Every even integer equal to or greater than 6 can be written as the sum or different of two primes numbers

Liang Zieng-Yong
Maternal and Child Health Hospital of Guangxi,

Abstract:
It is the intention of this article to use the Elementary number theory and its applications, Inclusion-Exclusion Principle, functions, and other methods to study the prime numbers and composite number, and integer-pair . By using this new proof method and theory, to get a Prime-pair estimation of lower-boundary on an inequality. Furthermore, the new theoretical solution makes efforts on Goldbach Conjecture to the problem.

key words:
Prime numbers, Inclusion-Exclusion Principle, integer-pair , multiples-pair, Prime-pair
Chinese library Classification O156.1

任一不小于6的偶数可表为两素数之和或差

梁增勇

广西南宁市 广西妇幼保健院 (530003）

摘要：本人运用初等数论的一些理论和容斥原理、函数等方法研究素数、倍数和整数对，使用新的证明方法和理论得出素数对下限不等式，进一步证明了有关哥德巴赫猜想的数学难题。

关键词： 素数 容斥原理 倍数 整数对 倍数对 素数对
中国图书分类号： o156.1

哥德巴赫猜想是世界几大数学难题之一，即：

每一个不小于 6 的偶数都是两个奇素数之和。

根据命题题意，令 N 为一正整数，当 N 为偶数时，N=2n, 我们将≤2n 的正整数（与 0）排列如下图:

0	1	2	3	......	n-1	
						n
2n	2n-1	2n-2	2n-3	......	n+1	

图 1

其上下对应的两个整数之和必等于 2n。显然，只要能证明必有一对数都是素数，哥德巴赫猜想问题即可解决。

1 本文的定义和符号：

A 表示[1,2n]区间正整数的集合，即 A={1,2,3,…,2n}，集合 A 的元素个数记为 card(A);

A_a 为含有 a 素因子倍数的子集，即 A_a={1a,2a,3a, 4a, 5a,……}， card(A_a) 表示它们的个数;

P 表示素数的集合，p_m 表示素数，即 P={2，3，5，7，11，13,…… $p_{......}$}　或

P={p_1, p_2, p_3,..., p_m,...}

π(N) 常表≤N 的素数之个数,或≤2n 的素数之个数(N=2n,), 或集合 A 中素数之个数。

D(N）常表哥德巴赫猜想命题（A）之解数，本文即和为偶数 2n 的素数对个数。

D 奇倍数对集合，Card(D)为奇倍数对个数。

Q 不能组成倍数对的奇倍数也称非倍数对数，它们组成的子集，用 Q 标记。

2 自然数

2.1 自然数的性质

自然数具有基数和序数的含义，这两者是一一对应的。数论把自然数定义了几种不同性质的数：素数，合数，和 1。整数 1 是计数和衡量的最基本的单位，所有自然数都是 1 的倍数，它是无穷无尽的。而素数的倍数则是以素数为基本单位的数列，它也是无穷无尽的。在自然数中每个素数的倍数密度（间隔）是相同的。

3 不大于 N 的素数个数

3.1 Eratosthenes 氏筛法

由 Eratosthenes 氏筛法可知若 N 非素数，则 N 必为一不大于 $\sqrt{N}$ 之素数所整除，使用 Eratosthenes 氏筛法，逐次剔除 N 中 2、3、5、…不大于 $\sqrt{N}$ 之素数的合数,及 1 本身，那么，余下的就是不大于 N 之素数.。[1]

3.2 π(N)的容斥公式

3.3 计算 π(N)的容斥公式

使用容斥公式可以精确地计算素数的个数。根据容斥原理可以求得不大于 N 的素数个数 π(N)为：

引理 2

$$\pi(N)=m-1+N-\sum_{1\le i_1\le m}\left[\frac{N}{P_{i_1}}\right]+\sum_{1\le i_1<i_2\le m}\left[\frac{N}{P_{i_1}P_{i_2}}\right]-\dots$$

$$+(-1)^k\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le m}\left[\frac{N}{P_{i_1}\dots P_{i_k}}\right]+\dots+(-1)^m\left[\frac{N}{P_1\dots P_m}\right] \quad [2] \qquad (1)$$

4 素数的密度

我们把集合 A 中某一类元素个数与 2n 之比称为该类元素在[1，2n]区间的密度。所有小于 N 的素数组成的素数的密度用 b_m 标记，并令

$$b_m=\pi(N)/N$$

则

$$\pi(N)=N\,b_m=2n\,b_m \qquad (2)$$

定理 1

$$\frac{b_{m+1}}{b_m}\geqslant\frac{p_{m+1}-1}{p_{m+1}}$$

证

由式（1）可知≤ $\sqrt{N}$ 的素数的倍数个数是

$$\sum_{1\le i_1\le m}\left[\frac{N}{P_{i_1}}\right]+\sum_{1\le i_1<i_2\le m}\left[\frac{N}{P_{i_1}P_{i_2}}\right]-\ldots\quad+（-1）^{k}\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le m}\left[\frac{N}{P_{i_1}\ldots P_{i_k}}\right]+\ldots$$

$$+（-1）^{m}\left[\frac{N}{P_1\ldots P_m}\right]$$

那么当 N 由 $p_m^2 \to p_{m+1}^2$，多项式新增的计算 p_{m+1} 的倍数个数的第一项项是$\left[\frac{N}{p_{m+1}}\right]$

而当 $N' = p_{m+1}^2$， 则

$$\left[\frac{N'}{p_{m+1}}\right]=\left[\frac{p_{m+1}^2}{p_{m+1}}\right]=\frac{p_{m+1}^2}{p_{m+1}}=\frac{1}{p_{m+1}}\times N'$$

如果≤$\sqrt{N'}$ 的素数的倍数个数中新增的计算 p_{m+1} 的倍数个数是等于$\left[\frac{N'}{p_{m+1}}\right]$，则>$\sqrt{N'}$ 的素数的个数

$$N'b_{m+1}= N'(b_m-\frac{1}{p_{m+1}})$$

而≤$\sqrt{N'}$ 的素数的倍数个数中新增的 p_{m+1} 的倍数个数是小于$\left[\frac{N'}{p_{m+1}}\right]$，因为还有后续项

$$\sum_{1\le i_1\le m}\left[\frac{N'}{P_{i_1}P_{m+1}}\right]-\sum_{1\le i_1<i_2\le m}\left[\frac{N'}{P_{i_1}P_{i2}P_{m+1}}\right]+\ldots+（-1）^{m}\left[\frac{N'}{P_1\ldots P_m P_{m+1}}\right]$$

则>$\sqrt{N'}$ 的素数的个数是

$$N'b_{m+1}\geqslant N'(b_m-\frac{1}{p_{m+1}})$$

即

$$b_{m+1}\geqslant b_m-\frac{1}{p_{m+1}}$$

$$\frac{b_{m+1}}{b_m}\geqslant 1-\frac{1}{b_m p_{m+1}}\geqslant 1-\frac{1}{p_{m+1}}$$

$$\frac{b_{m+1}}{b_m}\geqslant\frac{p_{m+1}-1}{p_{m+1}}$$

5 整数对

5.1　整数对的概念　我们将在图 1 中每个上下对应、和等于 2n 的两正整数组合称为整数对。含有基本素数和它们的倍数组成的整数对集合。

5.2　偶数对 在整数对中，所有偶数都相对。原因很明显，因为图一是将≤n 的正整数分半对折，使 0, 与 2n 相对，相对的偶数离原点（或 2n）的距离正好都是 2m, 并对模 2 同余[6]　。

5.3　奇数对 在奇数对中，并非所有的奇倍数都相对，其规律是：

性质 1　当 n 为 p 素因子之倍数时，所有 p 素因子之倍数都相对。

证　若 n 含 p 素因子，p|n ，则从 n 起往左数，上面第 ip 个整数和下面第 ip 个整数相对，即

$$n-ip \equiv 0 \pmod p, \quad n+ip \equiv 0 \pmod p, \quad (i=1,2,3,\ldots[\frac{n}{p}])$$

同时，上面有$[\frac{n}{p}]$个 p 素因子之倍数，下面也有$[\frac{2n-n}{p}]$个 p 素因子之倍数，

$$[\frac{2n-n}{p}]=[\frac{n}{p}]$$

数量刚好相等。证毕。

性质 2　当 n 不含 p 奇素因子之倍数时，所有含 p 素因子之倍数都不相对。

证　假设当 n 不含 p 奇素因子之倍数时，有一个含 p 素因子之倍数相对，其整数对为（n－a）和（n＋a），即：

$$(n-a)\equiv 0 \pmod p, \quad (n+a)\equiv 0 \pmod p$$

则

$$(n-a)+(n+a)\equiv 0 \pmod p$$

$$2n\equiv 0 \pmod p$$

与 n 不含 p 奇素因子的假设有矛盾。证毕。

性质 3　当 n 不含 a 、b 因子之倍数时，上面≤n 的 a 的倍数每隔 ab 个数必有一个和下面>n 的 b 的倍数相对, 用 D_b^a 标记，(a,b)=1,a<b；同时，下面>n 的 a 的倍数每隔 ab 个数必有一个和上面≤n 的 b 的倍数相对, 用 D_a^b 标记， (a,b)=1,a<b。即

$$\mathrm{Card}(D_b^a)=[\frac{n}{ab}]，及 \quad \mathrm{Card}(D_a^b)=[\frac{n}{ab}]$$

证　因为 b 个与对方 a 的倍数相对的数可组成一个对模 b 的完全剩余系，[5]有 b 个对模 b 的不同剩余类，因此在开始 b 个与对方 a 的倍数相对的数中总有 1 个余数为 0 的剩余类（同余类），此即为 a 的倍数和 b 的倍数组成的倍数对，此后每隔 ab 个数便是 a 的倍数和 b 的倍数组成的倍数对。由性质 2 可知， 当 n 不含 p 奇素因子时，所有含 p 素因子之倍数都不相对。因此，上 a 的倍数与下 b 的倍数组成的倍数对和下 a 的倍数与上 b 的倍数组成的倍数对并不相同。[3]

证毕。

5.4 倍数对的个数

首先，已知偶数全部组成偶倍数对。而对于奇数当 n 为奇素因子 a 的合数时所有 a 的倍数都相对，而当 n 不为奇素因子 a 的合数时所有 a 的倍数都不相对。**显然，对于含** a 的倍数对来说，**后一种情况**（是 a 的倍数与 其它素因子倍数相对）倍数对个数比较少， 下面我们就以 假设 n 不含奇素因子的情况来讨论奇倍数对的个数。

根据整数对的性质 3 ： 当 n 不含 a 、b 因子之倍数时，上面≤n 的 a 的倍数每隔 ab 个数必有一个和下面>n 的 b 的倍数相对, (a,b)=1,a<b；同时，下面>n 的 a 的倍数每隔 ab 个数必有一个和上面≤n 的 b 的倍数相对, (a,b)=1,a<b。我们可以将图 1 中下方>n 的整数摆到右上方（代表下面>n 的 a 的倍数），将图 1 中上方<n 的整数摆到右下方（代表上面>n 的 b 的倍数），如图 2：

0 1 2 3 ...... n-1 n+1 n+2 …… 2n-3 2n-2 2n-1 2n

n

2n 2n-1 2n-2 2n-3 ...... n+1 n－1 n－2 …… 3 2 1 0

图 2

这样，我们就容易观察和理解 a 的倍数和 b 的倍数是怎样相对的。

现在，我们运用**逐步淘汰原则**[4]进行计算整数对中奇倍数对的个数，他们的集合用 D 标记。

首先计算 p_i 素因子的倍数和对边 p_j 素因子倍数组成的倍数对，即为：

$$\sum_{2\le i\le j\le m}\left[\frac{2n}{p_i p_j}\right]$$

由于 p_i 或 p_j 素因子的倍数可能会是含有两个或两个以上别的素因子的倍数，因此在会产生重复计算，因此按照逐步淘汰原则进行筛查，并除去一半 2 的倍数对，得出以下式子：

$$\text{Card(D)}=\frac{1}{2}\left(\sum_{2\le i\le j\le m}\left[\frac{2n}{p_i p_j}\right]-\sum_{2\le i\le j\le k\le m}\left[\frac{2n}{p_i p_j p_k}\right]+\cdots+(-1)^{m-1}\left[\frac{2n}{p_2 p_3\cdots p_m}\right]\right) \quad (3)$$

由于 p_i 素因子的倍数和对边 p_j 素因子倍数组成的倍数对为：

$$\sum_{2\le i\le j\le m}\left[\frac{2n}{p_i p_j}\right]$$

即 p_i 素因子的倍数和对边 p_j 素因子倍数组成的倍数对密度是它们两个素因子倍数对 2n 的密度之乘积，那么总的倍数对密度就是图 2 中上下方≤n 的素因子倍数的密度之乘积，假设因为

$$\pi(N) = 2n\, b_m$$

则小于 2n 的素数的倍数的实际密度等于（$1-b_m$），那么总的倍数对密度就是$(1-b_m)^2$ ，

所有≤$\sqrt{N}$ 的素因子的奇倍数对集合为 D ，它们的个数是：

$$\text{Card (D)}= n(1-b_m)^2 \qquad (4)$$

6 命题的证明

定理 1 （鸽巢原理） 设 n 是一个自然数，现有 n 个盒子和 n+1 个物体，无论怎样把这 n+1 个物体放入这 n 个盒子中，一定有一个盒子中放了两个以上的物体。

推理 1 在奇数对中，有两个整数都是合数的成为奇合数对，素数仅可能在不是合数对的奇数对中，显然当把≥k+2 个素数与 k 个不能成为合数对的奇合数组成整数对，必有一对或一对以上的整数对含有两个素数。

证

素数仅可能在不是合数对的奇数对中，k 个不能成为合数对的奇合数仅能与 k 个素数组成混合数对，余下的素数必是组成素数对的素数，否则 k 个不能成为合数对的奇合数仅能与 k+2 个素数组成混合数对，与 k+2>k,

相矛盾。
证毕。

不能组成倍数对的奇倍数也称非倍数对数，它们组成的子集，用 Q 标记，则由推理 2 可知，即当：

$$\pi(N) \quad \geqslant \mathrm{Card}(Q)+2 \qquad (5)$$

成立，就有一个以上的素数对存在，命题即可成立。

集合 A 的元素除去 1 和素数，再除去倍数对的元素，余下即是不能组成倍数对的奇倍数，则

$$\mathrm{Card}(Q)=2n-1-\pi(N)-2\mathrm{Card}(D)$$
$$\leqslant 2n-1-2n\, b_m \;-2n(1-b_m)^2$$
$$=2n\, b_m(1-b_m)-1$$

由不等式（5） 可得

$$2nb_m \geqslant 2nb_m(1-b_m) \;-1+2$$
$$2n\, b_m \geqslant 2n\, b_m-2n\, b_m^2+1$$
$$2n\, b_m^2 \;\geqslant 1 \qquad (6)$$

所以若

$$2n\, b_m^2 \;\geqslant 1$$

成立，不等式（5）也成立。

下面用数学归纳法证明不等式（6）成立：

证

（Ⅰ）首先证明对于所有的 $N=p_m^2$ 点不等式（6）成立：

(1) 已知 N=170 时 ，m=6，

$$\pi(N)=m-1+N-\sum_{1\le i_1\le 2}\left[\frac{2n}{p_i}\right]+\left[\frac{2n}{p_ip_j}\right]$$

$=6-1+170-136$

$=39$

$b_2=39/170=0.229411$

$N\, b_6^2=170\times 0.2294^2=8.94>8$

(2)假设 $N=p_m^2$ 时，不等式（6）成立，即

$$Nb_m^2 \;\geqslant 8$$

则当 m=m+1 时，$N'=p_{m+1}^2$ ， $b_m \to b_{m+1}$ ，此时与 $N=p_m^2$ 比较，假设 $p_{m+1}=p_m+y$，

$N'=p_{m+1}^2=(p_m+y)^2$ ，$y\geqslant 2$，由定理 1 可知

$b_{m+1}\geqslant b_m\times\dfrac{p_m+y-1}{p_m+y}$，

$$N'\, b_{m+1}^{\;2}\geqslant(p_m+y)^2\, b_m^{\;2}\left(\frac{p_m+y-1}{p_m+y}\right)^2$$
$$=b_m^{\;2}\,(p_m+y-1)^2$$
$$\geqslant\; b_m^{\;2}\,(p_m+2-1)^2$$

$\geqslant b_m^{\ 2} p_m^{\ 2}$

$\geqslant 8$

即当 N≥ 对于所有的 $N=p_m^2$ 点有

$N' b_{m+1}^2 \geqslant 8$

（Ⅱ）在所有的 $p_m^2+2 \leqslant N \leqslant p_{m+1}^2-1$ 点之间，因为 $N < p_{m+1}^2$，m 不变，$b_m > 0.5\, b_m$

$$N b_m^2 \geqslant N(0.5 b_m)^2 = 0.25 N (b_m)^2 \geqslant 0.25 \times 8 \geqslant 1$$

由（Ⅰ）、（Ⅱ）可证，当 2n≥170 时，不等式（6）均成立，即

$$\pi(N) \geqslant Card(Q)+2$$

由推理 1 可判断有不少于 1 个以上的素数对存在。

综上所述，已证明当 2n 为等于或大于 10 的任何偶数，均有一对以上的和为 2n 的素数对存在。而 6=3+3，8=3+5。

至此，已证明了当 2n 为等于或大于 6 的任何偶数哥德巴赫猜想都是正确的。

7 计算机编程辅助验证

表.1 D(N)’与实际素数对个数 D(N)对照表

2n	m	p_m	π（N）	b_m	D(N)’	D(N)
122	5	11	30	0.2459	3.68	4
170	6	13	39	0.2294	4.47	9
290	7	17	61	0.2103	6.41	10
362	8	19	72	0.1988	7.15	8
530	9	23	99	0.1867	9.23	14
842	10	29	146	0.1733	12.64	18
962	11	31	162	0.1683	13.82	16
1370	12	37	219	0.1598	17.64	28
1682	13	41	263	0.1563	20.54	24
1850	14	43	282	0.1529	21.2	38
2210	15	47	316	0.1488	24.48	47
2810	16	53	409	0.1455	29.74	51
3482	17	59	486	0.1398	34.2	45
3722	18	61	519	0.1356	36.16	50
4490	19	67	608	0.1356	41.27	71
5042	20	71	675	0.1338	45.13	60
5330	21	73	705	0.1322	46.57	87
22202	35	149	2489	0.1121	139.49	212
32762	42	181	3512	0.1071	187.89	289
65536	54	251	6542	0.0998	326.37	548

D(N)’为不等式（7）计算值。

由表中可见到 D(N)’计算的素数对个数均小于实际值，是它的下限，同时大于 1，随着 N 的增大，D(N)’也增加，与证明结果一致。

根据本证明进行数学建模得素数对个数(用 D(N)’标记)下界公式是

$$D(N)' \geqslant n\, b_m^2 \qquad (7)$$

对本论文证明的关键公式的大量参数和结果数据，进行计算机编程验证，均通过验证，由不等式（6）计算得素数个数下界接近和小于实际数，D (N)计算值均大于 1 和小于实际数，随着 2n 的增大，D(N)计算值在坐标图中，呈现十分理想的上升曲线（近似直线）。原因是，令 $f(N)= nb_{m+1}^2$, 函数 $f(n)$为随 2n 的增大而增大的增函数，因此，素数对会越来越多，实验数据和证明结果是一致的。

因为

（1）当 2n 由一个 p_m^2 点到下一个 p_{m+1}^2 点，$f(N)$是单调增加的；

$$n'b_{m+1}^2 - nb_m^2 = \frac{1}{2} p_{m+1}^2 b_{m+1}^{\ 2} - \frac{1}{2} p_m^2 b_m^{\ 2}$$

$$\geqslant \frac{1}{2} p_{m+1}^2 \left(b_m \times \frac{p_{m+1}-1}{p_{m+1}} \right)^2 - \frac{1}{2} p_m^2 b_m^{\ 2}$$

$$= \frac{1}{2} b_m^2 \times (p_{m+1} - 1)^2 - \frac{1}{2} p_m^2 b_m^{\ 2}$$

$$= \frac{1}{2} b_m^2 \times (p_m + y - 1)^2 - \frac{1}{2} p_m^2 b_m^{\ 2}$$

$$\geqslant \frac{1}{2} b_m^2 \times (p_m + 1)^2 - \frac{1}{2} p_m^2 b_m^{\ 2}$$

$$= \frac{1}{2} (2p_m + 1) b_m^{\ 2}$$

$$\geqslant 0$$

所以 $n'b_{m+1}^2 \geqslant nb_m^2$

（2）而当 $p_m^2 \leqslant 2n < p_{m+1}^2$ 的区间，由于 m、b_m 的参数不变，$f(N)$也是单调增加的，[5] 即

因为

$$n' > n$$

所以

$$n'b_m^2 \geqslant nb_m^2$$

因为由（1)、(2），可以将所有 $2n= p_m^2$ 的 $f(N)$计算值所在点划连线，所得到的曲线作为D(N)’计算值的下限，所有D(N)实际值均在它的上方或重叠，同时所有D(N)’计算值均不多于实际数，如同我们在附图 1 中看到那样，D(N)’计算值形成一条十分理想的上升“直线”。

8　结论

使用初等数论的理论和函数等方法解决哥德巴赫猜想证明是行之有效的方法。由以上数学证明和计算机实验数据结果表明，随着偶数 2n 的增大，素数对会越来越多。且在趋势图中D(N)’呈近似直线上升趋势。因此，当 2n 为等于或大于 6 的任何偶数都可表为两素数之和，哥德巴赫猜想命题（A）是正确的。

9 “1－1”的证明

任意偶数可等于两素数之差，此为因随哥德巴赫猜想之后而得的又一世界数学难题，即日本滕斋猜想。[6]根据题意同样可将有关正整数如下排列：

0	1	2	3	…	n	n+1	…	2n-2	2n-1	2n
	2n+1	2n+2	2n+3	…	3n	3n+1	…	4n-2	4n-1	4n

那么，只要证明在 2n 对奇整数对中有 1 对是素数对，则滕斋猜想命题就成立。
不难看出，其证明方法和“1+1”完全一样。

参考文献：

[1] G.H.Hardy,E.M.Wright,*An Introduction to the Theory of Numbers.* [M].人民邮电出版社, 2007

[2] 潘承洞，潘承彪 . 初等数论. [M] 北京大学出版社, 2003

[3] Kenneth H.Rosen , *Elementary Number Theory and Its Applications*（Fourth Edition） . [M].机械工业出版社, 2005

[4] 华罗庚 . 数论导引, [M] 科学出版社.1967

[5] 唐维彦，李霞，王昌. 数学[M] 化学工业出版社, 2006 （42~57）

[6] 胡作玄 . 数学是什么[M] 北京大学出版社, 2009