第四章
时变电磁场

复习

- 时变电场的激发源除了电荷以外，还有变化的磁场；而时变磁场的激发源除了传导电流以外，还有变化的电场。电场和磁场互为激发源，相互激发。

- 时变的电场和磁场不再相互独立，而是相互关联，构成一个整体 —— 电磁场。电场和磁场分别是电磁场的两个分量。

- 在离开辐射源（如天线）的无源空间中，电荷密度和电流密度矢量为零，电场和磁场仍然可以相互激发，从而在空间形成电磁振荡并传播，这就是电磁波。

复习

- 麦克斯韦方程组

$$
\begin{cases}
\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\
\nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\nabla \cdot \vec{B} = 0 \\
\nabla \cdot \vec{D} = \rho
\end{cases}
$$

全电流定律，表明时变电流和电场都能产生磁场

法拉第电磁感应定律，表明时变磁场产生电场

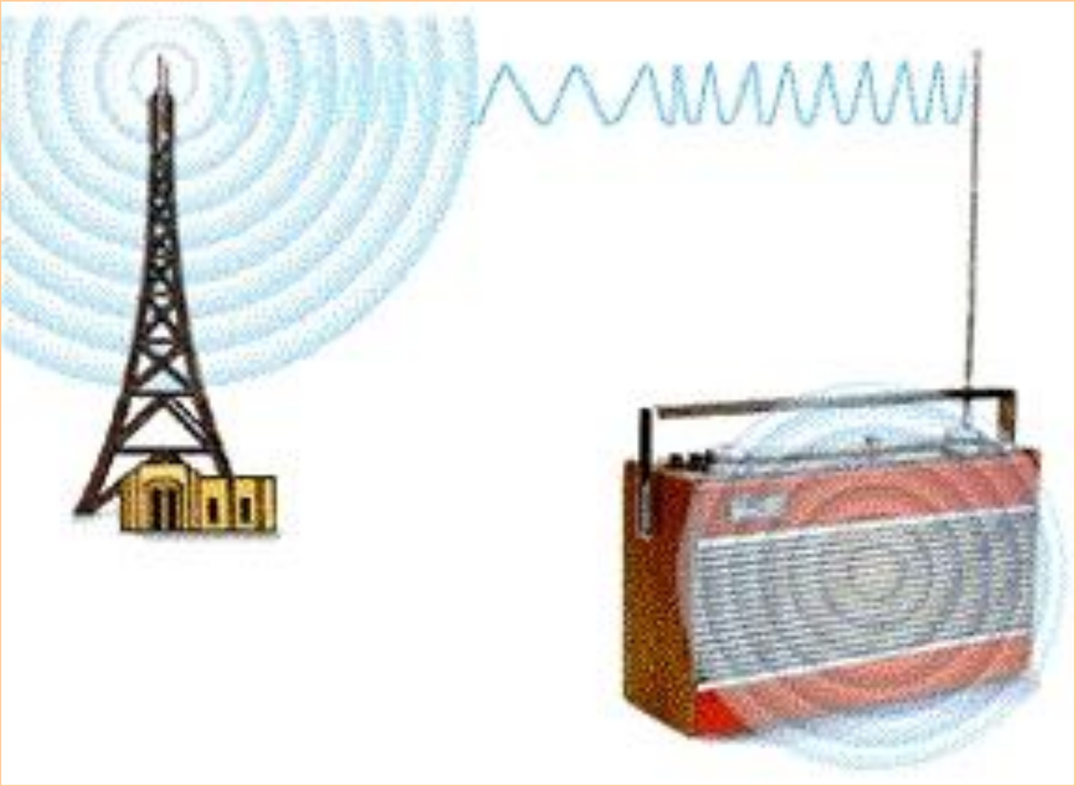
磁通连续性定理，表明磁场是无源场，磁感线总是闭合曲线

高斯定律，表明电位移线起始于正电荷，终止于负电荷

- 场量共有四个，包括 $\vec{D}, \vec{E}, \vec{B}, \vec{H}$

§ 4.1 波动方程

- 脱离激励源的区域（无外加的电荷和电流），媒质（$\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\mu}$）为均匀、线性、各向同性媒质。



$$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

§ 4.1 波动方程

假设设电磁波存在于均匀、线性、各向同性的有源区域

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\varepsilon\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \\ \nabla\times\vec{E}=-\mu\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\vec{H}=0 \\ \nabla\cdot\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon} \end{cases}$$

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E}=-\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\vec{H}\right)$$

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E}+\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=-\mu\frac{\partial\vec{J}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E}=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{E}\right)-\nabla^2\vec{E}$$

$$\nabla^2\vec{H}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=-\nabla\times\vec{J} \qquad \nabla^2\vec{E}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\mu\frac{\partial\vec{J}}{\partial t}+\frac{\nabla\rho}{\varepsilon}$$

有源区域的波动方程

电磁波的传播问题可归结为在给定的边界条件和初始条件下求波动方程的解

§ 4.1 波动方程

在无源空间中，电流密度和电荷密度处处为零。$\vec{J}=0 \quad \rho=0$

有源

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{H} - \mu\varepsilon \dfrac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times \vec{J} \\ \nabla^2 \vec{E} - \mu\varepsilon \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu \dfrac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \dfrac{\nabla \rho}{\varepsilon} \end{cases}$$

无源

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{H} - \mu\varepsilon \dfrac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \vec{E} - \mu\varepsilon \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

§ 4.1 波动方程

- 直角坐标系下，有：

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}=0$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}=0$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}=0$$

§ 4.1 波动方程

- 以及

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2}=0$$

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2}=0$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}=0$$

§ 4.1 波动方程

- 从上方程可以看出：时变电磁场的电场场量和磁场场量在空间中是以波动形式变化的，因此称时变电磁场为电磁波。
- 建立波动方程的意义：通过解波动方程，可以求出空间中电场场量和磁场场量的分布情况。
- 但需要注意的是：只有少数特殊情况可以通过直接求解波动方程求解。

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{H} - \mu\varepsilon \dfrac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times \vec{J} \\ \nabla^2 \vec{E} - \mu\varepsilon \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu \dfrac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \dfrac{\nabla \rho}{\varepsilon} \end{cases}$$

§ 4.1 波动方程

练习 已知无源的空气中的磁场强度为

$$\vec{H} = \vec{e}_y 0.1\sin(10\pi x)\cos(6\pi\times10^9 t - kz)$$

利用波动方程求常数**k**的值。 $\nabla^2\vec{H} - \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0$

$$\nabla^2\vec{H} = 0.1\vec{e}_y\nabla^2\left[\sin(10\pi x)\cos(6\pi\times10^9 t - kz)\right]$$

$$= -0.1\vec{e}_y\left[(10\pi)^2 + k^2\right]\left[\sin(10\pi x)\cos(6\pi\times10^9 t - kz)\right]$$

$$\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0.1\vec{e}_y\sin(10\pi x)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\cos(6\pi\times10^9 t - kz)$$

$$= -0.1\vec{e}_y\left(6\pi\times10^9\right)^2\sin(10\pi x)\cos(6\pi\times10^9 t - kz)$$

$$k = \sqrt{\mu_0\varepsilon_0\left(6\pi\times10^9\right)^2 - (10\pi)^2}$$

§ 4.2 电磁场的位函数

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{H} - \mu\varepsilon \dfrac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times \vec{J} \\ \nabla^2 \vec{E} - \mu\varepsilon \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu \dfrac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \dfrac{\nabla \rho}{\varepsilon} \end{cases}$$

$$\vec{J}, \rho \Rightarrow \vec{A}, \varphi \Rightarrow \vec{E}, \vec{H}$$

- 引入位函数的意义：引入位函数来描述时变电磁场，使一些问题的分析得到简化。

回忆：静电场中的位函数？

§ 4.2 电磁场的位函数

- $\vec{B}$的散度恒为0，可将其表示为一个矢量函数$\vec{A}$的旋度

由 $\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Longrightarrow \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

矢量磁位或磁矢位

根据（1）磁场的无散特性

（2）矢量旋度的散度恒为零

$$\Longrightarrow \nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{A}\right) = 0$$

即可得：磁感应强度$\vec{B}$可以用一个矢量函数的旋度来表示。

$\vec{A}$为矢量磁位，或称磁矢位，单位为特斯拉·米（T·m）

§ 4.2 电磁场的位函数

$$\nabla\cdot\vec{B}=0 \Rightarrow \vec{B}=\nabla\times\vec{A}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\frac{\partial\left(\nabla\times\vec{A}\right)}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \nabla\times(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t})=0$$

$$\Rightarrow \vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi$$

$$\Rightarrow \vec{E}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\nabla\varphi$$

标量电位或电标位，单位为伏（V）

§ 4.2 电磁场的位函数

$$\begin{cases} \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \varphi \end{cases}$$

问题：磁矢位$\vec{A}$与电标位φ的形式唯一吗？

- $\vec{A}$ 和φ分别为矢量磁位和标量电位。
- 说明：尽管磁感应强度在形式上只与矢量位有关，但不能据此认为磁感应强度由矢量位决定而与标量位无关。因为在时变情形下，电磁场相互激发，而时变电场由矢量位和标量位共同描述，使得时变磁场本质上与矢量位和标量位都有联系。

§ 4.2 电磁场的位函数

满足下列变换关系的两组位函数$(\vec{A}, \varphi)$和$(\vec{A}', \varphi')$能描述同一个电磁场问题。

$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi \\ \varphi' = \varphi - \dfrac{\partial\psi}{\partial t} \end{cases}$$

ψ为任意可微函数

即

$$\begin{cases} \vec{B} = \nabla\times\vec{A}' = \nabla\times(\vec{A} + \nabla\psi) = \nabla\times\vec{A} \\ \vec{E} = -\nabla\varphi' - \dfrac{\partial\vec{A}'}{\partial t} = -\nabla(\varphi - \dfrac{\partial\psi}{\partial t}) - \dfrac{\partial}{\partial t}(\vec{A} + \nabla\psi) = -\nabla\varphi - \dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t} \end{cases}$$

结论：对一给定的电磁场可用不同的位函数来描述。

问题：不唯一性的原因是什么？

§ 4.2 电磁场的位函数

- 位函数的规范条件

造成位函数的不唯一性的原因就是没有规定 $\vec{A}$的散度。可通过规定$\vec{A}$的散度，使位函数满足的方程得以简化。

在恒定磁场的分析中，通常采用库仑规范，即

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

在时变电磁场的分析中，通常采用洛仑兹条件，即

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\mu\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

§ 4.2 电磁场的位函数

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \varphi$$

$$\Rightarrow$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

实际电磁场是由传导电流 $\vec{J}$与电荷密度ρ激发起来的，如果能使$\vec{A}$与φ同场源 $\vec{J}$与ρ结合起来，就可以由已知的电流分布与电荷分布求得中间量，进一步求得电场$\vec{E}$与磁场$\vec{H}$。

$$\vec{A}, \varphi \Leftrightarrow \vec{J}, \rho \quad ???$$

位函数的微分方程

$$\boxed{\vec{D}=\varepsilon\vec{E} \quad \vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu}}$$

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \nabla\times\vec{B}=\mu\vec{J}+\mu\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\boxed{\vec{B}=\nabla\times\vec{A} \quad \vec{E}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\nabla\varphi}$$

$$\nabla\times\nabla\times\vec{A}=\mu\vec{J}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\mu\varepsilon\nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$$

$$\boxed{\nabla\times\nabla\times\vec{A}=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}}$$

$$\nabla^2\vec{A}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}+\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=-\mu\vec{J}$$

同样 $\nabla\cdot\vec{D}=\rho$

$$\boxed{\vec{D}=\varepsilon\vec{E} \quad \vec{E}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\nabla\varphi}$$

$$\nabla^2\varphi+\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)=-\frac{\rho}{\varepsilon}$$

§ 4.2 电磁场的位函数

$$\begin{cases} \nabla^2\vec{A}-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}+\mu\varepsilon\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=-\mu\vec{J} \\ \nabla^2\varphi+\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)=-\dfrac{\rho}{\varepsilon} \end{cases}$$

库仑规范

$$\nabla\cdot\vec{A}=0 \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \nabla^2 A-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu\vec{J}+\mu\varepsilon\nabla\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\right) \\ \nabla^2\varphi=-\dfrac{\rho}{\varepsilon} \end{cases}}$$

洛仑兹条件

$$\nabla\cdot\vec{A}=-\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} \nabla^2\vec{A}-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu\vec{J} \\ \nabla^2\varphi-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\dfrac{\rho}{\varepsilon} \end{cases}$$

达朗贝尔方程

§ 4.2 电磁场的位函数

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{A} - \mu\varepsilon \dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} \\ \nabla^2 \varphi - \mu\varepsilon \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon} \end{cases}$$

- 达朗贝尔方程的特点：

1. 两个方程在形式上是对称的，且比较简单，易于求解；

2. 矢量位$\vec{A}$只决定于$\vec{J}$，标量位φ只决定于ρ，这对于求解方程特别有利。只需解出$\vec{A}$，无需解出φ就可得到待求的电场和磁场。

问题：当电磁场不随时间变化时，达朗贝尔方程变为何种形式？

§ 4.2 电磁场的位函数

$$
\begin{cases}
\nabla^2 \vec{A} - \mu\varepsilon \dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} \\
\nabla^2 \varphi - \mu\varepsilon \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon}
\end{cases}
$$

- 说明

- 接下来的任务就是要在给定场源$\vec{J}$和ρ的情况下求解这两个方程以得出$\vec{A}$与φ，然后再求得电场$\vec{E}$与磁场$\vec{H}$。这是求解电磁场的一种途径和方法，这种途径和方法往往要比直接求解$\vec{E}$与$\vec{H}$方便且容易。

- 电磁位函数只是简化时变电磁场分析求解的一种辅助函数，应用不同的规范条件，矢量位$\vec{A}$和标量位φ的解也不相同，但最终得到的电磁场矢量是相同的。

§ 4.3 电磁能量守恒定律

- 时变场中，电场和磁场相互激励，能量不断转换，在这个过程中，电磁能量从一个地方传递到另外的地方。
- 坡印廷定理描述了空间中电磁能量守恒关系。

一、坡印廷定理

1.能量密度

- 时变电磁场中，电磁场能量密度等于电场能量密度与磁场能量密度之和：

$$w = w_e + w_m = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E} + \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$$

§ 4.3 电磁能量守恒定律

- 体积V内存储的能量为

$$W=\int_V w dV=\int_V (\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}+\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H})dV$$

2.坡印廷定理

- 由麦克斯韦方程组可推导出坡印廷定理。

$$-\oint_S(\vec{E}\times\vec{H})\cdot d\vec{S}=\frac{d}{dt}(W_e+W_m)+\int_V \vec{E}\cdot\vec{J}dV$$

- 物理意义：穿过闭合面S流入体积V内的电磁功率，等于体积V内增加的电磁功率与电阻消体积内损耗的热功率之和，是电磁场能量守恒的具体体现。

§ 4.3 电磁能量守恒定律

二、坡印廷矢量

- $-\oint_S(\vec{E}\times\vec{H})\cdot d\vec{S}$ 表示流入闭合面S的电磁功率，因此$\vec{E}\times\vec{H}$ 为一个与通过单位面积的功率相关的矢量。
- 定义：坡印廷矢量（用符号$\vec{S}$ 表示）—— 能流密度矢量

$$\boxed{\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}} \quad (W/m^2)$$

- 说明：坡印廷矢量的大小表示单位时间内通过垂直于能量传输方向的单位面积的电磁能量。
- 坡印廷矢量的方向即为电磁能量传播方向。

§ 4.3 电磁能量守恒定律

讨论:

1 若$\vec{E}$, $\vec{H}$ 为与时间相关的函数（瞬时形式），则

$$\boxed{\vec{S}(t) = \vec{E}(t) \times \vec{H}(t)}$$

- 称为坡印廷矢量的瞬时形式。

2 对某些时变场，$\vec{E}$, $\vec{H}$呈周期性变化。则将瞬时形式坡印廷矢量在一个周期内取平均，得平均坡印廷矢量（平均能流密度矢量），即

$$\boxed{\vec{S}_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{S}(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{E}(t) \times \vec{H}(t)dt}$$

- 注：$\vec{S}_{av}$与时间 t 无关。

§ 4.3 电磁能量守恒定律

例4.3.1 已知无源的自由空间中，时变电磁场的电场强度为

$$\vec{E} = \vec{e}_y E_0 \cos(\omega t - kz) \quad V/m$$

求：瞬时坡印廷矢量，平均坡印廷矢量。

§ 4.4 唯一性定理

- 唯一性定理指出：在以闭曲面S为边界的有界区域内V，如果给定t时刻的电场强度和磁场强度的初始值，并且在$t \geq 0$时，给定边界面S上的电场强度的切向分量或磁场强度的切向分量，那么，在$t \geq 0$时，区域内的电磁场由麦克斯韦方程唯一地确定。

- 唯一性定理指出了获得唯一解所必须满足的条件。为电磁场问题的求解提供了理论依据。

§ 4.5 时谐电磁场

- 与电路和信号分析类似，为了便于分析，我们可以把一般随时间变化的时变电磁场，用傅立叶变换分解为许多不同时间频率的正弦电磁场（简谐场，也称时谐电磁场）的叠加。

一、时谐电磁场的复数表示

- 以余弦函数为基准（工程界惯例。少数也用正弦函数表示），以电场强度矢量为例：

$$
\begin{aligned}
\vec{E}(x,y,z,t) = & \vec{e}_x E_x(x,y,z)\cos(\omega t+\phi_x)+ \\
& \vec{e}_y E_y(x,y,z)\cos(\omega t+\phi_y)+ \\
& \vec{e}_z E_z(x,y,z)\cos(\omega t+\phi_z)
\end{aligned}
$$

§ 4.5 时谐电磁场

- 上式也可表示为：

$$
\begin{aligned}
\vec{E}(x,y,z,t) = {} & \vec{e}_x \,\mathrm{Re}[E_x(x,y,z)\mathrm{e}^{j(\omega t+\phi_x)}] + \\
& \vec{e}_y \,\mathrm{Re}[E_y(x,y,z)\mathrm{e}^{j(\omega t+\phi_y)}] + \\
& \vec{e}_z \,\mathrm{Re}[E_z(x,y,z)\mathrm{e}^{j(\omega t+\phi_z)}]
\end{aligned}
$$

$$
= \mathrm{Re}\{\vec{e}_x \dot{E}_x(x,y,z) + \vec{e}_y \dot{E}_y(x,y,z) + \vec{e}_z (x,y,z)]\mathrm{e}^{j\omega t}\}
$$

$$
= \mathrm{Re}[\dot{\vec{E}}(x,y,z)\mathrm{e}^{j\omega t}]
$$

- 式中：

$$
\dot{\vec{E}}(x,y,z) = \vec{e}_x E_x(x,y,z)\mathrm{e}^{j\phi_x} + \vec{e}_y E_y(x,y,z)\mathrm{e}^{j\phi_y} + \vec{e}_z E_z(x,y,z)\mathrm{e}^{j\phi_z}
$$

§ 4.5 时谐电磁场

- $\dot{\vec{E}}(x,y,z)$称为电场强度的复矢量或复数形式。同样时谐电磁场的其它场量也可以有类似的表示式。

$$\vec{E}(x,y,z,t)=\mathrm{Re}[\dot{\vec{E}}(x,y,z)\mathrm{e}^{j\omega t}]$$

- 上面的表示式建立了时谐电磁场场量的瞬时矢量与复矢量之间的联系。
- 复矢量只是一种数学表达式，只与空间相关，与时间无关；
- 复矢量不是真实的场矢量，真实的场矢量是与之相应的瞬时矢量。

§ 4.5 时谐电磁场

例4.5.1 将下列场矢量的瞬时值形式写成复数形式。

1) $$\vec{E}(z,t)=\vec{e}_x E_{xm}\cos(\omega t-kz+\phi_x)+\vec{e}_y E_{ym}\sin(\omega t-kz+\phi_y)$$

2) $$\vec{H}(x,z,t)=\vec{e}_x H_0\frac{ka}{\pi}\sin(\frac{\pi x}{a})\sin(kz-\omega t)$$

$$+\vec{e}_z H_0\cos(\frac{\pi x}{a})\cos(kz-\omega t)$$

§ 4.5 时谐电磁场

例4.5.2 已知电场强度复矢量为：
$$\dot{\vec{E}}(z)=\vec{e}_x jE_{xm}\cos(k_z z)$$

写出电场强度的瞬时矢量。

§ 4.5 时谐电磁场

二、复矢量的麦克斯韦方程

- 以电场强度旋度方程为例：

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \quad \nabla \times [\mathrm{Re}(\dot{\vec{E}} \mathrm{e}^{j\omega t})] = -\frac{\partial}{\partial t}[\mathrm{Re}(\dot{\vec{B}} \mathrm{e}^{j\omega t})]$$

- ∇、$\partial/\partial t$ 与Re可交换顺序，

$$\mathrm{Re}[\nabla \times (\dot{\vec{E}} \mathrm{e}^{j\omega t})] = -\mathrm{Re}[\frac{\partial}{\partial t}(\dot{\vec{B}} \mathrm{e}^{j\omega t})] = -\mathrm{Re}[j\omega \dot{\vec{B}} \mathrm{e}^{j\omega t}]$$

- 复数相等与其实部及虚部分别相等是等效的，故可以去掉上式两边的Re，接着可以消去$e^{j\omega t}$，得到

$$\nabla \times \dot{\vec{E}} = -j\omega \dot{\vec{B}}$$

§ 4.5 时谐电磁场

- 从形式上讲，只要把微分算子 $\partial/\partial t$用$j\omega$代替，就可以把时谐电磁场场量之间的线性关系，转换为等效的复矢量关系。因此复数形式的$Maxwell$方程：

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\vec{B}=0 \\ \nabla\cdot\vec{D}=\rho \end{cases} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}\Rightarrow j\omega} \begin{cases} \nabla\times\dot{\vec{H}}=\dot{\vec{J}}+j\omega\dot{\vec{D}} \\ \nabla\times\dot{\vec{E}}=-j\omega\dot{\vec{B}} \\ \nabla\cdot\dot{\vec{D}}=\dot{\rho} \\ \nabla\cdot\dot{\vec{B}}=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{忽略}\cdot} \begin{cases} \nabla\times\vec{H}=\vec{J}+j\omega\vec{D} \\ \nabla\times\vec{E}=-j\omega\vec{B} \\ \nabla\cdot\vec{D}=\rho \\ \nabla\cdot\vec{B}=0 \end{cases}$$

- 引入复矢量的目的是避免对时间变量的微分和积分运算，达到简化问题的目的。

§ 4.5 时谐电磁场

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega\vec{D}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\vec{B}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

- 时谐电磁场的复矢量所满足的麦克斯韦方程，也称为麦克斯韦方程的复数形式。
- 由于复数形式与实数形式的公式间存在明显的区别，因此忽略“.”，并不会引起歧义。

§ 4.5 时谐电磁场

例4.5.3 已知正弦电磁场的电场复矢量为

$$\vec{E}(z)=\vec{e}_x[Ae^{-j\frac{\pi}{2}}+Be^{-j\frac{\pi}{3}}]\mathrm{e}^{-jkz}$$

求磁场的复矢量和瞬时值。（μ、A、B为常数）

§ 4.5 时谐电磁场

三、亥姆霍兹方程

- 对于时谐场，可得到无源空间中复数形式的波动方程，即亥姆霍兹方程：

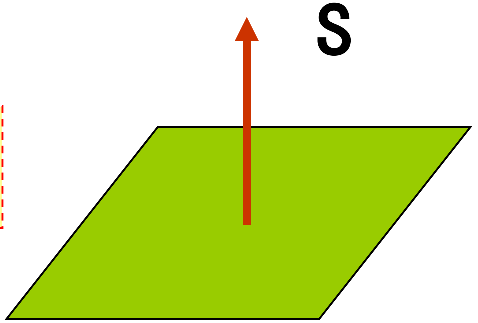
$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0$$

- 其中，$k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon$

§ 4.5 时谐电磁场

四、平均能流密度矢量



- 坡印廷矢量 $\vec{S}=\vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{H}(\vec{r},t)$

方向：能量流动的方向；

模值：垂直于流动方向的单位面积上流过的电磁功率。

- 平均坡印廷矢量

$$\vec{S}_{av}=\frac{1}{T}\int_0^T\vec{S}dt=\frac{1}{T}\int_0^T\vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{H}(\vec{r},t)dt$$

可用复矢量表示

$$\vec{S}_{av}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{E}\times\vec{H}^*)$$

§ 4.5 时谐电磁场

例4.5.4 已知截面为$a \times b$的矩形金属波导中电磁场的复数形式为

$$\vec{E} = -\vec{e}_y j\omega\mu \frac{a}{\pi} H_0 \sin\frac{\pi x}{a} \mathrm{e}^{-j\beta z}$$

$$\vec{H} = (\vec{e}_x j\beta \frac{a}{\pi} H_0 \sin\frac{\pi x}{a} + \vec{e}_z H_0 \cos\frac{\pi x}{a})\mathrm{e}^{-j\beta z}$$

式中H_0、ω、β、μ都是常数。试求：

（1）瞬时坡印廷矢量；

（2）平均坡印廷矢量。