数学物理方程期末复习之一起背公式

（*ball ball* 大家不要纠结推导）

第一章 典型方程与定解问题的推导

1. 波动方程

一维：$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})$，二维：$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})$，三维：$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2})$

2. 热传导方程

一维：$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})$，二维：$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})$，三维：$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2})$

3. 拉普拉斯方程

二维：$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，三维：$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$

极坐标：$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho})+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0$，$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0$（建议背这个）

球坐标：$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0$

4. 三类边界条件

波动方程： 第一类边界条件：固定端，$u|_{x=a}=0$ 或 $u(a,t)=0$

第二类边界条件：自由端，$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=a}=0$ 或 $u_x(a,t)\Big|_{x=a}=0$

第三类边界条件：弹性支承端，$(\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma u)\Big|_{x=a}=0$

热传导方程： 第一类边界条件：$u\Big|_s=f$

第二类边界条件：$\frac{\partial u}{\partial n}|_s=0$

第三类边界条件：$(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u)|_s=\sigma u_1|_s$

【说明】

三类边界条件的一般形式：

第一类边界条件：边界上直接给出未知函数的数值：$u|_s=f_1$

第二类边界条件：边界上给出未知函数沿边界外法向量的方向导数：$\frac{\partial u}{\partial n}|_s = f_2$

第三类边界条件:边界上给出未知函数及其沿边界外法向量方向导数线性组合值即：$(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u)|_s = f_3$

第三章 行波法与积分变换法

1. 达朗贝尔公式

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi$$

2. 二阶线性偏微分方程的特征方程以及方程类型的判断

$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0$对应的特征方程为

$$A(dy)^2 - 2Bdxdy + C(dx)^2 = 0$$

$B^2 - AC > 0$：双曲型，如波动方程

$B^2 - AC = 0$：抛物型，如热传导方程

$B^2 - AC < 0$：椭圆型，如拉普拉斯方程，泊松方程

3. 傅里叶变换和拉普拉斯变换的公式以及性质（详见信号与系统，谢谢）

第五章 贝塞尔函数

1. *n* 阶贝塞尔方程

$$x^2\frac{d^2 y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0$$

2. *n* 阶贝塞尔函数与贝塞尔方程的通解

n 阶第一类贝塞尔函数：$J_n(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2^{n+2m} m!\Gamma(n+m+1)} x^{n+2m} (n \geq 0)$

n 阶第二类贝塞尔函数：$Y_n(x)\frac{\cos n\pi\, J_n(x) - J_{-n}(x)}{\sin n\pi}$

（1）n 不为整数时，贝塞尔方程的通解 $y = A J_n(x) + B J_{-n}(x)$

（2）n 为整数时，贝塞尔方程的通解 $y = AJ_n(x) + BY_n(x)$

（3）n 无论是整数还是非整数，统一的通解形式为 $y = AJ_n(x) + BY_n(x)$

3. 贝塞尔函数的递推公式

$\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x)$，$\frac{d}{dx}[x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x)$

$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x)$，$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J_n'(x)$

（第二类也有对应的一套公式）

4. 贝塞尔函数的正交性

特征函数系 { $J_n(\frac{\mu_m^{(n)}}{R} r)$ } $(m = 1,2,....)$ 为正交函数系，$\mu_m^{(n)}$ 为 $J_n(x)$ 的非负零点

$$\int_0^R rJ_n(\frac{\mu_m^{(n)}}{R} r)J_n(\frac{\mu_k^{(n)}}{R} r)dr = \begin{cases} 0, & m \neq k \\ \frac{R^2}{2} J^2{}_{n-1}(\mu_m^{(n)}) = \frac{R^2}{2} J^2{}_{n+1}(\mu_m^{(n)}), & m = k \end{cases}$$

5. 函数展开成贝塞尔函数的级数

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_n(\frac{\mu_m^{(n)}}{R} r)$$

第六章 勒让德多项式

1. 勒让德方程

$$(1-x^2)\frac{d^2 y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0$$

2. *n* 次勒让德多项式

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{M} (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!} x^{n-2m}.M = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n\text{为偶数} \\ \frac{n-1}{2}, & n\text{为奇数} \end{cases}$$

罗德里格斯表达式：$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx_n}(x^2 - 1)^n$（这个貌似更好记）

几个特殊阶次的勒让德多项式(常考用它们来表示一些简单函数)

$P_0(x)=1$，$P_1(x)=x$，$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$，$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$

3. 勒让德多项式的正交性

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \frac{2}{2n+1}, & m=n\end{cases}$$

4. 函数展开成勒让德多项式的级数

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x),(-1<x<1)$，其中 $C_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx,(n=0,1,2,....)$

$f(\cos\theta)=\sum_{k=0}^{\infty} C_k P_k(\cos\theta),(0<\theta<\pi)$，其中 $C_n=\frac{2n+1}{2}\int_{0}^{\pi} f(\cos\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta$

【说明】若给定多项式函数，可以直接根据最高次幂，通过待定系数法利用 $P_0(x)=1$，$P_1(x)=x$，$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$，$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$……等进行展开，无需利用正交性求积分

数学物理方程期末复习补充知识

1. 勒让德方程的通解

n 不是整数时，勒让德方程在区间 $[-1,1]$ 上没有有界解。

n 为整数时，勒让德方程的通解 $y = C_1 P_n(x) + C_2 Q_n(x)$。其中 $P_n(x)$ 为勒让德多项式；$Q_n(x)$ 为无穷级数，称为第二类勒让德函数，在区间 $[-1,1]$ 上无界。

2. 欧拉方程的通解

变系数二阶线性常微分方程 $x^2 \dfrac{d^2 y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} - n^2 y = 0$ 称为欧拉方程

欧拉方程的解法：做变量代换，令 $x = e^t$， $y = y(x) = y(e^t) = z(t)$

则 $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dx}\dfrac{dx}{dt} = y'e^t = x\dfrac{dy}{dx}$， $\dfrac{d^2 y}{dt^2} = \dfrac{d(xy')}{dx}\dfrac{dx}{dt} = (y' + xy'')e^t = x^2 \dfrac{d^2 y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx}$

因此原方程可以化为 $\dfrac{d^2 y}{dt^2} - n^2 y = 0$

讨论：$\begin{cases} n = 0,\ z_0(t) = c_0 + d_0 t,\ y_0(x) = c_0 + d_0 \ln x \\ n > 0,\ r^2 - n^2 = 0,\ r = \pm n,\ z_n(t) = c_n e^{nt} + d_n e^{-nt},\ y_n(x) = c_n x^n + d_n x^{-n} \end{cases}$

【练习】求方程 $r^2 R''(r) + 2rR'(r) - n(n+1)R(r) = 0$ 的通解（此结论可以记住）

做变量代换，令 $r = e^t$， $R = R(r) = R(e^t) = z(t)$

则 $\dfrac{dR}{dt} = \dfrac{dR}{dr}\dfrac{dr}{dt} = R'e^t = r\dfrac{dR}{dr}$， $\dfrac{d^2 R}{dt^2} = \dfrac{d(rR')}{dx}\dfrac{dx}{dt} = (R' + rR'')e^t = r^2 \dfrac{d^2 R}{dr^2} + r\dfrac{dR}{dr}$

因此原方程可以化为 $\dfrac{d^2 R}{dt^2} + \dfrac{dR}{dt} - n(n+1)R = 0$，为常系数线性微分方程

特征方程为 $\lambda^2 + \lambda - n(n+1) = 0$，$(\lambda - n)[\lambda + (n+1)] = 0$，特征根 $\lambda = n$，$\lambda = -(n+1)$

$z_n(t) = c_n e^{nt} + d_n e^{-(n+1)t}$，$R_n(r) = c_n r^n + d_n r^{-(n+1)}$