第五章 贝赛尔函数

在第二章，我们用分离变量法求解了一些定解问题． 在§2.3，我们将方程化为极坐标系下的方程， 经过分离变量后，就会出现变系数的线性常微分方程。

由于我们当时考虑的是圆盘在稳恒状态下的温度分布,所以，得到了欧拉方程。

如果不是考虑稳恒状态而是考虑瞬时状态，就会得到一种特殊类型的常微分方程。

本章我们将通过在柱坐标系中对定解问题进行分离变量，引出贝赛尔方程，接着我们来讨论它的解的一些性质。下面将会看到：在一般情况下，贝赛尔方程的解不能用初等函数表出，这就导入一类特殊函数，称为贝赛尔函数。

贝赛尔函数具有一系列性质。

在求解数学物理方程时主要用的是它的正交完备性。

§ 5.1 贝赛尔方程的引出

下面考虑圆盘的瞬时温度分布问题。

问题：

一个半径为 R 的薄圆盘，侧面绝缘，若圆盘边界上的温度恒保持为0摄氏度，且初始温度为已知，求圆盘内的瞬时温度分布规律。

解　设圆盘内任一点(x,y) 处 t 时刻的温度为 $u(x,y,t)$,则它满足

上页　下页　返回

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) & (5.1) \\
\qquad\qquad x^2 + y^2 < R^2, \quad t > 0 & \\
u|_{t=0} = \varphi_0(x, y), & (5.2) \\
\qquad\qquad x^2 + y^2 \le R^2 & \\
u|_{x^2+y^2=R^2} = 0, & (5.3)
\end{cases}
$$

之前为稳态
now求瞬时

下面来求这个定解问题的解。

用分离变量法。

令$u(x,y,t)=V(x,y)T(t)$

则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial x}T(t) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}T(t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial V}{\partial y}T(t) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}T(t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=V\,T'(t)$$

代入方程(5.1)得

$$VT' = a^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}T + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}T\right)$$

$$VT' = a^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)T$$

令 $$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}}{V} = -\lambda \quad (\lambda > 0)$$

由此得 $$T'(t) + a^2\lambda T(t) = 0 \qquad (5.4)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \lambda V = 0 \qquad (5.5)$$

$$T'(t)+a^2\lambda T(t)=0 \qquad (5.4)$$

解得

$$T(t)=Ae^{-a^2\lambda t}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\lambda V=0 \qquad (5.5)$$

(5.5)称为亥姆霍兹 (Helmholtz) 方程。

条件(5.3),即

$$V\big|_{x^2+y^2=R^2}=0 \qquad (5.6)$$

为了求出方程(5.5)满足条件(5.6)的解,
我们将方程(5.5)化为极坐标系下的方程。

$$\because \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial \rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}$$

$$=\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}$$

$\therefore$ **方程(5.5)变为**

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}+\lambda V=0$$

条件(5.6)变为

$$V\big|_{\rho=R}=0$$

这样，求方程(5.5)满足条件(5.6)的解即下面定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial \rho^2}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial V}{\partial \rho}+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}+\lambda V=0 & (5.7) \\ \rho<R\ ,\quad 0\le\theta\le 2\pi & \\ V\big|_{\rho=R}=0 \qquad ,0\le\theta\le 2\pi & (5.8) \end{cases}$$

用分离变量法. 令 $V(\rho,\theta)=P(\rho)\Theta(\theta)$

则 $\dfrac{\partial V}{\partial \rho}=P'(\rho)\Theta(\theta)$ $\qquad \dfrac{\partial^2 V}{\partial \rho^2}=P''(\rho)\Theta(\theta)$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}=P(\rho)\Theta''(\theta)$$

上页 下页 返回

代入(5.7)得

$$P''(\rho)\Theta(\theta)+\frac{1}{\rho}P'(\rho)\Theta(\theta)+\frac{1}{\rho^2}P(\rho)\Theta''(\theta)$$

$$+\lambda P(\rho)\Theta(\theta)=0$$

$$\left[P''(\rho)+\frac{1}{\rho}P'(\rho)+\lambda P(\rho)\right]\Theta(\theta)=-\frac{1}{\rho^2}P(\rho)\Theta''(\theta)$$

令

$$\frac{\rho^2P''(\rho)+\rho P'(\rho)+\lambda\rho^2P(\rho)}{P(\rho)}=\frac{-\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}=\mu$$

即

$$\Theta''(\theta)+\mu\ \Theta(\theta)=0 \qquad (5.9)$$

$$\rho^2P''(\rho)+\rho P'(\rho)+\lambda\rho^2P(\rho)=\mu\ P(\rho)$$

$$\rho^2P''(\rho)+\rho P'(\rho)+(\lambda\rho^2-\mu)P(\rho)=0 \qquad (5.10)$$

$\because\ u(x,y,t)$ 是单值函数

$\therefore\ V(x,y)$ 也是单值函数

在极坐标下，(ρ,θ) 与 $(\rho,\theta+2\pi)$ 表示同一点

$\therefore$ 应有 $V(\rho,\theta)=V(\rho,\theta+2\pi)$

即 $\Theta(\theta)=\Theta(\theta+2\pi)$

即: $\Theta(\theta)$ 是以 2π 为周期的周期函数

而方程(5.9)的解是

$$\Theta(\theta)=B_1\cos\sqrt{\mu}\,\theta+B_2\sin\sqrt{\mu}\,\theta$$

$$\therefore\quad n\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}=2\pi$$

解得

$$\mu=n^2\qquad(n=0,1,2,\ldots)$$

即

$$\mu=0,1^2,2^2,\ldots,n^2,\ldots$$

对应于 $\mu = n^2 \quad (n = 0,1,2,\ldots)$

有 $\Theta(\theta) = \dfrac{a_0}{2}$

$$\Theta_n(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta$$

$$(n = 1,2,\ldots)$$

以 $\mu = n^2$ 代入(5.10),得

$$\rho^2 P''(\rho) + \rho P'(\rho) + (\lambda\rho^2 - n^2)P(\rho) = 0 \qquad (5.11)$$

n阶贝赛尔方程

上页 下页 返回

$$\rho^2 P''(\rho) + \rho P'(\rho) + (\lambda\rho^2 - n^2)P(\rho) = 0 \quad (5.11)$$

令 $r = \sqrt{\lambda}\,\rho$ 并记 $F(r) = P(\frac{r}{\sqrt{\lambda}})$

则有

$$F'(r) = P'(\rho)\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

$$= P'(\rho)\frac{r}{\sqrt{\lambda}}\frac{1}{r} \Rightarrow rF'(r) = \rho P'(\rho)$$

$$F''(r) = P''(\rho)(\frac{1}{\sqrt{\lambda}})^2$$

$$= P''(\rho)(\frac{r}{\sqrt{\lambda}})^2\frac{1}{r^2} \Rightarrow r^2F''(r) = \rho^2 P''(\rho)$$

方程(5.11)变为

$$r^2F''(r)+rF'(r)+(r^2-n^2)F(r)=0$$

这是 n 阶贝赛尔方程的标准型。

说明

这个方程是变系数的二阶线性常微分方程，它的解称为贝赛尔函数。

在描述柱形域（或圆形域）中发生的各种物理现象时，贝赛尔函数起着重要的作用，因此，也称之为柱函数.

$$\left.\begin{array}{l} V\big|_{\rho=R} = 0\ ,0 \le \theta \le 2\pi\ \text{(5.8)}\ \Rightarrow P(R) = 0 \\ \text{圆盘内温度}u\text{是有限的} \\ \text{特别地，}u(0,0,t)\text{是有限的} \Rightarrow |P(0)| < +\infty \end{array}\right\}\text{(5.12)}$$

所以，原定解问题归结为： 自然边界条件

求贝赛尔方程(5.11)在条件(5.12)下的特征值与特征函数。