§5.2　贝赛尔方程的求解

上页　下页　返回

上一节，我们从解决圆盘的瞬时温度分布问题引出了贝赛尔方程， 本节，我们来讨论这个方程的解法。

按惯例， 自变量仍以 x 表示，

以 y 表示 x 的函数，

这样，n 阶贝赛尔方程为

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-n^2)y=0 \qquad (5.13)$$

这里，n 可以为任意实数或复数。

在本课程中，n 只限于实数，由于方程中只出现了n^2 项，所以，在讨论时，不妨先假定$n \geq 0$.

设方程(5.13)有幂级数形式的解

$$y = x^c(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k + \ldots)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{c+k} \qquad (a_0 \neq 0\ .) \qquad (5.14)$$

其中 c 和 a_k 待定。

上页 下页 返回

$$\frac{dy}{dx} = (\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{c+k})' = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k x^{c+k})'$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (c+k) a_k x^{c+k-1}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = [\ \sum_{k=0}^{\infty} (c+k) a_k x^{c+k-1}\ ]'$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} [(c+k) a_k x^{c+k-1}]'$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} [(c+k)(c+k-1) a_k x^{c+k-2}$$

上页 下页 返回

代入方程(5.13)，得

$$x^2\sum_{k=0}^{\infty}[(c+k)(c+k-1)a_k x^{c+k-2}$$

$$+x\sum_{k=0}^{\infty}(c+k)a_k x^{c+k-1}$$

$$+(x^2-n^2)\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^{c+k} \quad =0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(c+k)(c+k-1)+(c+k)-n^2]a_k x^{c+k}$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^{c+k+2} \quad =0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(c+k)(c+k-1)+(c+k)-n^2]a_k x^{c+k}$$

$$=(c^2-n^2)a_0x^c+[(c+1)^2-n^2]a_1x^{c+1}$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}[(c+k)(c+k-1)+(c+k)-n^2]a_k x^{c+k}$$

$$=(c^2-n^2)a_0x^c+[(c+1)^2-n^2]a_1x^{c+1}$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}[(c+k)^2-n^2]a_k x^{c+k}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{c+k+2}$$

令$m = k + 2$

$$= \sum_{m=2}^{\infty} a_{m-2} x^{c+m-2+2}$$

$$= \sum_{m=2}^{\infty} a_{m-2} x^{c+m}$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^{c+k}$$

$$(c^2-n^2)a_0x^c+[(c+1)^2-n^2]a_1x^{c+1}$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}[(c+k)^2-n^2]a_k\underline{x^{c+k}}$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}a_{k-2}\underline{x^{c+k}} = 0$$

线性无关

$$(c^2-n^2)a_0x^c+[(c+1)^2-n^2]a_1x^{c+1}$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}\{[(c+k)^2-n^2]a_k+a_{k-2}\}x^{c+k} = 0$$

上页 下页 返回

$$\therefore \quad (c^2 - n^2)a_0 = 0 \quad \Rightarrow c^2 - n^2 = 0 \therefore \ c = \pm n$$

代入

$$[(c+1)^2 - n^2]a_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 0$$

$$[(c+k)^2 - n^2]a_k + a_{k-2} = 0 \quad (k = 2,3,\ldots)$$

暂取 $c = n$ 代入上式，得

$$a_k = \frac{-a_{k-2}}{k(2n+k)} \qquad (k = 2,3,\ldots) \qquad (*)$$

$\because \quad a_1 = 0$

$\therefore$ 由(*)式得 $a_3 = a_5 = a_7 = \ldots = 0$

$$\therefore \quad a_1 = a_3 = a_5 = a_7 = \ldots = 0$$

$a_2, a_4, a_6, a_8, \ldots$ **都可由** a_0 **表示，即**

$$a_2 = \frac{-a_0}{2(2n+2)}$$

$$a_4 = \frac{-a_2}{4(2n+4)} = \frac{-1}{4(2n+4)} \frac{-a_0}{2(2n+2)}$$

$$= \frac{(-1)^2 a_0}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)}$$

$$a_6 = \frac{-a_4}{6(2n+6)} = \frac{-1}{6(2n+6)} \frac{(-1)^2 a_0}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)}$$

$$= \frac{(-1)^3 a_0}{2 \cdot 4 \cdot 6(2n+2)(2n+4)(2n+6)}$$

……

递推地，有

$$a_{2m}=\frac{(-1)^m a_0}{2\cdot 4\cdot 6\cdots\cdot 2m(2n+2)(2n+4)(2n+6)\dots(2n+2m)}$$

$$=\frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}m!(n+1)(n+2)(n+3)\dots(n+m)}$$

级数(5.14) 为

$$y=x^c(a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_kx^k+\dots)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}a_{2m}x^{n+2m}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}m!(n+1)(n+2)(n+3)\dots(n+m)}x^{n+2m}$$

每取定 a_0 一个值，就得到方程(5.13)的一个特解.

现在，取 $a_0=\dfrac{1}{2^n\Gamma(n+1)}$ 得

$$a_{2m}=\frac{(-1)^m}{2^{2m}m!(n+1)(n+2)(n+3)\dots(n+m)}\frac{1}{2^n\Gamma(n+1)}$$

$$=\frac{(-1)^m}{2^{n+2m}m!(n+m)\dots(n+3)(n+2)(n+1)}\frac{1}{\Gamma(n+1)}$$

$$=\frac{(-1)^m}{2^{n+2m}m!\Gamma(n+m+1)}$$

上页 下页 返回

即

$$a_{2m}=\frac{(-1)^m}{2^{n+2m}m!\Gamma(n+m+1)} \tag{5.15}$$

将(5.15)代入(5.14),得 (5.13)的一个特解

$$y_1=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^{n+2m}m!\Gamma(n+m+1)}x^{n+2m} \quad (n\geq 0)$$

用比值审敛法可以判定：这个级数在整个数轴上收敛．这个级数所确定的函数称为n阶第一类贝赛尔函数,记作$J_n(x)$ 即

上页 下页 返回

$$J_n(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^{n+2m}m!\Gamma(n+m+1)}x^{n+2m}\qquad(n\geq 0)$$

(5. 16)

当 n 为正整数或零时， $\Gamma(n+m+1)=(n+m)!$

因而有

$$J_n(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^{n+2m}m!(n+m)!}x^{n+2m}\qquad(n=0,1,2,\ldots)$$

(5. 17)

取 $c=-n$ 时， $n=0,-1,-2,-3-\cdots$ $\frac{1}{\Gamma(n)}=$

用同样方法可得(5.13)的另一特解

$$J_{-n}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^{-n+2m}m!\Gamma(-n+m+1)}x^{-n+2m}$$

$$J_{-N}(x)=\sum_{m=N}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^{-N+2m}m!\Gamma(-N+m+1)}x^{-N+2m}$$

$(n=1,2,\ldots)$ **(5. 18)**

比较(5.16)与(5.18)可见： 只要将(5.16)右端中的 n 换为 $-n$ ， 就得到(5.18).

$\therefore$ **不论 n 是正数还是负数，**

第一类贝赛尔函数都可统一地由(5.16)表示.

$J_{-N}(x)=(-1)^N J_N(x)$

当 n 不为整数时，

这两个特解 $J_n(x)$ 与 $J_{-n}(x)$ 线性无关

由齐次线性常微分方程的解的结构定理，

得： (5.13)的通解为

$$y = A J_n(x) + B J_{-n}(x) \qquad (5.19)$$

（A、B 为任意常数）

说明 在 n 不为整数的情况，方程(5.13)除了可以写成(5.19)式以外， 还可以写成其它形式。

实际上,只要能够找到该方程另一个与 $J_n(x)$ 线性无关的另一特解，那么这两个特解的线性组合就是(5.13)的通解。与 $J_n(x)$ 线性无关的特解是容易找到的， 例如

取 $A=\cot n\pi$ ，$B=-\csc n\pi$ **得到(5.13)的特解**

$Y_n(x)=\lim\limits_{\alpha\to n}\dfrac{\cos n\pi J_\alpha(x)-J_{-\alpha}(x)}{\sin n\pi}$. ← 否则分母无定义

$$Y_n(x)=\cot n\pi\, J_n(x)-\csc n\pi\, J_{-n}(x)$$

P121. 5.23

$$=\frac{\cos n\pi\, J_n(x)-J_{-n}(x)}{\sin n\pi}\qquad（n\neq\text{整数}）$$

(5. 20)

$Y_n(x)$ 与 $J_n(x)$ 线性无关

$\therefore$ (5.13)的通解为

$$y = A J_n(x) + B Y_n(x) \tag{5.21}$$

（A、B 为任意常数）

由(5.20)式确定的函数

$$Y_n(x) = \frac{\cos n\pi \, J_n(x) - J_{-n}(x)}{\sin n\pi}$$

分类要记住

称为第二类贝赛尔函数或牛曼函数。

上页 下页 返回

作业

p127　　1, 2, 3

上页　下页　返回