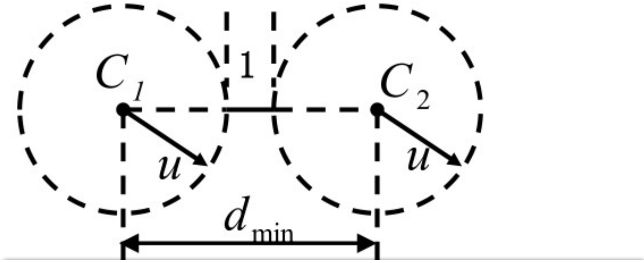
定理9.1 设$d_{\min}$为（$\boldsymbol{n}, \boldsymbol{k}$）分组码的最小汉明距离，

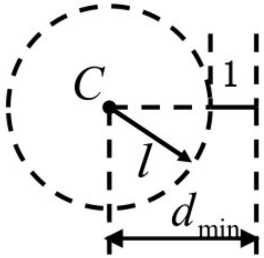
1) 该码具备纠正 u 个错误的充分必要条件是

$$d_{\min} = 2u + 1$$



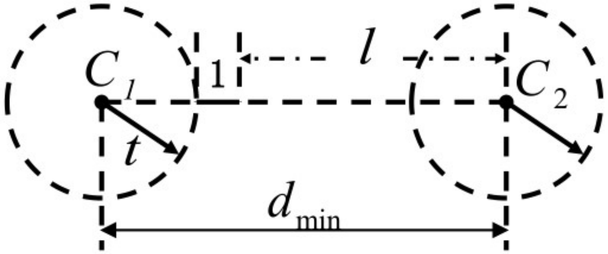
2) 该码具备检测 l 个错误的充分必要条件是

$$d_{\min} = l + 1$$



3) 该码具备纠正 t 个错误，同时可以发现 $l(l > t)$ 个错误的充分必要条件是

$$d_{\min} = t + l + 1$$



● 分组码的表示方法：

➢信息码组由 k 个信息码元组成，共有 2^k 个不同的信息码组；

➢附加 $r=n-k$ 个校验码元，每个校验码元是该信息码组的某些信息码元模2和；

➢编码器输出长度为n的码字；

➢码字的数目共有 2^k；

➢这2^k 个码字的集合称为 (n,k) 分组码；

9.4 线性分组码— 概述　（7,3）线性分组码示例

信息码组	码字
000	0000000
001	0011110
010	0100111
011	0111001
100	1001011
101	1010101
110	1101100
111	1110010

9.4 线性分组码— 校验矩阵与生成矩阵

- 校验元可由下面方程组计算得到：

$$\mathbf{C}=[c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6,c_7]$$

$$\begin{cases} c_4=c_1+c_3 \\ c_5=c_1+c_2+c_3 \\ c_6=c_1+c_2 \\ c_7=c_2+c_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1+c_3+c_4=0 \\ c_1+c_2+c_3+c_5=0 \\ c_1+c_2+c_6=0 \\ c_2+c_3+c_7=0 \end{cases}$$

以 (7,3) 线性分组码为例。码字表示为

$$\mathbf{C}=[c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6,c_7]$$

其中c_1,c_2,c_3为信息元，c_4,c_5,c_6,c_7为校验元。

- 用矩阵表示为：

$$\begin{bmatrix} 1&0&1&1&0&0&0 \\ 1&1&1&0&1&0&0 \\ 1&1&0&0&0&1&0 \\ 0&1&1&0&0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1+c_3+c_4=0 \\ c_1+c_2+c_3+c_5=0 \\ c_1+c_2+c_6=0 \\ c_2+c_3+c_7=0 \end{cases}$$

9.4 线性分组码— 校验矩阵与生成矩阵

- 令

$$H=\left[\begin{array}{ccc|cccc}1&0&1&1&0&0&0\\1&1&1&0&1&0&0\\1&1&0&0&0&1&0\\0&1&1&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$C=[c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6,c_7]$$

$$0=[0,0,0,0]$$

则 $HC^{\mathrm{T}}=0^{\mathrm{T}} \Longleftrightarrow CH^{\mathrm{T}}=0$

(2) 生成矩阵

- 由校验方程，得到

$$\begin{cases}c_4=c_1+c_3\\c_5=c_1+c_2+c_3\\c_6=c_1+c_2\\c_7=c_2+c_3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}c_1+c_3+c_4=0\\c_1+c_2+c_3+c_5=0\\c_1+c_2+c_6=0\\c_2+c_3+c_7=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}c_1=c_1\\c_2=c_2\\c_3=c_3\\c_4=c_1+c_3\\c_5=c_1+c_2+c_3\\c_6=c_1+c_2\\c_7=c_2+c_3\end{cases}$$

- 令 $m=[c_1,c_2,c_3]$

$$G=\left[\begin{array}{ccc|cccc}1&0&0&1&1&1&0\\0&1&0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1&0&1\end{array}\right]=[I\quad P]$$

$$\Longrightarrow C=mG$$

- H被称为校验矩阵。
- 对(n,k)线性分组码，校验矩阵为$(n-k)\times n$维矩阵.
- 对于系统码，校验矩阵可以表示为 $H=[Q \quad I]$

  其中Q为$(n-k)\times k$维矩阵， I为$(n-k)\times(n-k)$维单位矩阵。

- G 被称为生成矩阵。
- 对(n,k)线性分组码，生成矩阵为$k\times n$ 维矩阵。
- 对于系统码，生成矩阵可以表示为 $C=mG$

$$G=[I \quad P]$$

其中P为$k\times(n-k)$维矩阵，I 为 $k\times k$维单位矩阵。

(3) 校验矩阵和生成矩阵的关系

- 由于生成矩阵G的每一行都是一个码字，所以G 的每行都满足 $HG_i^{\mathrm{T}}=0^{\mathrm{T}}$，则有

$$HG^{\mathrm{T}}=0$$

- 对于标准形式的校验矩阵和监督矩阵，有

$$HG^{\mathrm{T}}=[Q \quad I][I \quad P]^{\mathrm{T}}=Q+P^{\mathrm{T}}=0$$

$$\Longrightarrow Q=P^{\mathrm{T}}$$

- 例9.9　　已知生成矩阵，求解校验矩阵。

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{matrix}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{P}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix}\mathbf{Q} & \mathbf{I}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}=\mathbf{P}^{T}$$

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix} \begin{matrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{matrix}} \end{bmatrix}$$

● 伴随式（校正子）：伴随接收码字的一个$n\text{-}k$维向量，反映“信道对码字造成怎样的干扰”

● 设发送码字为C，接收到的码元序列为Y，令

$$S = YH^T \quad 或 \quad S^T = HY^T$$

1) $S = 0$，说明Y是一个码字;

2) $S \neq 0$，说明Y不是码字，传输过程产生了误码。

● 令 $Y = C + E$

$$\Rightarrow S = YH^T = (C + E)H^T = CH^T + EH^T = EH^T$$

● 令 $E = [e_1, e_2, \cdots, e_n]$

$H = [H_1, H_2, \cdots, H_n]$ （其中H_i表示H的列向量）

则

$$S^T = HE^T = [H_1, H_2, \cdots, H_n]\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} e_i H_i$$

结论：

1) 当传输过程没有错误时，即 $E = [0_1, 0, \cdots, 0]$，$S^T = 0$

2) 当发生一位错误时，S^T是校验矩阵的某一列。

3) 当发生多个错误时，S^T为校验矩阵对应列的模2和。

例9.10： 设(7,3)线性分组码的校验矩阵为

$$\boldsymbol{H}=\left[\boxed{\begin{matrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{matrix}}\ \boxed{\begin{matrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{matrix}}\right]$$

（1）接收码字 $\boldsymbol{Y}$=(1010011)，

（2）接收码字 $\boldsymbol{Y}$=(1110011)，

（3）接收码字 $\boldsymbol{Y}$=(0011011)，

（1）接收码字 $\boldsymbol{Y}$=(1010011)，

$$\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&0&1&1&0&0&0\\1&1&1&0&1&0&0\\1&1&0&0&0&1&0\\0&1&1&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ 传输过程中没有误码，$\hat{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{Y}$

（3）接收码字 $\boldsymbol{Y}$=(0011011)，

$$\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&0&1&1&0&0&0\\1&1&1&0&1&0&0\\1&1&0&0&0&1&0\\0&1&1&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\\0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}$与 $\boldsymbol{H}$ 中的任一列都不相同，

$$\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{H}_4=\boldsymbol{H}_2+\boldsymbol{H}_7=\boldsymbol{H}_5+\boldsymbol{H}_6$$

不能确定到底是哪两位出错，不能正确译码。

（2）接收码字 $\boldsymbol{Y}$=(1110011)，

$$\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&0&1&1&0&0&0\\1&1&1&0&1&0&0\\1&1&0&0&0&1&0\\0&1&1&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{H}_2$，第2位出错，$\boldsymbol{E}=(0100000)$

$\Rightarrow$ $\hat{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{E}=(1010011)$

- 伴随式：又称监督子、校验子
- 对于已给线性分组码，伴随式数目与可纠正错误数目的关系：$2^{n-k}\geq\sum_{i=0}^{u}C_n^i$ 等号成立则为完备码

- **纠错步骤：**
  - –（根据校验方程），确定校验矩阵H；
  - –对于接收码字，求解对应的伴随式：$S^T=HY^T$
  - –判断出错码元位置；
  - –纠错；

定理 线性分组码的最小汉明距离等于非零码字的最小重量。

说明：

1. 线性分组码具有封闭性
2. 码字的重量定义为非零码元的个数
3. 两个码字的汉明距离等于这两个码字相加所得新码字的重量。

若$\boldsymbol{H}$中的任意 t 列线性无关，而存在 $t+1$列线性相关，则该码的最小汉明距离为 $t+1$；

反之，若码的最小汉明距离为 $t+1$，则校验矩阵的任意 t 列线性无关，而 $t+1$列线性相关。

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}1&0&1&1&0&0&0\\1&1&1&0&1&0&0\\1&1&0&0&0&1&0\\0&1&1&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

定理又可描述为：

以H矩阵为监督矩阵的(n, k)线性分组码，能纠正≤e个错误的充分必要条件是：H矩阵中任意≤$2e$列线性无关

H矩阵确定了(n, k)线性分组码的结构，同时也确定了(n, k)线性分组码的检、纠错能力

9.4 线性分组码— 标准阵译码原理

例9.12 设(5,2)系统线性码的生成矩阵为 $G=\begin{bmatrix}1\,0\,1\,1\,1\\0\,1\,1\,0\,1\end{bmatrix}$

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix}1\,1\,1\,0\,0\\1\,0\,0\,1\,0\\1\,1\,0\,0\,1\end{bmatrix}$$

该码的简化译码表—只构造错误图样和伴随式的对应关系即可。

S_0=000	E_0+C_0=00000
S_1=111	E_1=10000
S_2=101	E_2=01000
S_3=100	E_3=00100
S_4=010	E_4=00010
S_5=001	E_5=00001
S_6=011	E_6=00011
S_7=110	E_7=00110

若接收码为10101，先求得伴随式S=010，查得对应的错误图样，译码输出为10101+00010=10111。

9.4 线性分组码- 汉明码

- 汉明码是一种能够纠正单个错误的线性分组码。
  - 汉明码最小码距 $d_{\min} = 3$

$$2^{n-k} \geq \sum_{i=0}^{u} C_n^i$$

- 汉明码是完备码。
  - 伴随式个数与错误图样个数相同的码，被称为完备码。
  - 设监督码共有*m*位，则汉明码长必为 $n = 2^m - 1$ 。
  - 通常汉明码可以表示成 $(2^{\mathrm{m}} - 1, 2^{\mathrm{m}} - m - 1)$。
    - 例如（**7**，**4**）汉明码

例 构造一个*m*=3（3个校验位）的汉明码。$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

例 构造一个m=3（3个校验位）的汉明码。

解：m=3的汉明码，$\mathrm{n}=2^{\mathrm{m}}-1=7 \quad \mathrm{k}=n-m=4$

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}0&0&0&1&1&1&1\\0&1&1&0&0&1&1\\1&0&1&0&1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{列置换}}\left[\begin{array}{cccc|ccc}1&1&1&0&1&0&0\\0&1&1&1&0&1&0\\1&1&0&1&0&0&1\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q} & I_m\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_k & \boldsymbol{P}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&1\\0&1&0&0&1&1&1\\0&0&1&0&1&1&0\\0&0&0&1&0&1&1\end{bmatrix}\Longleftarrow \boldsymbol{P}=\boldsymbol{Q}^T=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

汉明码的校验矩阵中没有两列是线性相关的，总可以找到三列是线性相关的。所以最小码距是3

9.4 汉明码 – 扩展汉明码

- 若给汉明码添加一位奇偶校验位，可得扩展汉明码：
  - 信息位保持不变，监督位增加一位。
  - 最小码距 $d_{\min}=4$，可纠正一位错误，同时发现两位错误。
- 扩展汉明码的监督方程：

$$H' = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & H & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

增加一个监督方程：$C_0+C_1+\ldots+C_n=0$，构成偶校验

纠一位错或者检2位错与纠一位错且检2位错的区别？

- 扩展之前：

$$\begin{bmatrix} 1110100 \\ 0111010 \\ 1101001 \end{bmatrix}$$

任意2列线性无关，最小码距为3。如果错2位，则会与某一列混淆，可能导致译错

- 扩展之后：

$$\begin{bmatrix} 11101000 \\ 01110100 \\ 11010010 \\ 11111111 \end{bmatrix}$$

任意3列线性无关，最小码距为4。如果错2位，一定不会与某一列混淆，因此一定可以检错

9.4 汉明码 – 缩短汉明码

- 在实际中常常很难找到一个有合适码长或信息位的分组码。此时可把某一已知的(n, k)码进行缩短，去掉几位信息位，以满足码长或信息位的要求。

- 挑选前s个信息位均为0的码字（$n-s$, $k-s$），最小码距至少与原始的(n, k)码相同

$$H=\begin{bmatrix} 1&1&1&1&0&1&0&1&1&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&1&1&1&0&1&0&1&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&1&1&1&0&1&0&1&1&0&0&1&0\\ 1&1&1&0&1&0&1&1&0&0&1&0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

(15,11) —> (12,8)

- 已知(6 , 3)码是(7 , 4)汉明码的缩短码，求生成矩阵和监督矩阵？

$$\begin{bmatrix} 1&1&1&0&1&0&0\\ 0&1&1&1&0&1&0\\ 1&1&0&1&0&0&1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1&1&0&1&0&0\\ 1&1&1&0&1&0\\ 1&0&1&0&0&1 \end{bmatrix}$$

9.5 循环码 – 循环码的生成多项式和生成矩阵

●从码中取出一个前面**k**-1位都是0的码字，定义这个码字的码多项式为生成多项式 $g(x)$。

● 该多项式的次数为 $n-k$。

●为了保证构成的生成矩阵**G**的各行线性不相关，通常用 $g(x)$来构造生成矩阵

$$\boldsymbol{G}(x)=\begin{bmatrix} x^{k-1}g(x) \\ x^{k-2}g(x) \\ \vdots \\ xg(x) \\ g(x) \end{bmatrix}$$

例:(7,3)循环码 $g(x)=x^4+x^2+x+1$

输入码元:1100

9.5 循环码 – 码多项式

● 循环码的循环特性可以用码多项式来证明。

● 在整数运算中有模*n*运算，若整数*m*可以表示为:

$$\frac{m}{n}=Q+\frac{p}{n}, \qquad p<n$$

则

$$m \equiv p \qquad (模 n)$$

在模*n*运算下，一整数*m*等于其被*n*除所得的余数。

例:(7,4)循环码 $g(x)=x^3+x+1$

$$G=\begin{bmatrix} x^3g(x) \\ x^2g(x) \\ xg(x) \\ g(x) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x^6+x^4+x^3 \\ x^5+x^3+x^2 \\ x^4+x^2+x \\ x^3+x+1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1011000 \\ 0101100 \\ 0010110 \\ 0001011 \end{bmatrix}$$

输入码元:1100

输出码多项式：$x^6+x^5+x^4+x^2$， 也即1110100

注意！上面生成矩阵得到的循环码并非系统码！

- 已知循环码的生成多项式如下，当接收端收到1110100时请检查是否发生错误。

$$g(x)=x^3+x^2+1$$

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})\bmod \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}1&0&1&1&1&0&0\\1&1&1&0&0&1&0\\0&1&1&1&0&0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&1&0\\0&1&0&0&0&1&1\\0&0&1&0&1&1&1\\0&0&0&1&1&0&1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}1&0&1&1&1&0&0\\1&1&1&0&0&1&0\\0&1&1&1&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

回顾信源的分类

随机变量*X*描述信源输出的消息

- 离散信源：输出消息数为有限或可数的，每次只输出一个消息
- 分层（量化）
- 连续信源：输出消息数不可数，每次只输出一个消息

随机序列**X**

- 非平稳信源：描述信源输出消息的随机序列是非平稳随机序列
  ——马尔可夫信源（记忆长度有限）
- 平稳信源：描述信源输出消息的随机序列**X**是平稳的随机序列
  - 离散平稳信源：输出随机序列**X**中每个随机变量X_i取值离散，且各维概率分布不随时间而改变。
    - 离散无记忆信源的*N*次扩展：**X**中各随机变量统计独立，且取自同一概率空间
    - 有限记忆信源：**X**中各随机变量之间有依赖关系，但记忆长度有限
  - 连续平稳信源：输出随机序列**X**中每个随机变量X_i取值连续，且各维概率密度函数不随时间而改变。

取样定理

随机过程$\{x(t)\}$：随机波形信源，信源输出消息是时间和取值都连续的函数

4.1.1 连续信源的差熵

$$H(X)=\lim_{\Delta\to 0}\{-\sum_{i=1}^{n}p(x_i)\Delta\log p(x_i)-\sum_{i=1}^{n}p(x_i)\Delta\log\Delta\}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}p(x_i)\Delta=\sum_{i=1}^{n}p_i=\int_a^b p(x)dx=1}$$

$$=\underbrace{-\int_a^b p(x)\log p(x)dx}_{\text{微分熵：}h(X)\text{ 又称为差熵}}-\underbrace{\lim_{\Delta\to 0}\log\Delta}_{\text{无限大常数项}}$$

微分熵：$h(X)$
又称为差熵

无限大常数项

1. 形式上与离散信源熵统一；
2. 实际问题中讨论的是熵的差值（平均互信息），无穷大项抵消掉了。

连续信源的可能取值数是无限多个，若设取值是等概率分布，则信源的不确定性为无限大。

4.1.1 连续信源的差熵

- 例4.1 若连续信源的统计特性为均匀分布的概率密度函数

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & x>b,x<a\end{cases}$$

- 解：$h(X)=-\int_a^b p(x)\log p(x)dx \;=-\int_a^b \frac{1}{b-a}\log\frac{1}{b-a}dx$

$$=\log(b-a)$$

讨论：

$$b-a=1 \quad h(X)=0$$

差熵无非负性，可为负值

$$b-a<1 \quad h(X)<0$$

$$b-a>1 \quad h(X)>0$$

例4.2 求高斯(正态)分布的连续信源的差熵：

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \qquad X:(-\infty,\infty)$$

$$h(X):=\frac{1}{2}\log\left(2\pi e\sigma^2\right)$$

4.1.2 波形信源的差熵

- 两个连续变量的联合熵

$$h(XY)=-\iint_{R^2} p(xy)\log p(xy)dxdy$$

- 两个连续变量的条件熵

$$h(Y/X)=-\iint_{R^2} p(xy)\log p(y/x)dxdy$$

$$h(X/Y)=-\iint_{R^2} p(xy)\log p(x/y)dxdy$$

- 两个连续变量之间的关系

$$h(XY)=h(Y\mid X)+h(X)=h(X\mid Y)+h(Y)$$

$$\begin{aligned}h(\vec{X})&=h(X_1X_2\dots X_N)\\&=h(X_1)+h(X_2\mid X_1)+h(X_3\mid X_1X_2)\\&\quad+\dots+h(X_N\mid X_1X_2\dots X_{N-1})\end{aligned}$$

连续信源的性质

1. 可加性

- 任意两个相互关联的连续信源 X 和 Y，有

$$h(XY)=h(X)+h(Y\mid X)=h(Y)+h(X\mid Y)$$

类似离散信源的情况，可以证得：

$$h(X\mid Y)\le h(X)\quad 或\quad h(Y\mid X)\le h(Y)$$

2. 上凸性

3. 差熵可为负值

4. 变换性

- 连续信源输出的随机变量 X 通过确定的一一对应变换(如$y=kx$)到连续随机变量 Y，其差熵会发生变化。

$$h(Y)=h(X)-\underset{X}{E}\left[\log\left|J\left(\frac{X}{Y}\right)\right|\right]$$

实际信源发出的信息大都要经过一系列的信息处理设备后才能在信道中传输。前面已经知道，在离散信道中，若有确定的一一对应变换关系，则变换后信源的熵不会改变。而连续信源的熵却会发生改变，它不具有变换的不变性。

4. 2 连续信源的性质及最大差熵定理

5. 极值性（即最大差熵定理）

- 对离散信源：当信源呈等概率分布时，信源熵取最大值
- 对连续信源：如果没有限制条件，就没有最大熵
- 连续信源在不同的限制条件下，信源的最大熵也不同。
  - 信源的输出值受限（随机变量在有限范围内取值）——限峰值功率的最大熵定理
  - 信源的输出平均功率受限（随机变量的方差有限）——限平均功率的最大熵定理

4. 2 连续信源的性质及最大差熵定理

定理1 在输出幅度受限的情况下，服从均匀分布的随机变量具有最大熵。(用Jenson不等式证明)

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\qquad h(X)=\log(b-a)$$

定理2 对于平均功率受限的连续随机变量，当服从高斯分布时具有最大熵。

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}\qquad h(X)=\frac{1}{2}\log(2\pi eP)$$

4.3 连续信源的熵功率

- 对均值为0、平均功率受限的连续信源，当服从高斯分布时达到最大熵$h_p(X) = log\sqrt{2\pi eP}$，则对应有

$$P = \frac{1}{2\pi e} e^{2h(X)}$$

设限定的平均功率为P，某连续信源的熵为$h(X)$，则与它具有相同熵的高斯信源的平均功率被定义为熵功率

$$\overline{P} = \frac{1}{2\pi e} e^{2h(X)}$$

把信源的平均功率和熵功率之差 $\left(P - \overline{P}\right)$ ，称为<u>连续信源的剩余度</u>

- <u>熵功率和信号的平均功率相差越大，说明信号的剩余越大</u>

1. 基本连续信道的平均互信息

2. 多维连续信道的平均互信息

$$I(X;Y)=H(X_n)-H(X_n/Y_n)$$
$$=h(X)-h(X/Y)$$
$$=h(Y)-h(Y/X)$$
$$=h(X)+h(Y)-h(XY)$$

- 在**加性多维连续信道**中有：

$$I(X;Y)=h(Y)-h(n)$$

多维连续信道的信息传输率：

$$R=I(X;Y)\quad (比特/N个自由度)$$

其中平均每个自由度的信息传输率：

$$R=\frac{1}{N}I(X;Y)\quad (比特/自由度)$$

3. 波形信道的信息传输率

$$R_t=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}I(X;Y)\quad (比特/秒)$$

4. 连续信道平均互信息的特性

(1) 非负性

$$I(X;Y)\geq 0$$

(2) 对称性（交互性）

$$I(X;Y)=I(Y;X)$$

(3) 凸状性

(4) 信息不增性

$$I(X;Z)\leq I(X;Y)$$

(5) $I(X;Y)$与$I(X_i;Y_i)$的关系

- 若平稳连续信源是无记忆的，即**X**中各分量X_i(i=1,2,…,N)彼此统计独立，则有：

$$I(X;Y)\geq\sum_{i=1}^{N}I(X_i;Y_i)$$

若多维连续信道是无记忆的，则有：

$$I(X;Y)\leq\sum_{i=1}^{N}I(X_i;Y_i)$$

若平稳连续信源是无记忆的，多维连续信道也是无记忆的，则有

$$I(X;Y)=\sum_{i=1}^{N}I(X_i;Y_i)$$

4.5 高斯加性波形信道的信道容量

香农公式：限带高斯白噪声加性 (AWGN, Additive White Gaussian Noise) 信道单位时间的信道容量：

$$C_t = \lim_{T\to\infty}\frac{C}{T} = W\log(1+\frac{P_s}{N_0 W}) \quad (比特/秒)$$

式中，P_s 是信号的平均功率，N_0W 是高斯白噪声在带宽W内的平均功率（其功率谱密度为 $N_0/2$），P_s/N_0W 为信噪功率比。可见，信息容量与信噪功率比和带宽有关。

每个信号样本自由度的平均功率为 $\frac{P_sT}{\mathrm{N}} = \frac{P_sT}{2WT} = \frac{P_s}{2W}$

(1) 提高信噪比能增加信道的信道容量。

- 例： 电话信道。一般电话信号的带宽为3300Hz。若信道信噪比为 20*dB*，求信道的信道容量。

解：由 $10\log_{10}(P_s/N_0W)=20$ 得 $P_s/N_0W=100$。代入香农公式：

$$C_t=W\log(1+\frac{P_s}{N_0W})=3300\log(1+100)$$

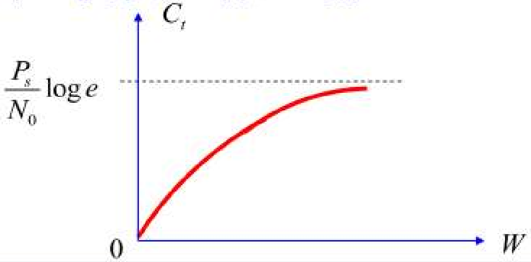
$$=21972\quad(\text{比特/秒})$$

此处log是以2为底！

计算结果约为 22000 比特/秒。实际信道可以达到的最大信道传输率约为 19200 比特/秒，稍小于理论值（这是由于串扰、回声等干扰因素所导致）。

(2) 当噪声功率 $N\to 0$ 时，信道容量C_t趋近于无穷，这意味着无干扰连续信道的信道容量为无穷大。

(3) 增加信道带宽（也就是信号的带宽）*W*，并不能无限制地使信道容量增大。



(4) 信道容量一定时，带宽*W*、传输时间*T*和信噪功率比 P_s/P_n 三者之间可以互换。