土土 第五章 贝赛尔函数 一在第二章,我们用分离变量法求解了一些 十定解问题. 在§2.3, 我们将方程化为 工极坐标系下的方程,经过分离变量后, 二就会出现变系数的线性常微分方程。 一由于我们当时考虑的是圆盘在稳恒状态 下的温度分布,所以,得到了欧拉方程。 如果不是考虑稳恒状态而是考虑瞬时状态, 工就会得到一种特殊类型的常微分方程。

本章我们将通过在柱坐标系中对定解问题 进行分离变量,引出贝赛尔方程,接着 我们来讨论它的解的一些性质。下面将 会看到: 在一般情况下, 贝赛尔方程的 工解不能用初等函数表出, 这就导入一类 十 特殊函数,称为贝赛尔函数。 贝赛尔函数具有一系列性质。 在求解数学物理方程时主要用的是 **宁** 它的正交完备性。

§ 5.1 贝赛尔方程的引出

下面考虑圆盘的瞬时温度分布问题。 问题: 一个半径为 R 的薄圆盘, 侧面绝缘, 若圆盘边界上的温度恒保持为0摄氏度, 且初始温度为已知, 求圆盘内的瞬时温度 分布规律。

1111111

解 设圆盘内任一点(x,y)处t时刻的温度为u(x,y,t),则它满足





$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$x^2 + y^2 < R^2, \quad t > 0$$

$$u_{|_{t=0}} = \varphi_0(x, y), \qquad (5.2)$$

$$x^2 + y^2 \le R^2$$

$$u_{|_{x^2 + y^2 = R^2}} = 0, \qquad \text{in this } (5.3)$$
下面来求这个定解问题的解。 用分离变量法。

$$\sqrt[3]{u(x,y,t)} = V(x,y)T(t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x}T(t) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}T(t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y} T(t) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} T(t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = V T'(t)$$

代入方程(5.1)得

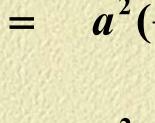


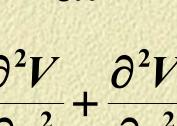
$$= a^2 ($$

$$= a^2$$







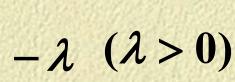


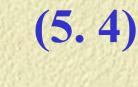
 $T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0$

 $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \lambda V = 0$

















 $T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0$

(5. 4)

解得

$$T(t) = Ae^{-a^2\lambda t}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \lambda V = 0$$
 (5. 5)

(5.5)称为亥姆霍兹 (Helmholtz) 方程。

条件(5.3),即

$$V_{|_{x^2+v^2=R^2}}=0 (5.6)$$

为了求出方程(5.5)满足条件(5.6)的解,我们将方程(5.5)化为极坐标系下的方程。







$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \begin{array}{c} \begin{array}{c} \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c} \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \begin{array}{c} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \\ \\ = \begin{array}{c} \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \\ \\ \begin{array}{c} \begin{array}{c} \\ \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c} \begin{array}{c} \partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c} \partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c} \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c} \\ \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c} \\ \end{array} \begin{array}{c} \\$$

用方岗变重法、令
$$V(\rho,\theta) = P(\rho) \Theta(\theta)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = P'(\rho) \Theta(\theta) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} = P''(\rho) \Theta(\theta)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = P(\rho) \Theta''(\theta)$$



$$P''(\rho)\underline{\Theta(\theta)} + \frac{1}{\rho}P'(\rho)\underline{\Theta(\theta)} + \frac{1}{\rho^2}P(\rho)\Theta''(\theta)$$
$$+ \lambda P(\rho)\underline{\Theta(\theta)} = 0$$

$$\frac{1}{P''(\rho)} + \frac{1}{\rho} P'(\rho) + \lambda P(\rho) \Theta(\theta) = -\frac{1}{\rho^2} P(\rho) \Theta''(\theta)$$

$$\frac{1}{\varphi} \frac{\rho^2 P''(\rho) + \rho P'(\rho) + \lambda \rho^2 P(\rho)}{P(\rho)} = \frac{-\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = \mu$$



即

$$\Theta''(\theta) + \mu \ \Theta(\theta) = 0$$

 $\rho^{2}P''(\rho) + \rho P'(\rho) + \lambda \rho^{2}P(\rho) = \mu P(\rho)$ $\rho^{2}P''(\rho) + \rho P'(\rho) + (\lambda \rho^{2} - \mu)P(\rho) = 0 (5.10)$

: V(x,y) 也是单值函数

在极坐标下, (ρ,θ) 与 $(\rho,\theta+2\pi)$ 表示同一点

 $\Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi)$





(5.9)

即: $\Theta(\theta)$ 是以 2π 为周期的周期函数

而方程(5.9)的解是

$$\Theta(\theta) = B_1 \cos \sqrt{\mu} \ \theta + B_2 \sin \sqrt{\mu} \ \theta$$

$$\therefore n \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} = 2\pi$$

解得

$$\mu = n^2$$
 $(n = 0,1,2,...)$

即

$$\mu = 0,1^2,2^2,...,n^2,...$$





有
$$\Theta(\theta) = \frac{a_0}{2}$$

対应于
$$\mu = n^2 \ (n = 0,1,2,...)$$
有 $\Theta(\theta) = \frac{a_0}{2}$

$$\Theta_n(\theta) = a_n \cos n \theta + b_n \sin n \theta$$

$$(n = 1,2,...)$$
以 $\mu = n^2$ 代入(5.10),得
$$\rho^2 P''(\rho) + \rho P'(\rho) + (\lambda \rho^2 - n^2) P(\rho) = 0$$

$$n$$
 (5.

$$(5.11)$$

$$\rho(\rho) + \rho(\rho) + (\lambda \rho^2 - n^2)P(\rho) = 0$$

n阶贝赛尔方程



学生
$$\sqrt{\lambda} \rho$$
 并记 $F(r) = P(\frac{r}{\sqrt{\lambda}})$
则有

$$F'(r) = P'(\rho) \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

$$= P'(\rho) \frac{r}{\sqrt{\lambda}} \frac{1}{r} \Rightarrow rF'(r) = \rho P'(\rho)$$

$$F''(r) = P''(\rho) (\frac{1}{\sqrt{\lambda}})^2$$

$$= P''(\rho) (\frac{r}{\sqrt{\lambda}})^2 \frac{1}{r^2} \Rightarrow r^2 F''(r) = \rho^2 P''(\rho)$$

 $=P''(\rho)(\frac{r}{\sqrt{\lambda}})^2\frac{1}{r^2} \Rightarrow r^2F''(r) = \rho^2P''(\rho)$

 $\rho^{2}P''(\rho) + \rho P'(\rho) + (\lambda \rho^{2} - n^{2})P(\rho) = 0 (5.11)$

方程(5.11)变为 $r^{2}F''(r)+rF'(r)+(r^{2}-n^{2})F(r)=0$ 这是 n 阶贝赛尔方程的标准型。 二 说明 一这个方程是变系数的二阶线性常微分方程, 它的解称为贝赛尔函数。

在描述柱形域 (或圆形域) 中发生的各种 物理现象时,贝赛尔函数起着重要的作用, 因此,也称之为柱函数.





$V_{|_{\rho=R}}=0,0\leq\theta\leq2\pi$ (5.8) $\Rightarrow P(R)=0$ 圆盘内温度u是有限的 十特别地,u(0,0,t)是有限的 $\Rightarrow |P(0)|<+\infty$ 所以,原定解问题归结为: 自参迎予条件 求贝赛尔方程(5.11)在条件(5.12)下的 特征值与特征函数。





