（一）(便宜)

一、判断题共 10 小题，满分 20 分.

1. 当随机变量 X 和 Y 相互独立时，条件熵 $H(X|Y)$ 等于信源熵 $H(X)$.　　（　）

2. 由于构成同一空间的基底不是唯一的，所以不同的基底或生成矩阵有可能生成同一码集.（　）

3. 一般情况下，用变长编码得到的平均码长比定长编码大得多.　　（　）

4. 只要信息传输率大于信道容量，总存在一种信道编译码，可以以所要求的任意小的误差概率实现可靠的通信.（　）

5. 各码字的长度符合克拉夫特不等式，是唯一可译码存在的充分和必要条件.（　）

6. 连续信源和离散信源的熵都具有非负性.（　）

7. 信源的消息通过信道传输后的误差或失真越大，信宿收到消息后对信源存在的不确定性就越小，获得的信息量就越小.

8. 汉明码是一种线性分组码.（　）

9. 率失真函数的最小值是 0.（　）

10. 必然事件和不可能事件的自信息量都是 0.（　）

二、填空题共 6 小题，满分 20 分.

1、码的检、纠错能力取决于__________________.

2、信源编码的目的是________________；信道编码的目的是________________.

3、把信息组原封不动地搬到码字前 k 位的 (n,k) 码就叫做______________.

4、香农信息论中的三大极限定理是________________、________________、__.

5、设信道的输入与输出随机序列分别为 X 和 Y，则 $I(X^N,Y^N)=NI(X,Y)$ 成立的条件____________________.

6、对于香农-费诺编码、原始香农-费诺编码和哈夫曼编码，编码方法惟一的是_________.

7、某二元信源 $\begin{bmatrix} X \\ P(X) \end{bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{Bmatrix}$，其失真矩阵 $D=\begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix}$，则该信源的 $D_{\max}=$_____.

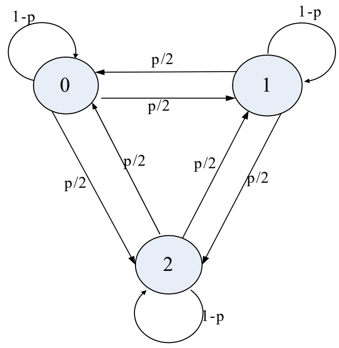
三、本题共 4 小题，满分 50 分.

1、某信源发送端有 2 种符号 x_i $(i=1,2)$，$p(x_1)=a$；接收端有 3 种符号 y_i $(j=1,2,3)$，转移概率矩阵为 $P=\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$.

（1）计算接收端的平均不确定度 $H(Y)$；

（2）计算由于噪声产生的不确定度 $H(Y|X)$；

（3）计算信道容量以及最佳入口分布.



2、一阶马尔可夫信源的状态转移图如右图所示，信源 X 的符号集为 $\{0,1,2\}$.

（1）求信源平稳后的概率分布；

（2）求此信源的熵；

（3）近似地认为此信源为无记忆时，符号的概率分布为平稳分布. 求近似信源的熵 $H(X)$ 并与 H_∞ 进行比较.

4、设二元 (7,4) 线性分组码的生成矩阵为

$$G=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

（1）给出该码的一致校验矩阵，写出所有的陪集首和与之相对应的伴随式；

（2）若接收矢量 $v=(0001011)$，试计算出其对应的伴随式 S 并按照最小距离译码准则试着对其译码.

（二）

一、填空题（共 15 分，每空 1 分）

1、信源编码的主要目的是_______，信道编码的主要目的是_______。

2、信源的剩余度主要来自两个方面，一是________，二

是________________。

3、三进制信源的最小熵为____，最大熵为______。

4、无失真信源编码的平均码长最小理论极限制为______________ 。

5、当______时，信源与信道达到匹配。

6、根据信道特性是否随时间变化，信道可以分为和______________。

7、根据是否允许失真，信源编码可分为和 _________ 。

8、若连续信源输出信号的平均功率为σ^2，则输出信号幅度的概率密度是_____________ 时，信源具有最大熵，其值为值__________________。

9、在下面空格中选择填入数学符号“$=,\geq,\leq,\rangle$”或“$\langle$”

（1）当 X 和 Y 相互独立时，H（XY）____H(X)+H(X/Y) H(Y)+H(X)。

（2）$H_2(X)=\dfrac{H(X_1X_2)}{2}$_____$H_3(X)=\dfrac{H(X_1X_2X_3)}{3}$

（3）假设信道输入用 X 表示，信道输出用 Y 表示。在无噪有损信道中，H(X/Y) ___0, H(Y/X)__0, I(X;Y)__ H(X)。

三、（16 分）已知信源

$$\begin{bmatrix} S \\ P \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

（1）用霍夫曼编码法编成二进制变长码；（6 分）

（2）计算平均码长$\overline{L}$；（4 分）

（3）计算编码信息率R'；（2 分）

（4）计算编码后信息传输率R；（2 分）

（5）计算编码效率η。（2 分）

四、（10 分）某信源输出 A、B、C、D、E 五种符号，每一个符号独立出现，出现概率分别为 1/8、1/8、1/8、1/2、1/8。如果符号的码元宽度为 0.5μs。计算：

（1）信息传输速率R_t。（5 分）

五、（16 分）一个一阶马尔可夫信源，转移概率为$P(S_1|S_1)=\dfrac{2}{3},P(S_2|S_1)=\dfrac{1}{3},P(S_1|S_2)=1,P(S_2|S_2)=0$。

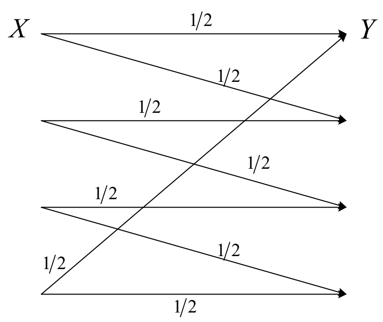
(1) 画出状态转移图。(4 分)

(2) 计算稳态概率。(4 分)

(3) 计算马尔可夫信源的极限熵。(4 分)

(4) 计算稳态下H_1,H_2及其对应的剩余度。(4 分)

六、设有扰信道的传输情况分别如图所示。试求这种信道的信道容量。



七、(16 分)设 X、Y 是两个相互独立的二元随机变量，其取 0 或 1 的概率相等。定义另一个二元随机变量 Z=XY(一般乘积)。试计算

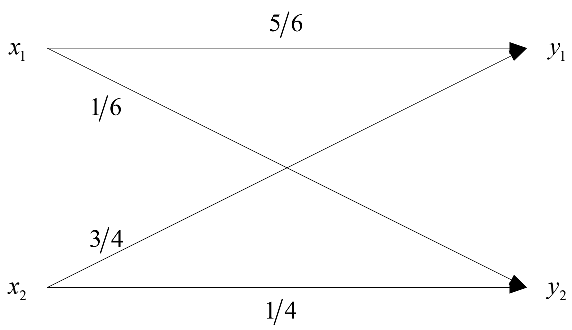
(1) $H(X),H(Z)$;

(2) $H(XY),H(XZ)$;

(3) $H(X|Y),H(Z|X)$;

(4) $I(X;Y),I(X;Z)$;

八、(10 分)设离散无记忆信源的概率空间为$\begin{bmatrix} X \\ P \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}$，通过干扰信道，信道输出端的接收符号集为$Y=[y_1,y_2]$，信道传输概率如下图所示。



(1) 计算信源X中事件x_1包含的自信息量；

(2) 计算信源X的信息熵；

(3) 计算信道疑义度$H(X|Y)$；

(4) 计算噪声熵$H(Y|X)$；

(5) 计算收到消息Y后获得的平均互信息量。

《信息论基础》2 参考答案

一、填空题（共 15 分，每空 1 分）

1、信源编码的主要目的是提高有效性，信道编码的主要目的是提高可靠性。

2、信源的剩余度主要来自两个方面，一是信源符号间的相关性，二是信源符号的统计不均匀性。

3、三进制信源的最小熵为<u>0</u>，最大熵为<u>$\log_2 3$ bit/符号</u>。

4、无失真信源编码的平均码长最小理论极限制为<u>信源熵（或 H(S)/logr= H_r(S)）</u>。

5、当<u>R=C 或（信道剩余度为 0）</u>时，信源与信道达到匹配。

6、根据信道特性是否随时间变化，信道可以分为<u>恒参信道</u>和<u>随参信道</u>。

7、根据是否允许失真，信源编码可分为<u>无失真信源编码</u>和<u>限失真信源编码</u>。

8、若连续信源输出信号的平均功率为σ^2，则输出信号幅度的概率密度是<u>高斯分布或正态分布或$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$</u>时，信源具有最大熵，其值为值<u>$\frac{1}{2}\log 2\pi e\sigma^2$</u>。

9、在下面空格中选择填入数学符号"$=,\geq,\leq,\rangle$"或"$\langle$"

（1）当 X 和 Y 相互独立时，H(XY)<u>=</u>H(X)+H(X/Y)<u>=</u>H(Y)+H(X)。

（2）$H_2(X)=\frac{H(X_1X_2)}{2}\ \underline{\geq}\ H_3(X)=\frac{H(X_1X_2X_3)}{3}$

（3）假设信道输入用 X 表示，信道输出用 Y 表示。在无噪有损信道中，H(X/Y)<u>></u> 0, H(Y/X)<u>=</u>0, I(X;Y)<u><</u>H(X)。

三、（16 分）已知信源

$$\begin{bmatrix} S \\ P \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

（1）用霍夫曼编码法编成二进制变长码；（6 分）

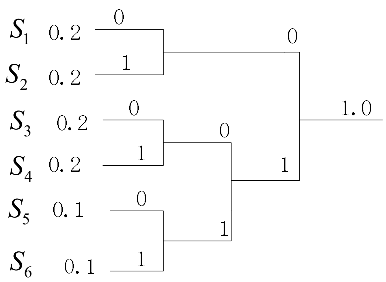
（2）计算平均码长$\bar{L}$；（4 分）

（3）计算编码信息率R'；（2 分）

（4）计算编码后信息传输率R；（2 分）

（5）计算编码效率η。（2 分）

（1）



编码结果为：

$$S_1=00$$
$$S_2=01$$
$$S_3=100$$
$$S_4=101$$
$$S_5=110$$
$$S_6=111$$

（2）$\bar{L}=\sum_{i=1}^{6}P_i\rho_i=0.4\times2+0.6\times3=2.6$ 码元/符号

（3）$R'=\bar{L}\log r$=2.6 bit/符号

（4）$R=\frac{H(S)}{\bar{L}}=\frac{2.53}{2.6}=0.973$ bit/码元 其中，

$H(S)=H(0.2,0.2,0.2,0.2,0.1,0.1)=2.53$ bit/符号

（5）$\eta=\frac{H(S)}{\bar{L}\log r}=\frac{H(S)}{\bar{L}}=0.973$

评分：其他正确的编码方案：1，要求为即时码 2，平均码长最短

四、（10 分）某信源输出 A、B、C、D、E 五种符号，每一个符号独立出现，出现概率分别为 1/8、1/8、1/8、1/2、1/8。如果符号的码元宽度为 0.5μs。计算：

（1）信息传输速率R_t。（5 分）

（1）$R_t=\frac{1}{t}\left[H(X)-H\left(X/Y\right)\right]$

$$\begin{aligned} H(X) &= -\frac{1}{8}\log\frac{1}{8}\times4-\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\log 8+\frac{1}{2}\log 2 \\ &= \frac{3}{2}\log 2+\frac{1}{2}\log 2 \\ &= 2\log 2 \\ &= 2\text{bit} \end{aligned}$$

$$R_t=\frac{2bit}{0.5\mu s}=4\times10^6 bps$$

五、（16 分）一个一阶马尔可夫信源，转移概率为$P(S_1|S_1)=\frac{2}{3},P(S_2|S_1)=\frac{1}{3},P(S_1|S_2)=1,P(S_2|S_2)=0$。

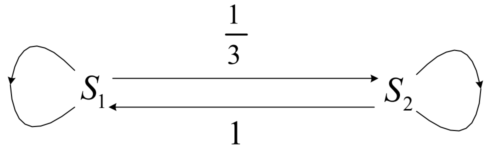
(1) 画出状态转移图。(4 分)

(2) 计算稳态概率。(4 分)

(3) 计算马尔可夫信源的极限熵。(4 分)

(4) 计算稳态下H_1,H_2及其对应的剩余度。(4 分)

解：(1)



(2)由公式$P(S_i)=\sum_{j=1}^{2}P(S_i|S_j)P(S_j)$

有

$$\begin{cases} P(S_1)=\sum_{i=1}^{2}P(S_1|S_i)P(S_i)=\frac{2}{3}P(S_1)+P(S_2) \\ P(S_2)=\sum_{i=1}^{2}P(S_2|S_i)P(S_i)=\frac{1}{3}P(S_1) \\ P(S_1)+P(S_2)=1 \end{cases}$$

得 $\begin{cases} P(S_1)=\frac{3}{4} \\ P(S_2)=\frac{1}{4} \end{cases}$

(3)该马尔可夫信源的极限熵为：

$$\begin{aligned} H_\infty &= -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}P(S_i)P(S_j|S_i)\log P(S_j|S_i) \\ &= -\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\log\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\times\log\frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{2}\times 0.578+\frac{1}{4}\times 1.599 \\ &= 0.681\,bit/符号 \\ &= 0.472\,nat/符号 \\ &= 0.205\,hart/符号 \end{aligned}$$

(4)在稳态下：

$$=-\sum_{i=1}^{2}P(x_i)\log P(x_i)=-\left(\frac{3}{4}\times\log\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times\log\frac{1}{4}\right)=0.811\,bit/符号$$

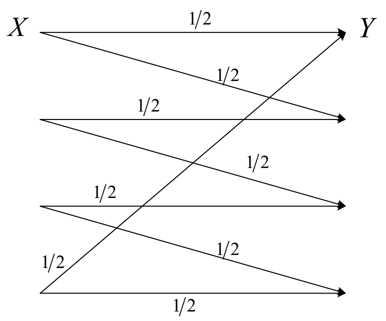
$$H_2=H_\infty=0.205\,hart/符号=0.472\,nat/符号=0.681\,bit/符号$$

对应的剩余度为

$$\eta_1=1-\frac{H_1}{H_0}=1-\frac{0.811}{-\left(\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2}\right)\right)}=0.189$$

$$\eta_2=1-\frac{H_2}{H_0}=1-\frac{0.681}{-\left(\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2}\right)\right)}=0.319$$

六、设有扰信道的传输情况分别如图所示。试求这种信道的信道容量。



解：信道传输矩阵如下

$$P_{Y|X}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

可以看出这是一个对称信道，L=4,那么信道容量为

$$\begin{aligned} C &= \log 4-H\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0\right) \\ &= \log L+\sum_{j=1}^{L}p(y_j|x_i)\log p(y_j|x_i) \\ &= \log 4+2\times\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} \\ &= 1bit \end{aligned}$$

七、(16 分)设 X、Y 是两个相互独立的二元随机变量，其取 0 或 1 的概率相等。定义另一个二元随机变量 Z=XY(一般乘积)。试计算

(1) $H(X),H(Z)$;

(2) $H(XY),H(XZ)$;

(3) $H(X|Y),H(Z|X)$;

(4) $I(X;Y),I(X;Z)$;

解：(1)

Z	0	1
P(Z)	3/4	1/4

$$H(X)=H\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=1bit$$

$$H(2)=H\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)=0.8113bit$$

(2) $H(XY)=H(X)+H(Y)=1+1=2\,bit/对$

$$H(XZ)=H(X)+H(Z|X)=1+\frac{1}{2}H(1,0)+\frac{1}{2}H\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=1.5bit/对$$

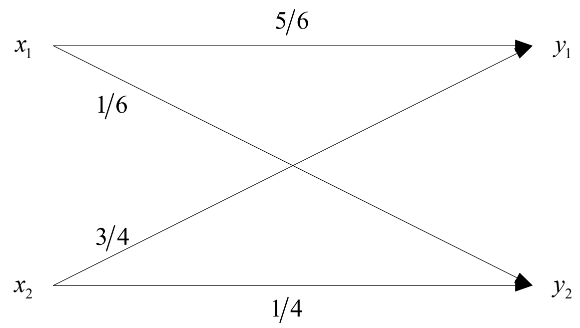
(3) $H(X|Y)=H(X)=1bit$

$$H(Z|X)=\frac{1}{2}H(1,0)+\frac{1}{2}H\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=0.5bit$$

(4) $I\left(X,Y\right)=H\left(Y\right)-H\left(Y\mid X\right)=H\left(Y\right)-H\left(Y\right)=0$

$$I\left(X,Z\right)=H\left(Z\right)-H\left(Z\mid X\right)=0.8113-0.5=0.3113bit$$

八、(10 分)设离散无记忆信源的概率空间为 $\begin{bmatrix} X \\ P \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}$，通过干扰信道，信道输出端的接收符号集为 $Y=\left[y_1,y_2\right]$，信道传输概率如下图所示。



(6) 计算信源 X 中事件 x_1 包含的自信息量；

(7) 计算信源 X 的信息熵；

(8) 计算信道疑义度 $H\left(X\mid Y\right)$；

(9) 计算噪声熵 $H\left(Y\mid X\right)$；

(10)计算收到消息 Y 后获得的平均互信息量。

解：

(1) $I\left(x_1\right)=-\log 0.8=0.322bit=0.0969hart=0.223nat$

(2) $H(X)=H(0.8,0.2)=0.722bit/\text{符号}=0.5nat/\text{符号}=0.217hart/\text{符号}$

(3)转移概率：

x \ y	y_1	y_2
x_1	5/6	1/6
x_2	3/4	1/4

联合分布：

x \ y	y_1	y_2	
x_1	2/3	12/15	4/5
x_1	3/20	1/20	1/5
	49/60	11/60	1/5

$$H\left(XY\right)=H\left(\frac{2}{3},\frac{2}{15},\frac{3}{20},\frac{1}{20}\right)$$
$$=1.404\,bit/\text{符号}$$
$$=0.973\,nat/\text{符号}$$
$$=0.423\,hart/\text{符号}$$

$H(Y)=H(49/60,11/60)=0.687bit/\text{符号}=0.476nat/\text{符号}=0.207hart/\text{符号}$

$H(X|Y)=H(XY)-H(Y)=0.717bit/\text{符号}=0.497nat/\text{符号}=0.216hart/\text{符号}$

(4)

$H(Y|X)=H(XY)-H(X)=0.682bit/\text{符号}=0.473nat/\text{符号}=0.205hart/\text{符号}$

(5)

$I(X;Y)=H(X)-H(X|Y)=0.00504bit/\text{符号}=0.00349nat/\text{符号}=0.00152hart/\text{符号}$

(三)

一、　选择题（共 10 分，每小题 2 分）

1、有一离散无记忆信源 X，其概率空间为 $\begin{bmatrix} X \\ P \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0.5 & 0.25 & 0.125 & 0.125 \end{bmatrix}$，则其无记忆二次扩展信源的熵 H(X²)=(　)

A、1.75 比特/符号；　　B、3.5 比特/符号；

C、9 比特/符号；　　D、18 比特/符号。

2、信道转移矩阵为

$$\begin{bmatrix} P(y_1/x_1) & P(y_2/x_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P(y_3/x_2) & P(y_4/x_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P(y_5/x_3) & P(y_6/x_3) \end{bmatrix}$$

其中 $P(y_j/x_i)$ 两两不相等，则该信道为

3、A、一一对应的无噪信道

B、具有并归性能的无噪信道

C、对称信道

D、具有扩展性能的无噪信道

3、设信道容量为 C，下列说法正确的是：(　　)

A、互信息量一定不大于 C

B、交互熵一定不小于 C

C、有效信息量一定不大于 C

D、条件熵一定不大于 C

4、在串联系统中，有效信息量的值（　　）

A、趋于变大

B、趋于变小

C、不变

D、不确定

5、若 BSC 信道的差错率为 P，则其信道容量为：(　　)

A、$H\left(p\right)$

B、$\log_2\left[\left(1-p\right)p^{\frac{p}{1-p}}\right]$

C、 $1-H(p)$

D、$-P\log(P)$

二、填空题（20 分，每空 2 分）

1、(7,4)线性分组码中，接受端收到分组 R 的位数为______，伴随式 S 可能的值有______种，差错图案 e 的长度为__________，系统生成矩阵 G_s 为________行的矩阵，系统校验矩阵 H_s 为________行的矩阵，G_s 和 H_s 满足的关系式是____________。

2、香农编码中,概率为 $P(x_i)$ 的信源符号 x_i 对应的码字 C_i 的长度 K_i 应满足不等式____________________________。

3、设有一个信道，其信道矩阵为 $\begin{bmatrix} 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \end{bmatrix}$，则它是__________信道（填对称，准对称），其信道容量是____________比特/信道符号。

三、（20 分）$\begin{bmatrix} X \\ P(X) \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 & x_2 \\ 0.5 & 0.5 \end{Bmatrix}$，通过一个干扰信道，接受符号集为 $Y=\{y_1 \quad y_2\}$，信道转移矩阵为

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

试求（1）H(X),H(Y),H(XY)；（7 分）

(2) H(Y|X),H(X|Y)；（5 分）

(3) I(Y;X)。（3 分）

(4)该信道的容量 C（3 分）

（5）当平均互信息量达到信道容量时，接收端 Y 的熵 H（Y）。（2 分）

计算结果保留小数点后 2 位, 单位为比特/符号。

四、（9 分）简述平均互信息量的物理意义，并写出应公式。

六、（10 分）设有离散无记忆信源，其概率分布如下：

$$\begin{pmatrix} X \\ P(X) \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} & \frac{1}{64} & \frac{1}{64} \end{Bmatrix}$$

对其进行费诺编码，写出编码过程，求出信源熵、平均码长和编码效率。

七、信道编码（21 分）

现有生成矩阵 $G_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

1. 求对应的系统校验矩阵 H_s。（2 分）

2 求该码字集合的最小码字距离 d、最大检错能力 l_{max} 、最大纠错能力 t_{max} 。（3 分）

2. 填写下面的 es 表 （8 分）

e	s
0000000	
0000001	
0000010	
0000100	
0001000	
0010000	
0100000	
1000000	

4. 现有接收序列为 $r=(1100100)$，求纠错译码输出 $\hat{c}$。（4 分）

5. 画出该码的编码电路 （4 分）

(四)

四、简答题（共 20 分，每题 10 分

1. 利用公式介绍无条件熵、条件熵、联合熵和平均互信息量之间的关系。

2. 简单介绍哈夫曼编码的步骤

五、计算题（共 40 分）

1. 某信源含有三个消息，概率分别为 $p(0)=0.2$，$p(1)=0.3$，$p(2)=0.5$，失真矩阵为 $D=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。

求 D_{max}、D_{min} 和 $R(D_{max})$。（10 分）

2. 设对称离散信道矩阵为 $P=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$，求信道容量 C。**（10 分）**

3. 有一稳态马尔可夫信源，已知转移概率为 $p(S_1/S_1)=2/3$，$p(S_1/S_2)=1$。求：
 (1) 画出状态转移图和状态转移概率矩阵。
 (2) 求出各状态的稳态概率。
 (3) 求出信源的极限熵。
 （20 分）

（五）

一、（11’）填空题

（1） 1948 年，美国数学家__香农__ 发表了题为"通信的数学理论"的长篇论文，从而创立了信息论。

（2） 必然事件的自信息是 __0__ 。

（3） 离散平稳无记忆信源 X 的 N 次扩展信源的熵等于离散信源 X 的熵的__N 倍__。

（4） 对于离散无记忆信源，当信源熵有最大值时，满足条件为__信源符号等概分布__。

（5） 对于香农编码、费诺编码和霍夫曼编码，编码方法惟一的是__香农编码__。

（6） 已知某线性分组码的最小汉明距离为 3，那么这组码最多能检测出__2__个码元错误，最多能纠正__1__个码元错误。

（7） 设有一离散无记忆平稳信道，其信道容量为 C，只要待传送的信息传输率 R__小于__C（大于、小于或者等于），
 则存在一种编码，当输入序列长度 n 足够大，使译码错误概率任意小。

（8） 平均错误概率不仅与信道本身的统计特性有关，还与__译码规则__和__编码方法__有关

二、（9′）判断题

（1） 信息就是一种消息。（ × ）

（2） 信息论研究的主要问题是在通信系统设计中如何实现信息传输、存储和处理的有效性和可靠性。（ √ ）

（3） 概率大的事件自信息量大。（ × ）

（4） 互信息量可正、可负亦可为零。（ √ ）

（5） 信源剩余度用来衡量信源的相关性程度，信源剩余度大说明信源符号间的依赖关系较小。（ × ）

（6） 对于固定的信源分布，平均互信息量是信道传递概率的下凸函数。（ √ ）

（7） 非奇异码一定是唯一可译码，唯一可译码不一定是非奇异码。（ × ）

（8） 信源变长编码的核心问题是寻找紧致码（或最佳码），霍夫曼编码方法构造的是最佳码。（ √ ）

（9）信息率失真函数 R(D)是关于平均失真度 D 的上凸函数.（ × ）

五、（18’）.黑白气象传真图的消息只有黑色和白色两种，求：

1） 黑色出现的概率为 0.3，白色出现的概率为 0.7。给出这个只有两个符号的信源 X 的数学模型。假设图上黑白消息出现前后没有关联，求熵 $H(X)$；

3）分别求上述两种信源的冗余度，比较它们的大小并说明其物理意义。

解：1）信源模型为 $\begin{bmatrix}a_1=黑 & a_2=白\\ 0.3 & 0.7\end{bmatrix}$ （1分）

$$H(X)=-\sum_{i=1}^{2}P(a_i)\log_2 P(a_i)=0.881\quad bit/符号$$

（2分）

2）由题意可知该信源为一阶马尔科夫信源。

（2分）

由 $\begin{cases}P(a_i)=\sum_{j=1}^{2}P(a_j)P(a_i/a_j), & i=1,2\\ P(a_1)+P(a_2)=1\end{cases}$

4分）

得极限状态概率

$$\begin{cases}P(白)=\dfrac{2}{3}\\ P(黑)=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

2分）

$$H_2(X)=-\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}P(a_i)P(a_j/a_i)\log_2 P(a_j/a_i)=0.5533\quad bit/符号$$

3分）

$$\gamma_1 = 1 - \frac{H(X)}{\log_2 2} = 0.119$$ （1分）

$$\gamma_2 = 1 - \frac{H_\infty(X)}{\log_2 2} = 0.447$$

$\gamma_2 > \gamma_1$。说明：当信源的符号之间有依赖时，信源输出消息的不确定性减弱。而信源冗余度正是反映信源符号依赖关系的强弱，冗余度越大，依赖关系就越大。（2分）

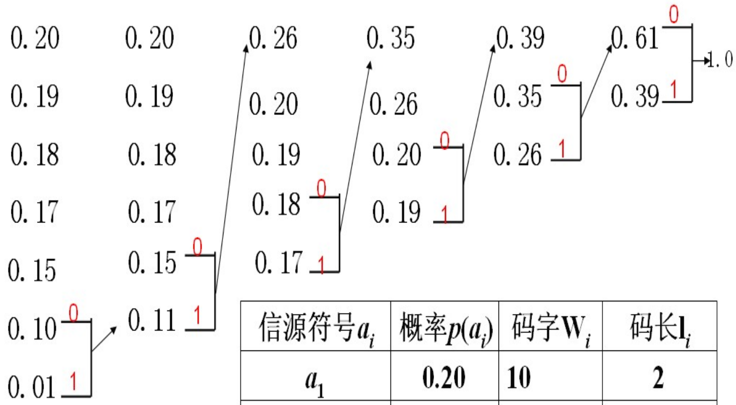
六、（18'）.信源空间为

$$\begin{bmatrix} X \\ P(X) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ 0.2 & 0.19 & 0.18 & 0.17 & 0.15 & 0.1 & 0.01 \end{bmatrix}$$

，试分别构造二元香农码和二元霍夫曼码，计算其平均码长和编码效率（要求有编码过程）。

信源消息符号a_i	符号概率(a_i)	累加概率P_i	$-\log p(a_i)$	码字长度l_i	码字
a_1	0.20	0	2.32	3	000
a_2	0.19	0.2	2.39	3	001
a_3	0.18	0.39	2.47	3	011
a_4	0.17	0.57	2.56	3	100
a_5	0.15	0.74	2.74	3	101
a_6	0.10	0.89	3.32	4	1110
a_7	0.01	0.99	6.64	7	1111110

$$\bar{L} = \sum_{i=1}^{7} p(a_i) l_i = 3.14 \qquad R = \frac{H(X)}{\bar{L}} = \frac{2.61}{3.14} = 0.831$$



信源符号a_i	概率$p(a_i)$	码字W_i	码长l_i
a_1	0.20	10	2
a_2	0.19	11	2
a_3	0.18	000	3
a_4	0.17	001	3
a_5	0.15	010	3
a_6	0.10	0110	4
a_7	0.01	0111	4

$$\bar{L} = \sum_{i=1}^{7} p(a_i) l_i = 2.72$$

码元/符号

$$R = \frac{H(X)}{\bar{L}} = \frac{2.61}{2.72} = 0.96$$

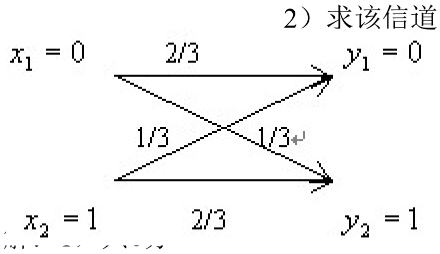
比特/符号

2）（3分）最大后验概率准则下，有，

八（10'）.二元对称信道如图。

1）若 $p(0) = \frac{3}{4}$，$p(1) = \frac{1}{4}$，求 $H(X)$、$H(X|Y)$和$I(X;Y)$；

2）求该信道的信道容量。



$H(X) = 0.8113$ bit/符号

$H(X|Y) = 0.749 bit$/符号

$I(X;Y) = 0.0616$ bit/符号

2)， $C = 0.082$ bit/符号（3分）此时输入概率分布为等概率分布。（1分）

九、（18'） 设一线性分组码具有一致监督矩阵

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1）求此分组码 n=?,k=?共有多少码字？

2）求此分组码的生成矩阵 G。

3）写出此分组码的所有码字。

4）若接收到码字（101001），求出伴随式并给出翻译结果。

解：1）n=6,k=3,共有8个码字。（3分）

2）设码字 $\vec{C} = (C_5C_4C_3C_2C_1C_0)$ 由 $HC^T = 0^T$ 得

$$\begin{cases} C_2 \oplus C_1 \oplus C_0 = 0 \\ C_4 \oplus C_3 \oplus C_0 = 0 \\ C_5 \oplus C_3 \oplus C_1 \oplus C_0 = 0 \end{cases}$$

（3分）

令监督位为 $(C_2C_1C_0)$，则有

$$\begin{cases} C_2 = C_5 \oplus C_3 \\ C_1 = C_5 \oplus C_4 \\ C_0 = C_4 \oplus C_3 \end{cases}$$

（3分）

$P_E = \frac{11}{24}$

生成矩阵为 $\begin{bmatrix} & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ （2分）

3）所有码字为000000，001101，010011，011110，100110，101011，110101，111000。（4分）

4）由 $S^T = HR^T$ 得

$S = (101)$，（2分）该码字在第5位发生错误，（101001）纠正为（101011），即译码为（101001）（1分）

（六）

一、概念简答题（每题 5 分，共 40 分）

1. 什么是平均自信息量与平均互信息，比较一下这两个概念的异同？

2. 简述最大离散熵定理。对于一个有 m 个符号的离散信源，其最大熵是多少？

3. 解释信息传输率、信道容量、最佳输入分布的概念，说明平均互信息与信源的概率分布、信道的传递概率间分别是什么关系？

4. 对于一个一般的通信系统，试给出其系统模型框图，并结合此图，解释数据处理定理。

5. 写出香农公式，并说明其物理意义。当信道带宽为 5000Hz，信噪比为 30dB 时求信道容量。

6. 解释无失真变长信源编码定理。

7. 解释有噪信道编码定理。

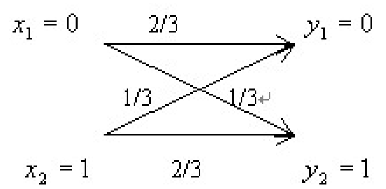
8. 什么是保真度准则？对二元信源 $\begin{bmatrix} u \\ p(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega & 1-\omega \end{bmatrix}$，其失真矩阵 $D = \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix}$，求 a>0 时率失真函数的 $D_{\min}$ 和 $D_{\max}$？

二、综合题（每题 10 分，共 60 分）

1. 黑白气象传真图的消息只有黑色和白色两种，求：

1） 黑色出现的概率为 0.3，白色出现的概率为 0.7。给出这个只有两个符号的信源 X 的数学模型。假设图上黑白消息出现前后没有关联，求熵 $H(X)$；

2） 假设黑白消息出现前后有关联，其依赖关系为：$P(白/白) = 0.9$，$P(黑/白) = 0.1$，$P(白/黑) = 0.2$，$P(黑/黑) = 0.8$，求其熵 $H_2(X)$ ；

2. 二元对称信道如图。

；

1）若 $P(0) = \frac{3}{4}$，$P(1) = \frac{1}{4}$，求 $H(X)$ 和 $I(X;Y)$；

2）求该信道的信道容量和最佳输入分布。

3. 信源空间为

$$\begin{bmatrix} S \\ P(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 & s_7 & s_8 \\ 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.05 & 0.05 & 0.05 & 0.05 \end{bmatrix}$$

，试分别构造二元和三元霍夫曼码，计算其平均码长和编码效率。

5.已知一（8，5）线性分组码的生成矩阵为$\begin{bmatrix}10000111\\01000100\\00100010\\00010001\\00001111\end{bmatrix}$。

求：1）输入为全 00011 和 10100 时该码的码字；2）最小码距。

答案

一、 概念简答题（每题 5 分，共 40 分）

1.答：平均自信息为 $H(X)=-\sum_{i=1}^{n}p(x_i)\log p(x_i)$

表示信源的平均不确定度，也表示平均每个信源消息所提供的信息量。

平均互信息 $I(X;Y)=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p(x_iy_j)\log\frac{p(x_i/y_j)}{p(x_i)}$

表示从 Y 获得的关于每个 X 的平均信息量，也表示发 X 前后 Y 的平均不确定性减少的量，还表示通信前后整个系统不确定性减少的量。

2.答：最大离散熵定理为：离散无记忆信源，等概率分布时熵最大。

最大熵值为 $H_{\max}=\log_2 m$。

平均互信息是信源概率分布的∩型凸函数，是信道传递概率的 U 型凸函数。

5.答：香农公式为 $C_t=\lim_{T\to\infty}\frac{C}{T}=W\log_2\left(1+\frac{P}{N_0W}\right)\ bit/s$，它是高斯加性白噪声信道在单位时间内的信道容量，其值取决于信噪比和带宽。

由 $10\lg\frac{P}{N_0W}=30\ dB$ 得 $\frac{P}{N_0W}=1000$，则 $C_t=5000\log_2(1+1000)=49836\ bit/s$

6.答：只要 $\frac{\overline{K_L}}{L}\geq\frac{H(X)}{\log_2 m}$，当 N 足够长时，一定存在一种无失真编码。

7.答：当 R＜C 时，只要码长足够长，一定能找到一种编码方法和译码规则，使译码错误概率无穷小。

8.答：1）保真度准则为：平均失真度不大于允许的失真度。

2）因为失真矩阵中每行都有一个 0，所以有 $D_{\min}=0$，而 $D_{\max}=\min\{(1-\omega)\alpha,\omega\alpha\}$。

二、综合题（每题 10 分，共 60 分）

1.答：1）信源模型为 $\begin{bmatrix}a_1=\text{黑} & a_2=\text{白}\\ 0.3 & 0.7\end{bmatrix}$

$$H(X)=-\sum_{i=1}^{2}P(a_i)\log_2 P(a_i)=0.881\quad bit/\text{符号}$$

2）由 $\begin{cases}P(a_i)=\sum_{j=1}^{2}P(a_j)P(a_i/a_j), & i=1,2\\ P(a_1)+P(a_2)=1\end{cases}$ 得 $\begin{cases}P(\text{白})=\frac{2}{3}\\ P(\text{黑})=\frac{1}{3}\end{cases}$

则

$$H_2(X)=-\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}P(a_i)P(a_j/a_i)\log_2 P(a_j/a_i)=0.5533\quad bit/\text{符号}$$

2.答：1）$H(X)=0.8113\ bit/\text{符号}$

$I(X;Y)=0.0616\ bit/\text{符号}$

2）$C=0.082\ bit/\text{符号}$，最佳输入概率分布为等概率分布。

3.答：1）二元码的码字依序为：10，11，010，011，1010，1011，1000，1001。

平均码长 $L_2=2.6\ bit/\text{符号}$，编码效率 $\eta_2=0.97$

2）三元码的码字依序为：1，00，02，20，21，22，010，011。

平均码长 $L_3=1.7\ bit/\text{符号}$，编码效率 $\eta_3=0.936$