# §5 贝赛尔函数的递推公式

不同阶的贝赛尔函数之间存在着一定的联系，反映这一联系的就是递推公式。

上页 下页 返回

n为整数!

$$J_n(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^{n+2m}m!(n+m)!}x^{n+2m}\qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

(5. 17)

取 $n=0$ 得

$$J_0(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^{2m}m!m!}x^{2m}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^{2m}(m!)^2}x^{2m}$$

取 $n=1$ 得

$$J_1(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^{1+2m}m!(1+m)!}x^{1+2m}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^{2m+1}m!(m+1)!}x^{2m+1}$$

$$\frac{d}{dx}J_0(x)=\frac{d}{dx}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^{2m}(m!)^2}x^{2m}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\frac{(-1)^m}{2^{2m}(m!)^2}x^{2m}$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^{2m}m!m!}2m\,x^{2m-1}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^{2m-1}(m-1)!m!}x^{2m-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k+1}k!(k+1)!}x^{2k+1}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{2^{2m+1}m!(m+1)!}x^{2m+1}$$

令$k=m-1$

$$=-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^{2m+1}m!(m+1)!}x^{2m+1}=-J_1(x)$$

$$\frac{d}{dx}J_0(x) = -J_1(x) \qquad (5.24)$$

$$\frac{d}{dx}[xJ_1(x)] = \frac{d}{dx}[x\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^{2m+1}m!(m+1)!}x^{2m+1}]$$

$$= \frac{d}{dx}[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^{2m+1}m!(m+1)!}x^{2m+2}]$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}[\frac{d}{dx}\frac{(-1)^m}{2^{2m+1}m!(m+1)!}x^{2m+2}]$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^{2m+1}m!(m+1)!}(2m+2)x^{2m+1}$$

上页 下页 返回

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^{2m}m!m!}x^{2m+1}=x\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^{2m}(m!)^2}x^{2m}=xJ_0(x)$$

即

$$\frac{d}{dx}[xJ_1(x)]=xJ_0(x) \qquad (5.25)$$

将以上结果推广，对任意 $n\geq 0$ 有

$$\frac{d}{dx}[x^nJ_n(x)]=\frac{d}{dx}[x^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^{n+2m}m!\Gamma(n+m+1)}x^{n+2m}]$$

$$=\frac{d}{dx}[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^{n+2m}m!\Gamma(n+m+1)}x^{2n+2m}]$$

上页 下页 返回

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left[ \frac{(-1)^m}{2^{n+2m} m!\Gamma(n+m+1)} x^{2n+2m} \right]$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{n+2m} m!\Gamma(n+m+1)} (2n+2m) x^{2n+2m-1}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{n+2m-1} m!\Gamma(n+m)} x^{2n+2m-1}$$

$(n+m)! = \Gamma(n+m)$

$n$ 为整数

$$= x^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{n+2m-1} m!\Gamma(n+m)} x^{n+2m-1}$$

$$= x^n J_{n-1}(x)$$

上页 下页 返回

即

$$\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x) \quad (n \geq 0) \quad (5.26) ①$$

$n x^{n-1} J_n(x) + x^n J_n'(x)$

同理可得

$$\frac{d}{dx}[x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x) \quad (n \geq 0) \quad (5.27) ②$$

将(5.26)化简得

$(①-②)x^{2n} = 2n x^{n-1} J_n(x)$

$= x^n J_{n-1}(x) + x^n J_{n+1}(x)$

$$xJ_n'(x) + nJ_n(x) = xJ_{n-1}(x) \quad (1)$$

将(5.27)化简得

$$xJ_n'(x) - nJ_n(x) = -xJ_{n+1}(x) \quad (2)$$

上页 下页 返回

(1) - (2)，得

$$J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)=\frac{2}{x}nJ_n(x) \qquad (5.28)$$

(1) + (2)，得

$$J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)=2J_n{}'(x) \qquad (5.29)$$

以上(5.26) - (5.29)就是贝赛尔函数的递推公式,它们在有关贝赛尔函数的分析运算中非常有用.

上页 下页 返回

特别是，应用(5.28)可以用较低阶的贝赛尔函数把较高阶的贝赛尔函数表示出来，因此，如果我们已有零阶和一阶贝赛尔函数表，那么，根据(5.28)就可计算出任意正整数阶的贝赛尔函数的值.

第二类贝赛尔函数也具有与第一类贝赛尔函数相同的递推公式：

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}[x^n Y_n(x)] = x^n Y_{n-1}(x) \\ \dfrac{d}{dx}[x^{-n} Y_n(x)] = -x^{-n} Y_{n+1}(x) \\ Y_{n-1}(x) + Y_{n+1}(x) = \dfrac{2}{x} n Y_n(x) \\ Y_{n-1}(x) - Y_{n+1}(x) = 2Y_n'(x) \end{cases} \quad (n \geq 0) \quad (5.30)$$

上页 下页 返回

作为递推公式的应用，我们来考虑半奇数阶的贝赛尔函数。

先计算 $J_{\frac{1}{2}}(x)$ ，$J_{-\frac{1}{2}}(x)$

$$J_n(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^{n+2m}m!\Gamma(n+m+1)}x^{n+2m} \quad (n\ge 0) \qquad (5.16)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m \quad x^{\frac{1}{2}+2m}}{2^{\frac{1}{2}+2m}\quad m!(n+m+1)}$$

以 $n=\dfrac{1}{2}$ 代入(5.16)得

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(\frac{3}{2}+m)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2m}$$

P130.mid

上页 下页 返回

$$\Gamma(\frac{3}{2}+m)=\Gamma(m+\frac{1}{2}+1)=(m+\frac{1}{2})\Gamma(m+\frac{1}{2})$$

$$=(m+\frac{1}{2})(m-1+\frac{1}{2})\Gamma(m-\frac{1}{2})=\cdots\cdots$$

$$=(m+\frac{1}{2})(m-1+\frac{1}{2})\ldots(2+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2})\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})$$

$$=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(2m-1)(2m+1)}{2^{m+1}}\Gamma(\frac{1}{2})$$

$$=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(2m-1)(2m+1)}{2^{m+1}}\sqrt{\pi}$$

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(\frac{3}{2}+m)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2m}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2m-1)(2m+1)}{2^{\cancel{m}+1}}\sqrt{\pi}}\frac{1}{2^{\frac{1}{2}+\cancel{2}m}}x^{\frac{1}{2}+2m}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2\cdot 4\cdot 6\cdots\cdot 2m\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2m-1)(2m+1)}x^{1+2m}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$$

上页 下页 返回

即

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \qquad (5.31)$$

同理可求得

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x \qquad (5.32)$$

上页 下页 返回

由递推公式(5.28)

$$J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)=\frac{2}{x}nJ_n(x) \qquad (5.28)$$

解得

$$J_{n+1}(x)=\frac{2}{x}nJ_n(x)-J_{n-1}(x)$$

以 $n=\frac{1}{2}$ 代入上式，得

$$J_{\frac{3}{2}}(x)=\frac{2}{x}\frac{1}{2}J_{\frac{1}{2}}(x)-J_{\frac{1}{2}-1}(x)=\frac{1}{x}J_{\frac{1}{2}}(x)-J_{-\frac{1}{2}}(x)$$

$$=\frac{1}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x}-\cos x\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\frac{\sin x - x\cos x}{x}$$

$$= -\ x^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\ \frac{1}{x}\ \ \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,x^{\frac{3}{2}}\,\frac{1}{x}\,\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$\triangleq -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,x^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{x}\,\frac{d}{dx}\right)\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

即

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

同理可得

$$J_{-\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)\left(\frac{\cos x}{x}\right)$$

一般地，有

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$J_{-(n+\frac{1}{2})}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n\left(\frac{\cos x}{x}\right) \tag{5.33}$$

## 注意

$(\frac{1}{x}\frac{d}{dx})^n$是算子记号，它表示算子$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}$连续作用在函数$f(x)$上$n$次，例如

$$(\frac{1}{x}\frac{d}{dx})^2 f(x) = \frac{1}{x}\frac{d}{dx}[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}f(x)]$$

$$(\frac{1}{x}\frac{d}{dx})^2 f(x) \neq \frac{1}{x^2}\frac{d^2}{dx^2}f(x)$$

**注**　由(5.33)可以看出:

**半奇数阶的贝赛尔函数是初等函数.**

# 作业

**P127， 4,5,6,7,9,10**