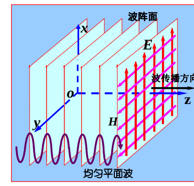
第五章
均匀平面波在无界空间中的传播

§ 5.1 理想介质中的均匀平面波

一、均匀平面波的概念

- 平面波：等相位面（波阵面）为平面的波；
- 均匀平面波："均匀"是指其等相位面上各点的场强是相等的。
- 均匀平面波即等相位面为平面，同时在等相位面上，电、磁场场量的振幅、方向、相位处处相等的电磁波。



§ 5.1 理想介质中的均匀平面波

- 定义：电磁波的场矢量只沿着它的传播方向变化，在与传播方向垂直的无限大平面内，电场强度E与磁场强度H的方向、振幅及相位均保持不变。
- 均匀平面波是一种理想情况，特性简单，又能表现电磁波重要和主要的性质；
- 在实际应用中，纯粹的均匀平面波并不存在；
- 但某些实际存在的波型，在远离波源的一小部分波阵面，仍可近似看作均匀平面波。

二、亥姆霍兹方程的均匀平面波解

假设在无限大的无源空间中，充满线性、各向同性的均匀理想介质。电场场量满足亥姆霍兹方程，即：$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0$。均匀平面波沿 z 方向传播，则电场强度E和磁场强度H均不是 x 和 y 的函数，即

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = 0,\quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 \vec{E}}{dz^2} + k^2 \vec{E} = 0,\quad \frac{d^2 \vec{H}}{dz^2} + k^2 \vec{H} = 0$$

由于 $\nabla \cdot \vec{E} = \dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} + \dfrac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow E_z = 0$

同理 $\nabla \cdot \vec{H} = \dfrac{\partial H_x}{\partial x} + \dfrac{\partial H_y}{\partial y} + \dfrac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow H_z = 0$ $\quad \boxed{\dfrac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k^2 E_z = 0}$

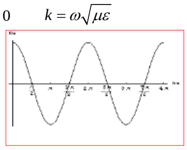
- 结论：均匀平面波的电场强度 $\vec{E}$ 和磁场强度 $\vec{H}$ 都垂直于波的传播方向 —— 横电磁波（TEM波）

§ 5.1 理想介质中的均匀平面波

设电场只有x 分量，即

$$\vec{E}(z) = \vec{e}_x E_x(z) \Rightarrow \frac{d^2 E_x(z)}{dz^2} + k^2 E_x(z) = 0 \qquad k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

其通解形式：$E_x(z) = A_1 e^{-jkz} + A_2 e^{jkz}$



- 解的物理意义
- 第一项

$$E_{1x}(z) = A_1 e^{-jkz} = E_{1xm} e^{j\phi_{1x}} e^{-jkz}$$

$$E_{1x}(z,t) = \mathrm{Re}[E_{1xm} e^{j\phi_{1x}} e^{-jkz} e^{j\omega t}] = E_{1xm}\cos(\omega t - kz + \phi_{1x})$$

可见，$A_1 e^{-jkz}$ 表示沿 +z 方向传播的波。

- 第二项 $E_{2x}(z) = A_2 e^{jkz} = E_{2xm} e^{j\phi_{2x}} e^{jkz}$

沿 −z 方向传播的波

$$E_{2x}(z,t) = \mathrm{Re}[E_{2xm} e^{j\phi_{2x}} e^{jkz} e^{j\omega t}] = E_{2xm}\cos(\omega t + kz + \phi_{2x})$$

§ 5.1 理想介质中的均匀平面波

- 相伴磁场

由 $\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}$ ，可得

$$\vec{H}_1 = \vec{e}_y \frac{j}{\omega\mu}\frac{\partial E_{1x}}{\partial z} = \vec{e}_y \frac{k}{\omega\mu} E_{1x} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\vec{e}_z \times \vec{e}_x E_{1x} = \frac{1}{\eta}\vec{e}_z \times \vec{E}_1$$

其中 $\eta = \dfrac{E_{1x}}{H_{1y}} = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}\ (\Omega)$ 称为媒质的波阻抗（本征阻抗）

磁场与电场相互垂直，且同相位

在自由空间中 $\eta = \eta_0 = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \approx 377\Omega$

同理，对于 $\vec{E}_2 = \vec{e}_x E_{2x} = \vec{e}_x A_2 e^{jkz} \Rightarrow \vec{\mathbf{H}}_2 = \dfrac{1}{\eta}(-\vec{e}_z) \times \vec{E}_2$

结论：在理想介质中，均匀平面波的电场强度E与磁场强度H相互垂直且同相位，且与传播方向呈右手螺旋关系

§ 5.1 理想介质中的均匀平面波

三 、理想介质中均匀平面波的传播特点

- 对于$E_{1x}(z,t)=E_{1xm}cos(\omega t-kz+\phi_x)$

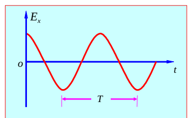
1º 周期和频率

对空间一定点，z为常数，电场随时间变化的周期为：

$$T=\frac{2\pi}{\omega}$$

相应的频率为

$$f=\frac{\omega}{2\pi}$$



$E_x(0,t)=E_m\cos\omega t$ 的曲线

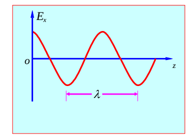
§ 5.1 理想介质中的均匀平面波

2º 波长和波数

- 波长：任意固定时刻，空间相位差为2π的两个波阵面的间距

$$\lambda=\frac{2\pi}{k}\ \text{(m)}$$

可见波长不仅与频率有关，还与媒质参数有关。



- 相位常数k：表示波传播单位距离的相位变化

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}\ \text{(rad/m)}$$

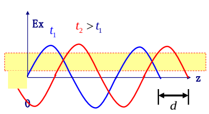
也表示空间距离2π内所包含的波长数目，因此称为波数。

§ 5.1 理想介质中的均匀平面波

3º 传播方向、相位速度（波速）

在某个特定时刻$t=t_1$，电场是z的函数，假定如图所示。当时间增大到$t=t_2$，电场仍为z的函数，但向右移动了距离$d=\frac{\omega}{k}(t_2-t_1)$。

说明$E_{1x}(z,t)=E_{1xm}cos(\omega t-kz+\phi_x)$代表一个沿+z方向传播的波。



$E_{1x}(z,t)=E_{1xm}cos(\omega t-kz+\phi_x)$

从波形上可以认为是整个波形随着时间变化向+z方向平移。

§ 5.1 理想介质中的均匀平面波

- 相位速度（波速）：电磁波的等相位面在空间中的移动速度

$$\omega t-kz+\varphi_0=C \qquad k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad v_p=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\ \text{(m/s)}$$

- 相速只与媒质参数有关，而与电磁波的频率无关。
- 真空（自由空间）中的相速为

$$v=c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=\frac{1}{\sqrt{4\pi\times10^{-7}\times\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}}}=3\times10^8\text{ m/s}$$

§ 5.1 理想介质中的均匀平面波

4º 讨论相伴的磁场

- 由麦克斯韦方程$\nabla\times\vec{E}=-j\omega\vec{B}$

$$\Rightarrow\quad \vec{H}(z)=\vec{e}_y\sqrt{\varepsilon/\mu}E_{1x}=\frac{1}{\eta}\vec{e}_z\times\vec{E}_1$$

5º 波阻抗：电场的振幅与磁场振幅之比，具有阻抗的量纲。

与媒质的参数相关，又称为媒质的本征阻抗。 $\eta=\frac{E_{1x}}{H_{1y}}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\ (\Omega)$

- 真空（自由空间）中，有

$$\eta_0=\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}=120\pi\ \Omega=377\ \Omega$$

§ 5.1 理想介质中的均匀平面波

6º 能量密度和能流密度

电场能量密度： $w_e=\frac{1}{2}\varepsilon|E|^2$

磁场能量密度： $w_m=\frac{1}{2}\mu|H|^2=\frac{1}{2}\mu\cdot(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}|E|)^2=\frac{1}{2}\varepsilon|E|^2$

$\Rightarrow\ w_e=w_m$

- 理想介质中均匀平面波的电场能量密度等于磁场能量密度。
- 电磁波的能量密度为 $w=w_e+w_m=\varepsilon E^2=\mu H^2$
- 电磁波的能流密度，方向与波的传播方向一致

$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}=\vec{e}_z(1/\eta)E^2$$

$$\vec{S}_{av}=\frac{1}{2}\text{Re}[\vec{E}\times\vec{H}^*]=\vec{e}_z(1/2\eta)|E|^2=\vec{e}_z\frac{1}{2}\varepsilon|E|^2\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=w_{av}\vec{v}$$

能量的传输速度等于相速

§ 5.1 理想介质中的均匀平面波

- 对于方程的通解$E_x = A_1 e^{-jkz} + A_2 e^{jkz}$第二项$E_{2x}(z) = A_2 e^{jkz} = E_{2xm} e^{j\phi'_x} e^{jkz}$，瞬时表达式为

$$E_{2x}(z,t) = E_{2xm}\cos(\omega t + kz + \phi'_x)$$

- 表示以相同传播速度沿 $-z$ 方向传播的波，分析方法一致。

§ 5.1 理想介质中的均匀平面波

小结：无界理想介质中均匀平面波的传播特性：

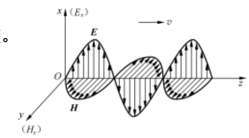
a. 电场、磁场和传播方向三者满足右手关系，在空间上互相垂直，是横电磁波；

b. 电场、磁场的振幅不随传播距离增加而衰减；

c. 波阻抗为实数，电场和磁场在时间上同相；

d. 电磁波的相速与频率无关；

e. 电场能量密度等于磁场能量密度。



§ 5.1 理想介质中的均匀平面波

例5.1.1 频率为100MHz的正弦均匀平面波在各向同性的均匀理想介质中沿+Z方向传播，介质的特性参数为ε_r=4, μ_r=1,σ =0。设电场沿x方向，$\vec{E} = \vec{e}_x E_x$。

已知：当t=0, z=1/8 m时，电场等于其振幅值10^{-4} V/m。

试求：

（1）波的传播速度、波长、波数；

（2）电场和磁场的瞬时表达式；

（3）坡印廷矢量和平均坡印廷矢量。

§ 5.1 理想介质中的均匀平面波

解：设电场强度的瞬时表示式为

$$\vec{E}(z,t) = \vec{e}_x E_x = \vec{e}_x 10^{-4}\cos(\omega t - kz + \phi)$$

式中

$$\omega = 2\pi f = 2\pi\times10^8 \quad \text{rad/s}$$

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r\mu_r} = \frac{2\pi\times10^8}{3\times10^8}\sqrt{4} = \frac{4}{3}\pi \quad \text{rad/m}$$

对于余弦函数，当相角为零时达振幅值。考虑条件t = 0、z =1/8 m 时，电场达到幅值，得

$$\phi = kz = \frac{4\pi}{3}\times\frac{1}{8} = \frac{\pi}{6}$$

§ 5.1 理想介质中的均匀平面波

所以

$$\vec{E}(z,t) = \vec{e}_x 10^{-4}\cos(2\pi\times10^8 t - \frac{4\pi}{3}z + \frac{\pi}{6})$$

$$= \vec{e}_x 10^{-4}\cos[2\pi\times10^8 t - \frac{4\pi}{3}(z - \frac{1}{8})] \quad \text{V/m}$$

磁场强度的瞬时表示式为

$$\vec{H} = \frac{1}{\eta}\vec{e}_z\times\vec{E} = \vec{e}_y\frac{1}{\eta}E_x$$

式中 $$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} = 60\pi \quad \Omega$$

因此 $$\vec{H}(z,t) = \vec{e}_y\frac{10^{-4}}{60\pi}\cos[2\pi\times10^8 t - \frac{4}{3}\pi(z - \frac{1}{8})] \quad \text{A/m}$$

练习1 均匀平面波的磁场振幅为$1/(3\pi)$A/m，以相位常数30 rad/m在空气中沿$-\vec{e}_z$方向传播，当t=0 和 z=0时，磁场方向为$-\vec{e}_y$，且达到最大。试写出电场和磁场的表示式，并求出频率和波长。

解：以余弦为基准，直接写出

$$\vec{H}(z,t) = -\vec{e}_y\frac{1}{3\pi}\cos(\omega t + kz) \quad \text{A/m}$$

$$\vec{E}(z,t) = \eta_0\vec{H}(z,t)\times(-\vec{e}_z) = \vec{e}_x 40\cos(\omega t + kz) \quad \text{V/m}$$

因k=30，故

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{30} = 0.21 \text{ m}, \quad f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3\times10^8}{\pi/15} = \frac{45}{\pi}\times10^8 = 1.43\times10^9 \text{ Hz}$$

则 $$\vec{H}(z,t) = -\vec{e}_y\frac{1}{3\pi}\cos(90\times10^8 t + 30z) \quad \text{A/m}$$

$$\vec{E}(z,t) = \vec{e}_x 40\cos(90\times10^8 t + 30z) \quad \text{V/m}$$

§ 5.1 理想介质中的均匀平面波

练习2 理想介质中均匀平面波的电场和磁场分别为

$$\vec{E}=\vec{e}_x 10\cos(6\pi\times10^7 t-0.8\pi z)\ \ V/m$$

$$\vec{H}=\vec{e}_y\frac{1}{6\pi}\cos(6\pi\times10^7 t-0.8\pi z)\ \ \mathrm{A/m}$$

1) 判断电波的传播方向；

2) 求介质的相对介电常数和相对磁导率。

§ 5.1 理想介质中的均匀平面波

四、沿任意方向传播的均匀平面波

- 上面所讨论的是沿坐标z方向传播的均匀平面波，其等相位面为z＝常数的平面，传播方向与等相位面垂直。
- 设一均匀平面波沿任意方向传播，且传播方向的单位矢量为$\vec{e}_n$。
- 定义波矢量，大小为相位常数k，方向为$\vec{e}_n$：

$$\vec{k}=\vec{e}_n k=\vec{e}_x k_x+\vec{e}_y k_y+\vec{e}_z k_z$$

1° 沿z方向传播的均匀平面波的波矢量为

$$\vec{k}=\vec{e}_z k$$

§ 5.1 理想介质中的均匀平面波

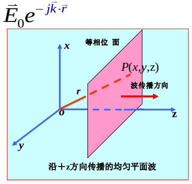
- 设空间任意点的矢径为$\vec{r}=\vec{e}_x x+\vec{e}_y y+\vec{e}_z z$

  则有 $kz=k\vec{e}_z\cdot\vec{r}=\vec{k}\cdot\vec{r}$
- 沿z方向传播的波的电场表示为

$$\vec{E}(z)=\vec{E}_0 e^{-jkz}=\vec{E}_0 e^{-jk\vec{e}_z\cdot\vec{r}}=\vec{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

即：沿z方向传播的均匀平面波的等相位面为

$$z=\vec{e}_z\cdot\vec{r}=const.$$



沿＋z方向传播的均匀平面波

§ 5.1 理想介质中的均匀平面波

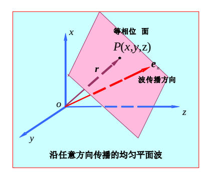
2° 对于沿$\vec{e}_n$方向传播的均匀平面波的等相位面为

$$\xi=\vec{e}_n\cdot\vec{r}=const.$$

- 场量的表示形式为

$$\vec{E}=\vec{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$\vec{H}=\frac{1}{\eta}\vec{e}_n\times\vec{E}$$



沿任意方向传播的均匀平面波

§ 5.1 理想介质中的均匀平面波

例5.1.4 频率为500kHz的均匀平面波，在无损媒质中传播。（媒质参数 $\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r$, $\mu=\mu_0$, $\sigma=0$）

已知振幅矢量为

$$\vec{E}_0=\vec{e}_x 2-\vec{e}_y+\vec{e}_z\quad \mathrm{kV/m}$$

$$\vec{H}_0=\vec{e}_x 6+\vec{e}_y 9-\vec{e}_z 3\ \ \mathrm{A/m}$$

求：传播方向$\vec{e}_n$，ε_r，λ

$$\vec{e}_n=\frac{1}{\sqrt{21}}\left(-e_x+2e_y+4e_z\right)$$

$$\eta=\frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}=\frac{10^3}{\sqrt{21}}\qquad \varepsilon_r\approx2.98\qquad \lambda\approx347.3$$

§ 5.1 理想介质中的均匀平面波

练习 在空气中传播的均匀平面波的磁场强度的复数表示式为：

$$\vec{H}=(-\vec{e}_x A+\vec{e}_y 2+\vec{e}_z 4)e^{-j(4\pi x+3\pi z)}$$

式中A为常数。求：

（1）波矢量；

（2）波长和频率；

（3）A的值；

（4）相伴电场的复数形式；

（5）平均坡印廷矢量。

解：（1）因为 $\vec{H}=\vec{H}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}\cdot\vec{r}}$，所以

$$\vec{H}_{\mathrm{m}}=-\vec{e}_x+\vec{e}_y2+\vec{e}_z4 \qquad \vec{k}\cdot\vec{r}=k_xx+k_yy+k_zz=4\pi x+3\pi z$$

则

$$k_x=4\pi \quad k_y=0 \quad k_z=3\pi \qquad \vec{k}=\vec{e}_x4\pi+\vec{e}_z3\pi$$

$$k=\sqrt{(3\pi)^2+(4\pi)^2}=5\pi$$

$$\vec{e}_{\mathrm{n}}=\frac{\vec{k}}{k}=\vec{e}_x\frac{4}{5}+\vec{e}_z\frac{3}{5}$$

(2) $\lambda=\dfrac{2\pi}{k}=\dfrac{2\pi}{5\pi}=\dfrac{2}{5}\ \mathrm{m} \qquad f=\dfrac{c}{\lambda}=\dfrac{3\times10^8}{2/5}=7.5\times10^8\ \mathrm{Hz}$

(3) $\vec{k}\cdot\vec{H}_{\mathrm{m}}=4\pi(-A)+0\times2+3\pi\times4=0 \Longrightarrow A=3$

(4)
$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r})&=\eta_0\vec{H}(\vec{r})\times\vec{e}_{\mathrm{n}}\\&=120\pi(-\vec{e}_x3+\vec{e}_y2+\vec{e}_z4)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi(4x+3z)}\times(\vec{e}_x\frac{4}{5}+\vec{e}_z\frac{3}{5})\\&=120\pi(\vec{e}_x1.2+\vec{e}_y5-\vec{e}_z1.6)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi(4x+3z)}\end{aligned}$$

(5)
$$\begin{aligned}\vec{S}_{\mathrm{av}}&=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\vec{E}\times\vec{H}^*]\\&=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{120\pi(\vec{e}_x1.2+\vec{e}_y5-\vec{e}_z1.6)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi(4x+3z)}\times[(-\vec{e}_x3+\vec{e}_y2+\vec{e}_z4)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi(4x+3z)}]^*\right\}\\&=12\pi\times29\times(\vec{e}_x4+\vec{e}_z3)\ \ \mathrm{W/m^2}\end{aligned}$$

§ 5.1 理想介质中的均匀平面波

提示:有关无界介质中的均匀平面波的习题是本门课程的一个重点，这方面的习题一般可以分为三个类型：

- 已知波和媒质的相关参数，要求写出电磁场的表达式，并计算波的平均功率流；
- 已知波的电场（或磁场）表达式，要求计算波和媒质的参数，并计算磁场（或电场）和平均功率流；
- 已知电场（或磁场）的部分表达式以及波和媒质的部分参数，要求写出完整表达式并计算其余参数。

§ 5.2 电磁波的极化

一、极化的概念

- 波的极化：在电磁波传播空间给定点处，电场强度矢量的端点随时间变化的轨迹。
- 极化的描述：用电场强度矢量终端端点在空间形成的轨迹表示。

  如：假定波沿 z 轴方向传播，如果电场只有x分量，电场强度的方向始终在x方向，称为x方向极化。
- 一般情况下，沿z轴方向传播的波，电场强度既有x分量，也有y分量，电场强度矢量的方向存在变化，$\vec{E}=\vec{e}_xE_x+\vec{e}_yE_y$。

$$E_x=E_{xm}\cos(\omega t-kz+\phi_x)\,,\quad E_y=E_{ym}\cos(\omega t-kz+\phi_y)$$

§ 5.2 电磁波的极化

$$E_x=E_{xm}\cos(\omega t-kz+\phi_x)\,,\quad E_y=E_{ym}\cos(\omega t-kz+\phi_y)$$

- 电场合成场强的终端轨迹，取决于x 和 y 分量的振幅、相位之间的关系，分为三种形式：线极化、圆极化、椭圆极化。
- 电磁波极化的应用，如：

  a.在雷达目标探测的技术中，利用目标对电磁波散射过程中改变极化的特性实现目标的识别。

  b.无线电技术中，利用天线发射和接收电磁波的极化特性，实现最佳无线电信号的发射和接收。

  c.在光学工程中利用材料对于不同极化波的传播特性设计光学偏振片等等。

§ 5.2 电磁波的极化

二、直线极化波

- 以z方向传播的均匀平面波为例，电场强度的x和y分量都存在，

$$\vec{E}=\vec{e}_xE_x+\vec{e}_yE_y$$

$$E_x=E_{xm}\cos(\omega t-kz+\phi_x)\,,$$

$$E_y=E_{ym}\cos(\omega t-kz+\phi_y)$$

取$z=0$的固定点讨论，则有

$$E_x(0,t)=E_{xm}\cos(\omega t+\phi_x)\,,$$

$$E_y(0,t)=E_{ym}\cos(\omega t+\phi_y)$$

§ 5.2 电磁波的极化

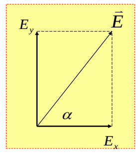
- 当$\varphi_x - \varphi_y = 0$或$\pi$

$$E_x = E_{xm}\cos(\omega t + \varphi_x)$$
$$E_y = \pm E_{ym}\cos(\omega t + \varphi_x)$$

则

$$|E| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{E_{xm}^2 + E_{ym}^2}\cos(\omega t + \varphi_x)$$

$$\tan\alpha = \frac{E_y}{E_x} = \frac{E_{ym}}{E_{xm}} = 常数$$



- 结论：合成电场的大小虽随时间变化，但方向没有变化，始终保持在一直线上。

  因此，当$\varphi_x - \varphi_y = 0$或$\pi$时，电磁波为线极化波。

§ 5.2 电磁波的极化

三、圆极化波

- 当$\varphi_x - \varphi_y = \pm\frac{\pi}{2}$且$E_{xm} = E_{ym}$时，

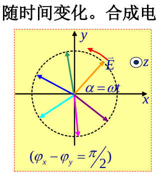
$$E_x = E_{xm}\cos(\omega t + \varphi_x)$$
$$E_y = E_{ym}\cos(\omega t + \varphi_x \mp \frac{\pi}{2}) = \pm E_{xm}\sin(\omega t + \varphi_x)$$
$$\vec{E} = \vec{e}_x E_x + \vec{e}_y E_y \ \Rightarrow |E| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = E_{xm}$$
$$\alpha = \arctan\frac{E_y}{E_x} = \begin{cases} \omega t + \varphi_x & (\varphi_x - \varphi_y = +\pi/2) \\ -\omega t - \varphi_x & (\varphi_x - \varphi_y = -\pi/2) \end{cases}$$

§ 5.2 电磁波的极化

- 有：合成电场的大小不随时间变化，但方向却随时间变化。合成电场的矢端在一圆上并以角速度 ω旋转。

  因此，称为圆极化波。

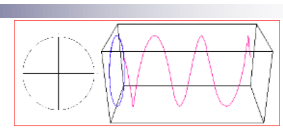
- 如图，当$\varphi_x - \varphi_y = \pi/2$时，可以判断出：电场矢量终端运动方向与电磁波传播方向满足右手螺旋关系—右旋极化波。



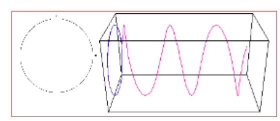
- 同理，当 $\varphi_x - \varphi_y = -\pi/2$时，可以判断为左旋极化波。

§ 5.2 电磁波的极化

- 右旋圆极化波



- 左旋圆极化波



§ 5.2 电磁波的极化

电场矢量的旋转方向

- 如果我们面向电磁波传去的方向，电场矢量是顺时针方向旋转的，这种波的极化称为右旋圆（椭圆）极化波；如果电场矢量是逆时针旋转，则称为左旋圆（椭圆）极化波。

- 也可用右手螺旋法则来判定。拇指指向电磁波的传播方向，右手的四指随电场的矢端运动，则为右旋极化波；反之，则为左旋极化波。

§ 5.2 电磁波的极化

四、椭圆极化波（一般情形）

- 电场两个分量之间,振幅和相位都不等，$E_{xm} \neq E_{ym}$，$\varphi_x - \varphi_y = \varphi$。简单起见，$\varphi_x = 0$，$\varphi_y = -\varphi$：

$$E_x = E_{xm}\cos(\omega t)$$
$$E_y = E_{ym}\cos(\omega t - \varphi)$$

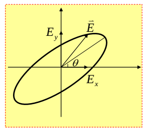
- 消去t $\Rightarrow (\frac{E_y}{E_{ym}})^2 + (\frac{E_x}{E_{xm}})^2 - 2\frac{E_x}{E_{xm}}\cdot\frac{E_y}{E_{ym}}\cos\varphi = \sin^2\varphi$

- 为一椭圆方程。

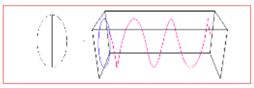
§ 5.2 电磁波的极化

- 椭圆的长轴与x轴的夹角θ由下式决定：

$$\tan 2\theta = \frac{2E_{xm}E_{ym}}{E_{xm}^{\ 2} - E_{ym}^{\ 2}}\cos\varphi$$



- 合成波电场的大小和方向都随时间改变，其端点在一个椭圆上旋转，称为椭圆极化波。
- 直线极化和圆极化是椭圆极化的特例。



§ 5.2 电磁波的极化

- 电磁波的极化状态取决于E_x和E_y的振幅E_{xm}、E_{ym}和相位差$\Delta\varphi=\varphi_y-\varphi_x$
- 对于沿+z方向传播的均匀平面波：
  - 线极化：$\Delta\varphi=0$、$\pm\pi$。

    $\Delta\varphi=0$，在1、3象限；$\Delta\varphi=\pm\pi$，在2、4象限。
  - 圆极化：$\Delta\varphi=\pm\pi/2$，$E_{xm}=E_{ym}$。

    取“+”，左旋圆极化；取“－”，右旋圆极化。
  - 椭圆极化：其它情况。

    $0<\Delta\varphi<\pi$，左旋；$-\pi<\Delta\varphi<0$，右旋。

§ 5.2 电磁波的极化

练习 根据电场表示式判断它们所表征的波的极化形式。

(1) $\vec{E}(z)=\vec{e}_x jE_m e^{jkz}+\vec{e}_y jE_m e^{jkz}$

(2) $\vec{E}(z,t)=\vec{e}_x E_m\sin(\omega t-kz)+\vec{e}_y E_m\cos(\omega t-kz)$

(3) $\vec{E}(z,t)=\vec{e}_x E_m\sin(\omega t+kz)+\vec{e}_y E_m\cos(\omega t+kz)$

(4) $\vec{E}(z)=\vec{e}_x E_m e^{-jkz}-\vec{e}_y jE_m e^{-jkz}$

(5) $\vec{E}(z,t)=\vec{e}_x E_m\sin(\omega t-kz)+\vec{e}_y E_m\cos(\omega t-kz+40^\circ)$

§ 5.2 电磁波的极化

（1）E_x分量和E_y分量的初相位都是90°，即同向。故表征线极化波，传播方向为-z。

（2）振幅相等，相位差90°。E_x的相位滞后于E_y 90°，而波的传播方向为+z方向，故表征左旋圆极化波。

（3）右旋圆极化波

（4）右旋圆极化波

（5）振幅相等，传播方向+z方向。E_x初相位为-90°，E_y的初相位为40°，故表征一个左旋椭圆极化波。

§ 5.2 电磁波的极化

例5.2.2 已知一线极化波的电场为：

$$\vec{E}(z)=\vec{e}_x E_m e^{-jkz}+\vec{e}_y E_m e^{-jkz}$$

试将其分解为两个振幅相等、旋向相反的圆极化波。

解：设两个振幅相等、旋向相反的圆极化波为：

$$\vec{E}_1(z)=\left(\vec{e}_x+j\vec{e}_y\right)E_{1m}e^{-jkz}\quad \vec{E}_2(z)=\left(\vec{e}_x-j\vec{e}_y\right)E_{2m}e^{-jkz}$$

且$E_1(z)+E_2(z)=E(z)$。其中E_{1m}和E_{2m}为待定常数。解得

$$E_{1m}=\frac{E_m}{2}(1-j)=\frac{E_m}{\sqrt{2}}e^{-j\pi/4}\quad E_{2m}=\frac{E_m}{2}(1+j)=\frac{E_m}{\sqrt{2}}e^{j\pi/4}$$

§ 5.4 色散与群速

一、相速

- 波的恒定相位点推进的速度，称为相速。

$$v_p=\frac{\omega}{\beta}$$

1.在理想介质中，相速是一个与频率无关的常数：

$$v_p=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

2.在损耗媒质中，不同频率的波将以不同的相速传播，产生色散现象。

$$v_p=\frac{\omega}{\beta}=\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}+1\right)}$$

§ 5.4 色散与群速

二、群速

- 信号能量传播的速度，称为群速。单一频率正弦波不能携带信息，调制波才携带信号，因此，调制波传播的速度才是信号传递的速度。
  假设有两个振幅相等，频率不一样的行波，在损耗媒质中的相位常数不一样，有：

$$(\Delta\omega << \omega)$$

$$\begin{cases} \Psi_1 = A_m e^{j(\omega+\Delta\omega)t} e^{-j(\beta+\Delta\beta)z} = A_m e^{j(\omega t-\beta z)} e^{j(\Delta\omega t-\Delta\beta z)} \\ \Psi_2 = A_m e^{j(\omega-\Delta\omega)t} e^{-j(\beta-\Delta\beta)z} = A_m e^{j(\omega t-\beta z)} e^{-j(\Delta\omega t-\Delta\beta z)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = 2A_m \cos(\Delta\omega t - \Delta\beta z) e^{-j(\omega t-\beta z)}$$

§ 5.4 色散与群速

- 合成波为调制波，

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = 2A_m \cos(\Delta\omega t - \Delta\beta z) e^{-j(\omega t-\beta z)}$$

- 其振幅是受调制的，称为包络波。
- 包络上某一恒定相位点推进的速度，定义为群速。

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta}$$

$$\Delta\omega << \omega, \qquad v_g = \frac{d\omega}{d\beta}$$

§ 5.4 色散与群速

三、群速和相速之间的关系

$$v_g = \frac{v_p}{1 - \frac{\omega}{v_p}\frac{dv_p}{d\omega}}$$

a. $dv_p/d\omega = 0$，相速与频率无关时，$v_g = v_p$，称为无色散；

b. $dv_p/d\omega < 0$， $v_g < v_p$ ，称为正常色散；

c. $dv_p/d\omega > 0$， $v_g > v_p$ ，称为反常色散。