习题课（总复习）

第二章

2.3、半径为 R_0 的球面上均匀分布着电荷，总电量为 Q。当球以角速度 ω 绕某一直径（z 轴）旋转时，求其表面上的面电流密度。

解：面电荷密度为

$$\rho_s = \frac{Q}{4\pi R_0^2}$$

面电流密度为

$$\begin{aligned} j_s &= \rho_s \cdot \upsilon \\ &= \rho_s \omega R_0 \sin\theta \\ &= \frac{Q}{4\pi R_0^2}\omega R_0 \sin\theta \\ &= \frac{Q\omega \sin\theta}{4\pi R_0} \end{aligned}$$

2.4　均匀密绕的螺旋管可等效为圆柱形面电流 $\vec{J}_s = \hat{e}_\varphi J_{s0}$。已知导线的直径为 d，导线中电流为 I_0，求 J_{s0}。

解：每根导线的体电流密度为

$$j = \frac{I_0}{\pi(d/2)^2} = \frac{4I_0}{\pi d^2}$$

由于导线是均匀密绕，则根据定义面电流密度为

$$j_s = jd = \frac{4I_0}{\pi d}$$

因此，等效面电流密度为

$$\vec{j}_s = \hat{e}_\varphi \frac{4I_0}{\pi d}$$

2.6　两个带电量分别为 q_0 和 $2q_0$ 的点电荷相距为 d，另有一带电量为 q_0 的点电荷位于其间，为使中间的点电荷处于平衡状态，试求其位置。当中间的点电荷带电量为 $-q_0$ 时，结果又如何？

解：设实验电荷 q_0 离 $2q_0$ 为 x，那么离 q_0 为 $d-x$。

由库仑定律，实验电荷受 $2q_0$ 的排斥力为

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{2q_0}{x^2}$$

实验电荷受 q_0 的排斥力为

$$F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_0}{(d-x)^2}$$

要使实验电荷保持平衡， $F_1 = F_2$，那么

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{2q_0}{x^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_0}{(d-x)^2}$$

即得到

$$x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}d = 0.585d$$

如果实验电荷为$-q_0$，那么平衡位置仍然为

$$x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}d = 0.585d$$

只是这时实验电荷与q_0和$2q_0$不是排斥力，而是吸引力。

第四章

例题：

例 4.5.1 将下列场矢量的瞬时值形式写为复数形式。

（1） $\vec{E}(z,t)=\hat{e}_x E_{xm}\cos(\omega t-kz+\phi_x)+e_y E_{ym}\sin(\omega t-kz+\phi_x)$

（2） $\vec{H}(x,z,t)=\hat{e}_x H_0 k(\frac{a}{\pi})\sin(\frac{\pi x}{a})\sin(kz-\omega t)+e_z H_0\cos(\frac{\pi x}{a})\cos(kz-\omega t)$

解：（1）由于

$$\vec{E}(z,t)=\hat{e}_x E_{xm}\cos(\omega t-kz+\phi_x)+e_y E_{ym}\cos(\omega t-kz+\phi_y-\frac{\pi}{2})$$
$$=\mathrm{Re}\left[\hat{e}_x E_{xm}e^{j(\omega t-kz+\phi_x)}+e_y E_{ym}e^{j(\omega t-kz+\phi_y-\frac{\pi}{2})}\right]$$

电场强度的复矢量为

$$\dot{\vec{E}}(z)=\hat{e}_x E_{xm}e^{j(-kz+\phi_x)}+e_y E_{ym}e^{j(-kz+\phi_y-\frac{\pi}{2})}$$
$$=(\hat{e}_x E_{xm}e^{j\phi_x}-e_y jE_{ym}e^{j\phi_y})e^{-jkz}$$

（2）因为 $\cos(kz-\omega t)=\cos(\omega t-kz)$

$$\sin(kz-\omega t)=\cos(\omega t-kz-\frac{\pi}{2})=\cos(\omega t-kz+\frac{\pi}{2})$$

所以

$$\vec{H}_m(x,z)=\hat{e}_x H_0 k(\frac{a}{\pi})\sin(\frac{\pi x}{a})e^{-jkz+j\pi/2}+e_z H_0\cos(\frac{\pi x}{a})e^{-jkz}$$

例 4.5.2 已知电场强度复矢量 $\dot{\vec{E}}(z)=\hat{e}_x jE_{ym}\cos(k_z z)$，其中 E_{xm} 和 k_z 为实常数。写出电场强度的瞬时矢量。

解：

电场强度的瞬时矢量

$$\vec{E}(z,t)=\mathrm{Re}\left[\hat{e}_x jE_{xm}\cos(k_z z)e^{j\omega t}\right]$$
$$=\mathrm{Re}\,\hat{e}_x\left[e_x E_{xm}\cos(k_z z)e^{j(\omega t+\frac{\pi}{2})}\right]$$
$$=\hat{e}_x E_{xm}\cos(k_z z)\cos(\omega t+\frac{\pi}{2})$$

例 4.5.4 在无源（$\rho=0$、$\vec{J}=0$）的自由空间，已知电磁场的电场强度复矢量

$\dot{\vec{E}}(z)=\hat{e}_y E_0 e^{-jkz}\quad V/m$，式中 k 和 E_0 为常数。求

（1）磁场强度复矢量 $\vec{H}(z)$；

（2）瞬时坡印廷矢量 $\vec{S}$；

（3）平均坡印廷矢量 $\vec{S}_{av}$。

解：（1）由 $\nabla\times\vec{E}=-j\omega\mu_0\vec{H}$，得

$$\vec{H}(z)=-\frac{1}{j\omega\mu_0}\nabla\times\vec{E}=-\frac{1}{j\omega\mu_0}\hat{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\times e_y E_0 e^{-jkz}=-e_x\frac{kE_0}{\omega\mu_0}e^{-jkz}$$

（2）电场、磁场的瞬时值为

$$\vec{E}(z,t)=\mathrm{Re}\left[E(z)e^{j\omega t}\right]=\hat{e}_y E_0\cos(\omega t-kz)$$

$$\vec{H}(z,t)=\mathrm{Re}\left[E(z)e^{j\omega t}\right]=-\hat{e}_x\frac{kE_0}{\omega\mu_0}\cos(\omega t-kz)$$

所以，瞬时坡印廷矢量 $\vec{S}$ 为

$$\vec{S}=(\vec{E}\times\vec{H})=\hat{e}_y E_0\cos(\omega t-kz)\times\left[-e_x\frac{kE_0}{\omega\mu_0}\cos(\omega t-kz)\right]$$

$$=\hat{e}_z\frac{kE_0}{\omega\mu_0}\cos^2(\omega t-kz)$$

（3）平均坡印廷矢量

$$\vec{S}_{av}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\hat{e}_y E_0 e^{-jkz}\times\left(-e_x\frac{kE_0}{\omega\mu_0}e^{-jkz}\right)^*\right]$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\hat{e}_z\frac{kE_0^2}{\omega\mu_0}\right]=e_z\frac{kE_0^2}{2\omega\mu_0}$$

$$\vec{S}_{av}=\frac{2\pi}{\omega}\int_0^{\omega/2\pi}\left[\hat{e}_z\frac{kE_0^2}{\omega\mu_0}\cos^2(\omega t-kz)\right]dt$$

$$=\hat{e}_z\frac{kE_0^2}{2\omega\mu_0}$$

习题

4.2 在无损耗的线性、各向同性媒质中，电场强度 $\vec{E}(\vec{r})$ 的波动方程为

$\nabla^2\vec{E}(\vec{r})+\omega^2\mu\varepsilon\vec{E}(\vec{r})=0$

已知矢量函数 $\vec{E}(\vec{r})=\vec{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$，其中 $\vec{E}_0$ 和 $\vec{k}$ 是常矢量。证明 $\vec{E}(\vec{r})$ 满足波动方程的条件是 $k^2=\omega^2\mu\varepsilon$， 这里 $k=\left|\vec{k}\right|$。

证： 在直角坐标系中，$\hat{r}=e_x x+e_y y+e_z z$ 设，$\hat{k}=\hat{e}_x k_x+e_y k_y+e_z k_z$ 则，

$$\hat{k}\cdot\hat{r}=\left(\hat{e}_x k_x+e_y k_y+e_z k_z\right)\cdot\left(e_x x+e_y y+e_z z\right)=k_x x+k_y y+k_z z$$ 故

$$\vec{E}(\vec{r})=E_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}=E_0 e^{-j\left(k_x x+k_y y+k_z z\right)}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2\vec{E}(\vec{r})&=E_0\nabla^2 e^{-j\left(k_x x+k_y y+k_z z\right)}\\&=E_0\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)e^{-j\left(k_x x+k_y y+k_z z\right)}\\&=\left(-k_x^2-k_y^2-k_{xz}^2\right)E_0 e^{-j\left(k_x x+k_y y+k_z z\right)}\\&=-k^2\vec{E}(\vec{r})\end{aligned}$$

代入方程 $\nabla^2\vec{E}(\vec{r})+\omega^2\mu\varepsilon\vec{E}(\vec{r})=0$， 得

$$-k^2\vec{E}+\omega^2\mu\varepsilon\vec{E}=0$$

故

$$k^2=\omega^2\mu\varepsilon$$

习题 4.5 证明： 在有电荷密度 ρ 和电流密度 $\vec{J}$ 的均匀无损耗媒质中，电场强度 $\vec{E}$ 和磁场强度 $\vec{H}$ 满足波动方程为

$$\nabla^2\vec{E}-\mu\omega\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\mu\frac{\partial\vec{J}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right)$$

$$\nabla^2\vec{H}-\mu\omega\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=-\nabla\times\vec{J}$$

证 在有电荷密度 ρ 和电流密度 $\vec{J}$ 的均匀无损耗媒质中，麦克斯韦方程组为

$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\varepsilon\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ （1）

$\nabla\times\vec{E}=-\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$ （2）

$\nabla\bullet\vec{H}=0$ （3）

$\nabla\bullet\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}$ （4）

对式（1）两边取旋度，得

$$\nabla\times\nabla\times\vec{H}=\nabla\times\vec{J}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\vec{E}\right)$$

而

$$\nabla\times\nabla\times\vec{H}=\nabla\left(\nabla\bullet\vec{H}\right)-\nabla^2\vec{H}$$

故

$$\nabla\left(\nabla\bullet\vec{H}\right)-\nabla^2\vec{H}=\nabla\times\vec{J}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\vec{E}\right) \quad (5)$$

将式（2）和式（3）代入式（5），得

$$\nabla^2\vec{H}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=-\nabla\times\vec{J}$$

这就是$\vec{H}$的波动方程，是二阶非齐次方程。

同样，对式（2）两边取旋度，得

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E}=-\mu\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{H})$$

即

$$\nabla\bullet\left(\nabla\bullet\vec{E}\right)-\nabla^2\vec{E}=-\mu\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{H})$$

将式（1）和式（4）代入式（6），得

$$\nabla^2\vec{E}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2}=\mu\frac{\partial\vec{J}}{\partial t}+\frac{1}{\varepsilon}\nabla\rho$$

此即$\vec{E}$满足的波动方程。

习题 4.14 设电场强度和磁场强度分别为

$\vec{E}=\vec{E}_0\cos\left(\omega t+\psi_e\right)$； $\vec{H}=\vec{H}_0\cos\left(\omega t+\psi_m\right)$

证明其坡印廷矢量的平均值为

$$\vec{S}_{av} = \frac{1}{2}\vec{E}_0 \times \vec{H}_0 \cos\left(\psi_e - \psi_m\right)$$

证 坡印廷矢量的瞬时值为

$$\begin{aligned}\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} &= \vec{E}_0 \cos\left(\omega t+\psi_e\right)\times\vec{H}_0\cos\left(\omega t+\psi_m\right)\\ &= \frac{1}{2}\vec{E}_0\times\vec{H}_0\left[\cos\left(\omega t+\psi_e+\omega t+\psi_m\right)\right]+\mathrm{c}\,m\,\mathrm{os}\left(\omega t+\psi_e-\omega t-\psi_m\right)\\ &= \frac{1}{2}\vec{E}_0\times\vec{H}_0\left[\cos\left(2\omega t+\psi_e+\psi_m\right)+\cos\left(\psi_e-\psi_m\right)\right]\end{aligned}$$

故平均坡印廷矢量为

$$\begin{aligned}\vec{S}_{av} &= \frac{1}{T}\vec{S}\int_0^T \vec{S}dt\\ &= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\vec{E}_0\times\vec{H}_0\left[\cos\left(2\omega t+\psi_e+\psi_e\right)+\cos\left(\psi_e-\psi_m\right)\right]dt\\ &= \frac{1}{2}\vec{E}_0\times\vec{H}_0\cos\left(\psi_e-\psi_m\right)\end{aligned}$$

第五章

例题：

例 5.1.1 频率为 100MHz 的均匀平面波，在一无耗媒质中沿+z 方向传播，其电场 $\vec{E} = \hat{e}_x E_x$。已知该媒质的相对介电常数 $\varepsilon_r = 4$、相对磁导率 $\mu_r = 1$，且当 t=0，z=1/8m 时，电场幅值为 $10^{-4} V/m$。（1）求 $\vec{E}$ 的瞬时表达式；（2）求 $\vec{H}$ 的瞬时表达式。

解：（1）设 $\vec{E}$ 的瞬时表达式为

$$\vec{E}(z,t) = \hat{e}_x E_x = \hat{e}_x 10^{-4} \cos(\omega t - kz + \phi)$$

式中

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 10^8 rad/s$$

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r \mu_r} = \frac{2\pi \times 10^8}{3 \times 10^8}\sqrt{4} = \frac{4}{3}\pi rad/m$$

对于余弦函数，当相角为零时达振幅值。因此，考虑条件 t=0、z=1/8 时电场达到幅值，有

$$\phi = kz = \frac{4\pi}{3} \times \frac{1}{8} = \frac{\pi}{6}$$

所以

$$\vec{E}(z,t) = \hat{e}_x 10^{-4}\cos(2\pi \times 10^8 t - \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{6})$$

$$= \hat{e}_x 10^{-4}\cos\left[2\pi \times 10^8 t - \frac{4\pi}{3}(z - \frac{1}{8})\right] V/m$$

（2）$\vec{H}$ 的瞬时表达式为

$$\vec{H} = \hat{e}_y H_y = \hat{e}_y \frac{1}{\eta} E_x$$

式中

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = 60\pi\ \Omega$$

因此

$$\vec{H}(z,t) = \hat{e}_y \hat{e}_y \frac{10^{-4}}{60\pi}\cos\left[2\pi\times 10^8 t - \frac{4}{3}\pi\left(z-\frac{1}{8}\right)\right] A/m$$

例 5.1.4 频率 $f = 500kHz$ 的均匀平面波，在 $\mu = \mu_0$、$\varepsilon = \varepsilon_0$、$\sigma = 0$ 的无损耗媒质中传播。已知 $\vec{E}_m = \hat{e}_x 2 - \hat{e}_y + \hat{e}_z kV/m$、$\vec{H}_m = \hat{e}_x 6 - \hat{e}_y 9 + \hat{e}_z 3A/m$。求

（1）传播方向 $\hat{e}_n$；

（2）ε_r 和 λ。

解：

（1）$\hat{e}_n = \hat{e}_E \times \hat{e}_H = \dfrac{\vec{E}_m \times \vec{H}_m}{|\vec{E}_m||\vec{H}_m|} = \dfrac{1}{\sqrt{21}}(\ )\ \hat{e}_x + \hat{e}_y 2 + \hat{e}_z 4$

（2）由 $\eta = \dfrac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \dfrac{|\vec{E}_m|}{|\vec{H}_m|} = \dfrac{10^3}{\sqrt{21}}$，得到

$$\varepsilon_r = \frac{21\eta_0^2}{10^6} = 2.98$$

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} = 0.58\frac{V_0}{f} = 347.3m$$

例 5.2.1 判别下列均匀平面波的极化形式：

（1）$\vec{E}(z,t) = \hat{e}_x E_m \sin(\omega t - kz - \frac{\pi}{4}) + \hat{e}_y E_m \cos(\omega t - kz + \frac{\pi}{4})$

（2）$\vec{E}(z) = \hat{e}_x jE_m e^{jkz} - \hat{e}_y E_m e^{jkz}$

（3）$\vec{E}(z,t) = \hat{e}_x E_m \cos(\omega t - kz) + \hat{e}_y E_m \sin(\omega t - kz + \frac{\pi}{4})$

解：（1）由于

$$\begin{aligned} E_x(z,t) &= E_m \sin(\omega t - kz - \frac{\pi}{4}) \\ &= E_m \cos(\omega t - kz - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}) \\ &= E_m \cos(\omega t - kz - \frac{3\pi}{4}) \end{aligned}$$

所以

$$\phi_y - \phi_x = \frac{\pi}{4} - (-\frac{3\pi}{4}) = \pi$$

这是一个线极化波，合成波电场与 x 轴的夹角为

$$\alpha = \arctan\left(\frac{E_y}{E_x}\right) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

（2）由于 $E_x = \mathrm{Re}[jE_m e^{jkz} e^{j\omega t}] = E_m \cos\left(\omega t + kz + \frac{\pi}{2}\right)$

$$E_y = \mathrm{Re}[-E_m e^{jkz} e^{j\omega t}] = E_m \cos\left(\omega t + kz + \pi\right)$$

所以

$$\phi_y - \phi_x = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

此波的传播方向为-z 轴方向，与图 5.2.2 所示的圆极化波的传播方向相反，故应为右旋圆极化波。

（3）由于 $E_y(z,t) = E_m \sin(\omega t - kz + \frac{\pi}{4}) = E_m \cos(\omega t - kz - \frac{\pi}{4})$

所以

$$\phi_y - \phi_x = -\frac{\pi}{4}$$

此波沿+z 轴方向传播，故应为右旋椭圆极化波。

例题：

5.1 在自由空间中，已知电场 $\vec{E}(z,t) = \hat{e}_y 10^3 \sin(\omega t - \beta z) V/m$，试求磁场强度 $\vec{H}(z,t)$。

解 以余弦为基准，重新写出已知的电场表达式

$$\vec{E}(z,t) = \hat{e}_y 10^3 \cos(\omega t - \beta z - \frac{\pi}{2}) V/m$$

这是一个沿+z 轴方向传播的均匀平面电场，其初相位为 -90°，与之相伴的磁场为

$$\vec{H}(z,t)=\frac{1}{\eta_0}\hat{e}_z\times\vec{E}(z,t)$$
$$=\frac{1}{\eta_0}\hat{e}_z\times e_y10^3\cos(\omega t-\beta z-\frac{\pi}{2})$$
$$=-\hat{e}_x\frac{10^3}{120\pi}\cos(\omega t-\beta z-\frac{\pi}{2})$$
$$=-\hat{e}_x2\cdot65\sin(\omega t-\beta z)A/m$$

5.3 在空气中，沿 $\hat{e}_y$ 方向传播的均匀平面波的频率 $f=400MHz$。当 $y=0.5m$、$t=0.2ns$ 时，电场强度 $\vec{E}$ 的最大值为 250V/m，表征其方向的单位矢量为 $\hat{e}_x0.6-e_z0.8$。试求出电场 $\vec{E}$ 和磁场 $\vec{H}$ 的瞬时表达式。

解 沿 $\hat{e}_y$ 方向传播的均匀平面波的电场强度的一般表达式为

$$\vec{E}(y,t)=\vec{E}_m\cos(\omega t-ky+\phi)$$

根据本题所给条件可知，式中各参数为

$$\omega=2\pi f=8\pi\times10^8rad/s$$

$$k=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=\frac{\omega}{c}=\frac{8\pi\times10^8}{3\times10^8}rad/m=\frac{8\pi}{3}rad/m$$

$$\vec{E}_m=250(\hat{e}_x0.6-e_z0.8)V/m$$

由于 $y=0.5m$、$t=0.2ns$ 时，$\vec{E}$ 达到最大值，即

$$\vec{E}_m\cos(8\pi\times10^8\times0.2\times10^9-\frac{8\pi}{3}\times\frac{1}{2}+\phi)=\vec{E}_m$$

于是得到

$$\phi=\frac{4\pi}{3}-\frac{4\pi}{25}=\frac{88\pi}{75}$$

故

$$\vec{E}=(\hat{e}_x150-e_z200)\cos\left(8\pi\times10^8t-\frac{8\pi}{3}y+\frac{88\pi}{75}\right)V/m$$

$$\vec{H}=\frac{1}{\eta_0}\hat{e}_y\times\vec{E}=-(e_x\frac{5}{3\pi}+e_z\frac{5}{4\pi})\cos\left(8\pi\times10^8t-\frac{8\pi}{3}y+\frac{88\pi}{75}\right)A/m$$

5.4 有一均匀平面波在 $\mu=\mu_0$、$\varepsilon=4\varepsilon_0$ $\sigma=0$ 的媒质中传播，其电场强度

$E = E_m \sin\left(\omega t - kz + \dfrac{\pi}{3}\right)$。若已知平面波的频率 $f = 150MHz$，平均功率密度为 $0.265\mu W/m^2$。试求：

（1）电磁波的波数、相速、波长和波阻抗；

（2）$t=0$、$z=0$ 时的电场 $E(0,0)$ 值；

（3）经过 $t = 0.1\mu s$ 后，电场 $E(0,0)$ 出现在什么位置？

解 （1）由 $\vec{E}$ 的表达式可看出这是沿+z 方向传播的均匀平面波，其波数为

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = 2\pi f\sqrt{4\varepsilon_0\mu_0} = 2\pi\times150\times10^6\sqrt{4\varepsilon_0\mu_0}$$
$$= 2\pi\times150\times10^6\times2\times\frac{1}{3\times10^8}$$
$$= 2\pi rad/m$$

相速为

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{4\mu_0\varepsilon_0}} = 1.5\times10^8 m/s$$

波长为

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 1m$$

波阻抗为

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{4\varepsilon_0}} = 60\pi\Omega \approx 188.5\Omega$$

（2）平均坡印廷矢量为

$$S_{av} = \frac{1}{2\eta}E_m^2 = 0.265\times10^{-6}W/m^2$$

故得

$$E_m = \left(2\eta\times0.265\times10^{-6}\right)^{1/2} W/m^2 \approx 10^{-2}V/m$$

因此

$$E(0,0) = E_m\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 8.66\times10^{-3}V/m$$

（3）随着时间 t 的增加，波将沿+z 方向传播，当 $t = 0.1\mu s$ 时，电场为

$$E = 10^{-2}\sin(2\pi ft - kz + \frac{\pi}{3})$$

$$=10^{-2}\sin(2\pi\times150\times10^{6}\times0.1\times10^{-6}-2\pi z+\frac{\pi}{3})$$

$$=8.66\times10^{-3}$$

得

$$\sin(30\pi-2\pi z+\frac{\pi}{3})=0.866$$

即

$$30\pi-2\pi z+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$$

则

$$z=15m$$

5.5 理想介质中的均匀平面波的电场和磁场分别为

$$\vec{E}=\hat{e}_x10\cos(6\pi\times10^{7}t-0.8\pi z)V/m$$

$$\vec{H}=\hat{e}_y\frac{1}{6\pi}\cos(6\pi\times10^{7}t-0.8\pi z)A/m$$

试求该介质的相对磁导率 μ_r 和相对介电常数 ε_r。

解：由给出的 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 的表达式可知，它表征沿+z 方向传播的均匀平面波，其相关参数为

角频率 $\omega=6\pi\times10^{7}rad/s$

波数 $k=0.8\pi rad/m$

波阻抗 $\eta=\frac{E}{H}=\frac{10}{\frac{1}{6\pi}}\Omega=60\pi\Omega$

而

$$k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}=\omega\sqrt{\mu_r\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0}=\frac{\omega}{c}\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}=0.8\pi rad/m \qquad (1)$$

$$\eta=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}=\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=60\pi\Omega$$

（2）

联立解方程式（1）和（2），得

$$\mu_r=2,\varepsilon_r=8$$

5.6 在自由空间传播的均匀平面波的电场强度复矢量为

$$\vec{E}=\hat{e}_x10^{-4}e^{-j20\pi z}+e_y10^{-4}e^{-j(20\pi z-\frac{\pi}{2})}V/m$$

试求：（1）平面波的传播方向和频率；

（2）波的极化方式；

（3）磁场强度 $\vec{H}$；

（4）流过沿传播方向单位面积的平均功率。

解 （1）传播方向为 $\hat{e}_z$

由题意之 $k = 20\pi = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$，故

$$\omega = \frac{20\pi}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = 6\pi\times10^9 rad/s$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 3\times10^9 Hz = 3GHz$$

(2)原电场可表示为

$$\vec{E} = \left(\hat{e}_x + je_y\right)10^{-4}e^{-j20\pi z}$$

是左旋圆极化波。

（3）由

$$\vec{H} = \frac{1}{\eta_0}\hat{e}_z\times\vec{E}$$

得

$$\vec{H} = \frac{10^{-4}}{120\pi}(\hat{e}_y - je_x)e^{-j20\pi z}$$

$$= -\hat{e}_x 2.65\times10^{-7}e^{-j(20\pi z-\frac{\pi}{2})} + e_y 2.65\times10^{-7}e^{-j20\pi z}$$

（4） $$\vec{S}_{av} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{E}\times\vec{H}^*\right]$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{[\hat{e}_x 10^{-4}e^{-j20\pi z} + e_y 10^{-4}e^{-j(20\pi z-\frac{\pi}{2})}]\times$$

$$[\hat{e}_y 2.65\times10^{-7}e^{-j20\pi z} - e_x 2.65\times10^{-7}e^{-j(20\pi z-\frac{\pi}{2})}]\}$$

$$= \hat{e}_z 2.65\times10^{-11}W/m^2$$

即 $$P_{av} = 2.65\times10^{-11}W/m^2$$

5.7 在空气中，一均匀平面波的波长为 12cm，当该波进入某无损媒质中传播时，其波长减小为 8cm，且已知在媒质中的 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 的振幅分别为 50V/m 和 0.1A/m。试求该平面波的频率、媒质的相对磁导率和相对介电常数。

解 在自由空间中，波的相速 $v_p = c = 3\times10^8 m/s$，故波的频率为

$$f=\frac{v_p}{\lambda_0}=\frac{c}{\lambda_0}=\frac{3\times10^8}{12\times10^{-2}}Hz=2.5\times10^9Hz$$

在无损耗媒质中，波的相速为

$$v_p=f\lambda=2.5\times10^9\times8\times10^{-2}m/s=2\times10^8m/s$$

又

$$v_p=\frac{1}{\sqrt{\mu_r\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0}}=\frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}$$

故

$$\mu_r\varepsilon_r=\left(\frac{c}{v_p}\right)^2=\frac{9}{4}$$

（1）

无损耗媒质中的波阻抗为

$$\eta=\frac{\vec{E}}{\vec{H}}=\frac{E_m}{H_m}=\frac{50}{0.1}\Omega=500\Omega$$

又由于

$$\eta=\sqrt{\frac{\mu_r\mu_0}{\varepsilon_r\varepsilon_0}}=\eta_0\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}$$

故

$$\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}=\left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^2=\left(\frac{500}{377}\right)^2$$

（2）

联解式（1）和式（2），得

$$\mu_r=1.99,\varepsilon_r=1.13$$

5.8 在自由空间中，一均匀平面波的相位常数为 $\beta_0=0.524rad/m$，当该波进入到理想介质后，其相位常数变为 $\beta=1.81rad/m$。设该理想介质的 $\mu_r=1$，试求该理想介质的 ε_r 和波在该理想介质中的传播速度。

解　自由空间的相位常数

$$\beta_0=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$$

故

$$\omega=\frac{\beta_0}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=0.524\times3\times10^8Hz=1.572\times10^8rad/s$$

在理想电介质中，相位常数 $\beta=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0}=1.81rad/m$，故得到

$$\varepsilon_r=\frac{1.81^2}{\omega^2\mu_0\varepsilon_0}=11.93$$

电介质中的波速则为

$$v_p=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0}}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}=\frac{3\times10^8}{\sqrt{11.93}}m/s=0.87\times10^8m/s$$

5.9 在自由空间中，一均匀平面波的波长为 $\lambda_0=0.2m$，当该波进入到理想介质后，其波长变为 $\lambda=0.09m$。设该理想介质的 $\mu_r=1$，试求该理想介质的 ε_r 和波在该理想介质中的传播速度。

解 在自由空间，波的相速 $v_p=c=3\times10^8m/s$，故波的频率为

$$f=\frac{v_p}{\lambda_0}=\frac{3\times10^8}{0.2}Hz=1.5\times10^9Hz$$

在理想介质中，波长 $\lambda=0.09m$，故波的相速为

$$v_p=f\lambda=1.5\times10^9\times0.09m/s=1.35\times10^8m/s$$

另一方面

$$v_p=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0}}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

故

$$\varepsilon_r=\left(\frac{c}{v_p}\right)^2=\left(\frac{3\times10^8}{1.35\times10^8}\right)^2=4.94$$

5.10 均匀平面波的磁场强度 $\vec{H}$ 的振幅为 $\frac{1}{3\pi}A/m$，在自由空间沿 $-\hat{e}_z$ 方向传播，其相位常数 $\beta=30rad/m$。当 $t=0,z=0$ 时，$\vec{H}$ 在 $-\hat{e}_y$ 方向。

（1）写出 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 的表达式；

（2）求频率和波长。

解 以余弦为基准，按题意先写出磁场表达式

$$\vec{H}=-\hat{e}_y\frac{1}{3\pi}\cos(\omega t+\beta z)A/m$$

与之相伴的电场为

$$\vec{E}=\eta_0[\vec{H}\times(-\hat{e_z})]=120\pi\left[-e_y\frac{1}{3\pi}\cos(\omega t+\beta z)\times(-e_z)\right]$$

$$=\hat{e}_x 40\cos(\omega t+\beta z)V/m$$

由 $\beta=30rad/m$ 得波长 λ 和频率 f 分别为

$$\lambda=\frac{2\pi}{\beta}=0.21m$$

$$f=\frac{v_p}{\lambda}=\frac{c}{\lambda}=\frac{3\times10^8}{0.21}Hz=1.43\times10^9 Hz$$

$$\omega=2\pi f=2\pi\times1.43\times10^9 rad/s=9\times10^9 rad/s$$

则磁场和电场分别为

$$\vec{H}=-\hat{e}_y\frac{1}{3\pi}\cos(9\times10^9 t+30z)A/m$$

$$\vec{E}=\hat{e}_x 40\cos(9\times10^9 t+30z)V/m$$

5.11 在空气中，一均匀平面波沿 $\hat{e}_y$ 方向传播，其磁场强度的瞬时表达式为

$$\vec{H}(y,t)=\hat{e}_z 4\times10^{-6}\cos(10^7\pi t-\beta y+\frac{\pi}{7})$$

（1）求相位常数 β 和 $t=3ms$ 时， $H_z=0$ 的位置；

（2）求电场强度的瞬时表达式 $\vec{E}(y,t)$ 。

解 （1） $\beta=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=10^7\pi\times\frac{1}{3\times10^8}rad/m=\frac{\pi}{30}rad/m$

在 $t=3ms$ 时，欲使 $H_z=0$ ，则要求

$$\cos(10^7\pi\times3\times10^{-3}-\frac{\pi}{30}y+\frac{\pi}{4})=\cos(-\frac{\pi}{30}y+\frac{\pi}{4})=0$$

即

$$-\frac{\pi}{30}y+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+n\pi,n=0,1,2...$$

考虑到波长 $\lambda=\frac{2\pi}{\beta}=60m$ ，故 $t=3ms$ 时， $H_z=0$ 的位置为

$$y=22.5\pm n\frac{\lambda}{2}m,n=0,1,2...$$

（2）电场的瞬时表达式为

$$\vec{E}=(\vec{H}\times\hat{e}_y)\eta_0=\left[e_z 4\times10^{-6}\cos\left(10^7\pi t-\beta y+\frac{\pi}{4}\right)\times e_y\right]\times120\pi$$

$$=-\hat{e}_x 1.508\times10^{-3}\cos\left(10^7\pi t-\beta y+\frac{\pi}{4}\right)V/m$$

5.12 已知在自由空间传播的均匀平面波的磁场强度为

$$\vec{H}(z,t)=(\hat{e}_x+e_y)\times0.8\cos(6\pi\times10^8 t-2\pi z)A/m$$

（1）求该均匀平面波的频率、波长、相位常数、相速；

（2）求与 $\vec{H}(z,t)$ 相伴的电场强度 $\vec{E}(z,t)$；

（3）计算瞬时坡印廷矢量。

解 （1）从给定的磁场表达式，可以直接得出

频率 $f=\dfrac{\omega}{2\pi}=\dfrac{6\pi\times10^8}{2\pi}Hz=3\times10^8 Hz$

相位常数 $\beta=2\pi rad/m$

波长 $\lambda=\dfrac{2\pi}{\beta}=\dfrac{2\pi}{2\pi}m=1m$

相速 $v_p=\dfrac{\omega}{\beta}=\dfrac{6\pi\times10^8}{2\pi}m/s=3\times10^8 m/s$

（2）与 $\vec{H}(z,t)$ 相伴的电场强度

$$\vec{E}(z,t)=\eta_0\vec{H}(z,t)\times\hat{e}_z=(e_x+e_y)\times e_z 0.8\times120\pi\cos(6\pi\times10^8 t-2\pi z)$$

$$=(\hat{e}_x-e_y)96\pi\cos(6\pi\times10^8 t-2\pi z)$$

（3）瞬时坡印廷矢量为

$$\vec{S}(z,t)=\vec{E}(z,t)\times\vec{H}(z,t)=\hat{e}_z 153.6\pi\cos^2(6\pi\times10^8 t-2\pi z)W/m^2$$

5.13 频率 $f=500kHz$ 的正弦均匀平面波在理想介质中传播，其电场振幅矢量 $\vec{E}_m=\hat{e}_x 4-e_y+e_z 2kV/m$，磁场振幅矢量为 $\vec{H}_m=\hat{e}_x 6+e_y 18-e_z 3A/m$。试求：

（1）波传播方向的单位矢量；

（2）介质的相对介电常数 ε_r；

（3）电场 $\vec{E}$ 和磁场 $\vec{H}$ 的复数表达式。

解 （1）表征电场方向的单位矢量为

$$\hat{e}_E=\frac{\vec{E}}{E}=\frac{\hat{e}_x4-e_y+e_z2}{\sqrt{4^2+1+2^2}}=\frac{1}{\sqrt{21}}(e_x4-e_y+e_z2)$$

表征磁场方向的单位矢量为

$$\hat{e}_H=\frac{\vec{H}}{H}=\frac{\hat{e}_x6+e_y18-e_z3}{\sqrt{6^2+18^2+3^2}}=\frac{1}{\sqrt{41}}(e_x2+e_y6-e_z)$$

由此得到波传播方向的单位矢量为

$$\hat{e}_n=\hat{e}_E\times e_H=\frac{1}{\sqrt{21}}(e_x4-e_y+e_z2)\times\frac{1}{\sqrt{41}}(e_x2+e_y6-e_z)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{861}}(-\hat{e}_x11+e_y8+e_z26)$$

$$=-\hat{e}_x0.375+e_y0.273+e_z0.886$$

（2）由 $\eta=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_r\varepsilon_0}}=\frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_r}}=\frac{|\vec{E}_m|}{|\vec{H}_m|}=\frac{\sqrt{21}\times10^3}{\sqrt{369}}$，可得到

$$\varepsilon_r=2.5$$

（3）电场 $\vec{E}$ 和磁场 $\vec{H}$ 的复数表达式分别为

$$\vec{E}=\vec{E}_me^{-jk\hat{e}_n\cdot\vec{r}}=(\hat{e}_x4-e_y+e_z)10^3e^{-jke_n\cdot\vec{r}}$$

$$\vec{H}=\vec{H}_me^{-jk\hat{e}_n\cdot\vec{r}}=(\hat{e}_x6+e_y18-e_z3)e^{-jke_n\cdot\vec{r}}$$

式中

$$k=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0}=2\pi\times500\times10^3\sqrt{\varepsilon_r}\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$$

$$=\frac{\pi\times10^6}{3\times10^8}\sqrt{2.5}rad/m$$

$$=\frac{\pi\sqrt{2.5}}{3}\times10^{-2}rad/m$$

5.14 已知自由空间传播的均匀平面波的磁场强度为

$$\vec{H}=(\hat{e}_x\frac{3}{2}+e_y+e_z)10^{-6}\cos\left[\omega t-\pi\left(-x+y+\frac{1}{2}z\right)\right]A/m$$

试求

（1）波的传播方向；

（2）波的频率和波长；

（3）与磁场 $\vec{H}$ 相伴的电场 $\vec{E}$；

（4）平均坡印廷矢量。

解 （1）波的传播方向由波矢量$\vec{k}$来确定。由给出的$\vec{H}$的表达式可知

$$\vec{k}\cdot\vec{r}=k_x x+k_y y+k_z z=-\pi x+\pi y+0.5\pi z$$

故

$$k_x=-\pi, k_y=\pi, k_z=0.5\pi$$

即

$$\vec{k}=-\hat{e}_x\pi+e_y\pi+e_z 0.5\pi$$

$$k=\pi\sqrt{(-1)^2+1+(0.5)^2}rad/m=\frac{3}{2}\pi rad/m$$

则波传播方向的单位矢量为

$$\hat{e}_n=\frac{\vec{k}}{k}=\frac{1}{1.5\pi}\left(-e_x\pi+e_y\pi+e_z\frac{\pi}{2}\right)=-e_x\frac{2}{3}+e_y\frac{2}{3}+e_z\frac{1}{3}$$

（2）

$$\lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi}{3\pi/2}=\frac{4}{3}m$$

$$f=\frac{v_p}{\lambda}=\frac{3\times10^8}{4/3}Hz=\frac{9}{4}\times10^8 Hz$$

（3）与$\vec{H}$相伴的$\vec{E}$为

$$\vec{E}=(\vec{H}\times\hat{e}_n)\eta_0$$

$$=\left(\hat{e}_x\frac{3}{2}+e_y+e_z\right)10^6\cos\left[\omega t-\pi\left(-x+y+\frac{1}{2}z\right)\right]\times\left(-e_x\frac{2}{3}+e_y\frac{2}{3}+e_z\frac{1}{3}\right)\times377$$

$$=377\times10^{-6}\left(-\hat{e}_x\frac{2}{3}-e_y\frac{7}{6}+e_z\frac{5}{3}\right)\times\cos\left[\frac{9\pi}{2}\times10^8 t-\pi\left(-x+y+0.5z\right)\right]V/m$$

（4）平均坡印廷矢量

$$\vec{S}_{av}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{E}\times\vec{H}^*\right]$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[377\times10^{-6}\left(-\hat{e}_x\frac{2}{3}-e_y\frac{7}{6}+e_z\frac{5}{3}\right)e^{-j\pi(-x+y+0.5z)}\times10^{-6}\left(e_x\frac{3}{2}+e_y+e_z\right)e^{j\pi(-x+y+0.5z)}\right]$$

$$=1.7\pi\times10^{-10}\left(-\hat{e}_x+e_y+e_z\frac{1}{2}\right)W/m^2$$

5.19 自由空间的均匀平面波的电场表达式为

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\left(\hat{e}_x+e_y 2+e_z E_{zm}\right)10\cos(\omega t+3x-y-z)V/m$$

式中的E_{zm}为待定量。试由该表达式确定波的传播方向、角频率ω、计划状态，

并求与 $\vec{E}(\vec{r},t)$ 相伴的磁场 $\vec{H}(\vec{r},t)$。

解 设波的传播方向的单位矢量为 $\hat{e}_n$，则电场的复数形式可表示为

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_m e^{-jk\hat{e}_n \cdot \vec{r}}$$

题目中给定的电场的复数形式为

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \left(\hat{e}_x + e_y 2 + e_z E_{zm}\right) 10 e^{-j(-3x+y+z)} V/m$$

于是有

$$E_m = \hat{e}_x 10 + e_y 20 + e_z 10 E_{zm}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k\hat{e}_n \cdot \vec{r} = -3x + y + z$$

又

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$$

可见

$$k_x = -3, k_y = 1, k_z = 1$$

故波矢量

$$\vec{k} = -\hat{e}_x 3 + e_y + e_z$$

$$k = \sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2} rad/m = \sqrt{11} rad/m$$

波传播方向的单位矢量 $\hat{e}_n$ 为

$$\hat{e}_n = \frac{\vec{k}}{k} = \frac{-\hat{e}_x 3 + e_y + e_z}{\sqrt{11}}$$

波的角频率为

$$\omega = kv_p = kc = \sqrt{11} \times 3 \times 10^8 rad/s = 9.98 \times 10^8 rad/s$$

为了确定 E_{zm}，可利用均匀平面波的电场矢量垂直于波的传播方向这一性质，

故有 $\vec{k} \cdot \vec{E}_m = 0$，即

$$\left(-\hat{e}_x 3 + e_y + e_z\right) \cdot \left(e_x 10 + e_y 20 + e_z 10 E_m\right) = 0$$

由此得

$$-30 + 20 + 10 E_{zm} = 0$$

故得到

$$E_{zm} = 1$$

因此，自由空间任意一点 $\vec{r}$ 处的电场为

$$\vec{E}(\vec{r},t)=10\left(\hat{e}_x+e_y2+e_z\right)\cos(9.95\times10^8t+3x-y-z)V/m$$

上式表明电场的各个分量同相位，故 $\vec{E}(\vec{r},t)$ 表示一个直线极化波。

与 $\vec{E}(\vec{r},t)$ 相伴的磁场 $\vec{H}(\vec{r},t)$ 为

$$\vec{H}(\vec{r},t)=\frac{1}{\eta_0}\hat{e}_n\times\vec{E}(\vec{r},t)$$

$$=\frac{1}{120\pi}\times\frac{1}{\sqrt{11}}\left(-\hat{e}_x3+e_y+e_z\right)\times\left(e_x+e_y2+e_z\right)\times10\cos(9.95\times10^8t-\vec{k}\cdot\vec{r})$$

$$=8\times10^{-3}\left(-\hat{e}_x3+e_y4+e_z7\right)\cos(9.95\times10^8t+3x-y-z)A/m$$

5.20 已知自由空间的均匀平面波的电场表达式为

$$\vec{E}(\vec{r})=\left(\hat{e}_x+e_y2+e_zj\sqrt{5}\right)e^{-j(2x+by+cz)}V/m$$

试求此表达式确定波的传播方向。波长、极化状态，并求与 $\vec{E}(\vec{r})$ 相伴的磁场 $\vec{H}(\vec{r})$。

解 波的传播方向由波矢量的方向确定。由

$$\vec{k}\cdot\vec{r}=k_xx+k_yy+k_zz=2x+by+cz$$

有

$$k_x=2,k_y=b,k_z=c$$

为确定 b 和 c，利用 $\vec{k}\cdot E_m=0$，得

$$\left(\hat{e}_x2+e_yb+e_zc\right)\cdot\left(e_x+e_y2+e_zj\sqrt{5}\right)=2+2b+j\sqrt{5}c=0$$

故

$$b=-1,c=0$$

则波矢量为

$$\vec{k}=\hat{e}_x2-e_y$$

波传播方向的单位矢量为

$$\hat{e}_n=\frac{\vec{k}}{k}=\frac{\hat{e}_x2-e_y}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(e_x2-e_y\right)$$

波长为

$$\lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi}{\sqrt{5}}m=2.81m$$

已知的电场复振幅可写为

$$\vec{E}_m = \left(\hat{e}_x + e_y 2\right) + e_z j\sqrt{5} = \vec{E}_{mR} + \vec{E}_{mI}$$

其中

$$\vec{E}_{mR} = \hat{e}_x + e_y 2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(e_x + e_y 2\right)\sqrt{5} = e_R\sqrt{5}$$

$$\vec{E}_{mI} = \hat{e}_z j\sqrt{5}$$

可见， $\vec{E}_{mR}$ 与 $\vec{E}_{mI}$ 的大小相等，即

$$\left|\vec{E}_{mR}\right| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}, \left|\vec{E}_{mI}\right| = \sqrt{5}$$

且

$$\hat{e}_n \times \hat{e}_z = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(e_x + e_y 2\right) \times e_z = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(2e_x - e_y\right) = e_n$$

$$\hat{e}_r \cdot \hat{e}_z = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(e_x + e_y 2\right) \cdot e_z = 0$$

由于 $\vec{E}_{mR}$ 与 $\vec{E}_{mI}$ 的相位相差 90°，即 $\phi_R = 0, \phi_I = 90^\circ$，故 $\vec{E}(\vec{r})$ 表示一个左旋圆极化波。

与 $\vec{E}(\vec{r})$ 相伴的磁场

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\eta_0} e_n \times \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{120\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\hat{e}_x 2 - e_y\right) \times \left(e_x + e_y 2 + e_z j\sqrt{5}\right) e^{-j(2x-y)}$$

$$= \frac{1}{120\pi}\left(-\hat{e}_x j - e_y j2 + e_z\sqrt{5}\right) e^{-j(2x-y)} A/m$$

第六章

例 6.1.1 一右旋圆极化波垂直入射至位于 $z=0$ 的理想导体板上，其电场强度的复数形式为

$$\bar{E}_i(z) = \left(\hat{e}_x - je_y\right) E_m e^{-j\beta z}$$

（1） 确定反射波的极化；

（2） 写出总电场强度的瞬时表达式；

（3） 求板上的感应面电流密度。

解：（1）设反射波电场的复数形式为

$$\bar{E}_r(z) = \left(\hat{e}_x E_{rx} + e_y E_{ry}\right) e^{j\beta z}$$

由理想导体表面电场所满足的边界条件，在 $z=0$ 时有

$$\left[\vec{E}_i(z)+\vec{E}_r(z)\right]_{z=0}=0$$

得

$$\vec{E}_r(z)=\left(-\hat{e}_x+e_y j\right)E_m e^{j\beta z}$$

这是一个沿 $-\hat{e}_z$ 方向传播的左旋圆极化波。

（2） $z<0$ 区域的总电场强度

$$\vec{E}_1(z,t)=\mathrm{Re}\left\{\left[\vec{E}_i+\vec{E}_r\right]e^{j\omega t}\right\}$$

$$=\mathrm{Re}\left\{\left[\left(\hat{e}_x-e_y j\right)e^{-j\beta z}+\left(-e_x+e_y j\right)e^{j\beta z}\right]E_m e^{j\omega t}\right\}$$

$$=\mathrm{Re}\left\{\left[-\left(-\hat{e}_x-e_y j\right)j2\sin\beta z\right]E_m e^{j\omega t}\right\}$$

$$=2E_m\sin\beta z\left(\hat{e}_x sin\omega t-e_y\cos\omega t\right)$$

（3）又由理想导体表面磁场所满足的边界条件

$$\hat{e}_n\times\vec{H}_1=\vec{J}_s$$

这里

$\hat{e}_n=-e_z$，则

$$\vec{J}_s=-\hat{e}_z\times\left[\vec{H}_i(z)+\vec{H}_r(z)\right]_{z=0}$$

而

$$\vec{H}_i(z)=\frac{1}{\eta}\hat{e}_z\times\vec{E}_i(z)=\left(e_x j+e_y\right)\frac{E_m}{\eta_0}e^{-j\beta z}$$

$$\vec{H}_r(z)=\frac{1}{\eta}(-\hat{e}_z)\times\vec{E}_r(z)=\left(e_x j+e_y\right)\frac{E_m}{\eta_0}e^{j\beta z}$$

故

$$\vec{J}_s=-\hat{e}_z\times\left[\vec{H}_i(z)+\vec{H}_r(z)\right]_{z=0}=\left(e_x-e_y j\right)\frac{2E_m}{\eta_0}$$

例 6.1.2 一均匀平面波自空气中垂直入射到半无限大的无损耗介质表面上，已知空气中合成波的驻波比为 3，介质内透射波的波长是空气中波长的 $\frac{1}{6}$，且介质表面上为合成波电场的最小点。求介质的相对磁导率 μ_r 和相对介电常数 ε_r。

解：因为驻波比

$$S=\frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}=3$$

由此解出 $|\Gamma|=\frac{1}{2}$

由于界面上是合成波电场的最小点，故$\Gamma=-\frac{1}{2}$。由于反射系数

$$\Gamma=\frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}$$

式中$\eta_1=\eta_0=120\pi$， 于是有

$$\eta_2=\frac{1}{3}\eta_0$$

又因为

$$\eta_1=\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}=\sqrt{\frac{\mu_\mathrm{r}}{\varepsilon_\mathrm{r}}}\eta_0$$

所以得到

$$\frac{\mu_\mathrm{r}}{\varepsilon_\mathrm{r}}=\frac{1}{9} \quad （1）$$

又因为媒质中的波长

$$\lambda_2=\frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_\mathrm{r}\varepsilon_\mathrm{r}}}=\frac{\lambda_0}{6}$$

得$\mu_\mathrm{r}\varepsilon_\mathrm{r}=36$ （2）

联立求解（1）（2）式，得

$\mu_\mathrm{r}=2$， $\varepsilon_\mathrm{r}=18$

例 6.4.1 一角频率为ω的均匀平面波由空气向理想导体斜入射，入射角为θ_i，电场矢量垂直于入射面。求：

（1）导体表面上的感应电流密度；

（2）合成波在空气中的平均坡印延矢量。

解：（1）设$z=0$为理想导体表面，入射波电场为

$$\vec{E}_i=\hat{e}_y E_m e^{-jk(x\sin\theta_i+z\cos\theta_i)}$$

式中E_m为入射波幅值， $k=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$为入射波的波数。

由式（6.4.2）和式（6.4.4），有

$$\vec{H}_i=\left(-\hat{e}_x\cos\theta_i+e_z\sin\theta_i\right)\frac{E_m}{\eta_0}e^{-jk\left(x\sin\theta_i+z\cos\theta_i\right)}$$

$$\vec{H}_r=\left(-\hat{e}_x\cos\theta_i-e_z\sin\theta_i\right)\frac{E_m}{\eta_0}e^{-jk\left(x\sin\theta_i-z\cos\theta_i\right)}$$

空气中合成波的磁场为

$$\vec{H}_1=\vec{H}_i+\vec{H}_r$$

在 $z=0$ 处

$$\vec{H}_1=\left(\vec{H}_i+\vec{H}_r\right)_{z=0}=-\hat{e}_x\frac{2E_m}{\eta_0}\cos\theta_i e^{-jkx\sin\theta_i}$$

所以导体表面上的感应电流密度为

$$\vec{J}_s=\hat{e}_n\times\vec{H}_1\Big|_{z=0}=\left(-e_z\right)\times\left(-e_x\right)\frac{2E_m\cos\theta_i}{\eta_0}e^{-jk_ix\sin\theta_i}$$

$$=\hat{e}_y\frac{E_m}{60\pi}\cos\theta_i e^{-jk_ix\sin\theta_i}$$

（2）由式（6.4.3），有

$$\vec{E}_r=-\hat{e}_yE_m e^{-jk\left(x\sin\theta_i-z\cos\theta_i\right)}$$

故合成波在空气中的平均坡印廷矢量为

$$\vec{S}_{av}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{E}_1\times\vec{H}_1^*\right]=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\left(\vec{E}_i+\vec{E}_r\right)\times\left(\vec{H}_i+\vec{H}_r\right)^*\right]$$

$$=\hat{e}_x\frac{2E_m^2}{\eta_0}\sin\theta_i\sin^2\left(kz\cos\theta_i\right)$$

例 6.4.2 已知空气中的磁场强度为 $\vec{H}_i=-\hat{e}_y e^{-j\sqrt{2}\pi(x+z)}$ A/m 的均匀平面波，向位于 $z=0$ 处的理想导体斜入射。求：

（1）入射角；

（2）入射波电场；

（3）反射波电场和磁场；

（4）合成波的电场和磁场；

（5）导体表面上的感应电流密度和电荷密度。

解：（1）由题意可知，$k_{ix}=k_{iz}=\sqrt{2}\pi$，所以

$$\vec{k}_i = \hat{e}_x k_{ix} + e_z k_{iz} = \left(e_x + e_z\right)\sqrt{2}\pi\text{，}\quad k = \left|\vec{k}_i\right| = 2\pi$$

故入射角

$$\theta_i = \arctan\frac{k_{ix}}{k_{iz}} = \frac{\pi}{4}$$

（2）入射波电场为

$$\vec{E}_i = \eta_0 \vec{H}_i \times \hat{e}_i = \frac{\eta_0}{k}\vec{H}_i \times \hat{k}_i = \left(-e_x + e_z\right)\frac{120\pi}{\sqrt{2}}e^{-j\sqrt{2}\pi(x+z)}$$

（3）反射波矢量为

$$\vec{k}_r = \hat{e}_x k_{ix} - e_z k_{iz} = \left(e_x - e_z\right)\sqrt{2}\pi$$

故反射波磁场和电场分别为

$$\vec{H}_r = -\hat{e}_y e^{-j\sqrt{2}\pi(x-z)}$$

$$\vec{E}_r = \eta_0 \vec{H}_r \times \hat{e}_r = \frac{\eta_0}{k}\vec{H}_r \times \hat{k}_r = \left(e_x + e_z\right)\frac{120\pi}{\sqrt{2}}e^{-j\sqrt{2}\pi(x-z)}$$

（4） 合成波的电场和磁场分别为

$$\begin{aligned}
\vec{E}_1 &= \vec{E}_i + \vec{E}_r \\
&= \left[\hat{e}_x\left(e^{j\sqrt{2}\pi z} - e^{-j\sqrt{2}\pi z}\right) + e_z\left(e^{j\sqrt{2}\pi z} + e^{-j\sqrt{2}\pi z}\right)\right]\frac{120\pi}{\sqrt{2}}e^{-j\sqrt{2}\pi x} \\
&= \left[\hat{e}_x j\sin\left(\sqrt{2}\pi z\right) + e_z\cos\left(\sqrt{2}\pi z\right)\right]120\sqrt{2}\pi e^{-j\sqrt{2}\pi x}
\end{aligned}$$

$$\vec{H}_1 = \vec{H}_i + \vec{H}_r = \left[-\hat{e}_y\left(e^{j\sqrt{2}\pi z} + e^{-j\sqrt{2}\pi z}\right)\right]e^{-j\sqrt{2}\pi x} = -e_y 2\cos\left(\sqrt{2}\pi z\right)e^{-j\sqrt{2}\pi x}$$

(5)导体表面的感应电流密度和电荷密度分别为

$$\vec{J}_s = \hat{e}_n \times \vec{H}_1\Big|_{z=0} = \left(-e_z\right)\times\left(-e_y\right)2e^{-j\sqrt{2}\pi x} = -e_x 2e^{-j\sqrt{2}\pi x}$$

$$\rho_s = \varepsilon_0 \hat{e}_n \bullet \vec{E}_1\Big|_{z=0} = -\varepsilon_0 e_z \bullet \vec{E}_1\Big|_{z=0} = -120\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 e^{-j\sqrt{2}\pi x}$$

习题 6.1 有一频率为 100 MHz、沿 y 方向极化的均匀平面波从空气（$x<0$ 区域）中垂直入射到位于 $x=0$ 的理想导体板上。设入射波电场 $\vec{E}_i$ 的振幅为 10 V/m，试求：

（1）入射波电场 $\vec{E}_i$ 和磁场 $\vec{H}_i$ 的复矢量；

（2）反射波电场 $\vec{E}_r$ 和磁场 $\vec{H}_r$ 的复矢量；

（3）合成波电场 $\vec{E}_1$ 和磁场 $\vec{H}_1$ 的复矢量；

（4）距离导体面最近的合成波电场 $\vec{E}_1$ 为零的位置；

（5）距离导体面最近的合成波电场 $\vec{H}_1$ 为零的位置。

解 （1） $\omega = 2\pi f = 2\pi \times 10^8 \ {rad}/{m}$

$$\beta = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi \times 10^8}{3\times 10^8} \ {rad}/{m} = \frac{2}{3}\pi \ {rad}/{m}$$

$$\eta_1 = \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \quad \Omega$$

则入射波电场 $\vec{E}_i$ 和磁场 $\vec{H}_i$ 的复矢量分别为

$$\vec{E}_1(x) = \hat{e}_x 10 e^{j\frac{2}{3}\pi x} \quad {V}/{m}$$

$$\vec{H}_i(x) = \frac{1}{\eta_1}\hat{e}_x \times \vec{E}_i(x) = e_z \frac{1}{12\pi} e^{-j\frac{2}{3}\pi x} \ {A}/{m}$$

（2）反射波电场 $\vec{E}_r$ 和磁场 $\vec{H}_r$ 的复矢量分别为

$$\vec{E}_r(x) = -\hat{e}_y 10 e^{j\frac{2}{3}\pi x} \ {V}/{m}$$

$$\vec{H}_r(x) = \frac{1}{\eta}(-\hat{e}_x) \times \vec{E}_r(x) = e_z \frac{1}{12\pi} e^{j\frac{2}{3}\pi x} \ {A}/{m}$$

（3）合成波电场 $\vec{E}_1$ 和磁场 $\vec{H}_1$ 的复矢量分别为

$$\vec{E}_1(x) = \vec{E}_i(x) + \vec{E}_r(x) = -\hat{e}_y j20\sin\left(\frac{2}{3}\pi x\right) {V}/{m}$$

$$\vec{H}_1(x) = \vec{H}_i(x) + \vec{H}_r(x) = \hat{e}_z \frac{1}{6\pi}\cos\left(\frac{2}{3}\pi x\right) {A}/{m}$$

（4）对于 $\vec{E}_1(x)$，当 $x=0$ 时，$\vec{E}_1(0)=0$。而在空气中，第一个零点发生在 $\frac{2}{3}\pi x = -\pi$ 处，即

$$x = -\frac{3}{2}m$$

（5） 对于 $\vec{H}_1(x)$，当 $\frac{2}{3}\pi x = -\frac{\pi}{2}$，即 $x = -\frac{3}{4}m$ 时为磁场在空气中的第一个零点。

习题 6.4 均匀平面波的电场振幅为 $E_{im}=100\ {}^{V}\!/\!_{m}$，从空气中垂直入射到无损耗介质平面上（介质的 $\sigma_1=0$、$\varepsilon_{r2}=4$、$\mu_{r2}=1$），求反射波与透射波的电场振幅。

解 $\eta_1=\sqrt{\dfrac{\mu_1}{\varepsilon_1}}=\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=120\pi\quad\Omega$

$$\eta_2=\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=60\pi\quad\Omega$$

反射系数为

$$\Gamma=\frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}=\frac{60\pi-120\pi}{60\pi+120\pi}=\frac{1}{3}$$

透射系数为

$$\tau=\frac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_1}=\frac{2\times60\pi}{60\pi+120\pi}=\frac{2}{3}$$

故反射波的电场振幅为

$$E_{rm}=|\Gamma|E_{im}=\frac{100}{3}\,{}^{V}\!/\!_{m}=33.3\ {}^{V}\!/\!_{m}$$

透射波的电场振幅为

$$E_{tm}=\tau E_{im}=\frac{2\times100}{3}\,{}^{V}\!/\!_{m}=66.6\quad{}^{V}\!/\!_{m}$$

习题 6.6 均匀平面波从媒质 1 入射到与媒质 2 的平面分界面上，已知 $\sigma_1=\sigma_2=0$、$\mu_1=\mu_2=\mu_0$。求使入射波的平均功率的 10%被反射时的 $\dfrac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}$ 的值。

解 由题意得下列关系

$$|\Gamma|^2=0.1$$

而

$$\Gamma=\eta_2\frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}=\frac{\sqrt{\mu_2/\varepsilon_2}-\sqrt{\mu_1/\varepsilon_1}}{\sqrt{\mu_2/\varepsilon_2}+\sqrt{\mu_1/\varepsilon_1}}$$

$$=\frac{\eta_0\sqrt{1/\varepsilon_{r2}}-\eta_0\sqrt{1/\varepsilon_{r1}}}{\eta_0\sqrt{1/\varepsilon_{r2}}+\eta_0\sqrt{1/\varepsilon_{r1}}}=\frac{\sqrt{\varepsilon_r 1/\varepsilon_{r2}}-1}{\sqrt{\varepsilon_r 1/\varepsilon_{r2}}+1}$$

代入 $|\Gamma|^2=0.1$ 中，得

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}}=1.92 \text{ 或 } \sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}}=0.52$$

故

$$\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}=3.68 \text{ 或 } \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}=0.269$$

习题 6.7 入射电场 $\vec{E}_i=\hat{e}_x 10\cos\left(3\pi\times10^9 t-10\pi z\right) V/m$，从空气（$z<0$ 区域）中垂直入射到 $z=0$ 得分界面上，在 $z>0$ 区域中 $\mu_r=1$、$\varepsilon_r=4$、$\sigma=0$。求 $z>0$ 区域的电场 $\vec{E}_2$ 和磁场 $\vec{H}_2$。

解 $z>0$ 区域，本征阻抗

$$\eta_2=\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}=\eta_0\sqrt{\frac{\mu_{r2}}{\varepsilon_{r2}}}=\frac{120\pi}{2}\Omega=60\pi\ \Omega$$

投射系数

$$\tau=\frac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_1}=\frac{2\times60\pi}{120\pi+60\pi}=6.67\times10^{-1}$$

相位常数

$$\beta_2=\omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{\varepsilon_{r2}}=\frac{3\pi\times10^9}{3\times10^8}\times2\,rad/m=20\pi\quad rad/m$$

故

$$\vec{E}_2=\hat{e}_x E_{i2m}\cos(\omega t-\beta_2 z)=e_x\vec{\tau}E_{2m}\cos(2\pi ft-\beta_2 z)$$
$$=\hat{e}_x 6.67\times10^{-1}\times10\cos\left(3\pi\times10^9 t-20\pi z\right)$$
$$=\hat{e}_x 6.67\cos\left(3\pi\times10^9 t-20\pi z\right)V/m$$

$$\vec{H}_2=\frac{1}{\eta_2}\hat{e}_z\times\vec{E}_2=e_y\frac{81.6}{260}\cos(2\pi ft-\beta_2 z)=e_y\frac{6.67}{60\pi}\cos\left(3\pi\times10^9 t-20\pi z\right)$$
$$=\hat{e}_y 0.036\cos\left(3\pi\times10^9 t-20\pi z\right)A/m$$

习题 6.11 均匀平面波垂直入射到两种无损耗电介质分界面上，当反射系数与透视系数的大小相等时，其驻波比等于多少？

解 由题意有下列关系

$$|\Gamma|=\tau=1+\Gamma$$

由此可得

$$|\Gamma|^2 = 1 + 2\Gamma + \Gamma^2$$

即

$$\Gamma = -\frac{1}{2}$$

故驻波系数

$$S = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} = \frac{1+1/2}{1-1/2} = 3$$

由 $\Gamma = \dfrac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = -\dfrac{1}{2}$，还可得到

$$\eta_1 = 3\eta_2$$

若媒质的磁导率 $\mu_2 = \mu_1$，则可得到

$$\varepsilon_{r1} = 9\varepsilon_{r2}$$

习题 6.13 均匀平面波从空气中垂直入射到理想电介质($\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$、$\mu_r = 1$、$\sigma_2 = 0$) 表面上。测得空气中驻波比为 2，电场振幅最大值相距 $1.0\,m$，且第一个最大值距离介质表面 $0.5\,m$。试确定电介质的相对介电常数 ε_r。

解 由 $\dfrac{\lambda}{2} = 1.0$，得 $\lambda = 2\ m$，所以电场振幅第一个最大值距离介质表面 $\lambda/4$，故反射系数为 $\Gamma < 0$。

由 $|\Gamma| = \dfrac{S-1}{S+1} = \dfrac{2-1}{2+1} = \dfrac{1}{3}$，得到

$$\Gamma = -\frac{1}{3}$$

又 $\Gamma = \dfrac{\eta_2 - \eta_0}{\eta_2 + \eta_0} = \dfrac{1-\sqrt{\varepsilon_{r2}}}{1+\sqrt{\varepsilon_{r2}}}$

故得到

$$\varepsilon_{r2} = \left(\frac{1+1/3}{1-1/3}\right)^2 = 4$$

习题 6.29 有一正弦均匀平面波由空气斜入射到位于 $z=0$ 的理想导体面上，其电场强度的复数形式为 $\vec{E}_t(x,z)=\hat{e}_y 10e^{-j(6x+8z)}\ V/m$，试求：

（1）入射波的频率 f 与波长 λ；

（2）$\vec{E}_i(x,z,t)$ 和 $\vec{H}_i(x,z,t)$ 的瞬时表达式；

（3）入射角 θ_i

（4）反射波 $\vec{E}_r(x,z)$ 和 $\vec{H}_r(x,z)$；

（5）总电场 $\vec{E}_1(x,z)$ 和 $\vec{H}_1(x,z)$。

解 （1）由已知条件知入射波的波矢量为

$$\vec{k}_i=\hat{e}_x 6+e_z 8$$

$$k_i=\left|\vec{k}_i\right|=\sqrt{6^2+8^2}=10\quad rad/m$$

故波长为

$$\lambda=\frac{2\pi}{\beta}=\frac{2\pi}{k_i}=0.628\ m$$

频率为

$$f=\frac{c}{\lambda}=\frac{3\times10^8}{0.628}Hz=4.78\times10^8\ Hz$$

$$\omega=2\pi f=3\times10^9\ rad/s$$

（2）入射波传播方向的单位矢量为

$$\hat{e}_i=\frac{\vec{k}_i}{k_i}=\frac{\hat{e}_x 6+e_z 8}{10}=e_x 0.6+e_z 0.8$$

入射波的磁场复数表示式为

$$\vec{H}_i(x,z)=\frac{1}{\eta_0}\hat{e}_i\times\vec{E}_i(x,z)$$

$$=\frac{1}{\eta_0}(-\hat{e}_x 0.6+e_z 0.8)\times e_y 10e^{-j(6x+8z)}$$

$$=\frac{1}{120\pi}(-\hat{e}_x 0.6+e_z 0.8)e^{-j(6x+8z)}$$

其瞬时表达式

$$\vec{H}_i(x,z,t)=\mathrm{Re}\left[\vec{H}_i(x,z)e^{j\omega t}\right]$$
$$=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{120\pi}(-\hat{e}_x 8+e_z 6)e^{-j(6x+8z)}e^{j3\times10^9 t}\right]$$
$$=\frac{1}{120\pi}(-\hat{e}_x 8+e_z 6)\cos\left(3\times10^9 t-6x-8z\right)A/m$$
而电场的瞬时表达式为
$$\vec{E}_i(x,z,t)=\mathrm{Re}\left[\vec{E}_i(x,z)e^{j\omega t}\right]$$
$$=\mathrm{Re}\left[\hat{e}_y 10e^{-j(6x+8z)}\right]e^{j\omega t}$$
$$=\hat{e}_y 10\cos\left(3\times10^9 t-6x-8z\right)V/m$$

（3）$k_{iz}=k_i\cos\theta_i$，得

$$\cos(z)=\frac{k_{iz}}{k_i}=\frac{8}{10}$$ 故 $\theta_i=36.9^0$

（4）据斯奈尔反射定律知 $\theta_r=\theta_i=36.9^0$，反射波的波矢量为

$$\hat{k}_r=\hat{e}_x 6-e_y 8$$

$$\hat{e}_r=\frac{\hat{k}_r}{k_r}=\frac{\hat{e}_x 6-e_y 8}{10}=e_x 0.6-e_y 0.8$$

而垂直极化波对理想导体平面斜入射时，反射系数 $\Gamma_\perp=-1$，故反射波的电场为

$$\vec{E}_r(x,z)=-\hat{e}_y 10e^{-j(6x-8z)}\quad V/m$$
与之相伴的磁场为
$$\vec{H}_r(x,z)=\frac{1}{\eta_0}\hat{e}_r\times\vec{E}_r(x,z)=\frac{1}{120\pi}(e_x 0.6-e_z 0.8)\times\left(-e_y 10e^{-j(6x-8z)}\right)$$
$$=\frac{1}{120\pi}(-\hat{e}_x 8-e_z 6)e^{-j(6x-8z)}A/m$$
（5）合成波的点为
$$\vec{E}(x,z)\vec{E}_i(x,z)+\vec{E}_r(x,z)=\hat{e}_y 10e^{-j(6x+8z)}-e_y 10e^{-j(6x-8z)}$$
$$=\hat{e}_y 10e^{-j6x}\left(e^{-j8x}-e^{-j8x}\right)=-e_y j20e^{-j6x}\sin 8z\,V/m$$

合成波的磁场为

$$\vec{H}(x,z)=\vec{H}_i(x,z)+\vec{H}_r(x,z)$$
$$=\frac{1}{120\pi}(-\hat{e}_x 8+e_z 6)e^{-j(6x+8z)}+\frac{1}{120\pi}(-e_x 8-e_z 6)e^{-j(6x-8z)}$$
$$=\frac{1}{120\pi}(-\hat{e}_x 16\cos 8z-e_y j12\sin 8z)e^{-j6x}\ A/m$$

习题 6.30 频率 $f=100\ MHz$ 的平行极化正弦均匀平面波，在空气（$z<0$ 的区域）中一入射角 $\theta_i=60^0$ 斜入射到 $z=0$ 理想导体表面。设入射波磁场的振幅为 $0.1\ A/m$、方向为 y 方向，如图题 6.30 所示。

（1）求出入射波、反射波的电场和磁场表达式；

（2）求理想导体表面上的感应电流密度和电荷密度；

（3）求空气中的平均功率密度。

解 （1）入射波磁场为

$$\vec{H}_i=\hat{e}_y 0.1e^{-j(k_{ix}x+k_{iz}z)}$$

其中

$$k_{ix}=k_i\sin\theta_i=\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sin 60^0=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$$

$$k_{iz}=k_i\cos\theta_i=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\cos 60^0=\frac{1}{3}\pi$$

入射波的传播方向的单位矢量

$$\hat{e}_i=\frac{\vec{k}_i}{k_i}=e_x\frac{\sqrt{3}}{2}+e_z\frac{1}{2}$$

故入射波的电场为

$$\vec{H}_i=\eta_1\vec{H}_i\times\hat{e}_i=(\hat{e}_x-e_z\sqrt{3})6\pi e^{-j\pi(\sqrt{3}x+z)/3}$$

反射波的磁场为

$$\vec{H}_r=\hat{e}_y 0.1e^{-j\pi(\sqrt{3}x-z)/3}$$

反射波的传播方向的单位矢量

$$\hat{e}_r=e_x\frac{\sqrt{3}}{2}-e_z\frac{1}{2}$$

故反射波的电场为

$$\vec{E}_r=\eta_1\vec{H}_i\times\hat{e}_r=(-\hat{e}_x-e_z\sqrt{3})6\pi e^{-j\pi(\sqrt{3}x-z)/3}$$

（2）空气中合成波的磁场为

$$\vec{H}_1 = \vec{H}_i + \vec{H}_r = \hat{e}_y 0.2\cos\left(\pi z/3\right) e^{-j\sqrt{3}\pi x/3}$$

理想导体表面的电流密度为

$$\vec{J}_s = \hat{e}_n \times \vec{H}_1\big|_{z=0} = -e_z \times \vec{H}_1\big|_{z=0} = e_x 0.2 e^{-j\sqrt{3}\pi x/3}$$

空气中合成波的电场为

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_i + \vec{E}_r$$

$$= \left(\hat{e}_x - e_z\sqrt{3}\right) 6\pi e^{-j\left(\sqrt{3}\pi x/3 + \pi z/3\right)} + \left(-e_x - e_z\sqrt{3}\right) 6\pi e^{-j\left(\sqrt{3}\pi x/3 - \pi z/3\right)}$$

$$= -\hat{e}_x j12\sin\pi\sin\left(\pi z/3\right) e^{-j\sqrt{3}\pi x/3} - e_z 12\sqrt{3}\pi\cos\left(\pi z/3\right) e^{-j\sqrt{3}\pi x/3}$$

理想导体表面的电荷密度为

$$\rho_s = \varepsilon_0 \hat{e}_n \cdot \vec{E}_1\big|_{z=0} = -\varepsilon_0 e_z \cdot \vec{E}_1\big|_{z=0} = 12\sqrt{3}\varepsilon_0 e^{-j\sqrt{3}\pi x/3}$$

（3）$\vec{S}_{av} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{E}_1 \times \vec{H}_1^*\right] = \hat{e}_x 1.2\sqrt{3}\cos^2\left(\pi z/3\right) W/m^2$

第七章

例 7.2.3 有一内充空气、截面尺寸为 $a \times b(b < a < 2b)$ 的矩形波导，以主模工作在 3GHz。若要求工作频率至少高于主模截止频率的 20%和至少低于次高模截止频率的 20%。

（1）给出尺寸 a 和 b 的设计；

（2）根据设计的尺寸，计算在工作频率时的波导波长和波阻抗。

解：（1）根据单模传输的条件，工作波长大于主模的截止波长而小于次高模的截止波长。对于 $a \times b(b < a < 2b)$ 的矩形波导，其主模为 TE_{10}，相应的截止波长 $(\lambda_c)_{10} = 2a$。当波导尺寸 $a < 2b$ 时，其次高模为 TE_{01} 模，相应的截止波长 $(\lambda_c)_{01} = 2b$。

$$(f_c)_{10} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\varepsilon}}, (f_c)_{01} = \frac{1}{2b\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

由题意

$$\frac{3\times10^9 - (f_c)_{10}}{(f_c)_{10}} \geq 20\% \quad , \quad \frac{(f_c)_{01} - 3\times10^9}{(f_c)_{01}} \geq 20\%$$

解得

$$a \geq 0.06m \quad , \quad b \leq 0.04m \text{ 且 } a < 2b$$

（2）若取 $a = 7cm$， $b = 4cm$， 此时

$$(f_c)_{10} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\varepsilon}} = 2.14GHz$$

$$\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2} = 0.7$$

相速度

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = \frac{3\times10^8}{0.7} m/s = 4.29\times10^8 m/s$$

波导波长

$$\lambda_g = \frac{v_p}{f} = \frac{4.29\times10^8}{3\times10^9} m = 14.3cm$$

波阻抗

$$Z_{TE_{10}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = \frac{377}{0.7}\Omega = 538.6\Omega$$

第七章习题

7.5 已知矩形波导的横截面尺寸为 $a\times b = 23mm\times10mm$，试求当工作波长 $\lambda = 10mm$ 时，波导中能传输哪些波型？$\lambda = 30mm$ 时呢？

解 波导中能传输的模式应满足条件

$$\lambda < (\lambda_c)_{mn} \text{ 或 } f > (f_c)_{mn}$$

在矩形波导中截止波长为

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}}$$

由传输条件

$$\lambda < \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{23}\right)^2 + \left(\frac{n}{10}\right)^2}}$$

当 $\lambda = 10mm$ 时上式可写为

$$n < 10\left[\left(\frac{2}{10}\right)^2 - \left(\frac{m}{23}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

能满足传输条件的 m 和 n 为：

（1）当 $m = 0$ 时，有 $n < 2$，对应的传播波型有：TE_{01}；

（2）当 $m=1$ 时，有 $n<2$，对应的传播波型有：TE_{01}、TE_{11} TM_{11}；

（3）当 $m=2$ 时，有 $n<2$，对应的传播波型有：TE_{20}、TE_{21} TM_{21}；

（4）当 $m=3$ 时，有 $n<2$，对应的传播波型有：TE_{30}、TE_{31} TM_{31}；

（5）当 $m=4$ 时，有 $n<1$，对应的传播波型有：TE_{40}。

故当工作波长 $\lambda=10mm$ 时，波导中能传输的波型有：TE_{01}、TE_{01}、TE_{11} TM_{11} TE_{20}、TE_{21}、TM_{21}、TE_{30} TE_{31} TM_{31} TE_{40}。

当 $\lambda=30mm$ 时，应满足

$$n<10\left[\left(\frac{2}{30}\right)^2-\left(\frac{m}{23}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

（1）当 $m=0$ 时，有 $n<1$，无传播波型；

（2）当 $m=1$ 时，有 $n<1$，对应的传播波型有：TE_{10}；

（3）当 $m=2$ 时，不满足条件。

故当 $\lambda=30mm$ 时，波导中只能传输 TE_{10} 模。

7.7 试设计一个工作波长 $\lambda=10cm$ 的矩形波导，材料用紫铜，内充空气，并且要求 TE_{10} 模的工作频率至少有 30%的安全因子，即 $0.7f_{c2}\geq f\geq 1.3f_{c1}$，此处 f_{c1} 和 f_{c2} 分别表示 TE_{10} 波和相邻高阶模式的截止频率。

解 由题给 $0.7f_{c2}\geq f\geq 1.3f_{c1}$，即

$$0.7(f_c)_{TE_{20}}\geq f\geq 1.3(f_c)_{TE_{10}}$$

若用波长表示，上式变为

$$\frac{0.7}{(\lambda_c)_{TE_{20}}}\geq\frac{1}{\lambda}\geq\frac{1.3}{(\lambda_c)_{TE_{10}}}$$

即

$$\frac{0.7}{a}\geq\frac{1}{10},\frac{1.3}{2a}\leq\frac{1}{10}$$

由此可得

$$6.5\leq a\leq 7$$

选择：$a=6.8cm$

为防止高次模 TE_{01} 的出现，窄边 b 的尺寸应满足

$$\left(\lambda_c\right)_{TE_{20}} = a > \left(\lambda_c\right)_{TE_{01}} = 2b$$

考虑到传输功率容量和损耗情况，一般选取

$$b = (0.4 \sim 0.5)a$$

故设计的矩形波导尺寸为

$$a \times b = 6.8cm \times 3.4cm$$