5、8、7章

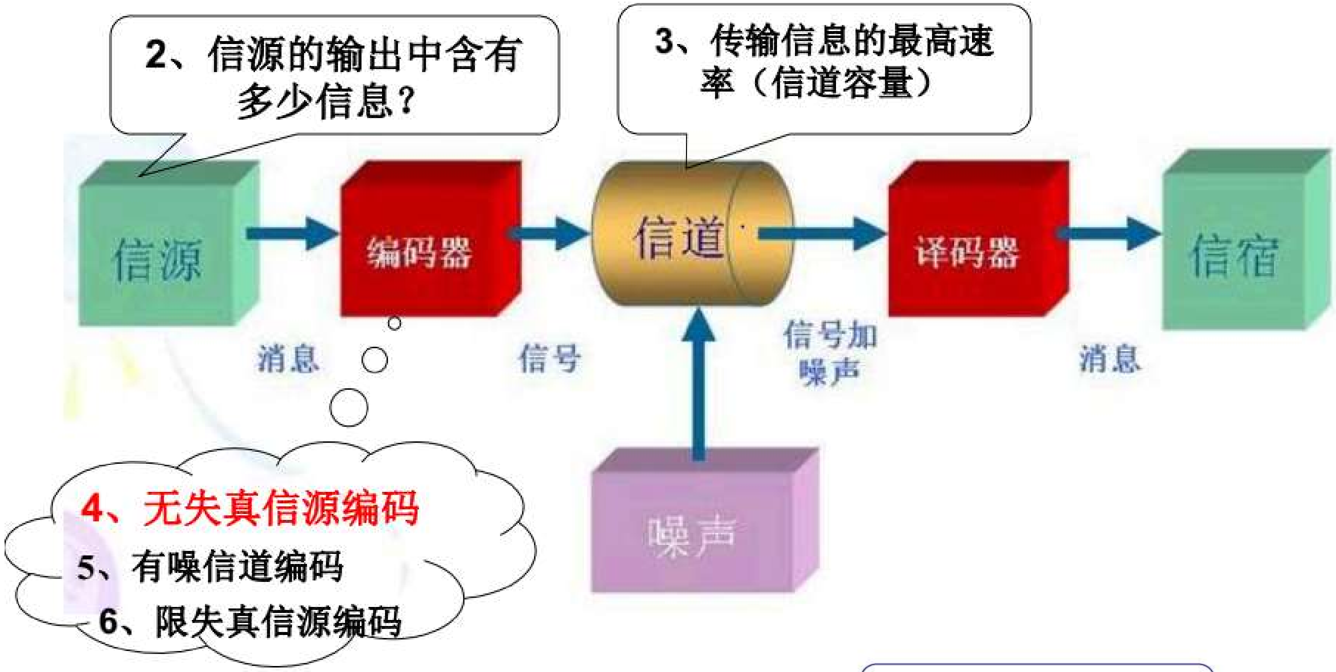
今天讲的内容主要是围绕 **信源编码** 展开的

第五章(无失真信源编码）
1.介绍了一些基本术语，重点掌握唯一可译码的判断方法;
2.定长编码原理（熟悉相关习题的做法）;
3.变长编码原理,这一部分为后面的变长编码提供了理论基础;

第八章（变长编码方法）
1.霍夫曼码（二元编码、三元编码、马尔科夫信源的霍夫曼码）
2.费诺编码
3.香农编码

第七章（限失真信源编码）
1.失真函数、失真矩阵;
2.率失真函数的意义和性质、Dmin/Dmax的求法。

第五章 无失真信源编码



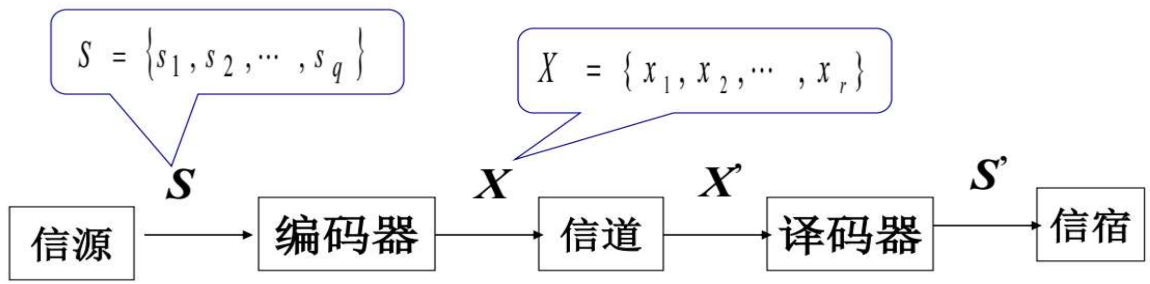
1.信源编码：

用尽可能少的符号来传递信源。

通过压缩信源冗余度（压缩每个信源符号的平均码长）

2.无失真信源编码：

根据信源不同的概率分布而选择相匹配的码



一些术语：

（一）

等长码　变长码

奇异码　非奇异码（码各不相同）

例题：设有二元信道的信源编码器，其概率空间如下

$$\begin{bmatrix} S \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ p(s_1) & p(s_2) & p(s_3) & p(s_4) \end{bmatrix}$$

信源符号	出现概率	码字	码1	码2	码3
S_1	$P(S_1)$	W_1	00	0	0
S_2	$P(S_2)$	W_2	01	01	11
S_3	$P(S_3)$	W_3	10	001	00
S_4	$P(S_4)$	W_4	11	111	11

定长码：　**码1**　　变长码：**码2、码3**

非奇异码：　**码1 、码2**　　奇异码：**码3**

（二）**N**次扩展信源

二次扩展信源符号 $\alpha_j(j=1,2,\ldots,16)$	二次扩展码码字 $W_j(j=1,2,\cdots,16)$
$\alpha_1 = s_1s_1$	$W_1 = W_1W_1 = 00$
$\alpha_2 = s_1s_2$	$W_2 = W_1W_2 = 001$
$\alpha_3 = s_1s_3$	$W_3 = W_1W_3 = 0001$
$\alpha_{16} = s_4s_4$	$W_{16} = W_4W_4 = 111111$

（三）分组码

- 分组码：将信源符号集中的每个信源符号S_i映射成一个固定的码字　W_i
- 特点：集间符号为一对一或多对一

- 码
  - 非分组码
  - 分组码
    - 奇异码
    - 非奇异码
      - 非唯一可译码
      - 唯一可译码
        - 即时码
        - 非即时码

即时码

唯一可译码成为即时码的<u>充要条件</u>：
设 W_i 是C中任一码字，则要求其它码字 W_i，都不是码字 W_i 的<u>前缀</u>。

练习

符号	码1	码2	码3	码4	码5
S1	0	0	00	1	1
S2	11	10	01	10	01
S3	00	00	10	100	001
S4	11	01	11	1000	0001

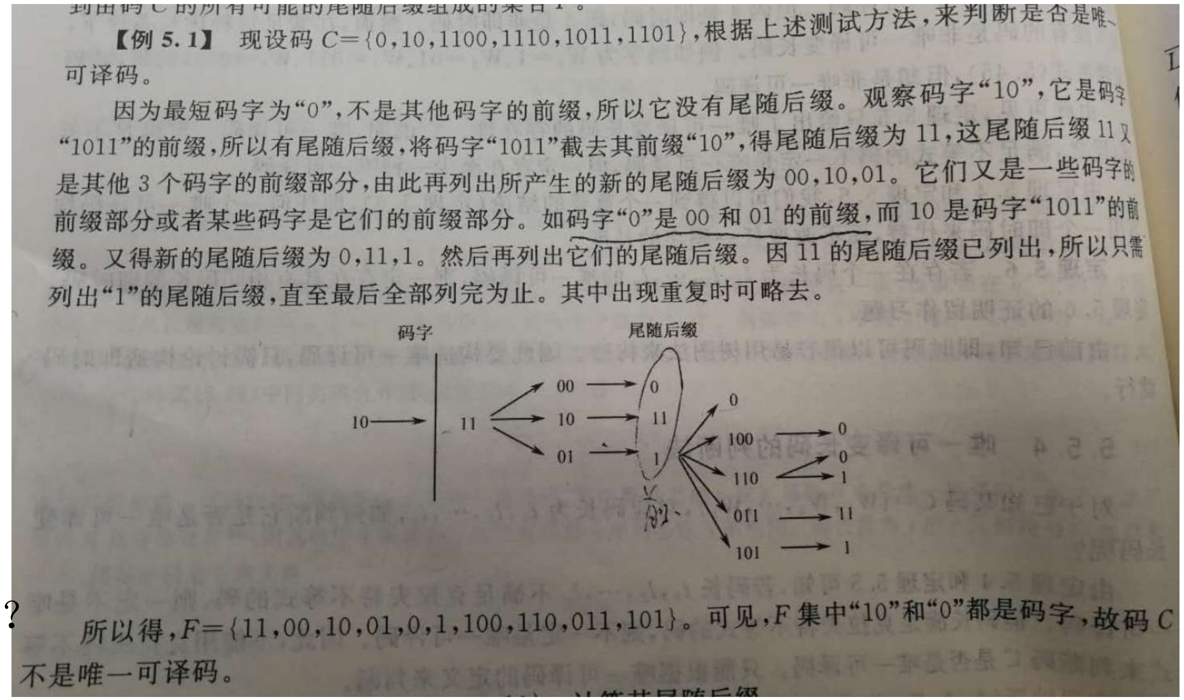
判断一下上面的码哪些是唯一可译码？哪些是即时码？

唯一可译码

<u>唯一可译码</u>：任意一串有限长的码符号序列只能被唯一地译为对应的信源符号序列，则此码为唯一可译码。<u>没有二义性</u>

判断方法

1. 等长非奇异码一定是唯一可译码
2. 非等长码开始判断，如下：（**P150**）



到由码 C 的所有可能的尾随后缀组成的集合 F。

【例 5.1】 现设码 $C=\{0,10,1100,1110,1011,1101\}$，根据上述测试方法，来判断是否是唯一可译码。

因为最短码字为“0”，不是其他码字的前缀，所以它没有尾随后缀。观察码字“10”，它是码字“1011”的前缀，所以有尾随后缀，将码字“1011”截去其前缀“10”，得尾随后缀为 11，这尾随后缀 11 又是其他 3 个码字的前缀部分，由此再列出所产生的新的尾随后缀为 00，10，01。它们又是一些码字的前缀部分或者某些码字是它们的前缀部分。如码字“0”是 00 和 01 的前缀，而 10 是码字“1011”的前缀。又得新的尾随后缀为 0，11，1。然后再列出它们的尾随后缀。因 11 的尾随后缀已列出，所以只需列出“1”的尾随后缀，直至最后全部列完为止。其中出现重复时可略去。

所以得，$F=\{11,00,10,01,0,1,100,110,011,101\}$。可见，$F$ 集中“10”和“0”都是码字，故码 C 不是唯一可译码。

定长码及定长编码原理

简单信源S进行定长编码时

- 设信源符号集中共有*q*个符号 $S=\{s_1,s_2,\cdots,s_q\}$
- 码符号集中共有*r*种码元 $X:\{x_1,x_2,\ldots,x_r\}$
- 定长码码长为
- 若满足非奇异性，则 $\boxed{q\le r^l}$

如果对N次扩展信源 s^N 进行定长编码，要满足非奇异性，须满足以下条件

$$q^N\le r^l$$

例题5.3

- <u>英文字母表</u>中，每一字母用<u>定长编码</u>转换成<u>二进制</u>表示，码字的<u>最短长度</u>是多少？

解：信源符号数 $q=26$

码符号数 $r=2$

$$r^l\ge q\Rightarrow l\ge\frac{\log q}{\log r}=\frac{\log 26}{\log 2}=4.7$$

$$l_{\min}=5$$

定长编码原理：

设离散平稳无记忆信源的熵为*H*(*S*), 若对*N*次扩展信源 s^N进行定长编码，则对于任意 $\varepsilon>0$，只要满足 $\boxed{\frac{l}{N}\ge\frac{H(S)+\varepsilon}{\log r}}$

则当<u>*N*足够大</u>时，可实现<u>几乎无失真编码</u>，即译码错误概率 P_E为任意小；

掌握！！！！！

编码信息率 编码效率 错误概率

对定理的进一步讨论

码字传输的最大信息量

$$\frac{l}{N}\log r \geq H(S)+\varepsilon$$

只要码字传输的信息量大于信源序列携带的信息量，总可实现几乎无失真编码

编码信息率R：编码后平均每个码符号载荷的实际信息量

$$R=\frac{H(S)}{l/N}$$

编码效率 η

$$\eta=\frac{R}{\log r}=\frac{H(S)}{\log r}\cdot\frac{N}{l}$$

最佳编码效率

$$\boxed{\eta=\frac{H(S)}{H(S)+\varepsilon}}$$

在定长信源编码定理中需要考虑的：

- 编码效率 $\eta=H(S)/H(S)+\varepsilon$
- 错误概率

$$p_E=p\left(\overline{G_\varepsilon}\right)\leq\frac{D[I(s_i)]}{N\varepsilon^2}=\delta(N,\varepsilon)$$

注意：错误译码概率和N,ε都有关

对于序列码长N的分析

$$N\geq\boxed{\frac{D[I(s_i)]}{\varepsilon^2\delta}}\quad\Rightarrow\quad N\geq\frac{D[I(s_i)]}{H^2(S)}\frac{\eta^2}{(1-\eta)^2\delta}$$

对于一个给定信源：

序列长度、最佳编码效率、允许错误概率之间关系

定长编码原理

例题1：

$$\begin{bmatrix} S \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 & s_7 & s_8 \\ 0.4 & 0.18 & 0.10 & 0.10 & 0.07 & 0.06 & 0.05 & 0.04 \end{bmatrix}$$

要求：定长二元编码，编码效率 $\eta = 90\%$ ，且允许错误概率 $\delta \le 10^{-6}$

第一步 $H(S) = E[-\log p(s_i)] = -\sum_{i=1}^{8} p(s_i)\log p(s_i) = 2.55 bit/sym$

$$D[I(s_i)] = \sum_{i=1}^{8} p(s_i)[\log p(s_i)]^2 - [H(S)]^2 = \sum_{i=1}^{8} p(s_i)[\log p(s_i)]^2 - [2.55]^2 = 7.82$$

第二步

$$N \ge \frac{D[I(s_i)]}{\varepsilon^2 \delta} \qquad \eta = H(S)/[H(S) + \varepsilon] \Rightarrow \varepsilon = 0.28$$

$$N \ge \frac{D[I(s_i)]}{\varepsilon^2 \delta} = \frac{7.82}{0.28^2 * 10^{-6}} = 9.8 * 10^7 \approx 10^8$$

例题2：

$$\begin{bmatrix} S \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

要求：等长二元编码，编码效率 $\eta = 96\%$ ，允许错误概率 $\delta \le 10^{-5}$

$$\begin{bmatrix} S \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

要求：等长二元编码，编码效率 $\eta = 96\%$ ，允许错误概率 $\delta \le 10^{-5}$

第一步 $H(S) = H(1/4, 3/4) = 0.811 bit/sym$

$$D[I(s_i)] = \sum_{i=1}^{2} p(s_i)[\log p(s_i)]^2 - [H(S)]^2 = \sum_{i=1}^{2} p(s_i)[\log p(s_i)]^2 - 0.811^2 = 0.4715$$

第二步
$$N \ge \frac{D[I(s_i)]}{\varepsilon^2 \delta} = \frac{D[I(s_i)]}{H^2(S)} \frac{\eta^2}{(1-\eta)^2 \delta}$$

ε =0. 037

$$N \ge \frac{0.4715}{(0.811)^2} \frac{(0.96)^2}{0.04^2 * 10^{-5}} = 4.13 * 10^7$$

变长无失真信源编码原理—香农第一定理

1.克拉夫特不等式

若：信源符号集为 $S=\{s_1,s_2,\cdots,s_q\}$

码符号集 $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_r\}$

设码字为 $W=\{W_1,W_2,\cdots,W_q\}$

其码长分别为$l_1,l_2,\ldots,l_q$，

则即时码存在的充分必要条件是

$$\sum_{i=1}^{q} r^{-l_i}\le 1$$

上式被称为克拉夫特（**Kraft**）不等式。

2.码的平均码长公式：

- 码平均长度：
  - 信源S $\begin{bmatrix} S \\ P \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_q \\ p(s_1) & p(s_2) & \cdots & p(s_q) \end{bmatrix}$
  - 编码后的码字$W_1,W_2,\cdots,W_q$
  - 码字对应长度 $l_1,l_2,\cdots,l_q$ ，则码平均长度 $\bar{L}=\sum_{i=1}^{q} p(s_i)l_i$ 码 符 号 / 信 源 符 号
- <u>紧致码/最佳码</u>：<u>该唯一可译码对应的码平均长度小于所有其他的唯一可译码。</u>
- 编码后的信息率 $R=H(X)=\dfrac{H(S)}{\bar{L}}$

变长码无失真编码原理：

1.紧致码平均码长界限定理

例题

- 紧致码平均码长界限定理
  - 离散无记忆信源的熵为*H*(*S*)
  - 用*r*个码符号进行编码
  - 则总可找到一种无失真信源编码，构成<u>唯一可译码</u>，使其平均码长满足：

$$\underbrace{\frac{H(S)}{\log r}}_{\text{平均码长下界}} \le \bar{L} < \underbrace{\frac{H(S)}{\log r}+1}_{\text{大于上界也可构成唯一可译码}}$$

$$l_i = -\frac{\log p(s_i)}{\log r} = -\log_r p(s_i) \Rightarrow p(s_i) = r^{-l_i} \quad （m_i\text{是正整数}）$$

$$\begin{bmatrix} S \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/8 & 1/8 \end{bmatrix} \quad \text{二元码：}X=\{0，1\}$$

$\because p(s_i)$均呈现2^{-l_i}的形式：$p(s_1) = 2^{-1}, l_1 = 1$　　$p(s_2) = 2^{-2}, l_2 = 2$

$p(s_3) = 2^{-3}, l_3 = 3$　　$p(s_4) = 2^{-3}, l_4 = 3$

$$\therefore \quad l_1 = 1, l_2 = 2, l_3 = 3, l_4 = 3$$

$$\bar{L} = \frac{1}{2}*1 + \frac{1}{4}*2 + \frac{1}{8}*3 + \frac{1}{8}*3 = \frac{14}{8}\text{码符号/信源符号}$$

$$H(S) = -\frac{1}{2}*\log\frac{1}{2} - \frac{1}{4}*\log\frac{1}{4} - 2(\frac{1}{8}*\log\frac{1}{8}) = \frac{14}{8}\,bit/\text{信源符号}$$

$$\text{下界} = \frac{H(S)}{\log r} = \frac{\frac{14}{8}}{\log 2} = \frac{14}{8}\text{码符号/信源符号}$$

变长码无失真编码原理：

2.香农第一定理

- 香农第一定理（变长无失真信源编码定理）：

设离散无记忆信源的熵为$H(S)$，它的N次扩展信源为S^N，对扩展信源S^N进行编码。总可以找到一种编码方法，构成唯一可译码，使平均码长满足：

$$\frac{H(S)}{\log r} \le \frac{\bar{L}_N}{N} < \frac{H(S)}{\log r} + \frac{1}{N}$$

- 当 $N \to \infty$ 时，有 $\lim_{N\to\infty} \frac{\bar{L}_N}{N} = H_r(S)$
- 把香农第一定理推广到一般离散信源：$\lim_{N\to\infty} \frac{\bar{L}_N}{N} = \frac{H_\infty}{\log r}$

- 无记忆信源 - 当扩展次数N足够大时，每一个信源符号所需的平均码符号数，即平均码长就可以无限接近下界值
- 有记忆信源 - 必须考虑到信源符号间的依赖性，以减少信源每发一个符号所携带的平均信息量，缩短平均码长
- 编码效率

$$\eta = \frac{H_r(S)}{\bar{L}} = \frac{H(S)/\bar{L}}{\log r} = \frac{H(S)}{\bar{L} * \log r}$$

编码后实际每个码符号能够载荷的信息量

编码后平均每个码符号能够载荷的最大信息量

几种信源变长编码方法：

1.霍夫曼码

- **码平均长度：**
  - **信源S** $\begin{bmatrix} S \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_q \\ p(s_1) & p(s_2) & \cdots & p(s_q) \end{bmatrix}$
  - **编码后的码字** $W_1, W_2, \cdots, W_q$
  - **码字对应长度** $l_1, l_2, \cdots, l_q$ **，则码平均长度** $\bar{L} = \sum_{i=1}^{q} p(s_i) l_i$ 码符号/信源符号
- **编码后信道的信息传输率**

$$R = H(X) = \frac{H(S)}{\bar{L}} \quad \text{比特/码符号}$$

- **每秒的信息传输率** $R_t = \dfrac{H(S)}{\bar{L}_t} \quad (bit/s)$

- <u>紧致码/最佳码</u>：该唯一可译码对应的码平均长度小于所有其他的唯一可译码。
- 编码效率

$$\eta = \frac{H_r(S)}{\bar{L}} = \frac{H(S)}{\bar{L} * \log r} = \frac{H(S)/\bar{L}}{\log r}$$

$\boxed{\text{用码的效率来衡量各种编码的优劣}}$

霍夫曼码的构造：

符号	Pi (次数)	过程 S1	过程 S2	过程 S3	码字
A	0.3846	0.3846	0.3846	0.6153	1
B	0.1795	0.2820	0.3333	0.3846	000
C	0.1538	0.1795	0.2820		001
D	0.1538	0.1538			010
E	0.1282				011

练习1：**设单符号离散信源如下，要求对信源编二进制霍夫曼码。**

$$\begin{bmatrix} S \\ P(S) \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 & s_7 \\ 0.20 & 0.19 & 0.18 & 0.17 & 0.15 & 0.10 & 0.01 \end{Bmatrix}$$

解：构造Huffman码

并请计算信源熵、平均码长、信道传输率、编码效率。

练习1答案：

信源符号	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
码字	10	11	000	001	010	0110	0111

平均码长

$$\bar{L} = \sum_{i=1}^{7} p(s_i) l_i = 2.72 \text{ 码元符号/信源符号}$$

信源熵

$$H(S) = -\sum_{i=1}^{7} p(s_i) \log p(s_i) = 2.61 \text{ 比特/信源符号}$$

编码效率

$$\eta = \frac{H(S)/\bar{L}}{\log r} = \frac{2.61/2.72}{\log 2} = 96\%$$

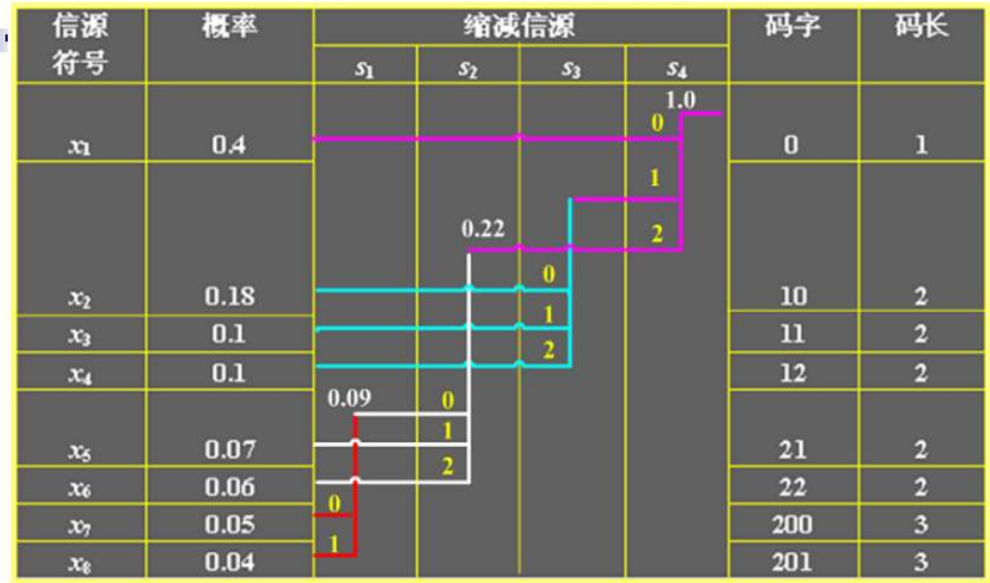
练习2：

- **对如下单符号离散无记忆信源编三进制哈夫曼码。**

$$\begin{bmatrix} S \\ P(S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 & s_7 & s_8 \\ 0.4 & 0.18 & 0.1 & 0.1 & 0.07 & 0.06 & 0.05 & 0.04 \end{bmatrix}$$

这里：r=3，q=8

并请计算信源熵、平均码长、信道传输率、编码效率。



练习2答案：

$$\begin{bmatrix} S \\ P(S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 & s_7 & s_8 \\ 0.4 & 0.18 & 0.1 & 0.1 & 0.07 & 0.06 & 0.05 & 0.04 \end{bmatrix}$$

信源符号	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8
码字	0	10	11	12	21	22	200	201
码长	1	2	2	2	2	2	3	3

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{8} p(x_i)\log_2 p(x_i) = 2.55(\text{比特/信源符号})$$

$$\bar{L} = \sum_{i=1}^{5} p(x_i) l_i = 1.69(\text{码符号/信源符号})$$

$$\eta = \frac{R}{logr} = \frac{2.55/1.69}{log3} = 95.2\%$$

练习3：这是一道稍微比较综合类的题目，对马尔科夫信源进行信源编码，一定要会！

例：对状态转移矩阵如下的一阶马氏源，符号集为{a, b, c}进行霍夫曼编码，并计算编码效率。

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

解：判断遍历性（略）并求平稳分布

$$[\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3] \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3] \qquad [\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3] = \begin{bmatrix} \frac{2}{13} & \frac{8}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix}$$

如果不考虑记忆性，直接利用平稳后符号编码，结果为：

$$\bar{L} = \frac{2}{13}\times 1 + \frac{8}{13}\times 1 + \frac{2}{13}\times 2 = \frac{18}{13}\text{二元符号/信源符号} \quad a{:}11,\ \ b{:}0,\ \ c{:}10$$

信源极限熵：$H_\infty = \frac{2}{13}H(1/2) + \frac{8}{13}H(1/4,1/2,1/4) + \frac{2}{13}H(0,1,0) = 14/13bit$

$$\eta = \frac{H_\infty}{\log 2 \times \bar{L}} = \frac{14}{13} / \frac{18}{13} = 78\%$$

2.费诺码

■ 编码步骤如下：

1. 将概率按从大到小的顺序排列，令

$$p(s_1) \geq p(s_2) \geq \cdots \geq p(s_q)$$

2. 将依次排列的信源符号按概率分成两组，使每组概率和尽可能接近或相等。

3. 给每一组分配一位码元“0”或“1”。

4. 将每一分组再按同样方法划分，重复步骤2和3，直至概率不再可分为止。

● 平均码长为

$$\bar{L} = \sum_{i=1}^{7} p(s_i) l_i = 2.74 \text{ 码元符号/信源符号}$$

● 信源熵为

$$H(S) = -\sum_{i=1}^{7} p(s_i) \log p(s_i) = 2.61 \text{ 比特/信源符号}$$

● 编码效率为

$$\eta = \frac{2.61}{2.74} = 95.3\%$$

例题：

■ 设单符号离散信源如下，要求对信源编二进制Fano码

$$\begin{bmatrix} S \\ P(S) \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 & s_7 \\ 0.20 & 0.19 & 0.18 & 0.17 & 0.15 & 0.10 & 0.01 \end{Bmatrix}$$

并请计算信源熵、平均码长、编码效率。

信源符号	符号概率	第一次分组	第二次分组	第三次分组	第四次分组	码字	码长
s_1	0.20	0	0			00	2
s_2	0.19		1	0		010	3
s_3	0.18			1		011	3
s_4	0.17	1	0			10	2
s_5	0.15		1	0		110	3
s_6	0.10			1	0	1110	4
s_7	0.01				1	1111	4

3.香农编码码

1. 将信源符号按概率从大到小顺序排列，

$$p(s_1) \geq p(s_2) \geq \cdots \geq p(s_q)$$

2.计算第*i*个符号的累加概率

3.按下式计算第*i*个符号对应的码字的码长

$$-\log p(s_i) \leq l_i < -\log p(s_i) + 1$$

4. 将累加概率变换成二进制小数，取小数点后l_i位数作为第*i*个符号的码字。

平均码长 $\bar{L} = \sum_{i=1}^{q} p(s_i) l_i = 3.14$ 码元符号/信源符号

信源熵 $H(S) = -\sum_{i=1}^{q} p(s_i) \log p(s_i) = 2.61$ 比特/信源符号

编码效率 $\eta = \dfrac{2.61}{3.14} = 83.1\%$

例题：

- 设单符号离散信源如下，要求对信源编香农码。

$$\begin{bmatrix} S \\ P(S) \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 & s_7 \\ 0.20 & 0.19 & 0.18 & 0.17 & 0.15 & 0.10 & 0.01 \end{Bmatrix}$$

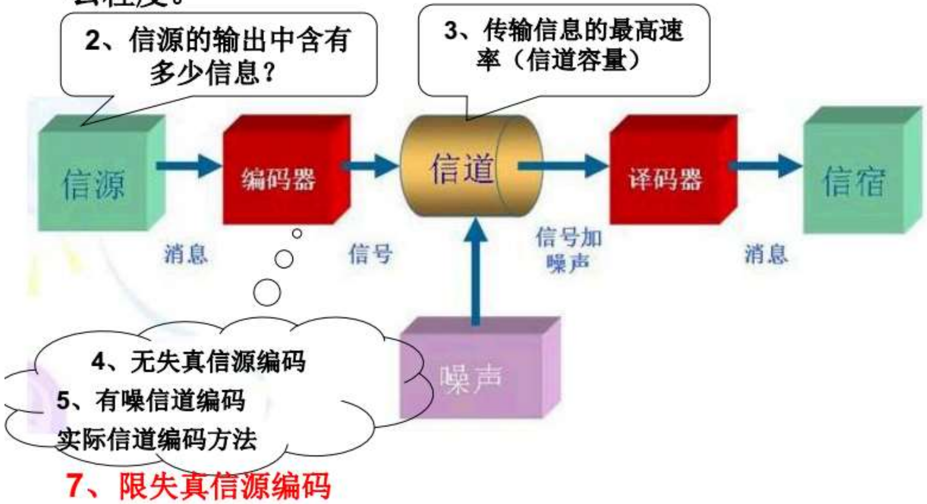
并请计算信源熵、平均码长、编码效率。

信源符号	符号概率	累加概率	$-\log p(s_i)$	码长	码字
s_1	0.20	0	2.34	3	000
s_2	0.19	0.2	2.41	3	001
s_3	0.18	0.39	2.48	3	011
$\boldsymbol{s_4}$	**0.17**	**0.57**	**2.56**	**3**	**100**
s_5	0.15	0.74	2.74	3	101
s_6	0.10	0.59	3.34	4	1110
s_7	0.01	0.99	6.66	7	1111110

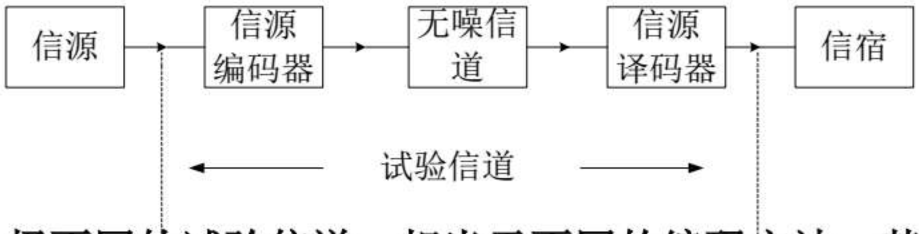
$$P_4 = 0.57 \rightarrow 0*2^0 + 1*2^{-1} + 0*2^{-2} + 0*2^{-3} + 1*2^{-4} + \cdots \leftrightarrow 0.\underline{100}1\cdots$$

第七章 保真度准则下的信源编码

- 本章将着重讨论允许一定失真的条件下可把信源信息压缩到什么程度。



- 信息率失真理论
  - 通过研究信道的方法，来研究信源熵的压缩问题



- 选择不同的试验信道，相当于不同的编码方法，其所得的平均失真度不同。有些试验信道（编码方法）满足 $\overline{D} \le D^*$,有些则 $\overline{D} > D^*$
- 在满足一定失真的情况下，使信源必须传输给收信者的信息传输率***R*** 尽可能的小。***R***即为***I***(X;Y)

1.失真函数

- 失真函数$d(x,y)$
  - 非负函数；函数形式可根据需要定义
  - 定量描述发出符号与接收符号之间的差异（失真）
- 输入N长符号序列 $\alpha = X_1X_2\cdots X_N$ ，其中每个X的取值均来自 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$
- 输出N长符号序列 $\beta=[Y_1,Y_2,\cdots,Y_N]$ ，其中每个Y的取值均来自 $\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$

则失真函数定义为

$$d(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{N}d(X_i,Y_i)$$

2.失真矩阵

失真矩阵 $$D=\begin{bmatrix} d(x_1,y_1) & d(x_1,y_2) & \cdots & d(x_1,y_m) \\ d(x_2,y_1) & d(x_2,y_2) & \cdots & d(x_2,y_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d(x_n,y_1) & d(x_n,y_2) & \cdots & d(x_n,y_m) \end{bmatrix}$$

3.平均失真

- 平均失真：失真函数的数学期望。

$$\overline{D}=E[D]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p(x_iy_j)d(x_i,y_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p(x_i)p(y_j\mid x_i)d(x_i,y_j)$$

- 平均失真是对给定信源$P(X)$在给定转移概率分布为$P(Y|X)$的信道中传输时的失真的总体量度。

- 长度为N的信源序列的平均失真度：

当信源和信道均为无记忆时，N维序列的平均失真度

$\overline{D}(N)=\sum_{l=1}^{N}\overline{D}_l$ （$\overline{D}_l$是信源序列第l个分量的平均失真度）

如果离散信源是平稳信源，则$\overline{D}_l=\overline{D}$

$\overline{D}(N)=N\overline{D}$

离散无记忆平稳信源通过无记忆的试验信道其信源序列的平均失真度等于单个符号平均失真度的N倍

例题1：

- 设信源符号序列为X：{**0**，**1**}，接收端收到的符号序列为Y：{**0**，**?**，**1**}，规定失真函数如下，求失真矩阵**D**。

$$d(0,0)=d(1,1)=0$$

$$d(0,1)=d(1,0)=1$$

$$d(0,?)=d(1,?)=1/2$$

$$D=\begin{bmatrix} d(x_1,y_1) & d(x_1,y_2) & d(x_1,y_3) \\ d(x_2,y_1) & d(x_2,y_2) & d(x_2,y_3) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

率失真函数

（1）定义：

- 率失真函数$R(D)$：在信源确定的情况下，接收端（用户）以满足失真D要求再现信源消息所必须获取的最少平均信息量。
  - 在D允许信道中寻找一个信道（一种有失真编码方法），使给定信源经过此信道传输时，其平均互信息达到最小，即定义为信息率失真函数$R(D)$。
  - 满足保真度准则的前提下，$R(D)$是信息率允许压缩到的最小值：是信源特有的参数。

$$R(D)=\min_{p(y_j|x_i)\in B_D}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p(x_i)p(y_j\mid x_i)*\log\frac{p(y_j\mid x_i)}{p(y_j)}$$

（2）定义域和值域：

- $R(D)$的定义域和值域
  - 平均失真度D的取值范围：$[D_{min}, D_{max}]$；
  - 率失真函数的取值：$[H(X), 0]$

Dmin 和 Dmax 的求法

- $D_{min}=0$只有满足失真函数矩阵的每一行至少存在一个为0的元素才能达到。当不满足时，

$$D_{\min}=\min[\sum_X\sum_Y P(x_i)P(y_j\mid x_i)d(x_i,y_j)]$$

$$=\sum_{i=1}^{r}P(x_i)\min[\sum_{j=1}^{s}P(y_j\mid x_i)d(x_i,y_j)]$$

- D_{max}的讨论
  - $R(D)$是D的非增函数
  - Dmax是使$R(D)=0$的最小失真
    - 何时$R(D)=0$？即平均互信息为0

$$D=\sum_X\sum_Y P(x_i)P(y_j)d(x_i,y_j)$$

$$\geq\sum_Y P(y_j)\min_Y\sum_X P(x_i)d(x_i,y_j)=D_{max}$$

失真函数例题：

例7.3 设试验信道输入符号$\{a_1, a_2, a_3\}$，概率分别为1/3，1/3，1/3，失真矩阵如下所示，求$\boldsymbol{D}_{\min}$和$\boldsymbol{D}_{\max}$和相应的试验信道的转移概率矩阵。

$$(d_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

令对应最小$d(a_i, b_j)$的$p(b_j \mid a_i) = 1$，其它为0。可得对应***Dmin*** 的转移概率矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_{\min} = \sum_x p(x) \min_y d(x, y)$$

$$= p(a_1)\min(1,2,3) + p(a_2)\min(2,1,3) + p(a_3)\min(3,2,1)$$

=1

$$(d_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_{\max} = \min_y \sum_x p(x) d(x, y)$$
$$= \min\{[p(a_1)\times 1 + p(a_2)\times 2 + p(a_3)\times 3],\ [p(a_1)\times 2 + p(a_2)\times 1 + p(a_3)\times 2],\ [p(a_1)\times 3 + p(a_2)\times 3 + p(a_3)\times 1]\}$$

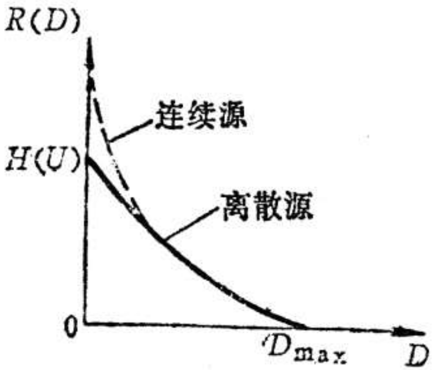
= 5/3

上式中第2项最小，所以令$p(b_1) = p(b_3) = 0$ $p(b_2) = 1$。可得对应*Dmax* 的转移概率矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

！！（3）性质：

- $R(D)$是关于D的<u>下凸函数</u>。
  - 即证：$R(\theta D_1+\bar{\theta}D_2)\le \theta R(D_1)+\bar{\theta}R(D_2)$
- 其中$\theta,\bar{\theta}\ge 0$，且$\theta+\bar{\theta}=1$，任意$D_1,D_2\le D_{max}$
- $R(D)$在定义区间是<u>严格递减函数</u>。



请务必记住上图！

香农第三定理

7.3 限失真信源编码定理 – 香农第三定理

- 设离散无记忆平稳信源的信息率失真函数为 $R(D)$，只要满足 $R\ge R(D)$，当信源序列长度N足够大时，一定存在一种编码方法，其译码失真小于或等于 $D+\varepsilon$ ，其中 ε 是任意小的正数。
- 反过来，若 $R<R(D)$ ，则无论采用什么样的编码方法，其译码失真必大于D 。
- 定理说明：在允许失真D的条件下，信源最小的、可达的信息传输率是信源的 $R(D)$

回顾5、8、7章

今天讲的内容主要是围绕 **信源编码** 展开的

第五章(无失真信源编码）
1.介绍了一些基本术语，重点掌握唯一可译码的判断方法；
2.定长编码原理（熟悉相关习题的做法）；
3.变长编码原理,这一部分为后面的变长编码提供了理论基础；

第八章（变长编码方法）
1.霍夫曼码（二元编码、三元编码、马尔科夫信源的霍夫曼码）
2.费诺编码
3.香农编码

第七章（限失真信源编码）
1.失真函数、失真矩阵；
2.率失真函数的意义和性质、Dmin/Dmax的求法。