§5.3

n为整数时贝赛尔方程的通解

给了 n 阶贝赛尔方程

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-n^2)y=0 \qquad (5.13)$$

从上一节，我们知道：

$J_n(x)$　　$J_{-n}(x)$　是(5.13)的两个特解

当 n不是整数时，

$J_n(x)$ 与 $J_{-n}(x)$ 线性无关

$\therefore$ 当 n不是整数时，贝赛尔方程(5.13)的通解为：

$$y=AJ_n(x)+BJ_{-n}(x) \qquad (5.19)$$

当 n是整数时，贝赛尔方程(5.13)的通解怎么求?

首先，我们证明：

当 n是整数时，$J_n(x)$ 与 $J_{-n}(x)$ 线性相关。

证　不妨设 $n = N$（N为正整数）

（若N为负正整数，证明是一样的）

按照 Γ 函数的扩充定义，

$$当 n = 0,-1,-2,-3,\ldots 时，\frac{1}{\Gamma(n)} = 0$$

(参见教材p193)

$$J_{-n}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^{-n+2m}m!\Gamma(-n+m+1)}x^{-n+2m}$$

$$(n=1,2,\ldots) \qquad (5.18)$$

$n=N$ 代入，得

$$J_{-N}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^{-N+2m}m!\Gamma(-N+m+1)}x^{-N+2m}$$

$$=\sum_{m=N}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^{-N+2m}m!\Gamma(-N+m+1)}x^{-N+2m}$$

$$=(-1)^N\frac{x^N}{2^N N!}+(-1)^{N+1}\frac{x^{N+2}}{2^{N+2}(N+1)!}+(-1)^{N+2}\frac{x^{N+4}}{2^{N+4}(N+2)!\,2!}+\ldots$$

$$= (-1)^N \left[\frac{x^N}{2^N N!} - \frac{x^{N+2}}{2^{N+2}(N+1)!} + \frac{x^{N+4}}{2^{N+4}(N+2)!\,2!} + \ldots\right]$$

$$= (-1)^N \; J_N(x)$$

$$J_{-N}(x) = (-1)^N \; J_N(x)$$

$\therefore J_N(x)$ 与 $J_{-N}(x)$ 线性相关。 证毕.

由于 $J_{-N}(x)$ 与 $J_N(x)$ 线性相关，所以，为了得到贝赛尔方程的通解，还需求出一个与 $J_N(x)$ 线性无关的特解。

上页 下页 返回

自然想到第二类贝赛尔函数 $Y_n(x)$，但是，

当 n 是整数时，$Y_n(x)$ 右端无意义。

$$Y_n(x)=\frac{\cos n\pi\, J_n(x)-J_{-n}(x)}{\sin n\pi} \qquad (5.20)$$

下面修改 $Y_n(x)$ 的定义为

$$Y_n(x)=\lim_{\alpha\to n}\frac{\cos\alpha\pi\, J_\alpha(x)-J_{-\alpha}(x)}{\sin\alpha\pi} \qquad (5.22)$$

$$\lim_{\alpha\to n}[\cos\alpha\pi\, J_\alpha(x) - J_{-\alpha}(x)]$$

$$= \cos n\pi\, J_n(x) - J_{-n}(x)$$

$$= (-1)^n J_n(x) - J_{-n}(x) = 0$$ （n整数）

$$\lim_{\alpha\to n}\sin\alpha\pi = 0$$

$$Y_n(x) = \lim_{\alpha\to n}\frac{\cos n\pi\, J_\alpha(x) - J_{-\alpha}(x)}{\sin\alpha\pi}$$ $(\frac{0}{0})$型

用洛必达法则，得

$Y_0(x) =$ $C = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots -\ln n)$

$$\frac{2}{\pi}J_0(x)(\ln\frac{x}{2}+c)-\frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(\frac{x}{2})^{2m}}{(m!)^2}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{k+1}$$

$Y_n(x) =$

$$\frac{2}{\pi}J_n(x)(\ln\frac{x}{2}+c)-\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(n-m-1)!}{(m!)}(\frac{x}{2})^{-n+2m}$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(\frac{x}{2})^{n+2m}}{(m!)(n+m)!}\left(\sum_{k=0}^{N+m-1}\frac{1}{k+1}+\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{k+1}\right)$$

$$(n=1,2,3,\ldots) \qquad (5.23)$$

P_{127}

其中C为欧拉常数。

上页 下页 返回

由 $Y_n(x)$ 的定义知：修改定义后的 $Y_n(x)$

是贝赛尔方程的特解，并且它与 $J_n(x)$

线性无关。$(\because J_n(0)=0, Y_n(0)=\infty)$ 不定

$\therefore$ 当 n 是整数时贝赛尔方程(5.13)的通解

$$y = AJ_n(x) + BY_n(x)$$

综上所述，不论 n 是否为整数，

贝赛尔方程(5.13)的通解都是：

$$y = AJ_n(x) + BY_n(x)$$

其中，A, B 任意，n 为任意实数。