

2011 年广义相对论考题（中文翻译版）

1. 对一个对角的度规，证明它的克氏联络如下。（ $a \neq b \neq c$ ，任何重复指标不表示求和）

$$\Gamma_{bc}^a = 0, \Gamma_{aa}^b = -\frac{1}{2g_{bb}} \partial_b g_{aa}$$

$$\Gamma_{ba}^a = \Gamma_{ab}^a = \partial_b (\ln \sqrt{|g_{aa}|}), \Gamma_{aa}^a = \partial_a (\ln \sqrt{|g_{aa}|})$$

2. 写出二维情形下由里奇标量和度规张量表示的黎曼张量。

3. 1 阐述爱因斯坦等效原理，并说明如何用它来处理红移问题。

- 2 计算遥远观察者观察到下列源所发出的光的波长

(a). 从牛顿势  $\Phi = 5 \times 10^{-6}$  发出的波长为  $6000 \text{ \AA}$  的光。

(b) 从距离质量为  $M$  的史瓦西黑洞中心  $r=2.002M$  处发出的同样的光。（取  $G=c=1$ ）

4. 已知一个时钟在质量为  $M$  的史瓦西黑洞外  $r=R$  ( $R>3M$ ) 处做圆周运动。

1. 求时钟运动一周走过的时间。

2. 如果时钟每次经过同一位置时向远处的观察者发射一信号，求远处的观察者接收到两次信号的时间间隔。

3. 如果在与运动时钟的临近轨道上有一静止时钟（由火箭保持它静止），求静止时钟看到运动时钟两次经过的时间间隔。

4. 克尔度规如下：

$$ds^2 = -\frac{\rho^2 \Delta}{\Sigma^2} dt^2 + \frac{\Sigma^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} (d\phi - \omega dt)^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2$$

$$\text{其中 } \Delta = r^2 - 2Mr + a^2, \rho^2(r, \theta) = r^2 + a^2 \cos^2 \theta,$$

$$\Sigma^2 = (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta, \quad \omega = 2Mra / \Sigma^2$$

1. 求克尔黑洞的视界面积。
2. 证明给定黑洞质量的情况下， $a=0$  时视界面积最大
3. 证明给定黑洞面积的情况下， $a=0$  时视界面积最小
4. 详细阐述彭罗斯过程。

5. 计算如下情形的四极矩和相应的无迹形式。（已知  $q^{ij} = 3 \int y^i y^j T^{00}(t, \vec{y}) d^3 y$ ）

- 1 质量为  $m$  的质点在  $(0, a, 0)$   $(0, -a, 0)$   $(0, 0, a)$   $(0, 0, -a)$ 。

- 2 如上情况，但是粒子绕着  $x$  轴逆时针以角速度  $\omega$  转动。