Blackman	$12\pi/(2M+1)$	58.1dB	75.3dB	$5.56\pi/M$

$\Omega_c=1$ 归一化巴特沃兹滤波器的系统函数有以下形式：

$$H_a(s)=\frac{1}{s^N+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_{N-1}s+a_N}$$

表 3　阶数 1≤ N≤ 5 归一化巴特沃兹滤波器系统函数的系数

N	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
1	1.0000				
2	1.4142	1.0000			
3	2.0000	2.0000	1.0000		
4	2.6131	3.4142	2.6131	1.0000	
5	3.2361	5.2361	5.2361	3.2361	1.0000

《数字信号处理》考试答案

总分：100 分

1、（8 分）求序列

(a) $\{h[n]\}=\{-2+j5,4-j3,5+j6,3+j,-7+j2\}$ 的共扼对称、共扼反对称部分。

(b) $\{h[n]\}=\{-2+j5,4-j3,5+j6,3+j,-7+j2\}$ 周期共扼对称、周期共扼反对称部分。

解：(a) $\{h^*[-n]\}=\{-7-j2,3-j,5-j6,4+j3,-2-j5\}$

$H_{cs}[n]=0.5*(h[n]+h^*[-n])=\{-4.5+j1.5,3.5-j2,+5,3.5+j2,-4.5-j1.5\}$

$H_{ca}[n]=0.5*(h[n]-h^*[-n])=\{+2.5+j3.5,0.5-j,+j,-0.5-j,-2.5+j3.5\}$

(b) $h^*[N-n]=\{-2-j5,-7-j2,3-j,5-j6,+4+j3\}$

$H_{pcs}[n]=0.5*(h[n]+h^*[N-n])=\{-2,-1.5-j2.5,+4+j2.5,+4-j2.5,-1.5+j2.5\}$

$H_{pca}[n]=0.5*(h[n]-h^*[N-n])=\{j5,+5.5-j0.5,+1+j3.5,-1+j3.5,-5.5-j0.5\}$

2、（8 分）系统的输入输出关系为

$$y[n]=a+nx[n]+x[n-1],\qquad a\neq 0$$

判定该系统是否为线性系统、因果系统、稳定系统和时移不变系统，并说明理由。

解：非线性、因果、不稳定、时移变化。

3、（8 分）求下列 Z 变换的反变换

$$H(z)=\frac{z(z+2)}{(z-0.2)(z+0.6)},\quad |z|<0.2$$

解：

$$H(z)=\frac{z(z+2)}{(z-0.2)(z+0.6)}=\frac{1+2z^{-1}}{(1-0.2z^{-1})(1+0.6z^{-1})}=\frac{2.75}{1-0.2z^{-1}}-\frac{1.75}{1+0.6z^{-1}}$$

$$h[n]=-2.75(0.2)^n u[-n-1]+1.75(-0.6)^n u[-n-1]$$

4、（3 分）一个 FIR 滤波器的系统函数为

$$H(z)=1+0.3z^{-1}+2.5z^{-2}-0.8z^{-3}-1.5z^{-4}$$

求另一个 $n>4$ 时 $h[n]=0$，且具有相同幅度响应的因果 FIR 滤波器。

解：$H(z)=z^{-4}+0.3z^{-3}+2.5z^{-2}-0.8z^{-1}-1.5$

5、（8 分）已知单位脉冲响应长度为 9 的类型 3 实系数线性相位 FIR 滤波器具有零点：$z_1=4$，$z_2=1+j$。

（c）（a） 求其他零点的位置

（d）（b） 求滤波器的传输函数

解：(a) $z=4$， $z=\frac{1}{4}$， $z=1+j$， $z=1-j$， $z=\frac{1}{2}(1+j)$， $z=\frac{1}{2}(1-j)$， $z=1$， $z=-1$

$$H(z)=\left(1-z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}\right)\left(1-(1+j)z^{-1}\right)\left(1-(1-j)z^{-1}\right)$$

(b) $$\left(1-\frac{1}{2}(1+j)z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}(1-j)z^{-1}\right)\left(1-4z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)$$

6.（8 分）已知 $x[n]$（$0\le n\le N-1$）为长度为 N（N 为偶数）的序列，其 DFT 变换为 $X[k]$

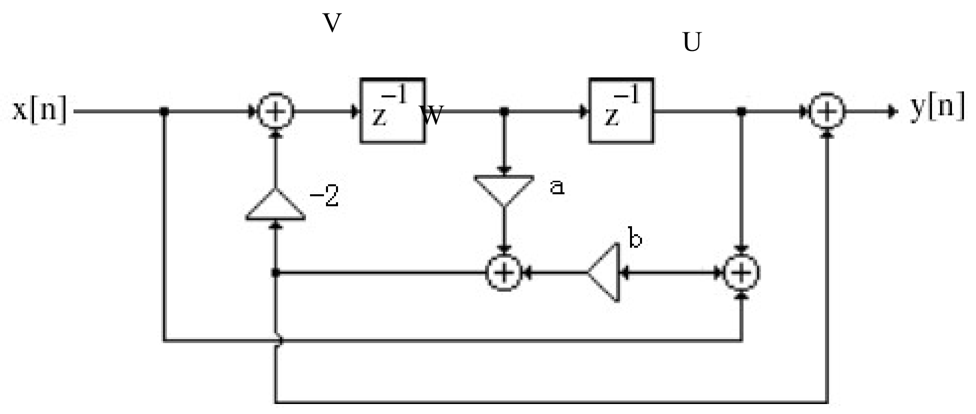
（1）用 $X[k]$ 表示序列 $v[n]=x[<n-3>_N]$ 的 DFT 变换。

（2）如果 $x[n]=\alpha^n$（$0\le n\le N-1$），求其 N 点 DFT。

解：(1) $V[k]=W_N^{3k}X[k]=e^{-j6\pi k/N}X[k]$

(2) $$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]W_N^{nk}=\sum_{n=0}^{N-1}\alpha^n W_N^{nk}=\sum_{n=0}^{N-1}\left(\alpha W_N^k\right)^n=\frac{1-\left(\alpha W_N^k\right)^N}{1-\alpha W_N^k}$$

7、（10 分）确定以下数字滤波器的传输函数 $H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}$



解：

$$\begin{cases}V=X-2W\\ W=az^{-1}V+bU\\ U=z^{-2}V+X\\ Y=z^{-2}V+W\end{cases}\qquad \begin{array}{l}U=z^{-2}(X-2W)+X=\left(1+z^{-2}\right)X-2z^{-2}W\\ \left(1+2az^{-1}+2bz^{-2}\right)W=\left(az^{-1}+b+bz^{-2}\right)X\end{array}$$

$$Y=z^{-2}(X-2W)+W=z^{-2}X+\left(1-2z^{-2}\right)\frac{az^{-1}+b+bz^{-2}}{1+2az^{-1}+2bz^{-2}}X=\frac{b+az^{-1}+(1-b)z^{-2}}{1+2az^{-1}+2bz^{-2}}X$$

8、（10 分）分别用直接型和并联型结构实现如下滤波器

$$G(z)=\frac{18z^3}{18z^3+3z^2-4z-1}=\frac{0.36}{1-0.5z^{-1}}+\frac{0.24}{1+0.3333z^{-1}}+\frac{0.4}{\left(1+0.3333z^{-1}\right)^2}$$

9.（10 分）低通滤波器的技术指标为：$\omega_p=0.2\pi$，$\omega_s=0.3\pi$，$\delta_p=\delta_s=0.001$，请在附录中选择合适的窗函数，用窗函数法设计满足这些技术指标的线性相位 FIR 滤波器。

解：用窗函数法设计的低通滤波器，其通带、阻带内有相同的波动幅度。由于滤波器技术指标中的通带、阻带波动相同，所以我们仅需要考虑阻带波动要求。阻带衰减为 20log(0.001)=-60dB，因此只能采用布莱克曼窗。

$$\Delta\omega=\omega_s-\omega_p=0.1\pi$$

$$M=\frac{5.56\pi}{\Delta\omega}=\frac{5.56\pi}{0.1\pi}\approx 56$$

$$w[n]=\begin{cases}0.42+0.5\cos(\dfrac{2\pi n}{2M+1})+0.08\cos(\dfrac{4\pi n}{2M+1}) & -M\le n\le M\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$\omega_c=(\omega_s+\omega_p)/2=0.25\pi,$$

$$h_t[n]=h_d[n-M]w[n-M]=\frac{\sin(\omega_c(n-M))}{\pi(n-M)}w[n-M],\quad 0\le n\le 2M$$

10.（20 分）用双线性变换法设计一个离散时间巴特沃兹(Butterworth)高通滤波器，技术指标为：$\omega_s=0.1\pi$，$\omega_p=0.3\pi$，$A=10$，$\varepsilon=0.4843$

解：
$$0.0\le\left|H(e^{j\omega})\right|\le 0.1\qquad 0\le|\omega|\le 0.1\pi$$
$$0.9\le\left|H(e^{j\omega})\right|\le 1.0\qquad 0.3\pi\le|\omega|\le\pi$$ 。

我们可以用两种方法设计离散时间高通滤波器。我们可以设计一个巴特沃兹模拟低通滤波器，然后用双线性变换映射为巴特沃兹低通滤波器，再在 z 域进行低通到高通的转换。另一种方法是在双线性变换前就在 s 平面域进行低通到高通的转换，然后用双线性变换将模拟高通滤波器映射为离散时间高通滤波器。两种方法会得到同样的设计结果。我们采用第二种方法，更容易计算。

我们要设计一个高通滤波器，阻带截止频率为$\omega_s=0.1\pi$，通带截止频率为$\omega_p=0.3\pi$，

且 A=1/0.1=10，$\dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}=0.9\Rightarrow\varepsilon=\dfrac{\sqrt{19}}{9}$ = 0.4843

先将数字滤波器的技术指标转换到连续时间域。T_s=2，且

$$\Omega=\tan(\frac{\omega}{2})$$

有：

$$\Omega_s=\tan(\frac{\omega_s}{2})=\tan(0.05\pi)=0.1584$$

$$\Omega_p=\tan(\frac{\omega_p}{2})=\tan(0.15\pi)=0.5095$$

用变换$s\to 1/\hat{s}$将这些高通滤波器的截止频率为映射为低通滤波器的截止频率，我们有

$$\hat{\Omega}_p=1/\Omega_p=1/0.5095=1.9627$$

$\hat{\Omega}_s = 1/\Omega_s = 1/0.1584 = 6.3138$

所以模拟滤波器的选择因子(transition ratio or electivity parameter)为

$$k = \frac{\hat{\Omega}_p}{\hat{\Omega}_s} = 0.3109$$

判别因子(discrimination parameter)为：

$$k_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{A^2 - 1}} = 0.04867$$

因此，所需的巴特沃兹滤波器的阶数为：

$$N = \frac{\log_{10}(1/k_1)}{\log(1/k)} = 2.59$$

我们取 N=3, 则

$$(\frac{\hat{\Omega}_p}{\hat{\Omega}_c})^{2N} = \varepsilon^2 \Rightarrow \hat{\Omega}_c = \frac{\hat{\Omega}_p}{0.7853}$$

$$(\frac{\hat{\Omega}_s}{\hat{\Omega}_c})^{2N} = A^2 - 1 \Rightarrow \hat{\Omega}_c = \frac{\hat{\Omega}_s}{2.1509}$$

我们可取 $\frac{\hat{\Omega}_p}{0.7853} \le \hat{\Omega}_c \le \frac{\hat{\Omega}_s}{2.1509}$， 如取 $\hat{\Omega}_c = 2.5$，则所求得的低通巴特沃兹滤波器为：

$$H_a(\hat{s}) = \frac{1}{(\hat{s}/\hat{\Omega}_c)^3 + 2(\hat{s}/\hat{\Omega}_c)^2 + 2(\hat{s}/\hat{\Omega}_c) + 1}$$

$$H_a(\hat{s}) = \frac{1}{(\hat{s}/2.5)^3 + 2(\hat{s}/2.5)^2 + 2(\hat{s}/2.5) + 1} = \frac{1}{0.064\hat{s}^3 + 0.32\hat{s}^2 + 0.8\hat{s} + 1}$$

用低通到高通的转换关系 $s \to 1/\hat{s}$ 将低通滤波器转换为高通滤波器：

$$H_a(s) = \frac{s^3}{0.064 + 0.32s + 0.8s^2 + s^3}$$

最后采用双线性变换 $s = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$

$$H(z) = H_a(s)\big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}})^3}{0.064 + 0.32\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 0.8(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}})^2 + (\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}})^3}$$

$$= \frac{(1-z^{-1})^3}{-0.456z^{-3} + 2.072z^{-2} - 3.288z^{-1} + 2.184}$$

11.（7 分）信号 $y[n]$ 包含一个原始信号 $x[n]$ 和两个回波信号：

$$y[n] = x[n] + 0.5x[n - n_d] + 0.25x[n - 2n_d]$$

求一个能从 $y[n]$ 恢复 $x[n]$ 的稳定的滤波器.

解：因为 X(z) 与 Y(z)的关系如下：

$$Y(z) = (1 + 0.5z^{-n_d} + 0.25z^{-2n_d})X(z)$$

以 y[n]为输入，x[n]为输出的系统函数为：

$$G(z) = \frac{1}{1 + 0.5z^{-n_d} + 0.25z^{-2n_d}}$$

注意到：$G(z) = F(z^{n_d})$，且 $F(z) = \dfrac{1}{1 + 0.5z^{-1} + 0.25z^{-2}}$

F(z)的极点在：

$$z = -0.25(1 \pm j\sqrt{3})$$

它在单位圆内半径为 r=0.5 处，所以 G(z)的极点在单位圆内 $r' = (0.5)^{-n_d}$ 处，所以 G(z)是可实现的。

《数字信号处理》

1．1．　(8 分) 确定下列序列的共扼对称、共扼反对称或周期共扼对称、周期共扼反对称部分：

(a) $\{h[n]\} = \{-2 + j5, 4 - j3, 5 + j6, 3 + j, -7 + j2\}$

(b) $\{h[n]\} = \{-2 + j5, 4 - j3, \underset{\uparrow}{5 + j6}, 3 + j, -7 + j2\}$

2. (8 分) 下式给出系统的输入与输出关系，判断它是线性的还是非线性的，移位不变还是移位变化的，稳定还是不稳定的，因果的还是非因果的。

$$y[n] = x[n] + x[-n]$$

3. (6 分) 确定下列序列的平均功率和能量

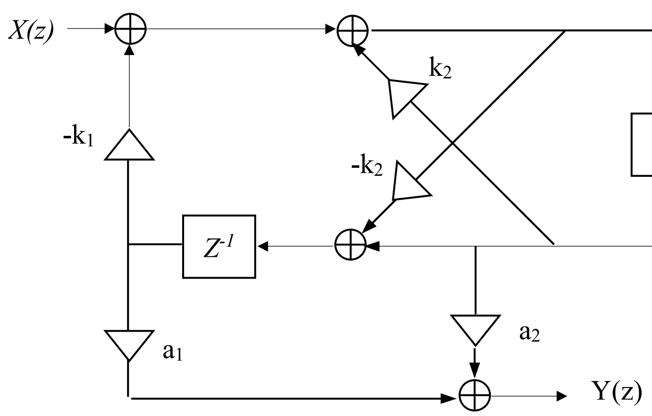
$$x[n] = \left(\frac{5}{3}\right)^n u[-n]$$

4．(6 分)已知 x[n]（$0 \le n \le N-1$）为长度为 N（N 为偶数）的序列，其 DFT 变换为 X[k]

（1）　（1）　用 X[k]表示序列 $v[n] = x[<n-3>_N]$ 的 DFT 变换

（2）　（2）　如果 $x[n] = \alpha^n$（$0 \le n \le N-1$），求其 N 点 DFT。

5．. (8 分)确定下列数字滤波器结构的传输函数 $H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)}$



6．(10 分)以以下形式实现传输函数为

$$H(z)=(1-0.7z^{-1})^5=1-3.5z^{-1}+4.9z^{-2}-3.43z^{-3}+1.2005z^{-4}-0.16807z^{-5}$$

的 FIR 系统结构。

(1) (1) 直接形式

(2) 一个一阶系统，两个二阶系统的级联。

7. (10 分)低通滤波器的技术指标为：

$$0.99\le\left|H(e^{j\omega})\right|\le 1.01 \qquad 0\le|\omega|\le 0.3\pi$$

$$\left|H(e^{j\omega})\right|\le 0.01 \qquad 0.35\pi\le|\omega|\le\pi$$

用窗函数法设计满足这些技术指标的线性相位 FIR 滤波器。

8．(20 分)用双线性变换法设计一个离散时间巴特沃兹(Butterworth)高通滤波器，通带内等波纹，且

$$0.0\le\left|H(e^{j\omega})\right|\le 0.1 \qquad 0\le|\omega|\le 0.1\pi$$

$$0.9\le\left|H(e^{j\omega})\right|\le 1.0 \qquad 0.3\pi\le|\omega|\le\pi$$ 。

9.（10 分））信号 y[n]包含一个原始信号 x[n]和两个回波信号：

$y[n]=x[n]+0.5x[n-n_d]+0.25x[n-2n_d]$

求一个能从 y[n]恢复 x[n]的可实现滤波器.

10 (14 分))一个线性移不变系统的系统函数为 $H(z)=\dfrac{z^{-1}-a^*}{1-az^{-1}}$， 这里 $|a|<1$

(a) 求实现这个系统的差分方程

(b) 证明这个系统是一个全通系统（即频率响应的幅值为常数的系统）

(c) H(z)和一个系统 G(z)级联，以使整个系统函数为 1，如果 G(z)是一个稳定系统，求单位采样响应 g(n)。

附录：

表 1 一些常用的窗函数

矩形窗(rectangular window)	$w[n]=\begin{cases}1 & 0\le\|n\|\le\|M\| \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$
汉宁窗(Hann window)	$w[n]=\begin{cases}0.5+0.5\cos(\frac{2\pi n}{2M+1}) & -M\le n\le M \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$
汉明窗(Hamming window)	$w[n]=\begin{cases}0.54+0.46\cos(\frac{2\pi n}{2M+1}) & -M\le n\le M \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$
布莱克曼窗(Blackman window)	$w[n]=\begin{cases}0.42+0.5\cos(\frac{2\pi n}{2M+1})+0.08\cos(\frac{4\pi n}{2M+1}) & -M\le n\le M \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

表 2 一些常用窗函数的特性

Window	Main Lobe width Δ_{ML}	Relative	Minimum	Transition

		sidelobe level A_{sl}	stopband attenuation	bandwidth $\Delta\omega$
Rectangular	$4\pi/(2M+1)$	13.3dB	20.9dB	$0.92\pi/M$
Hann	$8\pi/(2M+1)$	31.5dB	43.9dB	$3.11\pi/M$
Hamming	$8\pi/(2M+1)$	42.7dB	54.5dB	$3.32\pi/M$
Blackman	$12\pi/(2M+1)$	58.1dB	75.3dB	$5.56\pi/M$

$\Omega_c=1$ 归一化巴特沃兹滤波器的系统函数有以下形式：

$$H_a(s)=\frac{1}{s^N+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_{N-1}s+a_N}$$

表 3　阶数 1≤ N≤ 5 归一化巴特沃兹滤波器系统函数的系数

N	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
1	1.0000				
2	1.4142	1.0000			
3	2.0000	2.0000	1.0000		
4	2.6131	3.4142	2.6131	1.0000	
5	3.2361	5.2361	5.2361	3.2361	1.0000

《数字信号处理》考试答案

总分：100 分

2．1． (8 分) 确定下列序列的共扼对称、共扼反对称或周期共扼对称、周期共扼反对称部分：

(a) $\{h[n]\}=\{-2+j5,4-j3,5+j6,3+j,-7+j2\}$

(b) $\{h[n]\}=\{-2+j5,4-j3,5+j6,3+j,-7+j2\}$

解：(a) $\{h^*[-n]\}=\{-7-j2,3-j,5-j6,4+j3,-2-j5\}$

$H_{cs}[n]=0.5*(h[n]+h^*[-n])=\{-4.5+j1.5,3.5-j2,+5,3.5+j2,-4.5-j1.5\}$

$H_{ca}[n]=0.5*(h[n]-h^*[-n])=\{+2.5+j3.5,0.5-j,+j,-0.5-j,-2.5+j3.5\}$

(b) $h^*[N-n]=\{-2-j5,-7-j2,3-j,5-j6,+4+j3\}$

$H_{pcs}[n]=0.5*(h[n]+h^*[N-n])=\{-2,-1.5-j2.5,+4+j2.5,+4-j2.5,-1.5+j2.5\}$

$H_{pca}[n]=0.5*(h[n]-h^*[N-n])=\{j5,+5.5-j0.5,+1+j3.5,-1+j3.5,-5.5-j0.5\}$

2. (8 分) 下式给出系统的输入与输出关系，判断它是线性的还是非线性的，移位不变还是移位变化的，稳定还是不稳定的，因果的还是非因果的。

$$y[n]=x[n]+x[-n]$$

解：　(a) 令：对应输入 x_1[n]的输出为 y_1[n]，对应输入 x_2[n]的输出为 y_2[n],对应输入 x[n]=x_1[n]+x_2[n]的输出为 y[n]，则有

$$y_1[n]=x_1[n]+x_1[-n] \qquad y_2[n]=x_2[n]+x_2[-n]$$

$$y[n]=x[n]+x[-n]=(x_1[n]+x_2[n])+(x_1[-n]+x_2[-n])$$

$$=(x_1[n]+x_1[-n])+(x_2[n]+x_2[-n])=y_1[n]+y_2[n]$$

所以此系统为线性系统。

(b) (b) 设对应 x[n]的输出为 y[n]，对应输入 x_1[n]＝x[n-n$_0$]的输出为 y_1[n],则

$$y_1[n] = x_1[n] + x_1[-n] = x[n-n_0] + x[-(n-n_0)] = x[n-n_0] + x[-n+n_0]$$

$$y[n] = x[n] + x[-n] \Longrightarrow y[n-n_0] = x[n-n_0] + x[-n-n_0]$$

$$y[n-n_0] \neq y_1[n]$$

此系统为移位变化系统。

(c)假设 $|x[n]| \le B$，则有

$$|y[n]| = |x[n] + x[-n]| \le |x[n]| + |x[-n]| \le 2B$$

所以此系统为 BIBO 稳定系统。

(d)此系统为非因果系统。

3. (6 分) 确定下列序列的平均功率和能量

$$x[n] = \left(\frac{5}{3}\right)^n u[-n]$$

能量为：

$$\varepsilon_x = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{n=0} (\frac{5}{3})^{2n} = \sum_{n=0}^{n=+\infty} (\frac{5}{3})^{-2n} = \sum_{n=0}^{n=+\infty} (\frac{3}{5})^{2n} = \frac{1}{1-9/25} = 25/16$$

功率为：

$$p_x = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k+1} \sum_{n=-k}^{n=+k} |x[n]|^2 = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k+1} \sum_{n=-k}^{n=0} (\frac{5}{3})^{2n} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k+1} \sum_{n=0}^{n=+k} (\frac{5}{3})^{-2n}$$

$$p_x = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k+1} \sum_{n=0}^{n=+k} (\frac{9}{25})^n = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k+1} \frac{1-(9/25)^{k+1}}{1-9/25} = 0$$

4．(6 分)已知 x[n]（$0 \le n \le N-1$）为长度为 N（N 为偶数）的序列，其 DFT 变换为 X[k]

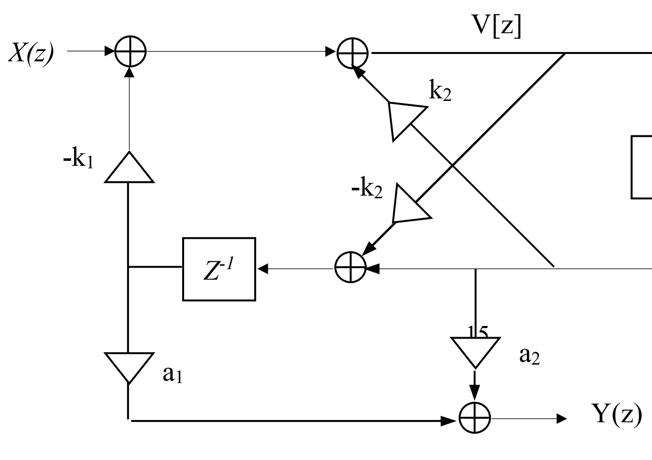
（3） （1） 用 X[k]表示序列 $v[n] = x[< n-3 >_N]$ 的 DFT 变换

（4） （2） 如果 $x[n] = \alpha^n$ （$0 \le n \le N-1$），求其 N 点 DFT。

解：(1) $V[k] = W_N^{3k} X[k] = e^{-j6\pi k/N} X[k]$

(2) $$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\alpha W_N^k\right)^n = \frac{1-\left(\alpha W_N^k\right)^N}{1-\alpha W_N^k}$$

5．. (8 分)确定下列数字滤波器结构的传输函数 $H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)}$



解： $X[z]-k_1z^{-1}(-k_2V(z)+z^{-1}V(z))+k_2z^{-1}V(z)=V(z)$

则 $V(z)=\dfrac{1}{1-(k_2+k_1k_2)z^{-1}+k_1z^{-2}}X(z)$

又 $(z^{-1}-k_2)V(z)\alpha_1z^{-1}+\alpha_2z^{-1}V(z)=Y(z)$

则有 $Y[z]=[(\alpha_2-k_2\alpha_1)z^{-1}+\alpha_1z^{-2}]V(z)$

$=\dfrac{(\alpha_2-k_2\alpha_1)z^{-1}+\alpha_1z^{-2}}{1-(k_2+k_1k_2)z^{-1}+k_1z^{-2}}X\{z\}$

6．(10 分)以以下形式实现传输函数为

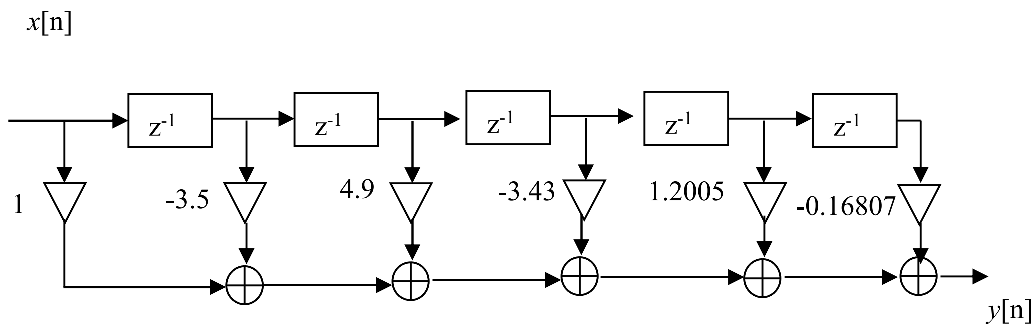
$H(z)=(1-0.7z^{-1})^5=1-3.5z^{-1}+4.9z^{-2}-3.43z^{-3}+1.2005z^{-4}-0.16807z^{-5}$

的 FIR 系统结构。

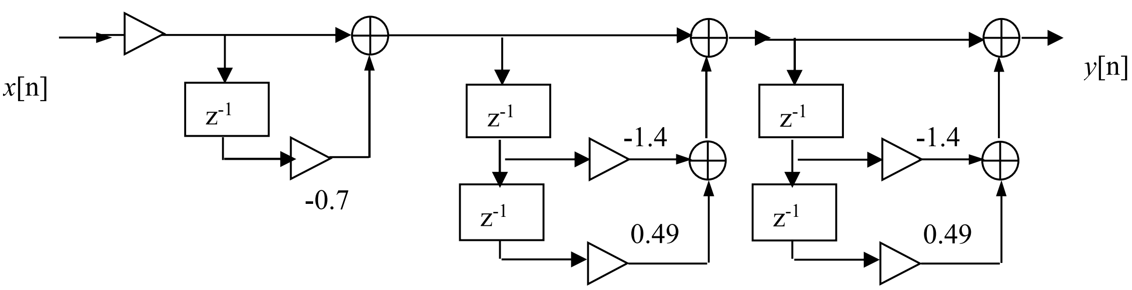
(2) (1) 直接形式

(2) 一个一阶系统，两个二阶系统的级联。

解：(1)



(2) $H(z)=(1-0.7z^{-1})^5=(1-0.7z^{-1})(1-1.4z^{-1}+0.49z^{-2})(1-1.4z^{-1}+0.49z^{-2})$



7. (10 分)低通滤波器的技术指标为：

$$0.99\le\left|H(e^{j\omega})\right|\le1.01\qquad 0\le|\omega|\le0.3\pi$$

$$\left|H(e^{j\omega})\right|\le0.01\qquad 0.35\pi\le|\omega|\le\pi$$

用窗函数法设计满足这些技术指标的线性相位 FIR 滤波器。

解：用窗函数法设计的低通滤波器，其通带、阻带内有相同的波动幅度。由于滤波器技术指标中的通带、、阻带波动相同，所以我们仅需要考虑阻带波动要求。阻带衰减为20log(0.01)=-40dB，我们可以采用汉宁窗，虽然也可以采用汉明窗或布莱克曼窗，但是阻带衰减增大的同时，过渡带的宽度也会增加，技术指标要求过渡带的宽度为 $\Delta\omega = \omega s - \omega p = 0.05\pi$ 。由于 $M\Delta\omega = 3.11\pi$,

所以： $M = \dfrac{3.11\pi}{0.05\pi} \approx 52$ ， 且： $w[n] = \begin{cases} 0.5 + 0.5\cos(\dfrac{2\pi n}{2M+1}) & -M \le n \le M \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

一个理想低通滤波器的截止频率为 $\omega_c = (\omega_s + \omega_p)/2 = 0.325\pi$ ，所以滤波器为：

$$h_t[n] = h_d[n-M]w[n-M] = \frac{\sin(\omega_c(n-M))}{\pi(n-M)} w[n-M] \quad , \quad 0 \le n \le 2M$$

8．(20 分)用双线性变换法设计一个离散时间巴特沃兹(Butterworth)高通滤波器，通带内等波纹，且

$$0.0 \le \left|H(e^{j\omega})\right| \le 0.1 \qquad 0 \le |\omega| \le 0.1\pi$$

$$0.9 \le \left|H(e^{j\omega})\right| \le 1.0 \qquad 0.3\pi \le |\omega| \le \pi$$ 。

解： 我们可以用两种方法设计离散时间高通滤波器。我们可以设计一个巴特沃兹模拟低通滤波器，然后用双线性变换映射为巴特沃兹低通滤波器，再在 z 域进行低通到高通的转换。另一种方法是在双线性变换前就在 s 平面域进行低通到高通的转换，然后用双线性变换将模拟高通滤波器映射为离散时间高通滤波器。两种方法会得到同样的设计结果。我们采用第二种方法，更容易计算。

我们要设计一个高通滤波器，阻带截止频率为 $\omega_c = 0.1\pi$，通带截止频率为 $\omega_p = 0.3\pi$，

且 A=1/0.1=10, $\dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} = 0.9 \Rightarrow \varepsilon = \dfrac{\sqrt{19}}{9}$ = 0.4843

先将数字滤波器的技术指标转换到连续时间域。T_s=2, 且

$$\Omega = \tan(\frac{\omega}{2})$$

有：

$$\Omega_s = \tan(\frac{\omega_s}{2}) = \tan(0.05\pi) = 0.1584$$

$$\Omega_p = \tan(\frac{\omega_p}{2}) = \tan(0.15\pi) = 0.5095$$

用变换 $s \to 1/\hat{s}$ 将这些高通滤波器的截止频率为映射为低通滤波器的截止频率，我们有

$$\hat{\Omega}_p = 1/\Omega_p = 1/0.5095 = 1.9627$$

$$\hat{\Omega}_s = 1/\Omega_s = 1/0.1584 = 6.3138$$

所以模拟滤波器的选择因子(transition ratio or electivity parameter)为

$$k = \frac{\hat{\Omega}_p}{\hat{\Omega}_s} = 0.3109$$

判别因子(discrimination parameter)为：

$$k_1=\frac{\varepsilon}{\sqrt{A^2-1}}=0.04867$$

因此，所需的巴特沃兹滤波器的阶数为：

$$N=\frac{\log_{10}(1/k_1)}{\log(1/k)}=2.59$$

我们取 N=3，则

$$(\frac{\hat{\Omega}_p}{\hat{\Omega}_c})^{2N}=\varepsilon^2\Rightarrow\hat{\Omega}_c=\frac{\hat{\Omega}_p}{0.7853}$$

$$(\frac{\hat{\Omega}_s}{\hat{\Omega}_c})^{2N}=A^2-1\Rightarrow\hat{\Omega}_c=\frac{\hat{\Omega}_s}{2.1509}$$

我们可取 $\frac{\hat{\Omega}_p}{0.7853}\le\hat{\Omega}_c\le\frac{\hat{\Omega}_s}{2.1509}$， 如取 $\hat{\Omega}_c=2.5$，则所求得的低通巴特沃兹滤波器为：

$$H_a(\hat{s})=\frac{1}{(\hat{s}/\hat{\Omega}_c)^3+2(\hat{s}/\hat{\Omega}_c)^2+2(\hat{s}/\hat{\Omega}_c)+1}$$

$$H_a(\hat{s})=\frac{1}{(\hat{s}/2.5)^3+2(\hat{s}/2.5)^2+2(\hat{s}/2.5)+1}=\frac{1}{0.064\hat{s}^3+0.32\hat{s}^2+0.8\hat{s}+1}$$

用低通到高通的转换关系 $s\to1/\hat{s}$ 将低通滤波器转换为高通滤波器：

$$H_a(s)=\frac{s^3}{0.064+0.32s+0.8s^2+s^3}$$

最后采用双线性变换 $s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$

$$H(z)=H_a(s)\big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}=\frac{(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}})^3}{0.064+0.32\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+0.8(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}})^2+(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}})^3}$$

$$=\frac{(1-z^{-1})^3}{-0.456z^{-3}+2.072z^{-2}-3.288z^{-1}+2.184}$$

9.（10 分））信号 y[n]包含一个原始信号 x[n]和两个回波信号：

y[n]=x[n]+0.5x[n-n_d]+0.25x[n-2n_d]

求一个能从 y[n]恢复 x[n]的可实现滤波器.

解：因为 X(z) 与 Y(z)的关系如下：

$$Y(z)=(1+0.5z^{-n_d}+0.25z^{-2n_d})X(z)$$

以 y[n]为输入，x[n]为输出的系统函数为：

$$G(z)=\frac{1}{1+0.5z^{-n_d}+0.25z^{-2n_d}}$$

注意到：$G(z)=F(z^{n_d})$，且 $F(z)=\dfrac{1}{1+0.5z^{-1}+0.25z^{-2}}$

F(z)的极点在：

$$z=-0.25(1\pm j\sqrt{3})$$

它在单位圆内半径为 r=0.5 处，所以 G(z)的极点在单位圆内 $r'=(0.5)^{-n_d}$ 处，所以 G(z)是可实现的。

10 (14 分))一个线性移不变系统的系统函数为 $H(z)=\dfrac{z^{-1}-a^*}{1-az^{-1}}$， 这里 $|a|<1$

(a) 求实现这个系统的差分方程

(b) 证明这个系统是一个全通系统（即频率响应的幅值为常数的系统）

(c) H(z)和一个系统 G(z)级联，以使整个系统函数为 1，如果 G(z)是一个稳定系统，求单位采样响应 g(n)。

解：(a) $H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}=\dfrac{z^{-1}-a^*}{1-az^{-1}}$

$$Y(z)(1-az^{-1})=X(z)(z^{-1}-a^*)$$

对方程的两边进行反 z 变换：

$$y[n]-ay[n-1]=x[n-1]-a^*x[n]$$

(b)频率响应为：$H(e^{j\omega})=\dfrac{e^{-j\omega}-a^*}{1-ae^{-j\omega}}$

所以幅值的平方为：

$$\left|H(e^{j\omega})\right|^2=H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega})=\frac{e^{-j\omega}-a^*}{1-ae^{-j\omega}}\frac{e^{j\omega}-a}{1-a^*e^{j\omega}}=\frac{1+|a|^2-2\operatorname{Re}(a^*e^{j\omega})}{1+|a|^2-2\operatorname{Re}(a^*e^{j\omega})}=1$$

所以系统为一个全通滤波器

© $G(z)=\dfrac{1-az^{-1}}{z^{-1}-a^*}=-\dfrac{1}{a^*}\dfrac{1-az^{-1}}{1-(a^*z)^{-1}}$

此系统在 $z=1/a^*$ 处有一极点，在 $z=1/a$ 处有一零点。因为 $|a|<1$，极点在单位圆外。所以，如果 g[n]是稳定的，收敛域一定为 $z<1/|a|$。因而 g[n]是左边序列。

$$g[n]=(a^*)^{-n-1}u[-n-1]-a(a^*)^{-(n-1)}u[-n]$$