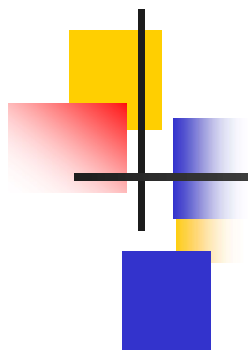


# 通信原理



# 通信原理

## 第10章 数字信号最佳接收



# 第10章 数字信号最佳接收

## • 10.1 数字信号的统计特性

- 以二进制为例研究接收电压的统计特性。
- 假设：通信系统中的噪声是均值为0的带限高斯白噪声，其单边功率谱密度为 $n_0$ ；并设发送的二进制码元为“0”和“1”，其发送概率分别为 $P(0)$ 和 $P(1)$ ，则有

$$P(0) + P(1) = 1$$

- 若此通信系统的基带截止频率小于 $f_H$ ，则根据低通信号抽样定理，接收噪声电压可以用其抽样值表示，抽样速率要求不小于其奈奎斯特速率 $2f_H$ 。
- 设在一个码元持续时间 $T_s$ 内以 $2f_H$ 的速率抽样，共得到 $k$ 个抽样值：，则有 $k = 2f_H T_s$ 。



## 第10章 数字信号最佳接收

- 由于每个噪声电压抽样值都是正态分布的随机变量，故其一维概率密度可以写为

$$f(n_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left(-\frac{n_i^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

式中,  $\sigma_n$  - 噪声的标准偏差;

$\sigma_n^2$  - 噪声的方差, 即噪声平均功率;

$i = 1, 2, \dots, k$ 。

- 设接收噪声电压 $n(t)$ 的 $k$ 个抽样值的 $k$ 维联合概率密度函数为

$$f_k(n_1, n_2, \dots, n_k)$$



## 第10章 数字信号最佳接收

- 由高斯噪声的性质可知，高斯噪声的概率分布通过带限线性系统后仍为高斯分布。所以，带限高斯白噪声按奈奎斯特速率抽样得到的抽样值之间是互不相关、互相独立的。这样，此 $k$ 维联合概率密度函数可以表示为

$$f_k(n_1, n_2, \dots, n_k) = f(n_1)f(n_2)\cdots f(n_k) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_n)^k} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{i=1}^k n_i^2\right)$$

- 当 $k$ 很大时，在一个码元持续时间 $T_s$ 内接收的噪声平均功率可以表示为：

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k n_i^2 = \frac{1}{2f_H T_s} \sum_{i=1}^k n_i^2$$

或者将上式左端的求和式写成积分式，则上式变成

$$\frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} n^2(t) dt = \frac{1}{2f_H T_s} \sum_{i=1}^k n_i^2$$



## 第10章 数字信号最佳接收

- 利用上式关系，并注意到

$$\sigma_n^2 = n_0 f_H$$

式中  $n_0$  - 噪声单边功率谱密度

则前式的联合概率密度函数可以改写为：

$$f(\mathbf{n}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_n)^k} \exp\left[-\frac{1}{n_0} \int_0^{T_s} n^2(t) dt\right]$$

式中

$$f(\mathbf{n}) = f_k(n_1, n_2, \dots, n_k) = f(n_1)f(n_2)\cdots f(n_k)$$

$\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_k)$  -  $k$  维矢量，表示一个码元内噪声的 $k$ 个抽样值。

- 需要注意， $f(\mathbf{n})$ 不是时间函数，虽然式中有时间函数 $n(t)$ ，但是后者在定积分内，积分后已经与时间变量 $t$ 无关。 $\mathbf{n}$ 是一个 $k$ 维矢量，它可以看作是 $k$ 维空间中的一个点。



## 第10章 数字信号最佳接收

- 在码元持续时间 $T_s$ 、噪声单边功率谱密度 $n_0$ 和抽样数 $k$ （它和系统带宽有关）给定后， $f(n)$ 仅决定于该码元期间内噪声的能量：

$$\int_0^{T_s} n^2(t) dt$$

- 由于噪声的随机性，每个码元持续时间内噪声的波形和能量都是不同的，这就使被传输的码元中有一些会发生错误，而另一些则无错。



## 第10章 数字信号最佳接收

- 设接收电压 $r(t)$ 为信号电压 $s(t)$ 和噪声电压 $n(t)$ 之和:

$$r(t) = s(t) + n(t)$$

则在发送码元确定之后, 接收电压 $r(t)$ 的随机性将完全由噪声决定, 故它仍服从高斯分布, 其方差仍为 $\sigma_n^2$ , 但是均值变为 $s(t)$ 。所以, 当发送码元“0”的信号波形为 $s_0(t)$ 时, 接收电压 $r(t)$ 的 $k$ 维联合概率密度函数为

$$f_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_n)^k} \exp\left\{-\frac{1}{n_0} \int_0^{T_s} [r(t) - s_0(t)]^2 dt\right\}$$

式中  $\mathbf{r} = \mathbf{s} + \mathbf{n}$  —  $k$  维矢量, 表示一个码元内接收电压的 $k$ 个抽样值;

$\mathbf{s}$  —  $k$  维矢量, 表示一个码元内信号电压的 $k$ 个抽样值。





## 第10章 数字信号最佳接收

- 同理，当发送码元“1”的信号波形为 $s_1(t)$ 时，接收电压 $r(t)$ 的 $k$ 维联合概率密度函数为

$$f_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_n)^k} \exp\left\{-\frac{1}{n_0} \int_0^{T_s} [r(t) - s_1(t)]^2 dt\right\}$$

- 顺便指出，若通信系统传输的是 $M$ 进制码元，即可能发送 $s_1, s_2, \dots, s_i, \dots, s_M$ 之一，则按上述原理不难写出当发送码元是 $s_i$ 时，接收电压的 $k$ 维联合概率密度函数为

$$f_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_n)^k} \exp\left\{-\frac{1}{n_0} \int_0^{T_s} [r(t) - s_i(t)]^2 dt\right\}$$

仍需记住，以上三式中的 $k$ 维联合概率密度函数不是时间 $t$ 的函数，并且是一个标量，而 $\mathbf{r}$ 仍是 $k$ 维空间中的一个点，是一个矢量。



# 第10章 数字信号最佳接收

## • 10.2 数字信号的最佳接收

- “最佳”的准则：错误概率最小
- 产生错误的原因：暂不考虑失真的影响，主要讨论在二进制数字通信系统中如何使噪声引起的错误概率最小。
- 判决规则

设在一个二进制通信系统中发送码元“1”的概率为 $P(1)$ ，发送码元“0”的概率为 $P(0)$ ，则总误码率 $P_e$ 等于

$$P_e = P(1)P_{e1} + P(0)P_{e0}$$

式中

$P_{e1} = P(0/1)$  - 发送“1”时，收到“0”的条件概率；

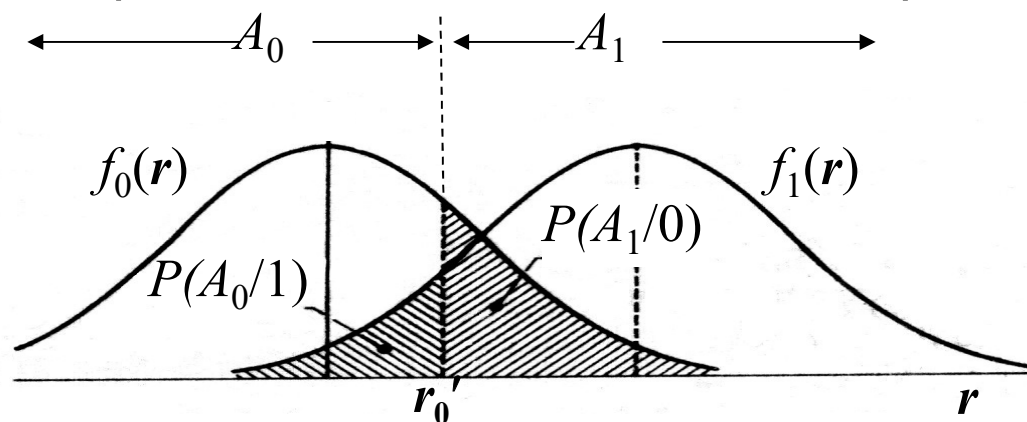
$P_{e0} = P(1/0)$  - 发送“0”时，收到“1”的条件概率；

上面这两个条件概率称为错误转移概率。

## 第10章 数字信号最佳接收

按照上述分析，接收端收到的每个码元持续时间内的电压可以用一个 $k$ 维矢量表示。接收设备需要对每个接收矢量作判决，判定它是发送码元“0”，还是“1”。

由接收矢量决定的两个联合概率密度函数 $f_0(r)$ 和 $f_1(r)$ 的曲线画在下图中（在图中把 $r$ 当作1维矢量画出。）：



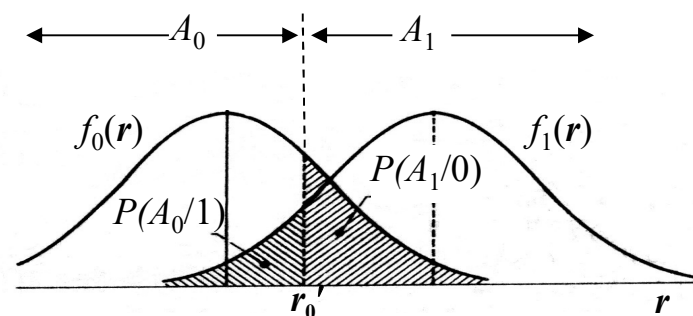
可以将此空间划分为两个区域 $A_0$ 和 $A_1$ ，其边界是 $r_0'$ ，并将判决规则规定为：

若接收矢量落在区域 $A_0$ 内，则判为发送码元是“0”；

若接收矢量落在区域 $A_1$ 内，则判为发送码元是“1”。

## 第10章 数字信号最佳接收

显然，区域 $A_0$ 和区域 $A_1$ 是两个互不相容的区域。当这两个区域的边界 $r_0'$ 确定后，错误概率也随之确定了。



这样，总误码率可以写为

$$P_e = P(1)P(A_0/1) + P(0)P(A_1/0)$$

式中， $P(A_0/1)$ 表示发送“1”时，矢量 $r$ 落在区域 $A_0$ 的条件概率  
 $P(A_1/0)$ 表示发送“0”时，矢量 $r$ 落在区域 $A_1$ 的条件概率

这两个条件概率可以写为： $P(A_1/0) = \int_{A_1} f_0(\square) d\square$

$$P(A_0/1) = \int_{A_0} f_1(r) dr$$

这两个概率在图中分别由两块阴影面积表示。

# 第10章 数字信号最佳接收

将上两式代入

$$P_e = P(1)P(A_0/1) + P(0)P(A_1/0)$$

得到

$$P_e = P(1) \int_{A_0} f_1(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + P(0) \int_{A_1} f_0(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

参考上图可知, 上式可以写为

$$P_e = P(1) \int_{-\infty}^{r_0'} f_1(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + P(0) \int_{r_0'}^{\infty} f_0(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

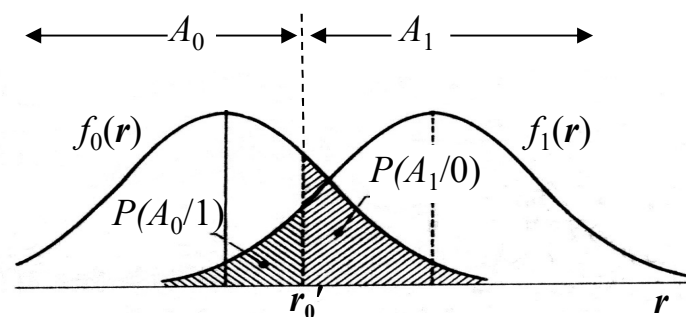
上式表示 $P_e$ 是 $r_0'$ 的函数。为了求出使 $P_e$ 最小的判决分界点 $r_0'$ , 将上式对 $r_0'$ 求导

$$\frac{\partial P_e}{\partial r_0'} = P(1)f_1(r_0') - P(0)f_0(r_0')$$

并令导函数等于0,

求出最佳分界点 $r_0$ 的条件:

$$P(1)f_1(r_0) - P(0)f_0(r_0) = 0$$



# 第10章 数字信号最佳接收

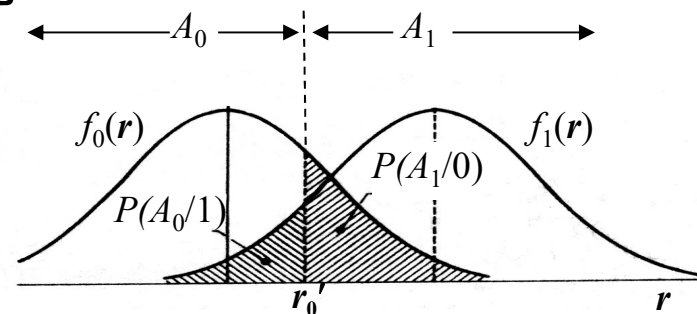
$$P(1)f_1(\mathbf{r}_0) - P(0)f_0(\mathbf{r}_0) = 0$$

即 
$$\frac{P(1)}{P(0)} = \frac{f_0(\mathbf{r}_0)}{f_1(\mathbf{r}_0)}$$

当先验概率相等时，即 $P(1) = P(0)$ 时， $f_0(\mathbf{r}_0) = f_1(\mathbf{r}_0)$ ，所以最佳分界点位于图中两条曲线交点处的 $\mathbf{r}$ 值上。

在判决边界确定之后，按照接收矢量 $\mathbf{r}$ 落在区域 $A_0$ 应判为收到的是“0”的判决准则，这时有：

若  $\frac{P(1)}{P(0)} < \frac{f_0(\mathbf{r})}{f_1(\mathbf{r})}$   
则判为 “0” ;  
反之， 若  $\frac{P(1)}{P(0)} > \frac{f_0(\mathbf{r})}{f_1(\mathbf{r})}$   
则判为 “1”。



在发送“0”和发送“1”的先验概率相等时，上两式的条件简化为：

$$\begin{cases} \text{若 } f_0(\mathbf{r}) > f_1(\mathbf{r}), \text{ 则判为 “0”} \\ \text{若 } f_0(\mathbf{r}) < f_1(\mathbf{r}), \text{ 则判为 “1”} \end{cases}$$



## 第10章 数字信号最佳接收

这个判决准则常称为最大似然准则。按照这个准则判决就可以得到理论上最佳的误码率，即达到理论上的误码率最小值。

- 以上对于二进制最佳接收准则的分析，可以推广到多进制信号的情况。设在一个 $M$ 进制数字通信系统中，可能的发送码元是 $s_1, s_2, \dots, s_i, \dots, s_M$ 之一，它们的先验概率相等，能量相等。当发送码元是 $s_i$ 时，接收电压的 $k$ 维联合概率密度函数为

$$f_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_n)^k} \exp\left\{-\frac{1}{n_0} \int_0^{T_s} [r(t) - s_i(t)]^2 dt\right\}$$

于是，若  $f_i(\mathbf{r}) > f_j(\mathbf{r})$ ,

则判为 $s_i(t)$ ，其中，

$$\left. \begin{array}{l} j \neq i \\ j = 1, 2, \dots, M \end{array} \right\}$$



# 第10章 数字信号最佳接收

## 10.3 确知数字信号的最佳接收机

- 确知信号：指其取值在任何时间都是确定的、可以预知的信号。
- 判决准则

当发送码元为“0”，波形为 $s_0(t)$ 时，接收电压的概率密度为

$$f_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_n)^k} \exp\left\{-\frac{1}{n_0} \int_0^{T_s} [r(t) - s_0(t)]^2 dt\right\}$$

当发送码元为“1”，波形为 $s_1(t)$ 时，接收电压的概率密度为

$$f_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_n)^k} \exp\left\{-\frac{1}{n_0} \int_0^{T_s} [r(t) - s_1(t)]^2 dt\right\}$$

因此，将上两式代入判决准则式，经过简化，得到：





## 第10章 数字信号最佳接收

若

$$P(1) \exp \left\{ -\frac{1}{n_0} \int_0^{T_s} [r(t) - s_1(t)]^2 dt \right\} < P(0) \exp \left\{ -\frac{1}{n_0} \int_0^{T_s} [r(t) - s_0(t)]^2 dt \right\}$$

则判为发送码元是 $s_0(t)$ ；若

$$P(1) \exp \left\{ -\frac{1}{n_0} \int_0^{T_s} [r(t) - s_1(t)]^2 dt \right\} > P(0) \exp \left\{ -\frac{1}{n_0} \int_0^{T_s} [r(t) - s_0(t)]^2 dt \right\}$$

则判为发送码元是 $s_1(t)$ 。

将上两式的两端分别取对数，得到若

$$n_0 \ln \frac{1}{P(1)} + \int_0^{T_s} [r(t) - s_1(t)]^2 dt > n_0 \ln \frac{1}{P(0)} + \int_0^{T_s} [r(t) - s_0(t)]^2 dt$$

则判为发送码元是 $s_0(t)$ ；反之则判为发送码元是 $s_1(t)$ 。由于已经假设两个码元的能量相同，即

$$\int_0^{T_s} s_0^2(t) dt = \int_0^{T_s} s_1^2(t) dt$$

所以上式还可以进一步简化。



## 第10章 数字信号最佳接收

若 
$$W_1 + \int_0^{T_s} r(t)s_1(t)dt < W_0 + \int_0^{T_s} r(t)s_0(t)dt$$

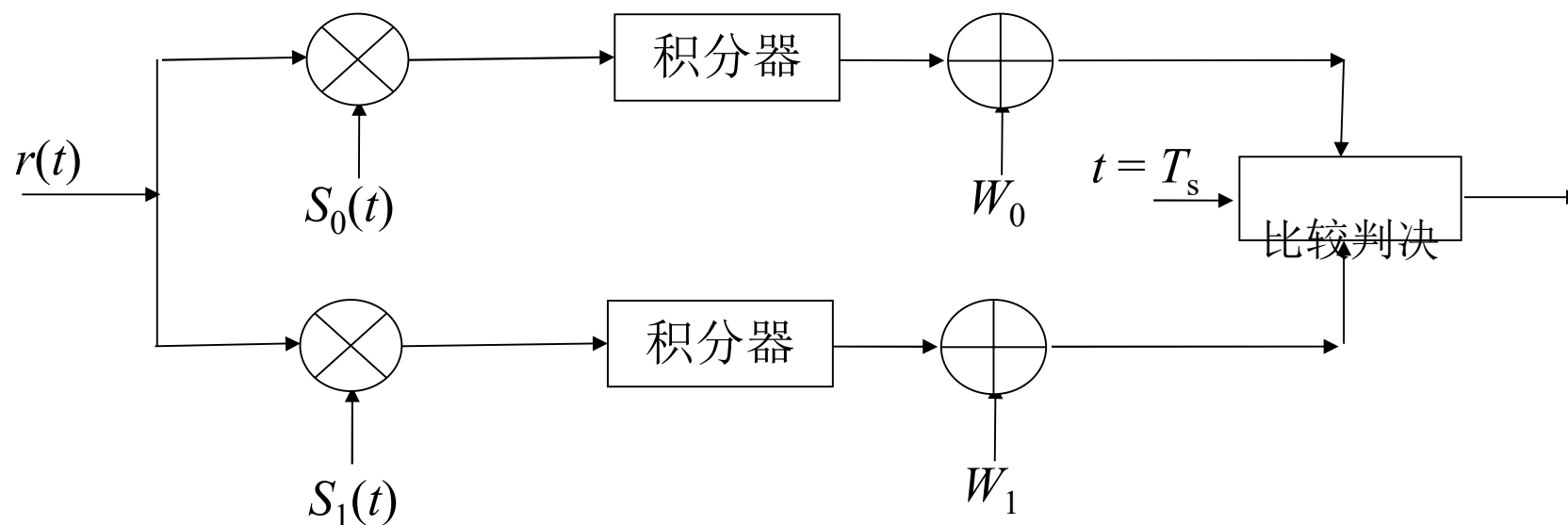
式中 
$$W_0 = \frac{n_0}{2} \ln P(0) \quad W_1 = \frac{n_0}{2} \ln P(1)$$

则判为发送码元是 $s_0(t)$ ；反之，则判为发送码元是 $s_1(t)$ 。 $W_0$ 和 $W_1$ 可以看作是由先验概率决定的加权因子。

- 最佳接收机
  - ◆ 按照上式画出的最佳接收机原理方框图如下：

# 第10章 数字信号最佳接收

$$W_1 + \int_0^{T_s} r(t)s_1(t)dt < W_0 + \int_0^{T_s} r(t)s_0(t)dt$$



# 第10章 数字信号最佳接收

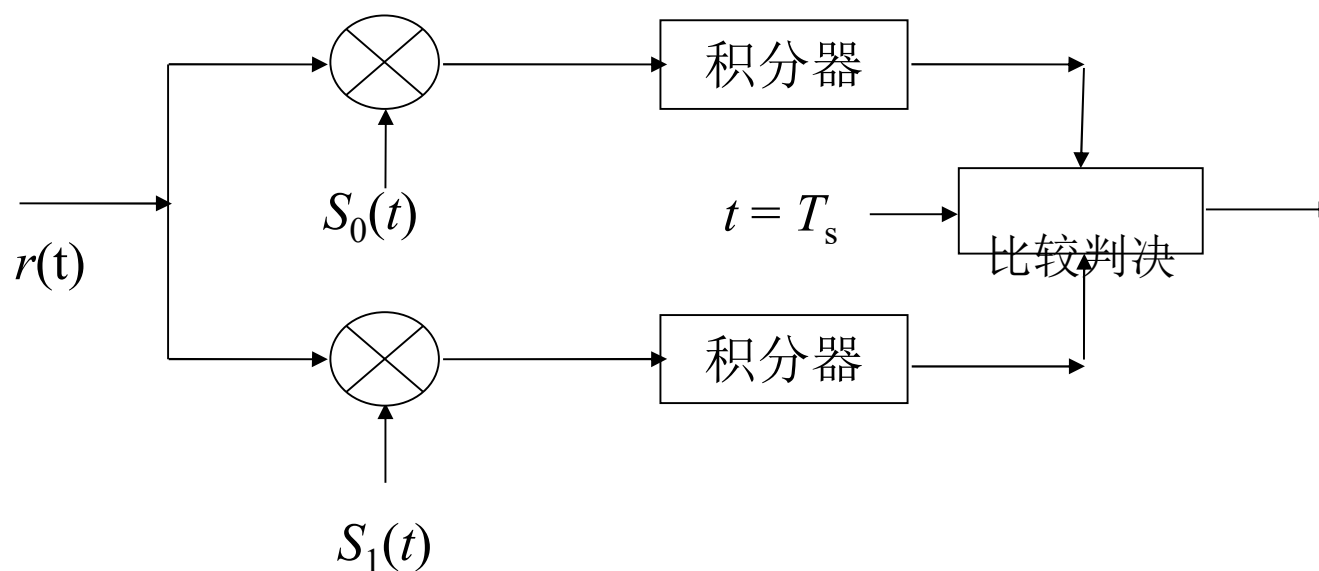
若此二进制信号的先验概率相等，则上式

$$W_1 + \int_0^{T_s} r(t)s_1(t)dt < W_0 + \int_0^{T_s} r(t)s_0(t)dt$$

简化为

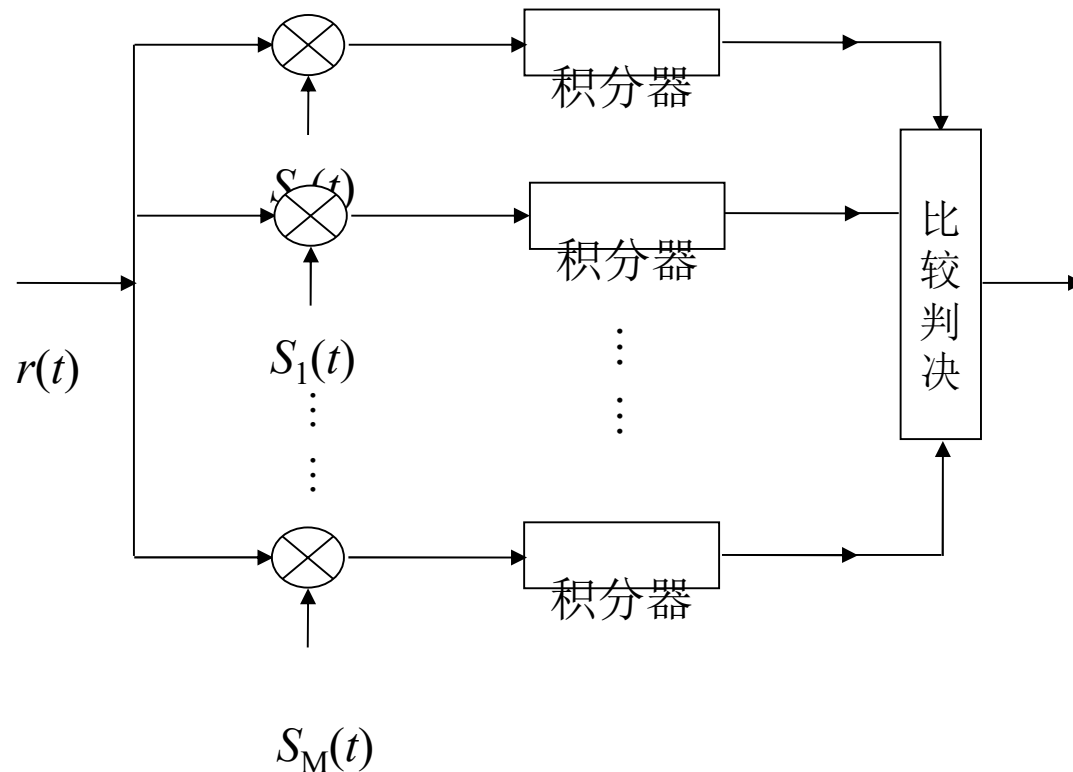
$$\int_0^{T_s} r(t)s_1(t)dt < \int_0^{T_s} r(t)s_0(t)dt$$

最佳接收机的原理方框图也可以简化成



# 第10章 数字信号最佳接收

由上述讨论不难推出 $M$ 进制通信系统的最佳接收机结构



- ◆ 上面的最佳接收机的核心是由相乘和积分构成的相关运算，所以常称这种算法为相关接收法。
- ◆ 由最佳接收机得到的误码率是理论上可能达到的最小值。



# 第10章 数字信号最佳接收

## • 10.4 确知数字信号最佳接收的误码率

### ■ 总误码率

在最佳接收机中，若

$$n_0 \ln \frac{1}{P(1)} + \int_0^{T_s} [r(t) - s_1(t)]^2 dt < n_0 \ln \frac{1}{P(0)} + \int_0^{T_s} [r(t) - s_0(t)]^2 dt$$

则判为发送码元是 $s_0(t)$ 。因此，在发送码元为 $s_1(t)$ 时，若上式成立，则将发生错误判决。所以若将 $r(t) = s_1(t) + n(t)$ 代入上式，则上式成立的概率就是在发送码元“1”的条件下收到“0”的概率，即发生错误的条件概率 $P(0/1)$ 。此条件概率的计算结果如下(附录G)

$$P(0/1) = P(\xi < a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}} dx$$

## 第10章 数字信号最佳接收

式中

$$P(0/1) = P(\xi < a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}} dx$$

$$a = \frac{n_0}{2} \ln \frac{P(0)}{P(1)} - \frac{1}{2} \int_0^{T_s} [s_1(t) - s_0(t)]^2 dt$$

$$\sigma_\xi^2 = D(\xi) = \frac{n_0}{2} \int_0^{T_s} [s_1(t) - s_0(t)]^2 dt$$

同理，可以求出发送 $s_0(t)$ 时，判决为收到 $s_1(t)$ 的条件错误概率

$$P(1/0) = P(\xi < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \int_{-\infty}^b e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}} dx$$

式中

$$b = \frac{n_0}{2} \ln \frac{P(1)}{P(0)} - \frac{1}{2} \int_0^{T_s} [s_0(t) - s_1(t)]^2 dt$$



## 第10章 数字信号最佳接收

因此, 总误码率为

$$P_e = P(1)P(0/1) + P(0)P(1/0)$$

$$= P(1) \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}} dx \right] + P(0) \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \int_{-\infty}^b e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}} dx \right]$$

### ■ 先验概率对误码率的影响

当先验概率 $P(0) = 0$ 及 $P(1) = 1$ 时,  $a = -\infty$ 及 $b = \infty$ , 因此由上式计算出总误码率 $P_e = 0$ 。在物理意义上, 这时由于发送码元只有一种可能性, 即是确定的“1”。因此, 不会发生错误。同理, 若 $P(0) = 1$ 及 $P(1) = 0$ , 总误码率也为零。





## 第10章 数字信号最佳接收

- ◆ 当先验概率相等时:

$P(0) = P(1) = 1/2$ ,  $a = b$ 。这样, 上式可以化简为

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \int_{-\infty}^c e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}} dx$$

式中 
$$c = -\frac{1}{2} \int_0^{T_s} [s_0(t) - s_1(t)]^2 dt$$

上式表明, 当先验概率相等时, 对于给定的噪声功率  $\sigma_\xi^2$ , 误码率仅和两种码元波形之差  $[s_0(t) - s_1(t)]$  的能量有关, 而与波形本身无关。差别越大,  $c$  值越小, 误码率  $P_e$  也越小。

- ◆ 当先验概率不等时:

由计算表明, 先验概率不等时的误码率将略小于先验概率相等时的误码率。就误码率而言, 先验概率相等是最坏的情况。



## 第10章 数字信号最佳接收

### ■ 先验概率相等时误码率的计算

在噪声强度给定的条件下，误码率完全决定于信号码元的区别。现在给出定量地描述码元区别的一个参量，即码元的相关系数 $\rho$ ，其定义如下：

$$\rho = \frac{\int_0^{T_s} s_0(t)s_1(t)dt}{\sqrt{\left[\int_0^{T_s} s_0^2(t)dt\right]\left[\int_0^{T_s} s_1^2(t)dt\right]}} = \frac{\int_0^{T_s} s_0(t)s_1(t)dt}{\sqrt{E_0 E_1}}$$

$$\text{式中 } E_0 = \int_0^{T_s} s_0^2(t)dt \quad E_1 = \int_0^{T_s} s_1^2(t)dt$$

$E_0$ 、 $E_1$ 为信号码元的能量。

当 $s_0(t) = s_1(t)$ 时， $\rho = 1$ ，为最大值；当 $s_0(t) = -s_1(t)$ 时， $\rho = -1$ ，为最小值。所以 $\rho$ 的取值范围在 $-1 \leq \rho \leq +1$ 。



## 第10章 数字信号最佳接收

当两码元的能量相等时, 令 $E_0 = E_1 = E_b$ , 则上式可以写成

$$\rho = \frac{\int_0^{T_s} s_0(t)s_1(t)dt}{E_b}$$

并且

$$c = -\frac{1}{2} \int_0^{T_s} [s_0(t) - s_1(t)]^2 dt = -E_b(1 - \rho)$$

将上式代入误码率公式, 得到

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \int_{-\infty}^c e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \int_{-\infty}^{-E_b(1-\rho)} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}} dx$$

为了将上式变成实用的形式, 作如下的代数变换:

令  $z = x / \sqrt{2}\sigma_\xi$

则有

$$z^2 = x^2 / 2\sigma_\xi^2 \quad dz = dx / \sqrt{2}\sigma_\xi$$

## 第10章 数字信号最佳接收

于是上式变为

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \int_{-\infty}^{-E_b(1-\rho)/\sqrt{2}\sigma_\xi} e^{-z^2} \sqrt{2}\sigma_\xi dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-E_b(1-\rho)/\sqrt{2}\sigma_\xi} e^{-z^2} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{E_b(1-\rho)/\sqrt{2}\sigma_\xi}^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{E_b(1-\rho)/\sqrt{2}\sigma_\xi}^{\infty} e^{-z^2} dz \right] = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left[ \frac{E_b(1-\rho)}{\sqrt{2}\sigma_\xi} \right] \right\} \end{aligned}$$

式中  $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz$

利用下式中 $\sigma_\xi^2$ 和 $n_0$ 关系

$$\sigma_\xi^2 = D(\xi) = \frac{n_0}{2} \int_0^{T_s} [s_1(t) - s_0(t)]^2 dt = n_0 E_b (1 - \rho)$$

代入上式, 得到误码率最终表示式:

$$P_e = \frac{1}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \sqrt{\frac{E_b(1-\rho)}{2n_0}} \right) \right] = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[ \sqrt{\frac{E_b(1-\rho)}{2n_0}} \right]$$



## 第10章 数字信号最佳接收

$$P_e = \frac{1}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \sqrt{\frac{E_b(1-\rho)}{2n_0}} \right) \right] = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[ \sqrt{\frac{E_b(1-\rho)}{2n_0}} \right]$$

式中

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz \quad \text{— 误差函数}$$

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) \quad \text{— 补误差函数}$$

$E_b$  — 码元能量;

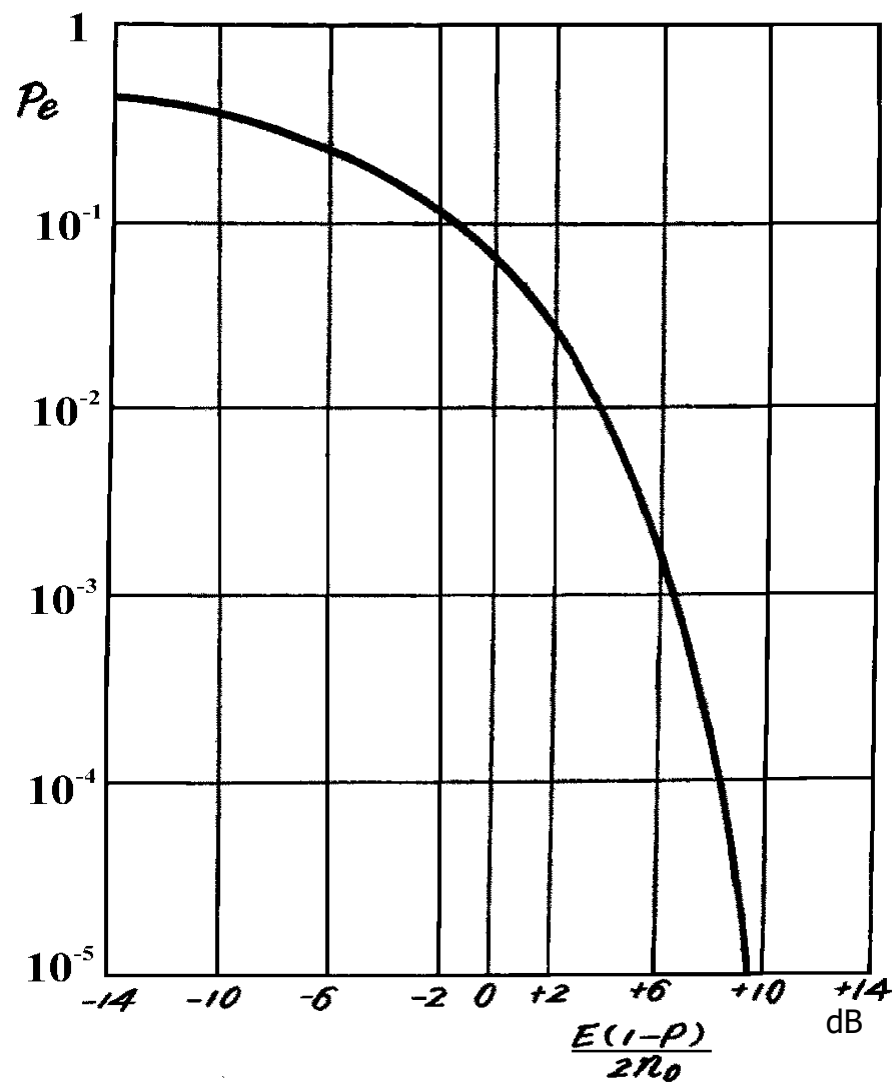
$\rho$  — 码元相关系数;

$n_0$  — 噪声功率谱密度。

上式是一个非常重要的理论公式，它给出了理论上二进制等能量数字信号误码率的最佳（最小可能）值。在下图中画出了它的曲线。实际通信系统中得到的误码率只可能比它差，但是绝对不可能超过它。

# 第10章 数字信号最佳接收

## ■ 误码率曲线





# 第10章 数字信号最佳接收

## 最佳接收性能特点

- ◆ 误码率仅和 $E_b / n_0$ 以及相关系数 $\rho$ 有关，与信号波形及噪声功率无直接关系。
- ◆ 码元能量 $E_b$ 与噪声功率谱密度 $n_0$ 之比，实际上相当于信号噪声功率比 $P_s/P_n$ 。因为若系统带宽 $B$ 等于 $1/T_s$ ,

则有

$$\frac{E_b}{n_0} = \frac{P_s T_s}{n_0} = \frac{P_s}{n_0 (1/T_s)} = \frac{P_s}{n_0 B} = \frac{P_s}{P_n}$$

按照能消除码间串扰的奈奎斯特速率传输基带信号时，所需的最小带宽为 $(1/2T_s)$  Hz。对于已调信号，若采用的是2PSK或2ASK信号，则其占用带宽应当是基带信号带宽的两倍，即恰好是 $(1/T_s)$  Hz。所以，在工程上，通常把 $(E_b/n_0)$ 当作信号噪声功率比看待。



## 第10章 数字信号最佳接收

- ◆ 相关系数  $\rho$  对于误码率的影响很大。当两种码元的波形相同，相关系数最大，即  $\rho = 1$  时，误码率最大。这时的误码率  $P_e = 1/2$ 。因为这时两种码元波形没有区别，接收端是在没有根据的乱猜。当两种码元的波形相反，相关系数最小，即  $\rho = -1$  时，误码率最小。这时的最小误码率等于

$$P_e = \frac{1}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \sqrt{\frac{E_b}{n_0}} \right) \right] = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{E_b}{n_0}} \right)$$

例如，2PSK信号的相关系数就等于 -1。

- ◆ 当两种码元正交，即相关系数  $\rho$  等于0时，误码率等于

$$P_e = \frac{1}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \sqrt{\frac{E_b}{2n_0}} \right) \right] = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[ \sqrt{\frac{E_b}{2n_0}} \right]$$

- ◆ 例如，2FSK信号的相关系数就等于或近似等于零。





## 第10章 数字信号最佳接收

- ◆ 若两种码元中有一种的能量等于零，例如2ASK信号，则

$$c = -\frac{1}{2} \int_0^{T_s} [s_0(t)]^2 dt$$

误码率为

$$P_e = \frac{1}{2} \left( 1 - \operatorname{erf} \sqrt{\frac{E_b}{4n_0}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{E_b}{4n_0}} \right)$$

- ◆ 比较以上3式可见，它们之间的性能差3dB，即2ASK信号的性能比2FSK信号的性能差3dB，而2FSK信号的性能又比2PSK信号的性能差3dB。

# 第10章 数字信号最佳接收

## ■ 多进制通信系统

- ◆ 若不同码元的信号正交，且先验概率相等，能量也相等，则其最佳误码率计算结果如下：

$$P_e = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{y + \left(\frac{2E}{n_0}\right)^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right]^{M-1} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

式中， $M$  - 进制数；

$E$  -  $M$  进制码元能量；

$n_0$  - 单边噪声功率谱密度。

由于一个 $M$  进制码元中含有的比特数 $k$  等于 $\log_2 M$ ，故每个比特的能量等于 $E_b = E / \log_2 M$

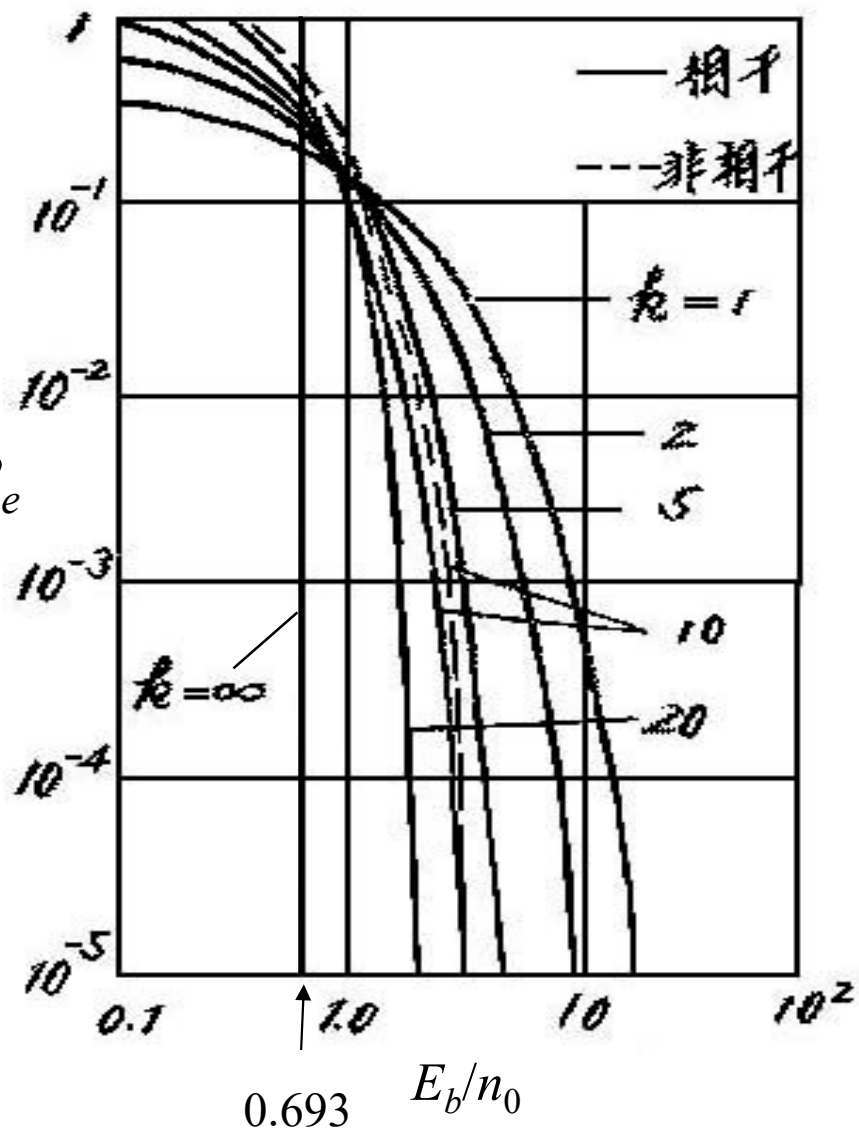
并且每比特的信噪比为  $\frac{E_b}{n_0} = \frac{E}{n_0 \log_2 M} = \frac{E}{n_0 k}$

下图画出了误码率 $P_e$ 与 $E_b/n_0$ 关系曲线。

# 第10章 数字信号最佳接收

## ◆ 误码率曲线

由此曲线看出，对于给定的误码率，当 $k$ 增大时，需要的信噪比 $E_b/n_0$ 减小。当 $k$ 增大到 $\infty$ 时，误码率曲线变成一条垂直线；这时只要 $E_b/n_0$ 等于0.693(-1.6 dB)，就能得到无误码的传输。





# 第10章 数字信号最佳接收

## • 10.5 随相数字信号的最佳接收

### ■ 假设：

- ◆ 2FSK信号的能量相等、先验概率相等、互不相关；
- ◆ 通信系统中存在带限白色高斯噪声；
- ◆ 接收信号码元相位的概率密度服从均匀分布。

### ■ 因此，可以将此信号表示为：

$$s_0(t, \varphi_0) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$s_1(t, \varphi_1) = A \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

及将此信号随机相位的概率密度表示为：

$$f(\varphi_0) = \begin{cases} 1/2\pi, & 0 \leq \varphi_0 < 2\pi \\ 0, & \text{其他处} \end{cases} \quad f(\varphi_1) = \begin{cases} 1/2\pi, & 0 \leq \varphi_1 < 2\pi \\ 0, & \text{其他处} \end{cases}$$



## 第10章 数字信号最佳接收

■ 判决条件：由于已假设码元能量相等，故有

$$\int_0^{T_s} s_0^2(t, \varphi_0) dt = \int_0^{T_s} s_1^2(t, \varphi_1) dt = E_b$$

在讨论确知信号的最佳接收时，对于先验概率相等的信号，按照下式条件作判决：

若接收矢量 $\mathbf{r}$ 使 $f_1(\mathbf{r}) < f_0(\mathbf{r})$ ，则判发送码元是“0”，

若接收矢量 $\mathbf{r}$ 使 $f_0(\mathbf{r}) < f_1(\mathbf{r})$ ，则判发送码元是“1”。

现在，由于接收矢量具有随机相位，故上式中的 $f_0(\mathbf{r})$ 和 $f_1(\mathbf{r})$ 分别可以表示为：

$$f_0(\mathbf{r}) = \int_0^{2\pi} f(\varphi_0) f_0(\mathbf{r} / \varphi_0) d\varphi_0$$

$$f_1(\mathbf{r}) = \int_0^{2\pi} f(\varphi_1) f_1(\mathbf{r} / \varphi_1) d\varphi_1$$

上两式经过复杂的计算后，代入判决条件，就可以得出最终的判决条件：



## 第10章 数字信号最佳接收

若接收矢量 $r$ 使 $M_1^2 < M_0^2$ , 则判为发送码元是“0”,

若接收矢量 $r$ 使 $M_0^2 < M_1^2$ , 则判为发送码元是“1”。

上面就是最终判决条件, 其中:

$$M_0 = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2}, \quad M_1 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2},$$

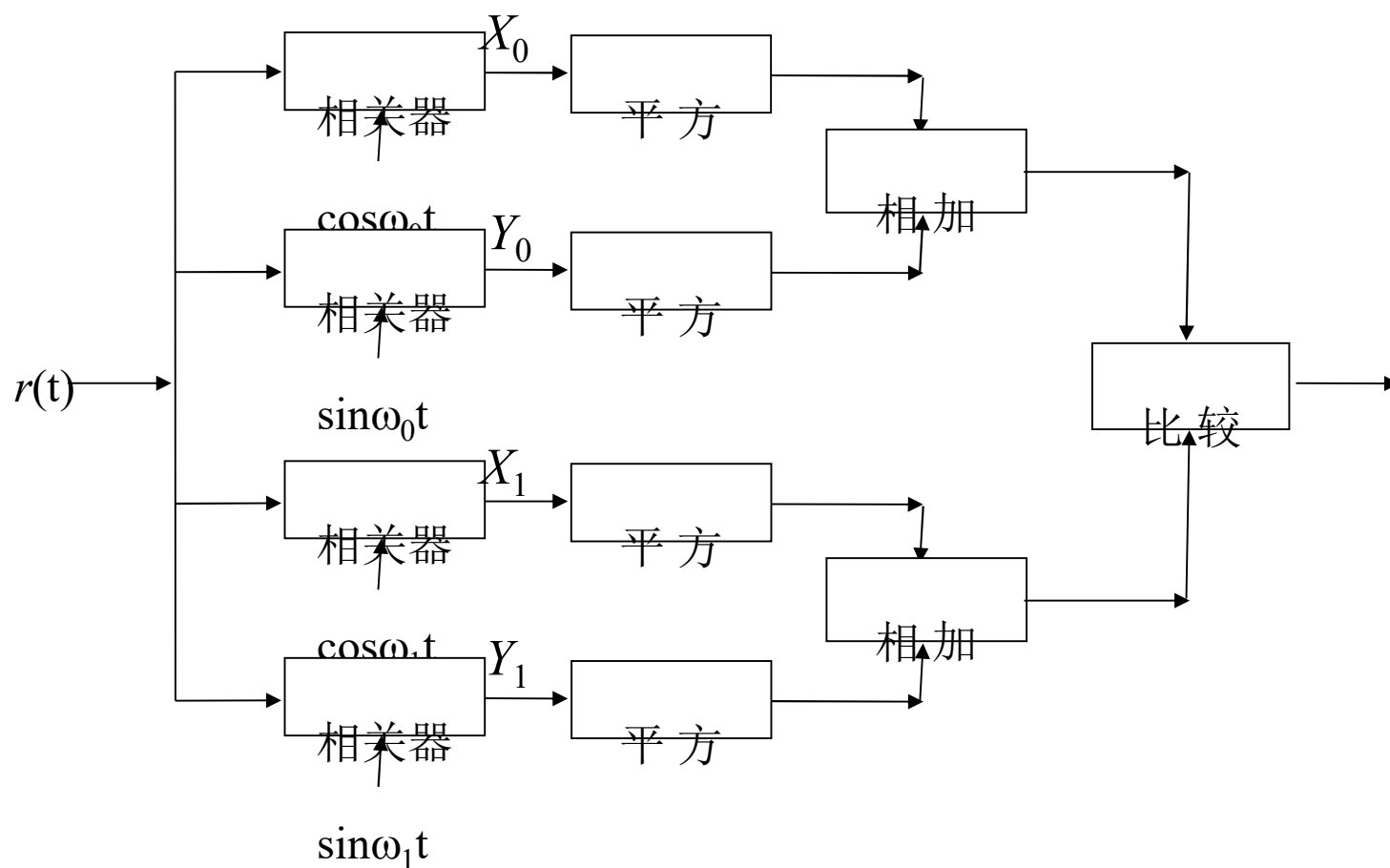
$$X_0 = \int_0^{T_s} r(t) \cos \omega_0 t dt \quad Y_0 = \int_0^{T_s} r(t) \sin \omega_0 t dt$$

$$X_1 = \int_0^{T_s} r(t) \cos \omega_1 t dt \quad Y_1 = \int_0^{T_s} r(t) \sin \omega_1 t dt$$

按照上面判决准则构成的随相信号最佳接收机的结构示于下图中。

# 第10章 数字信号最佳接收

## ■ 最佳接收机的结构





## 第10章 数字信号最佳接收

- 误码率：

随相信号最佳接收机的误码率，用类似10.4节的分析方法，可以计算出来，结果如下：

$$P_e = \frac{1}{2} \exp(-E_b / 2n_0)$$

- 最后指出，上述最佳接收机及其误码率也就是2FSK确知信号的非相干接收机和误码率。因为随相信号的相位带有由信道引入的随机变化，所以在接收端不可能采用相干接收方法。换句话说，相干接收只适用于相位确知的信号。对于随相信号而言，非相干接收已经是最佳的接收方法了。





# 第10章 数字信号最佳接收

## • 10.6 起伏数字信号的最佳接收

- 仍以2FSK信号为例简要地讨论其最佳接收问题。
- 假设：
  - ◆ 通信系统中的噪声是带限白色高斯噪声；
  - ◆ 信号是互不相关的等能量、等先验概率的2FSK信号。
  - ◆ 2FSK信号的表示式

$$s_0(t, \varphi_0, A_0) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$s_1(t, \varphi_1, A_1) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

式中,  $A_0$ 和 $A_1$ 是由于多径效应引起的随机起伏振幅, 它们服从同一瑞利分布:

$$f(V_i) = \frac{A_i}{\sigma_s^2} \exp\left(-\frac{A_i^2}{2\sigma_s^2}\right), \quad A_i \geq 0, \quad i=1,2$$



## 第10章 数字信号最佳接收

$$f(V_i) = \frac{A_i}{\sigma_s^2} \exp\left(-\frac{A_i^2}{2\sigma_s^2}\right), \quad A_i \geq 0, \quad i=1,2$$

式中,  $\sigma_s^2$  为信号的功率;

而且  $\varphi_0$  和  $\varphi_1$  的概率密度服从均匀分布:

$$f(\varphi_i) = 1/2\pi, \quad 0 \leq \varphi_i < 2\pi, \quad i=1,2$$

此外, 由于  $A_i$  是余弦波的振幅, 所以信号  $s_i(t, \varphi_i, A_i)$  的功率  $\sigma_s^2$  和其振幅  $A_i$  的均方值之间的关系为

$$E[A_i^2] = 2\sigma_s^2$$



## 第10章 数字信号最佳接收

■ 接收矢量的概率密度:

- ◆ 由于接收矢量不但具有随机相位, 还具有随机起伏的振幅, 故此概率密度 $f_0(\mathbf{r})$ 和 $f_1(\mathbf{r})$ 分别可以表示为:

$$f_0(\mathbf{r}) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty f(A_0)f(\varphi_0)f_0(\mathbf{r} / \varphi_0, A_0)dA_0d\varphi_0$$

$$f_1(\mathbf{r}) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty f(A_1)f(\varphi_1)f_1(\mathbf{r} / \varphi_1, A_1)dA_1d\varphi_1$$



## 第10章 数字信号最佳接收

经过繁复的计算，上两式的计算结果如下：

$$f_0(\mathbf{r}) = K' \frac{n_0}{n_0 + T_s \sigma_s^2} \exp \left[ \frac{2\sigma_s^2 M_0^2}{n_0 (n_0 + T_s \sigma_s^2)} \right]$$

$$f_1(\mathbf{r}) = K' \frac{n_0}{n_0 + T_s \sigma_s^2} \exp \left[ \frac{2\sigma_s^2 M_1^2}{n_0 (n_0 + T_s \sigma_s^2)} \right]$$

式中

$$K' = \frac{\exp \left[ -\frac{1}{n_0} \int_0^{T_s} r^2(t) dt \right]}{(\sqrt{2\pi} \sigma_n)^k}$$

$n_0$  - 噪声功率谱密度；

$\sigma_n^2$  - 噪声功率。



## 第10章 数字信号最佳接收

### ■ 误码率：

实质上，和随相信号最佳接收时一样，比较 $f_0(r)$ 和 $f_1(r)$ 仍然是比较 $M_0^2$ 和 $M_1^2$ 的大小。所以，不难推论，起伏信号最佳接收机的结构和随相信号最佳接收机的一样。但是，这时的最佳误码率则不同于随相信号的误码率。这时的误码率等于

$$P_e = \frac{1}{2 + (\bar{E} / n_0)}$$

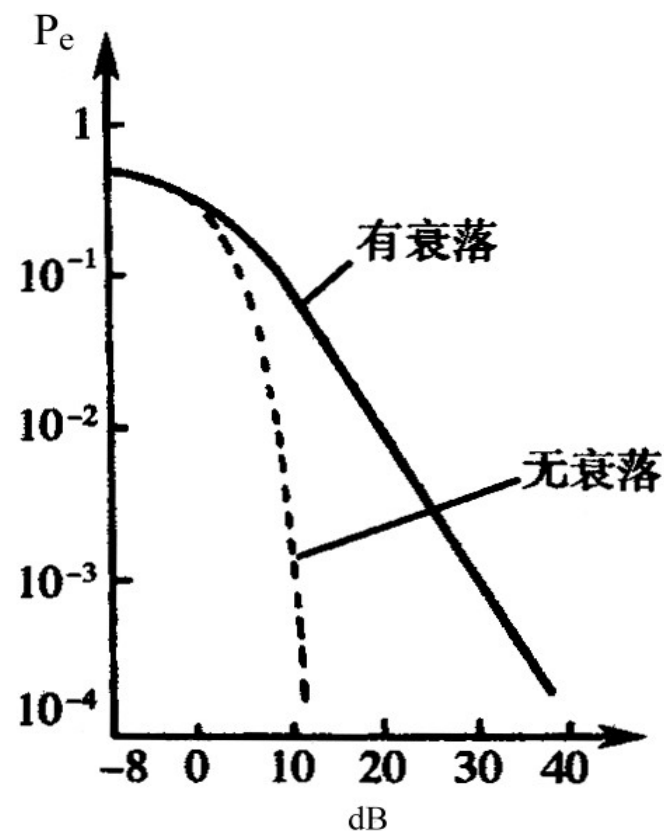
式中，

$\bar{E}$  - 接收码元的统计平均能量。

# 第10章 数字信号最佳接收

## 误码率曲线

由此图看出，在有衰落时，性能随误码率下降而迅速变坏。当误码率等于 $10^{-2}$ 时，衰落使性能下降约10 dB；当误码率等于 $10^{-3}$ 时，下降约20 dB。



# 第10章 数字信号最佳接收

## 10.7 实际接收机和最佳接收机的性能比较

	实际接收机的 $P_e$	最佳接收机的 $P_e$
相干2ASK信号	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{r/4}$	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{E_b / 4n_0}$
非相干2ASK信号	$\frac{1}{2} \exp(-r/4)$	$\frac{1}{2} \exp(-E_b / 4n_0)$
相干2FSK信号	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{r/2}$	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{E_b / 2n_0}$
非相干2FSK信号	$\frac{1}{2} \exp(-r/2)$	$\frac{1}{2} \exp(-E_b / 2n_0)$
相干2PSK信号	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{r}$	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{E_b / n_0}$
差分相干2DPSK信号	$\frac{1}{2} \exp(-r)$	$\frac{1}{2} \exp(-E_b / n_0)$
同步检测2DPSK信号	$\operatorname{erfc} \sqrt{r} \left( 1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{r} \right)$	$\operatorname{erfc} \sqrt{\frac{E_b}{n_0}} \left( 1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{E_b}{n_0}} \right)$



# 第10章 数字信号最佳接收

## • 10.8 数字信号的匹配滤波接收法

### ■ 什么是匹配滤波器？

用线性滤波器对接收信号滤波时，使抽样时刻上输出信号噪声比最大的线性滤波器称为匹配滤波器。

### ■ 假设条件：

- ◆ 接收滤波器的传输函数为 $H(f)$ ，冲激响应为 $h(t)$ ，滤波器输入码元 $s(t)$ 的持续时间为 $T_s$ ，信号和噪声之和 $r(t)$ 为

$$r(t) = s(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T_s$$

式中， $s(t)$  - 信号码元，

$n(t)$  - 高斯白噪声；





## 第10章 数字信号最佳接收

- ◆ 并设信号码元 $s(t)$ 的频谱密度函数为 $S(f)$ , 噪声 $n(t)$ 的双边功率谱密度为 $P_n(f) = n_0/2$ ,  $n_0$ 为噪声单边功率谱密度。

### ■ 输出电压

- ◆ 假定滤波器是线性的, 根据线性电路叠加定理, 当滤波器输入电压 $r(t)$ 中包括信号和噪声两部分时, 滤波器的输出电压 $y(t)$ 中也包含相应的输出信号 $s_o(t)$ 和输出噪声 $n_o(t)$ 两部分, 即

式中  $y(t) = s_o(t) + n_o(t)$

$$s_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)e^{j2\pi ft} df$$

# 第10章 数字信号最佳接收

## ■ 输出噪声功率

由  $P_Y(f) = H^*(f)H(f)P_R(f) = |H(f)|^2 P_n(f)$

这时的输出噪声功率 $N_o$ 等于

$$N_o = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 \cdot \frac{n_0}{2} df = \frac{n_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df$$

## ■ 输出信噪比

在抽样时刻 $t_0$ 上, 输出信号瞬时功率与噪声平均功率之比为

$$r_0 = \frac{|s_o(t_0)|^2}{N_o} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)e^{j2\pi ft_0} df \right|^2}{\frac{n_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df}$$

## 第10章 数字信号最佳接收

### ■ 匹配滤波器的传输特性：

利用施瓦兹不等式求  $r_0$  的最大值

若 
$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(x) dx \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f_1(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} |f_2(x)|^2 dx$$

$$f_1(x) = k f_2^*(x)$$

其中  $k$  为任意常数，则上式的等号成立。

将上信噪比式右端的分子看作是上式的左端，并令

$$f_1(x) = H(f), \quad f_2(x) = S(f) e^{j2\pi f t_0}$$

则有

$$r_0 \leq \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df}{\frac{n_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df}{\frac{n_0}{2}} = \frac{2E}{n_0}$$

式中 
$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df$$



## 第10章 数字信号最佳接收

而且当

$$H(f) = kS^*(f)e^{-j2\pi ft_0}$$

时，上式的等号成立，即得到最大输出信噪比 $2E/n_0$ 。

上式表明， $H(f)$ 就是我们要找的最佳接收滤波器传输特性。它等于信号码元频谱的复共轭（除了常数因子外）。故称此滤波器为匹配滤波器。



## 第10章 数字信号最佳接收

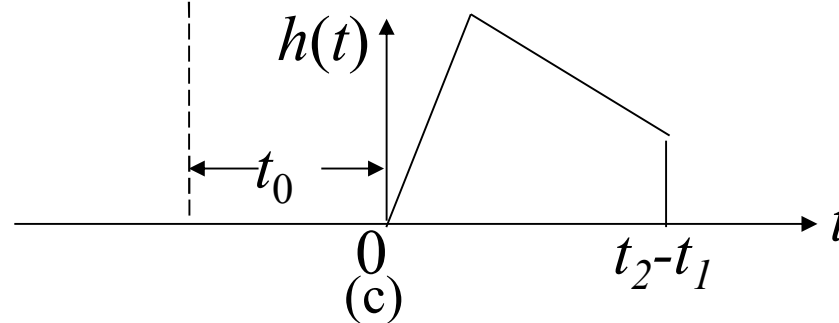
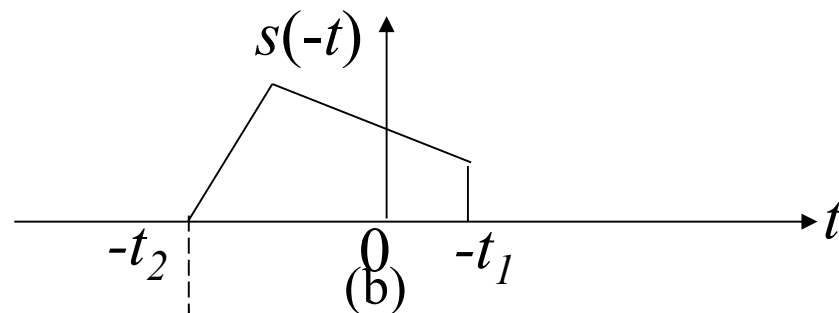
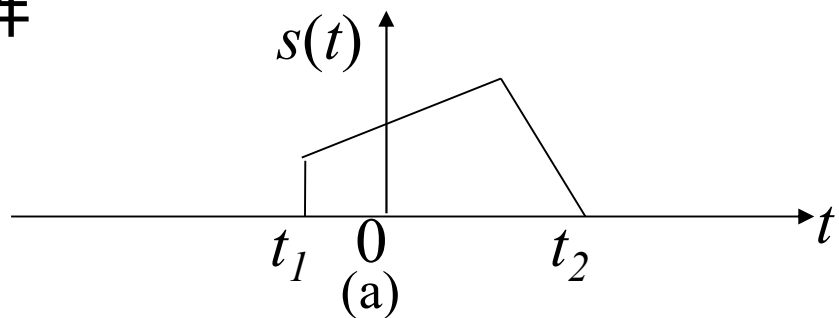
■ 匹配滤波器的冲激响应函数：

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{\infty} kS^*(f) e^{-j2\pi ft_0} e^{j2\pi ft} df \\ &= k \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \right]^* e^{-j2\pi f(t_0-t)} df \\ &= k \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f(\tau-t_0+t)} df \right] s(\tau) d\tau \\ &= k \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \delta(\tau - t_0 + t) d\tau = ks(t_0 - t) \end{aligned}$$

由上式可见，匹配滤波器的冲激响应 $h(t)$ 就是信号 $s(t)$ 的镜像 $s(-t)$ ，但在时间轴上（向右）平移了 $t_0$ 。

# 第10章 数字信号最佳接收

图解





# 第10章 数字信号最佳接收

## 实际的匹配滤波器

一个实际的匹配滤波器应该是物理可实现的，其冲激响应必须符合因果关系，在输入冲激脉冲加入前不应该有冲激响应出现，即必须有：

$$h(t) = 0, \quad \text{当 } t < 0$$

即要求满足条件

$$s(t_0 - t) = 0, \quad \text{当 } t < 0$$

或满足条件

$$s(t) = 0, \quad \text{当 } t > t_0$$

上式的条件说明，接收滤波器输入端的信号码元 $s(t)$ 在抽样时刻 $t_0$ 之后必须为零。一般不希望在码元结束之后很久才抽样，故通常选择在码元末尾抽样，即选 $t_0 = T_s$ 。故匹配滤波器的冲激响应可以写为

$$h(t) = ks(T_s - t)$$



## 第10章 数字信号最佳接收

这时，若匹配滤波器的输入电压为 $s(t)$ ，则输出信号码元的波形为：

$$\begin{aligned} s_o(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t-\tau)h(\tau)d\tau = k \int_{-\infty}^{\infty} s(t-\tau)s(T_s-\tau)d\tau \\ &= k \int_{-\infty}^{\infty} s(-\tau')s(t-T_s-\tau')d\tau' = kR(t-T_s) \end{aligned}$$

上式表明，匹配滤波器输出信号码元波形是输入信号码元波形的自相关函数的 $k$ 倍。 $k$ 是一个任意常数，它与 $r_0$ 的最大值无关；通常取 $k = 1$ 。



## 第10章 数字信号最佳接收

【例10.1】设接收信号码元 $s(t)$ 的表示式为

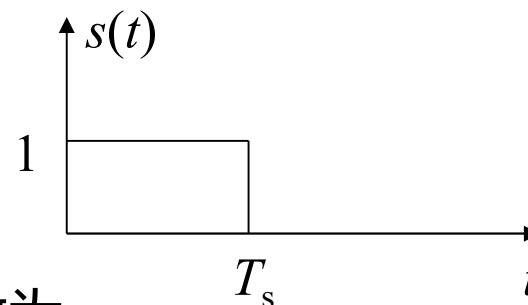
$$s(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T_s \\ 0, & \text{其他}t \end{cases}$$

试求其匹配滤波器的特性和输出信号码元的波形。

【解】上式所示的信号波形是一个矩形脉冲，如下图所示。

其频谱为

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{j2\pi f} (1 - e^{-j2\pi fT_s})$$



由  $H(f) = kS^*(f)e^{-j2\pi ft_0}$

令 $k=1$ ，可得其匹配滤波器的传输函数为

$$H(f) = \frac{1}{j2\pi f} (e^{+j2\pi fT_s} - 1)e^{-j2\pi fT_s}$$

由  $h(t) = ks(t_0 - t)$

令 $k=1$ ，还可以得到此匹配滤波器的冲激响应为

$$h(t) = s(T_s - t), \quad 0 \leq t \leq T_s$$

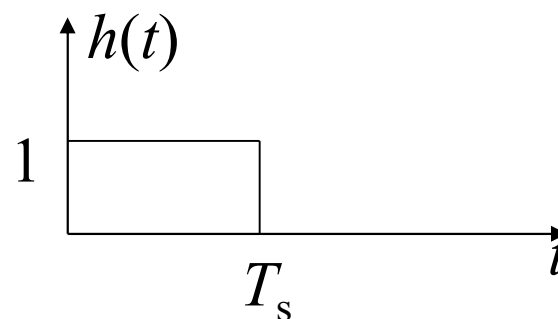
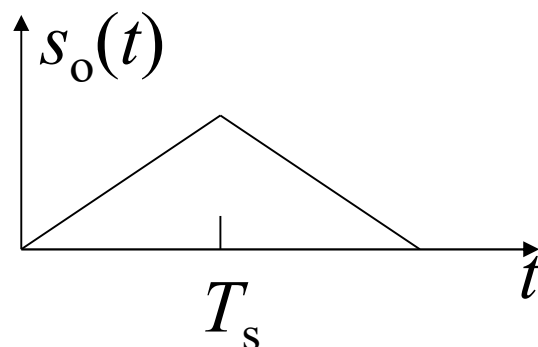
## 第10章 数字信号最佳接收

$$h(t) = s(T_s - t), \quad 0 \leq t \leq T_s$$

此冲激响应示于下图。

表面上看来,  $h(t)$ 的形状和信号 $s(t)$ 的形状一样。实际上,  $h(t)$ 的形状是 $s(t)$ 的波形以 $t = T_s / 2$ 为轴线反转而来。由于 $s(t)$ 的波形对称于 $t = T_s / 2$ , 所以反转后, 波形不变。

由式  $s_o(t) = kR(t - T_s)$   
可以求出此匹配滤波器的  
输出信号波形如下:

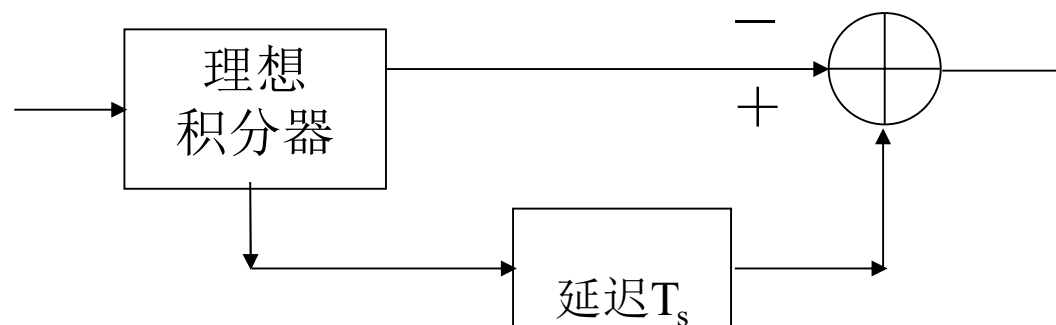


# 第10章 数字信号最佳接收

由其传输函数

$$H(f) = \frac{1}{j2\pi f} (e^{+j2\pi f T_s} - 1) e^{-j2\pi f T_s}$$

可以画出此匹配滤波器的方框图如下：



因为上式中的 $(1/j2\pi f)$ 是理想积分器的传输函数，而 $\exp(-j2\pi f T_s)$ 是延迟时间为 $T_s$ 的延迟电路的传输函数。

## 第10章 数字信号最佳接收

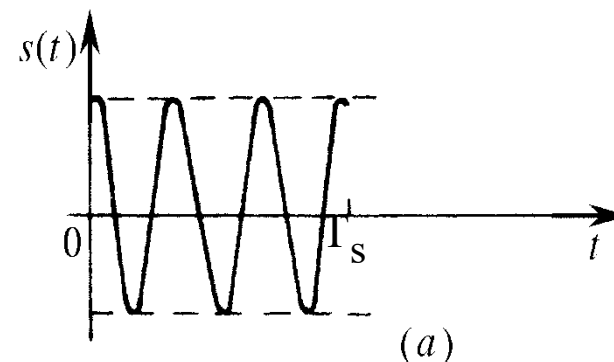
【例10.2】 设信号的表示式为

$$s(t) = \begin{cases} \cos 2\pi f_0 t, & 0 \leq t \leq T_s \\ 0, & \text{其他} t \end{cases}$$

试求其匹配滤波器的特性和匹配滤波器输出的波形。

【解】

上式给出的信号波形  
是一段余弦振荡，  
如右图所示：



其频谱为

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_0^{T_s} \cos 2\pi f_0 t e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \frac{1 - e^{-j2\pi(f-f_0)T_s}}{-j4\pi(f-f_0)} + \frac{1 - e^{-j2\pi(f+f_0)T_s}}{-j4\pi(f+f_0)} \end{aligned}$$



## 第10章 数字信号最佳接收

因此，其匹配滤波器的传输函数为

$$\begin{aligned} H(f) &= S^*(f)e^{-j2\pi ft_0} = S^*(f)e^{-j2\pi fT_s} \\ &= \frac{[e^{j2\pi(f-f_0)T_s} - 1]e^{-j2\pi fT_s}}{j4\pi(f-f_0)} + \frac{[e^{j2\pi(f+f_0)T_s} - 1]e^{-j2\pi fT_s}}{j4\pi(f+f_0)} \end{aligned}$$

上式中已令  $t_0 = T_s$ 。

此匹配滤波器的冲激响应为：

$$h(t) = s(T_s - t) = \cos 2\pi f_0(T_s - t), \quad 0 \leq t \leq T_s$$

为了便于画出波形简图，令

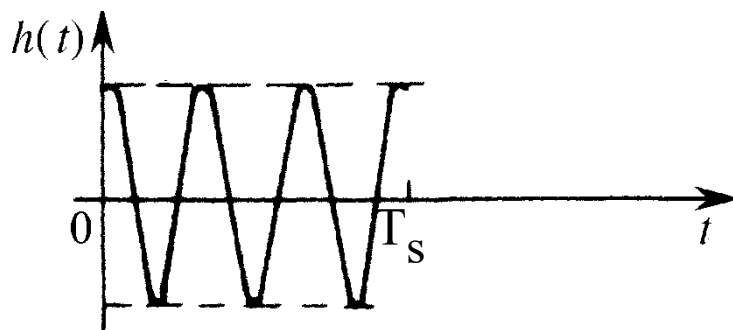
$$T_s = n / f_0$$

式中， $n =$  正整数。这样，上式可以化简为

$$h(t) = \cos 2\pi f_0 t, \quad 0 \leq t \leq T_s$$

$h(t)$ 的曲线示于下图：

## 第10章 数字信号最佳接收



(b) 冲激响应

这时的匹配滤波器输出波形可以由卷积公式求出：

$$s_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

由于现在 $s(t)$ 和 $h(t)$ 在区间 $(0, T_s)$ 外都等于零，故上式中的积分可以分为如下几段进行计算：

$$t < 0, \quad 0 \leq t < T_s, \quad T_s \leq t \leq 2T_s, \quad t > 2T_s$$

显然，当 $t < 0$ 和 $t > 2T_s$ 时，式中的 $s(\tau)$ 和 $h(t-\tau)$ 不相交，故 $s_o(t)$ 等于零。

## 第10章 数字信号最佳接收

当  $0 \leq t < T_s$  时, 上式等于

$$\begin{aligned} s_o(t) &= \int_0^t \cos 2\pi f_0 \tau \cos 2\pi f_0 (t - \tau) d\tau \\ &= \int_0^t \frac{1}{2} [\cos 2\pi f_0 t + \cos 2\pi f_0 (t - 2\tau)] d\tau = \frac{t}{2} \cos 2\pi f_0 t + \frac{1}{4\pi f_0} \sin 2\pi f_0 t \end{aligned}$$

当  $T_s \leq t \leq 2T_s$  时, 上式等于

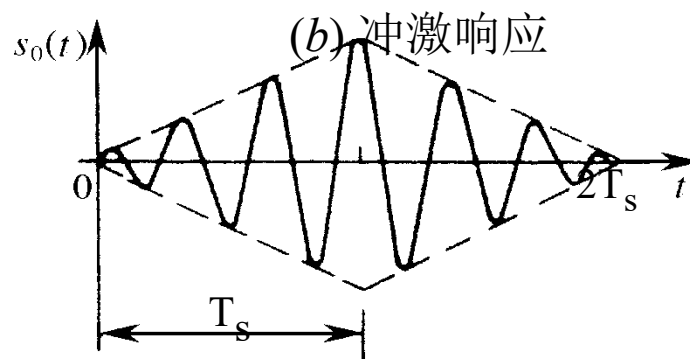
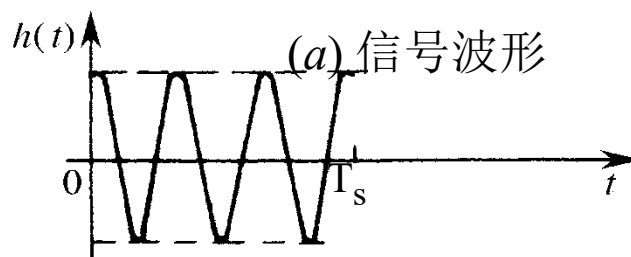
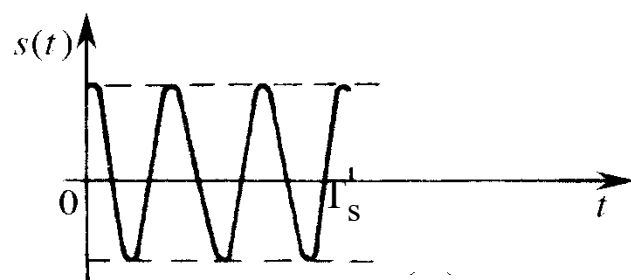
$$s_o(t) = \int_{t-T_s}^{T_s} \cos 2\pi f_0 \tau \cos 2\pi f_0 (t - \tau) d\tau = \frac{2T_s - t}{2} \cos 2\pi f_0 t - \frac{1}{4\pi f_0} \sin 2\pi f_0 t$$

若因  $f_0$  很大而使  $(1/4\pi f_0)$  可以忽略, 则最后得到

$$s_o(t) = \begin{cases} \frac{t}{2} \cos 2\pi f_0 t, & 0 \leq t < T_s \\ \frac{2T_s - t}{2} \cos 2\pi f_0 t, & T_s \leq t \leq 2T_s \\ 0, & \text{其他 } t \end{cases}$$

# 第10章 数字信号最佳接收

按上式画出的曲线示于下图中。

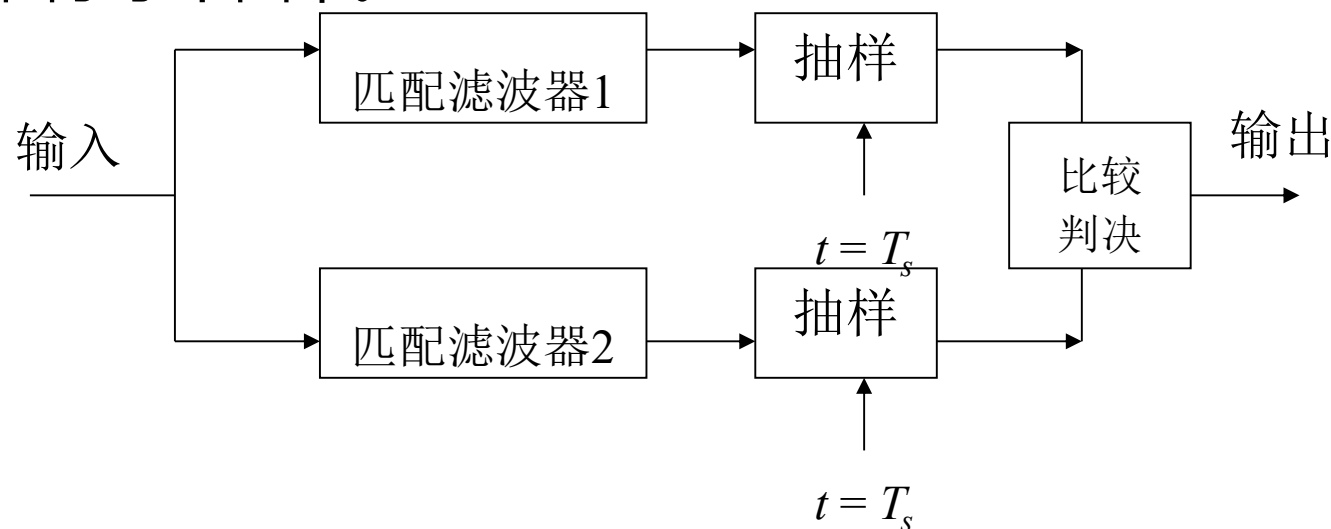




# 第10章 数字信号最佳接收

## 匹配滤波器接收电路的构成

- 对于二进制确知信号，使用匹配滤波器构成的接收电路方框图示于下图中。



- 图中有两个匹配滤波器，分别匹配于两种信号码元。在抽样时刻对抽样值进行比较判决。哪个匹配滤波器的输出抽样值更大，就判决那个为输出。若此二进制信号的先验概率相等，则此方框图能给出最小的总误码率。



## 第10章 数字信号最佳接收

- ◆ 匹配滤波器可以用不同的硬件电路实现，也可以用软件实现。目前，由于软件无线电技术的发展，它日益趋向于用软件技术实现。
- 在上面的讨论中对于信号波形从未涉及，也就是说最大输出信噪比和信号波形无关，只决定于信号能量 $E$ 与噪声功率谱密度 $n_0$ 之比，所以这种匹配滤波法对于任何一种数字信号波形都适用，不论是基带数字信号还是已调数字信号。例10.1中给出的是基带数字信号的例子；而例10.2中给出的信号则是已调数字信号的例子。



# 第10章 数字信号最佳接收

## 匹配滤波器的性能

用上述匹配滤波器得到的最大输出信噪比就等于最佳接收时理论上能达到的最高输出信噪比。证明如下：

匹配滤波器输出电压的波形 $y(t)$  可以写成

$$y(t) = k \int_{t-T_s}^t r(u)s(T_s - t + u)du$$

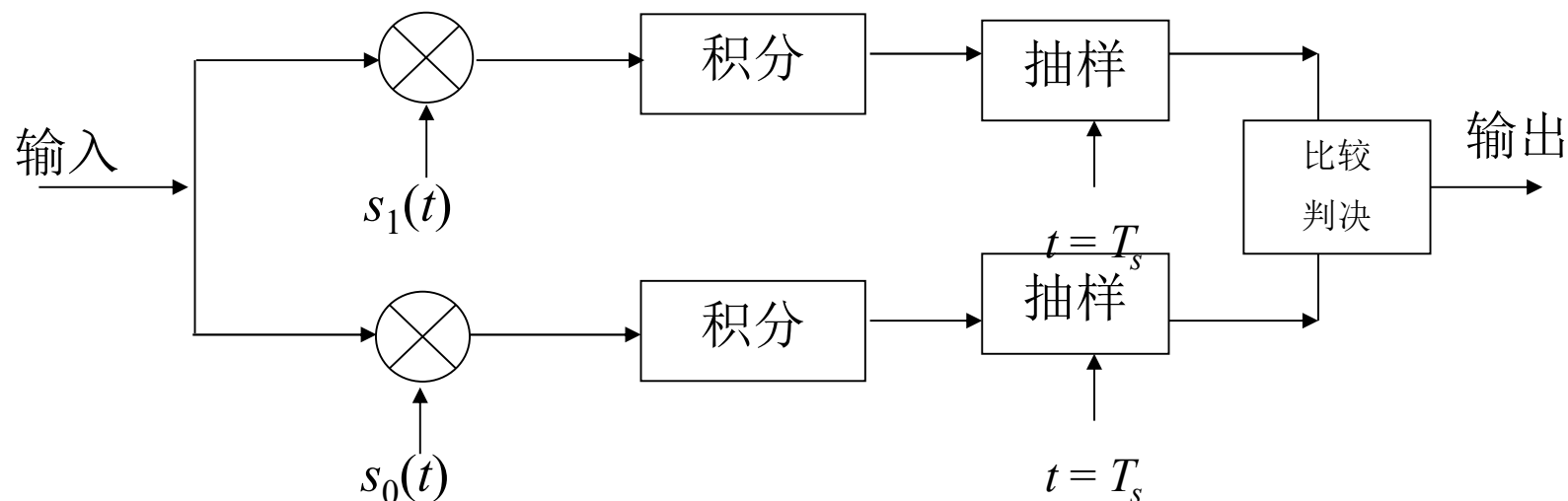
在抽样时刻 $T_s$ ，输出电压等于

$$y(T_s) = k \int_0^{T_s} r(u)s(u)du$$

可以看出，上式中的积分是相关运算，即将输入 $r(t)$ 与 $s(t)$ 作相关运算，而后者是和匹配滤波器匹配的信号。它表示只有输入电压 $r(t) = s(t) + n(t)$ 时，在时刻 $t = T_s$ 才有最大的输出信噪比。式中的 $k$ 是任意常数，通常令 $k = 1$ 。

# 第10章 数字信号最佳接收

用上述相关运算代替上图中的匹配滤波器得到如下图所示的相关接收法方框图。



匹配滤波法和相关接收法完全等效，都是最佳接收方法。

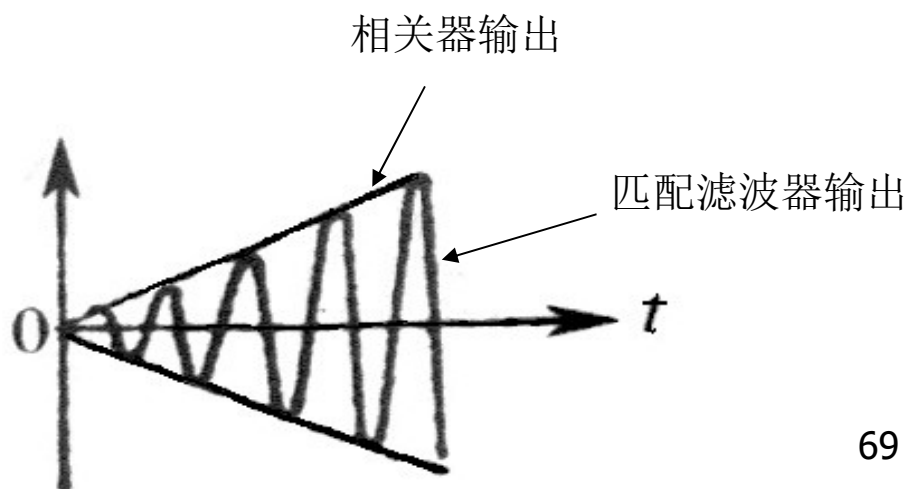
## 第10章 数字信号最佳接收

【例10.3】设有一个信号码元如例10.2中所给出的 $s(t)$ 。试比较它分别通过匹配滤波器和相关接收器时的输出波形。

【解】此信号码元通过相关接收器后，输出信号波形等于

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t s(t)s(t)dt = \int_0^t \cos 2\pi f_0 t \cdot \cos 2\pi f_0 t dt = \int_0^t \cos^2 2\pi f_0 t dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t (1 + \cos 4\pi f_0 t) dt = \frac{1}{2} t + \frac{1}{8\pi f_0} \sin 4\pi f_0 t \approx \frac{t}{2} \end{aligned}$$

上式中已经假定 $f_0$ 很大，从而结果可以近似等于 $t/2$ ，即与 $t$ 成直线关系。这两种结果示于下图中。由此图可见，只有当 $t = T_s$ 时，两者的抽样值才相等。





# 第10章 数字信号最佳接收

## 匹配滤波器的实际应用

匹配滤波器的冲激响应 $h(t)$ 应该和信号波形 $s(t)$ 严格匹配, 包括对相位也有要求。对于确知信号的接收, 这是可以做到的。对于随相信号而言, 就不可能使信号的随机相位和 $h(t)$ 的相位匹配。但是, 匹配滤波器还是可以用于接收随相信号的。下面就对此作进一步的分析。

设匹配滤波器的特性仍如例10.2所给出:

$$h(t) = s(T_s - t) = \cos 2\pi f_0 (T_s - t), \quad 0 \leq t \leq T_s$$

并设此匹配滤波器的输入是 $r(t)$ , 则此滤波器的输出 $y(t)$ 由卷积公式求出为:



## 第10章 数字信号最佳接收

$$\begin{aligned}y(t) &= \int_0^t r(\tau) \cos 2\pi f_0 (T_s - t + \tau) d\tau \\&= \cos 2\pi f_0 (T_s - t) \int_0^t r(\tau) \cos 2\pi f_0 \tau d\tau - \sin 2\pi f_0 (T_s - t) \int_0^t r(\tau) \sin 2\pi f_0 \tau d\tau \\&= \sqrt{\left[ \int_0^t r(\tau) \cos 2\pi f_0 \tau d\tau \right]^2 + \left[ \int_0^t r(\tau) \sin 2\pi f_0 \tau d\tau \right]^2} \cdot \cos[2\pi f_0 (T_s - t) + \theta]\end{aligned}$$

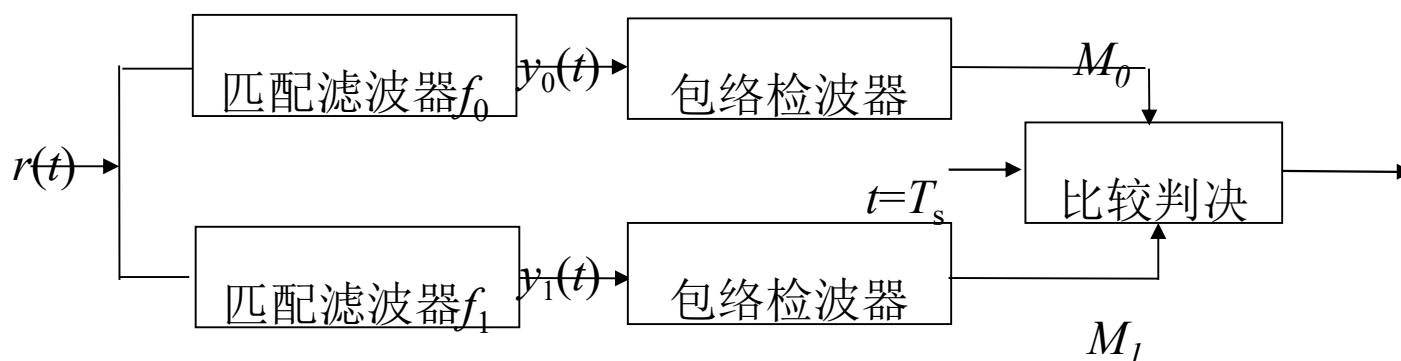
式中

$$\theta = \tan^{-1} \left[ \frac{\int_0^t r(\tau) \sin 2\pi f_0 \tau d\tau}{\int_0^t r(\tau) \cos 2\pi f_0 \tau d\tau} \right]$$

由上式看出，当 $t = T_s$ 时， $y(t)$ 的包络和10.5节随相信号最佳接收判决条件式中的 $M_0$ 和 $M_1$ 形式相同。所以，按照10.5节随相信号最佳接收时的判决准则比较 $M_0$ 和 $M_1$ ，就相当于比较上式的包络。

## 第10章 数字信号最佳接收

因此，10.5节中的随相信号最佳接收机结构图可以改成如下图所示的结构：



在此图中，有两个匹配滤波器，其特性分别对二进制的两种码元匹配。匹配滤波器的输出经过包络检波，然后作比较判决。

由于起伏信号最佳接收机的结构和随相信号的相同，所以上图同样适用于对起伏信号作最佳接收。

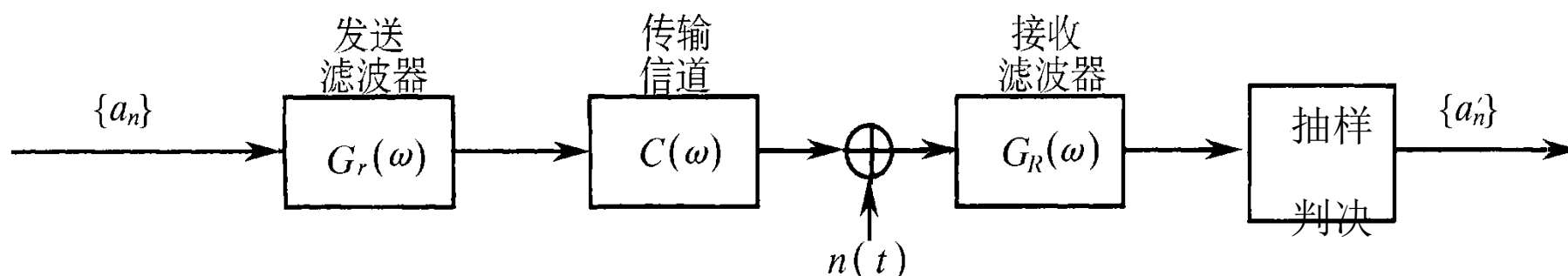


# 第10章 数字信号最佳接收

## 10.9 最佳基带传输系统

### ■ 何谓最佳基带传输系统？

设基带数字信号传输系统由发送滤波器、信道和接收滤波器组成：



其传输函数分别为 $G_T(f)$ 、 $C(f)$ 和 $G_R(f)$ 。

在第6章中将这3个滤波器集中用一个基带总传输函数 $H(f)$ 表示：

$$H(f) = G_T(f) \cdot C(f) \cdot G_R(f)$$



## 第10章 数字信号最佳接收

在第6章中，为了消除码间串扰，要求 $H(f)$ 必须满足奈奎斯特第一准则。当时忽略了噪声的影响，只考虑码间串扰。

现在，我们将分析在 $H(f)$ 满足消除码间串扰的条件之后，如何设计 $G_T(f)$ 、 $C(f)$ 和 $G_R(f)$ ，以使系统在加性白色高斯噪声条件下误码率最小。

将消除了码间串扰并且噪声最小的基带传输系统称为**最佳基带传输系统**。

### ■ 设计最佳基带传输系统的方法

由于信道的传输特性 $C(f)$ 往往不易得知，并且还可能是时变的。所以，在系统设计时，有两种分析方法：

- 1) 假设信道具有理想特性，即假设 $C(f) = 1$ 。
- 2) 考虑到信道的非理想特性。



# 第10章 数字信号最佳接收

## ■ 10.9.1 理想信道的最佳传输系统

### ◆ 最佳传输系统的条件

假设信道传输函数 $C(f) = 1$ 。于是，基带系统的传输特性变为

$$H(f) = G_T(f) \cdot G_R(f)$$

上式中 $G_T(f)$ 虽然表示发送滤波器的特性，但是若传输系统的输入为冲激脉冲，则 $G_T(f)$ 还兼有决定发送信号波形的功能，即它就是信号码元的频谱。

现在，将分析在 $H(f)$ 按照消除码间串扰的条件确定之后，如何设计 $G_T(f)$ 和 $G_R(f)$ ，以使系统在加性白色高斯噪声条件下误码率最小。

由对匹配滤波器频率特性的要求可知，接收匹配滤波器的传输函数 $G_R(f)$ 应当是信号频谱 $S(f)$ 的复共轭。现在，信号的频谱就是发送滤波器的传输函数 $G_T(f)$ ，所以要求接收匹配滤波器的传输函数为：

$$G_R(f) = G_T^*(f) e^{-j2\pi f t_0}$$

上式中已经假定 $k = 1$ 。



## 第10章 数字信号最佳接收

由  $H(f) = G_T(f) \cdot G_R(f)$  , 有

$$G_T^*(f) = H^*(f) / G_R^*(f)$$

将上式代入所要求的接收匹配滤波器的传输函数

$$G_R(f) = G_T^*(f) e^{-j2\pi f t_0}$$

得到

$$G_R(f) G_R^*(f) = H^*(f) e^{-j2\pi f t_0}$$

即  $|G_R(f)|^2 = H^*(f) e^{-j2\pi f t_0}$

上式左端是一个实数, 所以上式右端也必须是实数。因此, 上式可以写为

$$|G_R(f)|^2 = |H(f)|$$

所以得到接收匹配滤波器应满足的条件为

$$|G_R(f)| = |H(f)|^{1/2}$$



## 第10章 数字信号最佳接收

$$|G_R(f)| = |H(f)|^{1/2}$$

由于上式条件没有限定对接收滤波器的相位要求，所以可以选用

$$G_R(f) = H^{1/2}(f)$$

这样，由  $H(f) = G_T(f) \cdot G_R(f)$ ，得到发送滤波器的传输特性为

$$G_T(f) = H^{1/2}(f)$$

上两式就是最佳基带传输系统对于收发滤波器传输函数的要求。

# 第10章 数字信号最佳接收

## ◆ 最佳基带传输系统的误码率性能

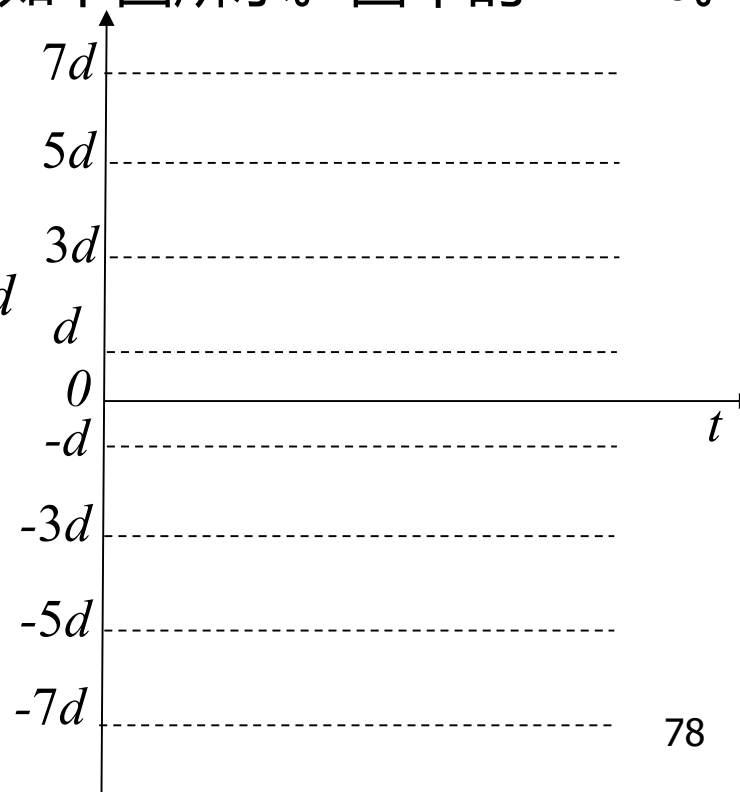
设基带信号码元为 $M$ 进制的多电平信号。一个码元可以取下列 $M$ 种电平之一：

$$\pm d, \pm 3d, \dots, \pm (M-1)d$$

其中 $d$ 为相邻电平间隔的一半，如下图所示。图中的 $M = 8$ 。

在接收端，判决电路的判决门限值则应当设定在：

$$0, \pm 2d, \pm 4d, \dots, \pm (M-2)d$$





## 第10章 数字信号最佳接收

按照这样的规定，在接收端抽样判决时刻，若噪声值不超过  $d$ ，则不会发生错误判决。但是，当噪声值大于最高信号电平值或小于最低电平值时，不会发生错误判决；也就是说，对于最外侧的两个电平，只在一个方向有出错的可能。这种情况的出现占有所有可能的  $1/M$ 。所以，错误概率为

$$P_e = \left(1 - \frac{1}{M}\right) P(|\xi| > d)$$

式中， $\xi$  是噪声的抽样值，而  $P(|\xi| > d)$  是噪声抽样值大于  $d$  的概率。

现在来计算上式中的  $P(|\xi| > d)$ 。设接收滤波器输入端高斯白噪声的单边功率谱密度为  $n_0$ ，接收滤波器输出的带限高斯噪声的功率为  $\sigma^2$ ，则有

$$\sigma^2 = \frac{n_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |G_R(f)|^2 df = \frac{n_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H^{1/2}(f)|^2 df$$



## 第10章 数字信号最佳接收

$$\sigma^2 = \frac{n_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |G_R(f)|^2 df = \frac{n_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H^{1/2}(f)|^2 df$$

上式中的积分值是一个实常数，我们假设其等于1，即假设

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H^{1/2}(f)|^2 df = 1$$

故有

$$\sigma^2 = \frac{n_0}{2}$$

这样假设并不影响对误码率性能的分析。由于接收滤波器是一个线性滤波器，故其输出噪声的统计特性仍服从高斯分布。因此输出噪声 $\xi$ 的一维概率密度函数等于

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right)$$

对上式积分，就可以得到抽样噪声值超过 $d$ 的概率：





## 第10章 数字信号最佳接收

$$\begin{aligned} P(|\xi| > d) &= 2 \int_d^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right) d\xi \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{d/\sqrt{2}\sigma}^\infty \exp(-z^2) dz = \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{\sqrt{2}\sigma}\right) \end{aligned}$$

上式中已作了如下变量代换：

$$z^2 = \xi^2 / 2\sigma^2$$

将上式代入误码率公式，得到

$$P_e = \left(1 - \frac{1}{M}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$



## 第10章 数字信号最佳接收

$$P_e = \left(1 - \frac{1}{M}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

现在，再将上式中的 $P_e$ 和 $d/\sigma$ 的关系变换成 $P_e$ 和 $E/n_0$ 的关系。由上述讨论我们已经知道，在 $M$ 进制基带多电平最佳传输系统中，发送码元的频谱形状由发送滤波器的特性决定：

$$G_T(f) = H^{1/2}(f)$$

发送码元多电平波形的最大值为

$$\pm d, \pm 3d, \dots, \pm (M-1)d$$

等。这样，利用巴塞伐尔定理

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

计算码元能量时，设多电平码元的波形为 $Ax(t)$ ，其中 $x(t)$ 的最大值等于1，以及  $A = \pm d, \pm 3d, \dots, \pm (M-1)d$



## 第10章 数字信号最佳接收

则有码元能量等于

$$A^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)| df = A^2$$

因此, 对于 $M$ 进制等概率多电平码元, 求出其平均码元能量 $E$ 等于

$$\begin{aligned} E &= \frac{2}{M} \sum_{i=1}^{M/2} [d(2i-1)]^2 = d^2 \frac{2}{M} [1 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (M-1)^2] \\ &= \frac{d^2}{3} (M^2 - 1) \end{aligned}$$

因此有

$$d^2 = \frac{3E}{M^2 - 1}$$

于是得到误码率的最终表示式:

$$P_e = \left(1 - \frac{1}{M}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{\sqrt{2}\sigma}\right) = \left(1 - \frac{1}{M}\right) \operatorname{erfc}\left[\left(\frac{3}{M^2 - 1} \cdot \frac{E}{n_0}\right)^{1/2}\right]$$

# 第10章 数字信号最佳接收

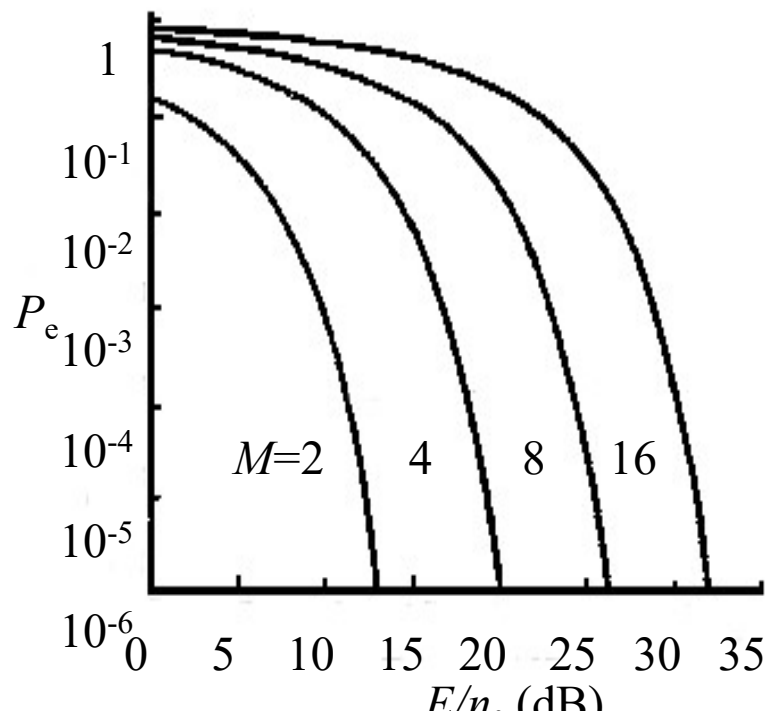
当 $M=2$ 时,

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{E/n_0})$$

上式是在理想信道中, 消除码间串扰条件下, 二进制双极性基带信号传输的最佳误码率。

$M$ 进制多电平信号的误码率曲线:

由此图可见, 当误码率较低时, 为保持误码率不变,  $M$ 值增大到2倍, 信噪比大约需要增大 7 dB。





# 第10章 数字信号最佳接收

## 10.9.2 非理想信道的最佳基带传输系统

### ◆ 最佳传输条件

接收信号码元的频谱等于 $G_T(f) \cdot C(f)$ 。为了使高斯白噪声条件下的接收误码率最小，在接收端可以采用一个匹配滤波器。为使此匹配滤波器的传输函数 $G_R'(f)$ 和接收信号码元的频谱匹配，要求

$$G_R'(f) = G_T^*(f) \cdot C^*(f)$$

基带传输系统的总传输特性为

$$\begin{aligned} H(f) &= G_T(f) \cdot C(f) \cdot G_R'(f) = G_T(f) \cdot C(f) \cdot G_T^*(f) \cdot C^*(f) \\ &= |G_T(f)|^2 |C(f)|^2 \end{aligned}$$

此总传输特性 $H(f)$ 能使其对于高斯白噪声的信噪比最小，但是还没有满足消除码间串扰的条件。为了消除码间串扰，由第6章的讨论得知， $H(f)$ 必须满足：



## 第10章 数字信号最佳接收

$$\sum_i H\left(f + \frac{i}{T_s}\right) = T_s \quad |f| \leq \frac{1}{2T_s}$$

为此，可以在接收端增加一个横向均衡滤波器 $T(f)$ ，使系统总传输特性满足上式要求。故从上两式可以写出对 $T(f)$ 的要求：

$$T(f) = \frac{T_s}{\sum_i |G_T^{(i)}(f)|^2 |C^{(i)}(f)|^2} \quad |f| \leq \frac{1}{2T_s}$$

式中

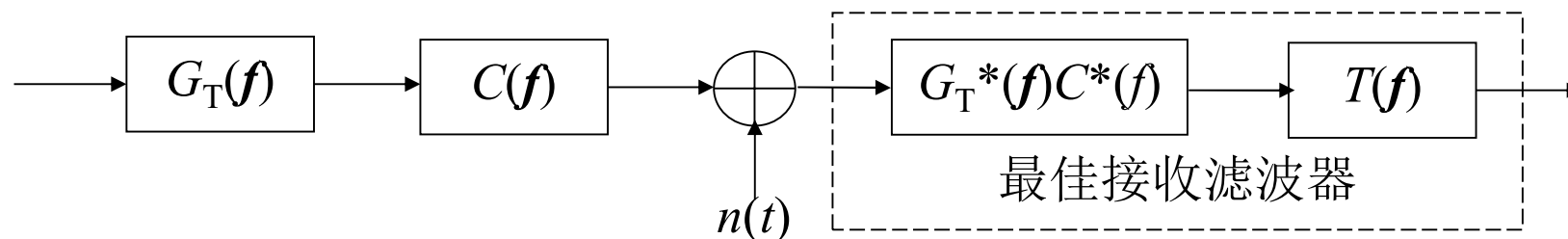
$$G_T^{(i)}(f) = G_T\left(f + \frac{i}{T_s}\right)$$

$$C^{(i)} = C\left(f + \frac{i}{T_s}\right)$$

## 第10章 数字信号最佳接收

从上述分析得知，在非理想信道条件下，最佳接收滤波器的传输特性应该是传输特性为 $G_R'(f)$ 的匹配滤波器和传输特性为 $T(f)$ 的均衡滤波器级连。

### ◆ 非理想信道的最佳基带传输系统方框图



- ◆ 最后需要说明的是，上面的讨论是假定发送滤波器和信道特性已给定，由设计接收滤波器使系统达到最佳化。在理论上，自然也可以假定接收滤波器和信道特性已给定，设计发送滤波器使系统达到最佳；或者只给定信道特性，联合设计发送和接收滤波器两者使系统达到最佳。但是，分析结果表明，这样做的效果和仅使接收滤波器最佳化的结果差别不大。在工程设计时，还是以设计最佳接收滤波器的方法较为实用。



# 第10章 数字信号最佳接收

---

## • 10.10 小结