

# 广义相对论考试（Jun 22th, 2012）\*

制作时间：

2012 年 6 月 22 日

I （20分） 对于一个对角的度规 $g_{ab}$ ，证明它的无挠仿射联络的分量（重复指标不求和）是

$$\begin{aligned}\Gamma_{bc}^a &= 0; & \Gamma_{bb}^a &= -\partial_a(\ln \sqrt{|g_{bb}|}); \\ \Gamma_{ab}^a &= \Gamma_{ba}^a = \partial_b(\ln \sqrt{|g_{aa}|}); & \Gamma_{aa}^a &= \partial_a(\ln \sqrt{|g_{aa}|}).\end{aligned}$$

其中 $a \neq b \neq c$ 。

II （20分）

1. 对于两个矢量 $\hat{U}$ 和 $\hat{V}$ ，证明它们的对易子 $[\hat{U}, \hat{V}]$ 是良定义的张量；
2. 证明三维空间中的黎曼曲率张量可以用里奇张量和里奇标量的线性组合表达。

III （20分） 一个发射器沿径向掉进一个史瓦西黑洞

1. 计算它从 $r = 3GM$ 掉到 $r = 2GM$ 所用的原时；
2. 计算它从 $r = 2GM$ 掉到 $r = 0$ 所用的原时；
3. 求出史瓦西坐标下，发射器到达 $r = 2.001GM$ 时的四速度的分量；
4. 它在 $r = 2.001GM$ 时发射一个光子，求出 $r = 5GM$ 处的静止观察者接收到的红移。

IV （10分） 一个观察者在距离史瓦西黑洞的中心 $r = 2.01GM$ ，对于观察者天空的大部分被黑洞覆盖，除了一个圆盘区域，计算圆盘的角直径。

V （20分） 克尔度规可以写作

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{2Mr}{\rho^2} (a \sin^2 \theta d\phi - dt)^2.$$

---

\* 原文为英文

其中  $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$ ,  $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ ,  $a = J/M$ 。

1. 计算它的视界面积;
2. 证明对于固定的  $M$ ,  $a = 0$  时可以取到最大的视界面积;
3. 证明对于固定的视界面积,  $a = 0$  时  $M$  可以取得最小值;
4. 详细介绍彭罗斯过程。

VI (10分) 对于下列两种情况计算四极矩

$$q_{ij} = 3 \int d^3y y_i y_j T^{00}(y)$$

及其无迹部分

- (a) 四个质点分别静止于点  $(0, a, 0)$ 、 $(0, 0, a)$ 、 $(0, -a, 0)$  和  $(0, 0, -a)$ ;
- (b) 这四个质点绕  $x$  轴以角速度  $\omega$  半径  $a$  做圆周运动。