

第二章 逻辑代数基础

综合性组合逻辑电路
分析与设计



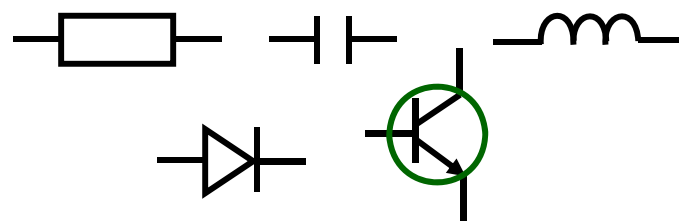
编码器，译码器，
比较器，选通器

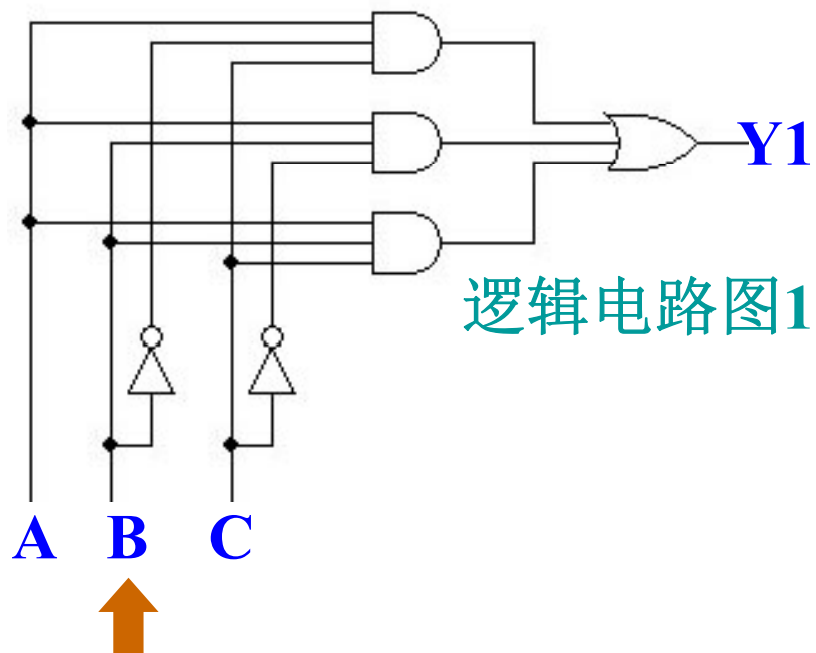


综合性模拟电路
分析与设计



放大器，滤波器，振荡器





函数1

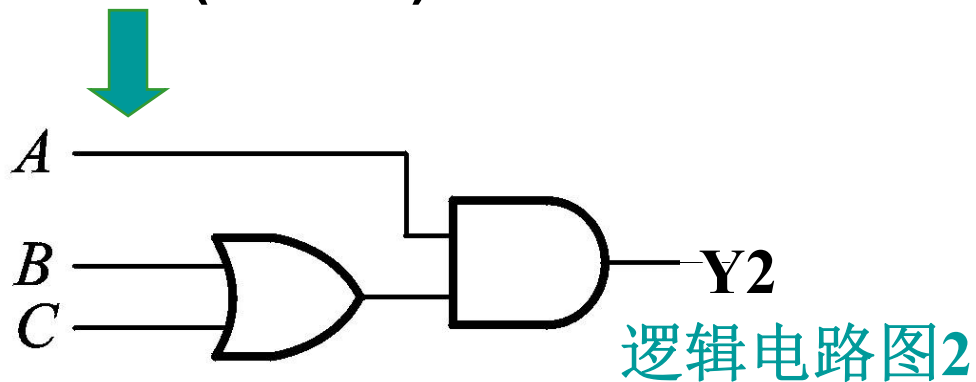
$$Y1 = AB'C + \underline{ABC'} + ABC$$

↑ 相等

$$= \overset{AB}{AC} + AC = A(B+C)$$

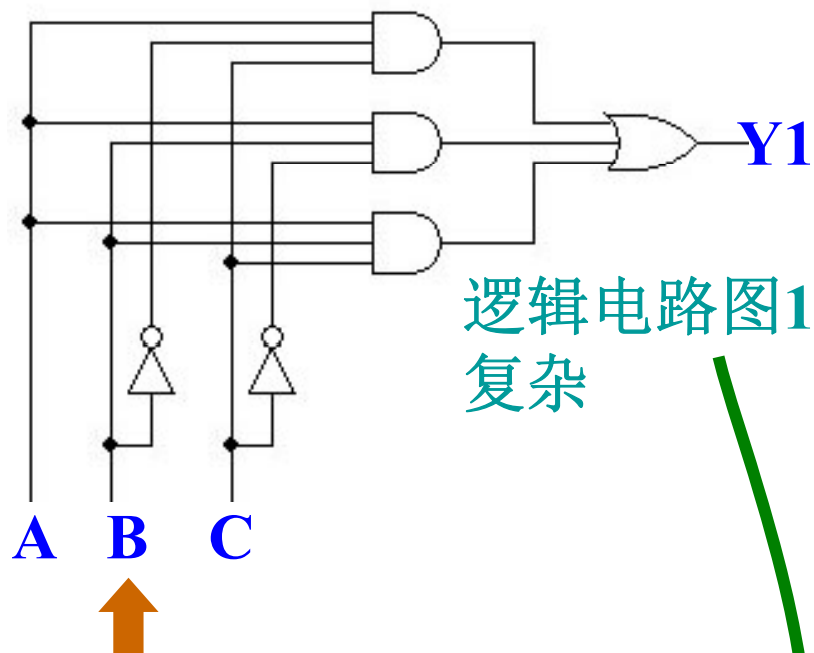
函数2

$$Y2 = A(B + C)$$



真值表

ABC	Y
000	0
001	0
010	0
011	0
100	0
101	1
110	1
111	1



函数1

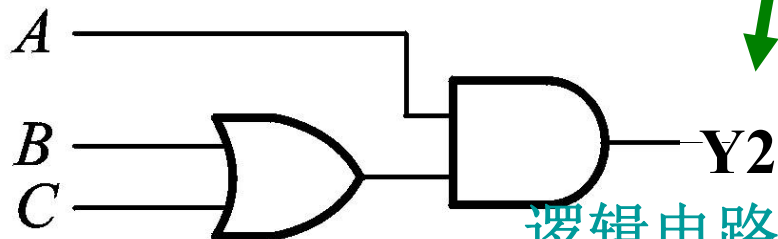
$$Y1 = AB'C + ABC' + ABC$$



怎样化简逻辑函数？

函数2

$$Y2 = A (B + C)$$



逻辑电路图2, 简单

真值表

ABC	Y
000	0
001	0
010	0
011	0
100	0
101	1
110	1
111	1

怎样
化简电路？

逻辑化简

- 逻辑代数化简 { 基本公式, 常用公式
三个基本定理(规则)
- K图化简

基本公式

序号	公 式	序号	公 式
		10	$1' = 0; 0' = 1$
1	$0 A = 0$	11	$1 + A = 1$
2	$1 A = A$	12	$0 + A = A$
3	$A A = A$	13	$A + A = A$
4	$A A' = 0$	14	$A + A' = 1$
5	$A B = B A$	15	$A + B = B + A$
6	$A (B C) = (A B) C$	16	$A + (B + C) = (A + B) + C$
7	$A (B + C) = A B + A C$	17	$A + B C = (A + B)(A + C)$
8	$(A B)' = A' + B'$	18	$(A + B)' = A' B'$
9	$(A')' = A$		

常用公式

序 号	公 式
21	$A + A B = A$
22	$A + A' B = A + B$
23	$A B + A B' = A$
24	$A (A + B) = A$
25	$AB + A'C + BC = AB + A'C$ $AB + A'C + BCD = AB + A'C$
26	$A (AB)' = A B' ; A' (AB)' = A'$

2.3逻辑运算公式，定理及化简

■ 代入定理

■ 反演定理，已知Y，

求反函数

$$\begin{array}{l} \bullet \Leftrightarrow + \\ 1 \Leftrightarrow 0 \\ \oplus \Leftrightarrow \odot \\ A \Leftrightarrow A' \end{array}$$

求Y'

■ 对偶定理，已知Y，

$$\begin{array}{l} \bullet \Leftrightarrow + \\ 1 \Leftrightarrow 0 \\ \oplus \Leftrightarrow \odot \end{array}$$

求Y^D

2.3.3 逻辑运算三定理

page27

1. 代入定理

$F1(A,B,C) = F2(A,B,C)$; 若 $C=D+E$,

则 $F1(A,B,D+E) = F2(A,B,D+E)$;

例1: $(A+B)' = A'B'$;

↓ 用 $B+C$ 代替 B ,

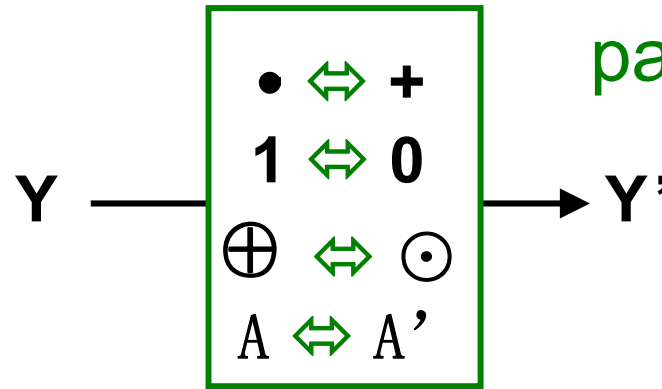
则 $(A+(B+C))' = A'(B+C)' = A'B'C'$; 相互独立

例2: $(AB)' = A' + B'$; $\Rightarrow (ABC)' = A' + (BC)' = A' + B' + C'$

例3 $A+BC$ $= (A+B)(A+C)$; \Rightarrow $A+B(CD)$ $= (A+B)(A+CD)$
 $= (A+B)(A+C)(A+D)$

有趣

2. 反演定理



例4 $Y = A \cdot B \Rightarrow Y' = A' + B'$ 即 $(AB)' = A' + B'$

例5 $Y = A + B \Rightarrow Y' = A' \cdot B'$ 即 $(A + B)' = A' \cdot B'$

例6 $Y = A \cdot (B + C)' + CD$

$$Y' = (A' + (B' \cdot C'))' \cdot (C' + D')$$

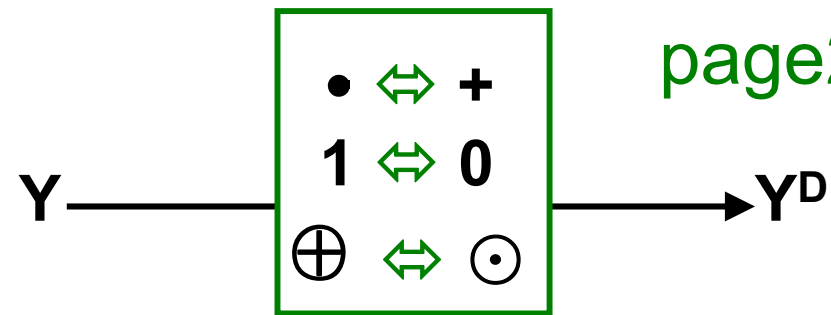
1) 不能改变原来的运算顺序。

2) “非”只对单个变量有效

例7 $Y = AB + CD \Rightarrow Y' = (A' + B')(C' + D') \neq A' + B' \cdot C' + D'$

例8 $Y = A \oplus B \Rightarrow Y' = A' \odot B' = A'B' + AB = A \odot B$
 $\Rightarrow (A \oplus B)' = A \odot B$

3. 对偶定理



对偶定理：如果 $F = Y$ ，则 $F^D = Y^D$

变换时注意：(1) 变量不改变
(2) 不能改变原来的运算顺序

例8 $Y = AB + A'C \Rightarrow Y^D = (A+B)(A'+C)$

例9 $Y = A(B+C)' + CD \Rightarrow Y^D = (A + (BC)')(C+D)$

不做原和反的转

例10 公式(21) $\underbrace{A + AB}_{F = Y} = A \Rightarrow \underbrace{A \cdot (A + B)}_{F^D = Y^D} = A$ 公式(24)

三个基本规则(定理)

3. 对偶定理

如果 $F = Y$, 则 $F^D = Y^D$

公式(18) $(A+B)' = A'B'$

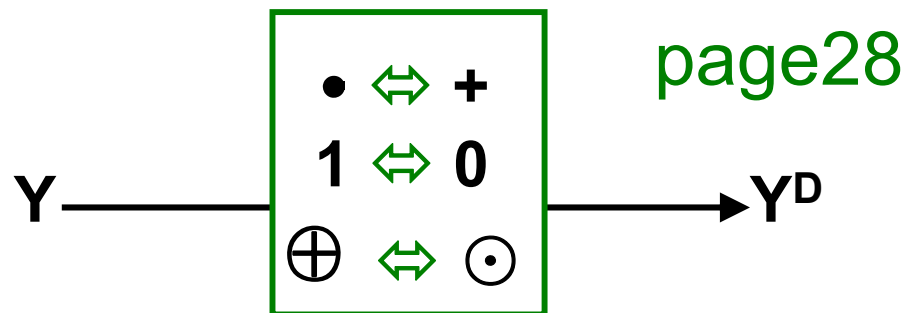
对偶 \downarrow \downarrow 对偶

公式(8) $(AB)' = A' + B'$

一般情况下, $Y' \neq Y^D$

★ 特例

{ 对于 $Y = A \oplus B$, 有 $Y' = Y^D = A \odot B$
对于 $Y = A \odot B$, 有 $Y' = Y^D = A \oplus B$

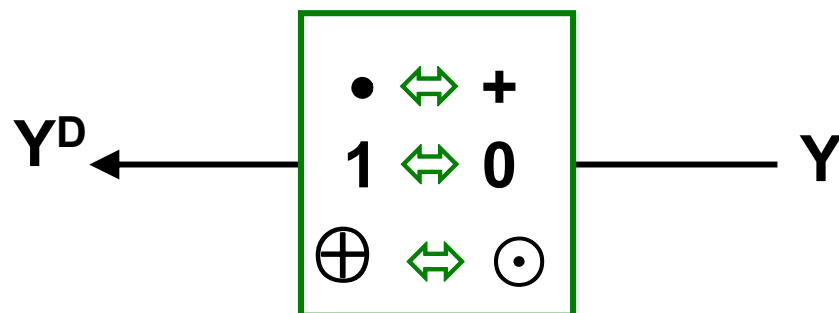


常用公式

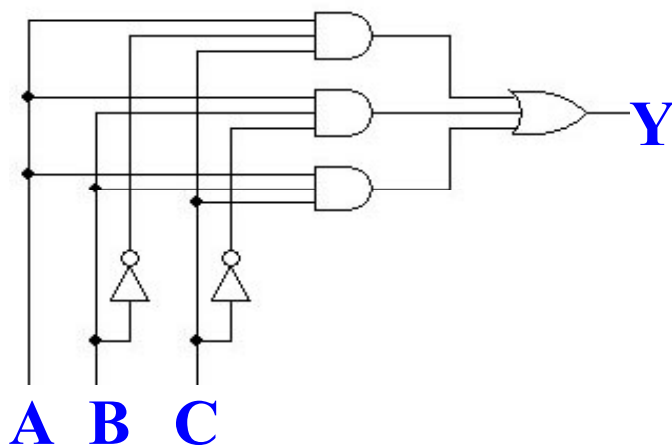
	公 式		公 式
21	$A+AB = A$	\longleftrightarrow	24 ^D $A(A+B)=A$
22	$A + A'B = A+B$	\longleftrightarrow	22 ^D $A(A'+B)=AB$
23	$AB + AB' = A$	\longleftrightarrow	23 ^D $(A+B)(A+B')=A$
25	$AB+A'C+BC=AB+AC'$	\longleftrightarrow	25 ^D $(A+B)(A'+C)(B+C)=(A+B)(A'+C)$
	$AB+A'C+BCD=AB+AC'$	\longleftrightarrow	$(A+B)(A'+C)(B+C+D)=(A+B)(A'+C)$

$$F = Y$$

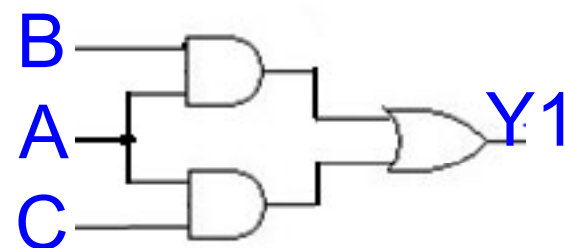
$$F^D = Y^D$$



2.3.4 逻辑函数化简



$$Y = AB'C + ABC' + ABC$$



最简与或式

先与再或

$$Y1 = AB + AC$$

乘积项最少,使得与门少
乘积项的变量少,使得与门的输入端个数少

逻辑函数

公式化简



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{最简与或式 } Y = AB + CD \\ \text{最简或与式 } Y = (A + B) \cdot (C + D) \end{array} \right.$$

2.3.4 逻辑函数化简

逻辑函数 $\xrightarrow{\text{公式化简}}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{最简与或式 } Y = AB + CD \\ \text{最简或与式 } Y = (A+B) \cdot (C+D) \end{array} \right.$

最常用公式

$$A + A = A; \quad 1 + A = 1$$

$$AA = A; \quad 0 \cdot A = 0;$$

$$(A B)' = A' + B'$$

$$(A + B)' = A'B'$$

$$A + A'C = A + C$$

$$AB + A'C + BC = AB + A'C$$

$$AB + A'C + BCD = AB + A'C$$

方法:

- 并项: 利用 $AB + AB' = A$, 将两项并为一项且消去一个变量 B 。
- 消项: 利用 $A + AB = A$ 消去多余的项 AB 。
- 消元: 利用 $A + A'B = A + B$ 消去多余变量 A' 。
- 配项: 利用 $AB + A'C + BC = AB + A'C$ 和互补律、重叠律先增添项, 再消去多余项 BC 。

例11：求Y的最简与或式

$$Y = AC + A'D + B'D + BC'$$

解： $Y = AC + A'D + B'D + 1$ 利用反演律

$= AC + A'D + B'D + D(A' + B')$ 配项加AB

$= AC + BC' + D(AB)$ 消因律

$= AC + BC' + AB + D(AB)'$ 消项AB

$= AC + BC' + AB + D$

$= AC + BC' + D$

例12：求Y的最简或与式

$$Y = A(A' + C + D)(D' + E)(A + B')(C' + E)$$

不容易直接求最简与或式,以对偶函数为媒介

解： $Y^D = \underline{A} + A'CD + D'E + \underline{AB'} + C'E$

简化 $Y^D = A + A'CD + D'E + C'E$
 $= A + CD + (D' + C')E$
 $= A + CD + (CD)'E$
 $= A + CD + E$

得： $Y = (Y^D)^D = A(C + D)E$
 $= (A+0) \cdot (C+D) \cdot (E+0)$
 $= A \cdot (C+D) \cdot E$

化简下列各逻辑式成为最简与或式。

练习1 $Y = A(BC + B'C') + A(BC' + B'C) = A$

练习2 $Y = \underline{AC} + AB'CD + \underline{ABC} + C'D + ABD$
 $= \underline{AC} + \underline{AB'CD} + C'D + ABD = AC + C'D + ABD$

练习3 $Y = AB + A'C + B'C$
 $= AC + C'D + AD + ABD$
 $= AC + C'D$
 $= AB + C(A' + B') = AB + C(AB)' = AB + C$

练习4 $Y = (A' + B)(B' + C)(A + B')(B + C')$

$Y^D = \underline{A'B} + \underline{B'C} + \underline{AB'} + \underline{BC'}$ $A'B + AB' + C$
 $= A'B + AB' + B$ $ABC + A'B'C'$

$(Y^D)^D = (A' + B)(A + B')B$

$(Y^D)^D = ABC + A'B'C'$

$B(A' + C')$

$+ B'(A + C)$

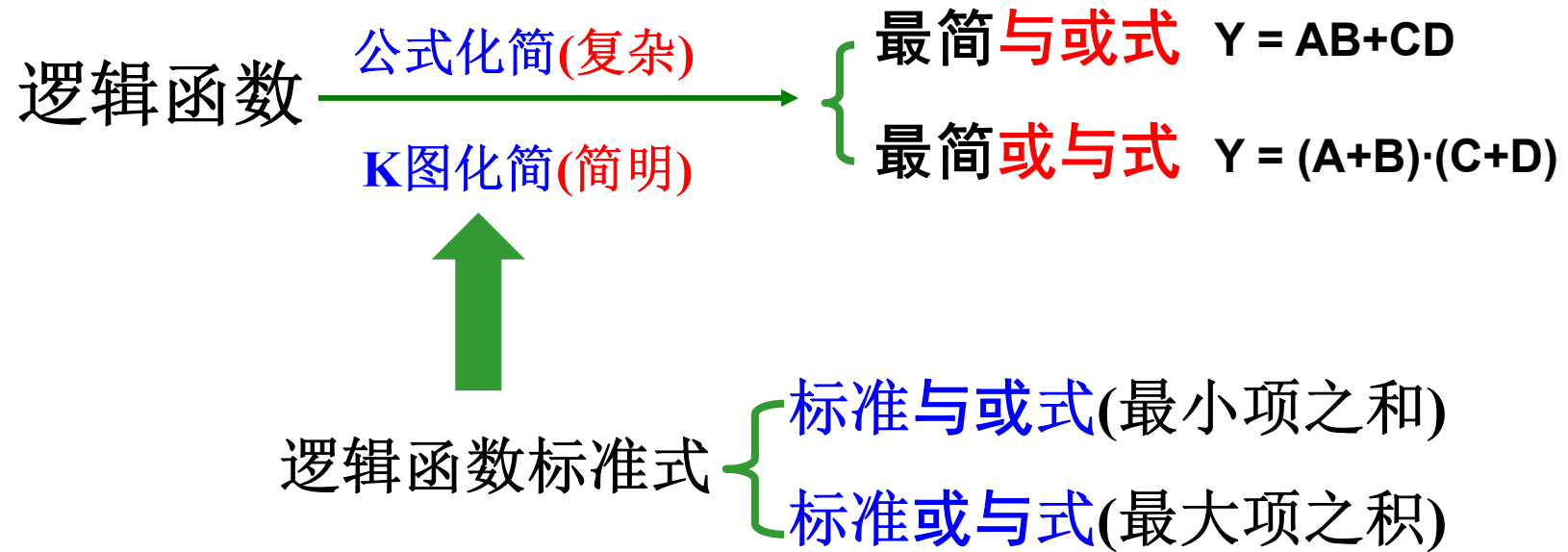
$+ (A' + C')(A + C)$

$= B'(A' + C') + B(A + C)$

$+ A'C + C'A + AA' + BB' + CC'$

$= (A + B + C)(A' + B' + C')$

2.4 逻辑函数的标准式



“三变量与运算”有多少种组合？

A或A' B或B' C或C'

$$Y = () \cdot () \cdot ()$$

$$m_0 = A'B'C'$$

$$m_1 = A'B'C$$

$$m_2 = A'B C'$$

$$m_3 = A'B C$$

$$m_4 = A B'C'$$

$$m_5 = A B'C$$

$$m_6 = A B C'$$

$$m_7 = A B C$$

最小项

ABC

000

001

010

011

100

101

110

111

“三变量或运算”有多少种组合？

A或A' B或B' C或C'

$$Y = () + () + ()$$

$$M_0 = A+B+C$$

$$M_1 = A+B+C'$$

$$M_2 = A+B'+C$$

$$M_3 = A+B'+C'$$

$$M_4 = A'+B+C$$

$$M_5 = A'+B+C'$$

$$M_6 = A'+B'+C$$

$$M_7 = A'+B'+C'$$

最大项

符号约定, 为了按顺序好记忆, 用如下方法记忆。

8个和项(最大项)

8个乘积项(最小项)

符号	最大项	ABC	最小项	符号
M0	$A+B+C$	000	$A'B'C'$	m0
M1	$A+B+C'$	001	$A'B'C$	m1
M2	$A+B'+C$	010	$A'BC'$	m2
M3	$A+B'+C'$	011	$A'BC$	m3
M4	$A'+B+C$	100	$AB'C'$	m4
M5	$A'+B+C'$	101	$AB'C$	m5
M6	$A'+B'+C$	110	ABC'	m6
M7	$A'+B'+C'$	111	ABC	m7

- 最小项的性质

- 任意一组变量取值：只有**一个**最小项的值为**1**，其它最小项的值均为**0**。
- 同一组变量取值：任意**两个不同**最小项的**乘积**为**0**，即 $m_i \times m_j = 0 \quad (i \neq j)$ 。
- **全部**最小项之**和**为**1**，即 $\sum_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1$

三变量的最小项

[illegible]

- 最大项的性质:

- 任意一组变量取值：只有一个最大项的值为**0**，其它最大项的值均为**1**。
- 同一组变量取值：任意两个不同最大项的**和**为**1**，即 $M_i + M_j = 1 \quad (i \neq j)$ 。
- **全部**最大项之**积**为**0**，即 $\prod M_i = 0$;

三变量的最小项

[illegible]

	符号	最大项	ABC	最小项	符号
0 ←	M0	A+B+C	000	A'B'C'	m0 → 1
	M1	A+B+C'	001	A'B'C	m1
	M2	A+B'+C	010	A'BC'	m2
	M3	A+B'+C'	011	A'BC	m3
	M4	A'+B+C	100	AB'C'	m4
	M5	A'+B+C'	101	AB'C	m5
	M6	A'+B'+C	110	ABC'	m6
	M7	A'+B'+C'	111	ABC	m7

容易为
1

容易为
0

$$\prod M_i = M_0 \cdot M_1 \cdots M_7 = 0;$$

$$M_i + M_j = 1; (i \neq j)$$

$$\sum m_i = m_0 + m_1 + \cdots + m_7 = 1;$$

$$m_i \cdot m_j = 0; (i \neq j)$$

最小项与最大项的关系

1. 相同编号的最小项和最大项存在互补关系

$$\text{即: } m_i = M_i' \quad M_i = m_i'$$

2. 如果已知逻辑函数为 $Y = \sum m_i$ 时, 定能将 Y 化成编号为 i 以外的那些最大项的乘积。

即:

$$Y = \sum_i m_i = \prod_{k \neq i} M_k$$

例1 把一般函数式转换成标准与或式(最小项之和式) (公式法)

$$F=AB+AC+BC$$

$$=AB(C+C')+AC(B+B')+BC(A+A')$$

$$=ABC+ABC'+ABC'+AB'C+ABC+A'BC$$

$$=ABC+ABC'+AB'C+A'BC$$

$$\begin{matrix} 111 & 110 & 101 & 011 \end{matrix}$$

$$=m_7+m_6+m_5+m_3$$

$$=\sum m(3,5,6,7)$$

例2 把一般函数式转换成标准或与式(最大项之积) (公式法)

$$F=AB+AC+BC$$

$$F^D=(A+B)(A+C)(B+C)=AB+AC+BC$$

$$F=(F^D)^D=(A+B)(A+C)(B+C)$$

$$= (A+B+C)(A+B+C')(A+C+B)(A+C+B')(B+C+A)(B+C+A')$$

$$= (A+B+C)(A+B+C')(A+C+B')(B+C+A')$$

$$= (A+B+C)(A+B+C')(A+B'+C)(A'+B+C)$$

000

001

010

100

$$= M_0 \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot M_4$$

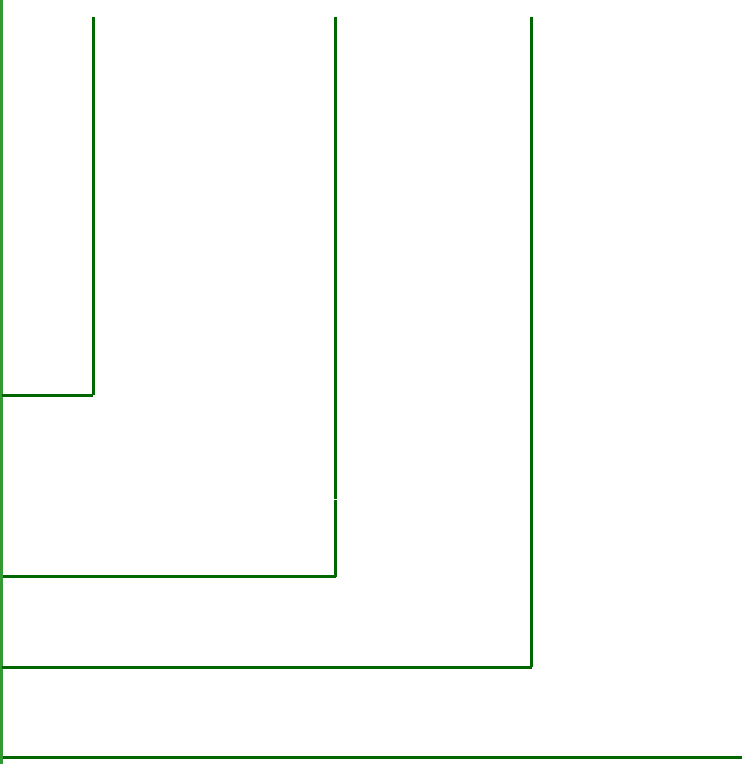
$$=\prod M(0,1,2,4)$$

例3 把一般函数式转换成标准与或式(最小项之和) (真值表法)

$$Y = AB + AC + BC$$

$$Y(A,B,C) = \underline{A'BC} + \underline{AB'C} + \underline{ABC'} + \underline{ABC} = m_3 + m_5 + m_6 + m_7 = \sum m(3,5,6,7)$$

A	B	C	Y	<u>0 1 1</u>	<u>1 0 1</u>	<u>1 1 0</u>	<u>1 1 1</u>
0	0	0	0				
0	0	1	0				
0	1	0	0				
0	1	1	1				
1	0	0	0				
1	0	1	1				
1	1	0	1				
1	1	1	1				



Y何时为1?

例4 把一般函数式转换成标准或与式(最大项之积) (真值表法)

$$Y = AB + AC + BC$$

$$Y(A,B,C) = (A+B+C) (A+B+C') (A+B'+C) (A'+B+C) = M_0 \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot M_4$$

A	B	C	Y	
0	0	0	0	0 0 0
0	0	1	0	0 0 1
0	1	0	0	0 1 0
0	1	1	1	
1	0	0	0	1 0 0
1	0	1	1	
1	1	0	1	
1	1	1	1	

$$= \prod M(0,1,2,4)$$

Y何时为0?

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

逻辑函数最小项之和（标准与或式）

$$\begin{aligned}
 Y(A,B,C) &= A'BC + AB'C + ABC' + ABC \\
 &= m_3 + m_5 + m_6 + m_7 \\
 &= \sum m(3,5,6,7);
 \end{aligned}$$

逻辑函数最大项之积（标准或与式）

$$\begin{aligned}
 Y(A,B,C) &= (A+B+C) \cdot (A+B+C') \cdot (A+B'+C) \cdot (A'+B+C) \\
 &= M_0 \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot M_4 \\
 &= \prod M(0,1,2,4);
 \end{aligned}$$

练习5 一般函数式 → 标准与或式(最小项之和) (2.10(4))

$$Y(A,B,C,D) = AB + ((BC)'(C'+D'))' = \sum m(?, ?, ? \dots ?)$$

$$= \sum m(3, 6, 7, 11, 12, 13, 14, 15)$$

$$AB + BC + CD \quad AB(CD + (CD)') + BC(AD + (AD)') + CD(AB + (AB)')$$

$$= ABCD + AB(CD)'+(AD)'BC + (AB)'CD$$

练习6 一般函数式 → 标准或与式(最大项之积) (2.11(5))

$$Y(A,B,C) = \sum m(1, 2, 4, 6, 7) = \prod M(?, ?, ? \dots ?)$$

$$= \prod M(0, 3, 5)$$

$$ABC' + ABD' + A'BC + BCD'$$

$$+ A'CD + B'CD$$

真值表?

$$= ABCD + ABC'D + ABC'D' + A'BCD + A'BCD'$$

$$+ ABCD' + A'B'CD + AB'CD$$

组合

$$= ABCD + ABC'D' + ABC'D + ABCD'$$

$$+ ABCD' + A'B'CD + AB'CD$$

补讲 函数表达式的常用形式

- 五种常用表达式

$$Y^D = (A+B)(A'+C)$$

$$= AC + A'B + BC$$

基本形式

反演
对偶

$$Y = AB + A'C$$

$$= (A+C)(A'+B)$$

$$= ((AB)'(A'C)')'$$

$$= ((A+C)' + (A'+B)')'$$

$$= ((A'C') + (AB'))'$$

$$= AC + AB$$

$$Y^D = (A+C)(A'+B)$$

“与—或”式

“或—与”式

“与非—与非”式

“或非—或非”式

“与—或—非”式

- 表达式形式转换

利用还原律

利用反演律

$$Y = AB + A'C = ((AB + A'C)')' = ((AB)' \cdot (A'C)')'$$

与或式

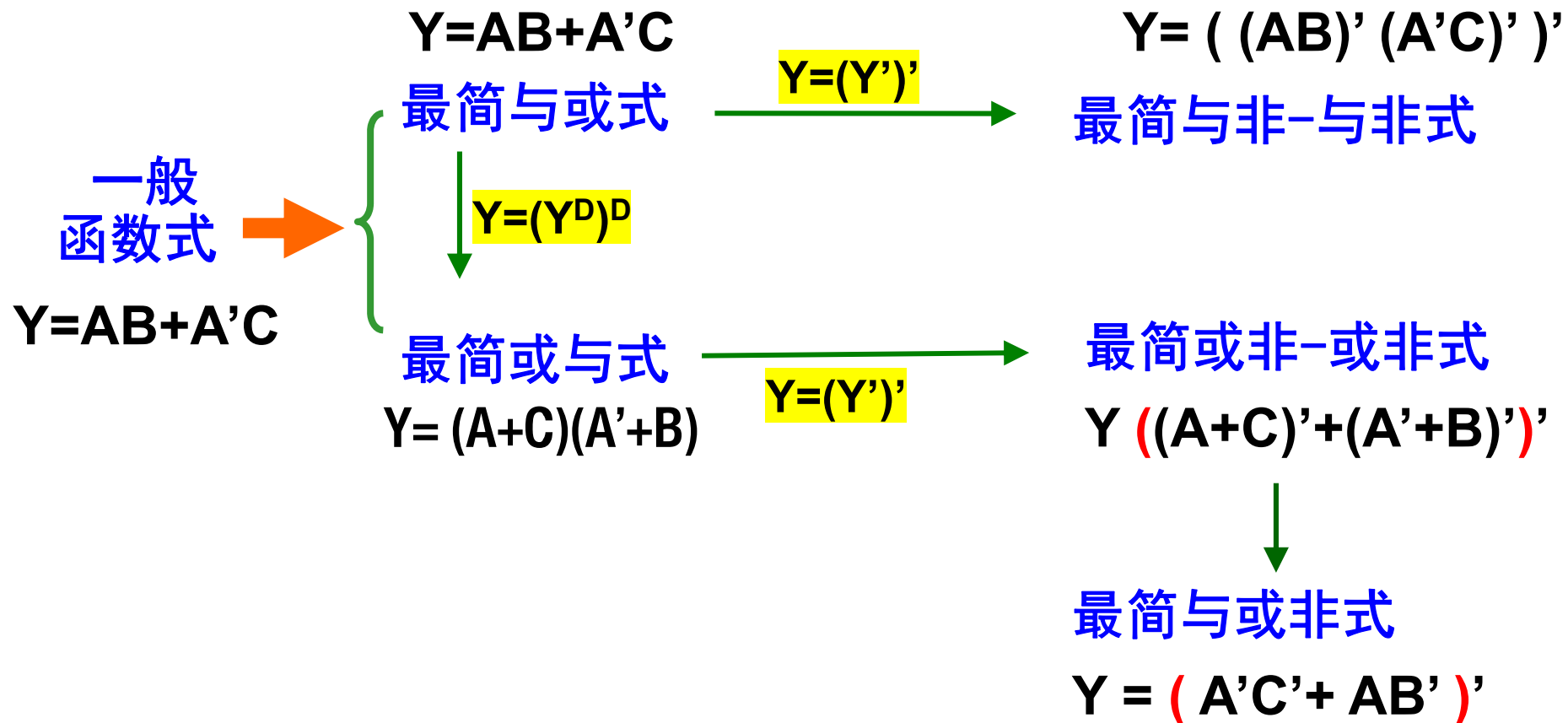
与非-与非式

$$Y = (A' + B)(A + C) = ((A' + B)' + (A + C)')' = (AB' + A'C')'$$

或与式

或非-或非式

与或非式



作业

2.10 (1)(4)(6) 一般函数→最小项之和(标准与或式)

2.11 (1)(2)(3)(5)一般函数→最大项之积(标准或与式)

2.12 一般函数→最简与或式

2.13(1,3,5,7,9,10) 一般函数→最简与或式

补充题

将**2.12(3)**化简成 最简与非-与非式，
最简或与式， 最简或非-或非式
最简与或非式， 标准与或式，
标准或与式