

广义相对论期末考试

2009 年 6 月

(20 分) 已知 ϵ_{abcd} 是四维 Minkovski 空间中的 Levi-Civita 张量,

1, 写出逆变张量 ϵ^{abcd} 的所有分量;

2, 计算 $\epsilon_{abcd}\epsilon^{abcd}$ 和 $\epsilon_{abcd}\epsilon^{abef}$ 。

(20) 分

1. 根据度规相容条件和无挠率条件写出 Christoffel 符号的明确表达式。

2. 已知 $A^{\mu\nu}$ 是反对称张量, 证明 $\nabla_\nu A^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\sqrt{-g} A^{\mu\nu})$ 。

3, 设 \hat{K} 是某时空流形的 Killing 矢量, 证明对该流形的任意测地线, $\hat{K} \cdot \hat{P}$ 是守恒量, 其中

\hat{P} 是沿该测地线运动的粒子的 4-动量。

(20) 分

1. 仔细诠释 Einstein 等效原理, 并说明如何用它来处理红移问题。

2. 计算遥远观察者观察到下列源所发光的波长:

(a) 从牛顿势 $\phi=10^{-6}$ 处发出的波长为 6000 \AA 的光;

(b) 从距离质量为 M 的 Schwartzchild 黑洞中心 $r=2.002M$ 处发出的波长为 6000 \AA 的光 (取 $G=c=1$)。

(20 分) 已知一时钟在一质量为 M 的 Schwartzchild 黑洞外 $r=10M$ 处做圆周运动 (取 $G=c=1$)。

1. 求时钟运动一周后走过的时间。

2. 如果时钟每次经过同一位置时向遥远的观察者发射一信号, 求遥远的观察者接受到两次相邻信号的时间间隔。

3. 如果在于运动时钟的临近轨道上有一静止时钟 (设它由一火箭支撑)。求静止时钟看到运动时钟相继两次经过的时间间隔。

(20 分)

1. 仔细介绍弱场近似下引力波的基本性质和产生引力波的条件。

2. 计算下列质量分布的四极矩 $q^{ij}(t)$ 及其无迹形式并讨论是否有引力辐射产生 (四极矩公

$$\text{式 } q^{ij}(t) = 3 \int y^i y^j T^{00}(t, \vec{y}) d^3 y);$$

(a) 四个质量为 m 的质点分别位于 $(a,0,0)$ 、 $(0,a,0)$ 、 $(-a,0,0)$ 和 $(0,-a,0)$;

(b) 上面的四个质点绕 z 轴以角速度 ω 做半径为 a 的匀速圆周运动。