费马大定理的证明

梁增勇

前　言

费马是一名法国的大法官兼**业余数学家**。1637 年，费马在无意之间被古希腊数学家丢番图《算术》引发奇想，能否找一个毕达哥拉斯方程变异的不定方程的解。

原始的毕达哥拉斯方程可以表达为寻找方程

$$x^n + y^n = z^n,\quad z \geq 2$$

的整数解。

费马随即在《算术》的书中做了批注："将一个立方数分为两个立方数，一个四次幂分为两个四次幂，或者一般地将高于二次的幂分为两个同次的幂，这是不可能的。关于此，我确信已发现一种奇妙的证法，可惜这里的空白地方太小，写不下。"这个问题于是被称为"费马最后的定理（Fermat's Last Theorem）"，也称"费马大定理"。三个多世纪以来，历史上最优秀的数学家都曾试图证明它，却一无所获。

1994 年,怀尔斯用模形式、谷山-志村猜想、伽罗瓦群河椭圆曲线性质等现代数学方法间接证明了费马大定理。但怀尔斯 130 页证明十分得深奥，显然不是费马所说的简短证明。人们仍然在寻找一个更 简洁的费马大定理证明。

如果方程的 x, y 和 z 有公共因子，我们可以将它消除，方程可变成：

$$A^n + B^n = C^n\quad。$$

第 1 个证明

费马大定理：

$$A^n + B^n = C^n \tag{1}$$

其中，$n \geq 2$。

证　假如 $B^n=0$，$A^n=C^n$ 是成立的。那么将 A^n 由等于 C^n 逐渐减小，再加上减小的部分还是等于 C^n。

即

$$(A-x)^n + y^n = C^n$$

$$(A-x)^n = A^n - nA^{n-1}x + \ldots\ldots + (-1)^{n-1}nAx^{n-1} + (-1)^n x^n \tag{2}$$

在（2）中$-nA^{n-1}x + \ldots\ldots + (-1)^{n-1}nAx^{n-1} + (-1)^n x^n$ 是减小的部分，应该等于再加上减小的部分即 y^n ，列式：

$$nA^{n-1}x - \ldots\ldots + (-1)^{n-1}nAx^{n-1} + (-1)^n x^n = y^n$$

$$x(nA^{n-1} - \ldots\ldots + (-1)^{n-1}nAx^{n-2} + (-1)^n x^{n-1}) = y^n$$

那么 $x \mid y$。

1）如果 $y^n=q^np^n$, $x=pq$，那么

$$pq\,(n A^{n-1} \ - \ldots\ldots + (-1)^{n-1} n A x^{n-2} + (-1)^{n} x^{n-1}) = q^n p^n$$

$$n A^{n-1} \ - \ldots\ldots + (-1)^{n-1} n A x^{n-2} + (-1)^{n} x^{n-1} = q^{n-1} p^{n-1}$$

A 和 $q^{n-1}p^{n-1}$ 之间含公因子，即 A 和 y （也是 B）之间含公因子,这是不可能的。

1）如果 $y^n=q^n p^n$, $x=p^n$ ，（p,q）=1 那么

$$p^{n}(n A^{n-1} \ - \ldots\ldots + (-1)^{n-1} n A x^{n-2} + (-1)^{n} x^{n-1}) = q^n p^n$$

$$n A^{n-1} \ - \ldots\ldots + (-1)^{n-1} n A x^{n-2} + (-1)^{n} x^{n-1} = q^n$$

A 和 q^n 之间含公因子，即 A 和 y （也是 B）之间含公因子,这是不可能的。

(20170706)

第 2 个证明

费马大定理：

$$A^n + B^n = C^n \tag{1}$$

其中，$n \geq 2$。

证　假如 $B^n=0$，$A^n=C^n$ 是成立的。

令 $C=A+c$, $B\neq 0$, 则

$$C^n = (A+c)^n \ , \tag{2}$$

$$(A+c)^n = A^n + n A^{n-1}c + \ldots + nAc^{n-1} + c^n \tag{3}$$

对比（1)、（2)）和（3）可知：

当 $$B^n = n A^{n-1}c + \ldots + nAc^{n-1} + c^n \ , \tag{4}$$

(1) 成立。

令 $B=A+x$，则

$$B^n = (A+x)^n$$

$$B^n = A^n + n A^{n-1}x + \ldots + nAx^{n-1} + x^n \tag{5}$$

由（4）和（5）可得：

$$n A^{n-1}c + \ldots + nAc^{n-1} + c^n = A^n + n A^{n-1}x + \ldots + nAx^{n-1} + x^n \tag{6}$$

若（6）成立，则 （5）也成立。

整理（6）可得：

$$A^n + n A^{n-1}(x-c) + \ldots + nA(x^{n-1}-c^{n-1}) + x^n - c^n = 0 \tag{7}$$

由定理 1 可知当

$x-c=q=A$,

$x^2-c^2=q^2=A^2$

...

$X^n-c^n=q^n=A^n$

才能使（7）成立。

显然，方程组互相矛盾。不可能同时成立。则（7）不可能成立。

那么（6)、……、(2)、(1）都不成立。

定理 1 [1]若

$$A^n + n A^{n-1}(x-c) + \ldots + nA(x^{n-1}-c^{n-1}) + x^n - c^n = 0 \tag{8}$$

成立，则必要条件是方程组：

$x-c=-A$,

$x^2-c^2=A^2$

......

$X^n - c^n = (-1)^n A^n$

成立。

显然，方程组的方程不可能同时成立。则方程（8）、（7）、……(1）都不成立。

第 3 个证明

费马大定理：

$$A^n + B^n = C^n \tag{1}$$

其中，$n \geq 2$。

证 设 $A = C - a$, $B = C - b$

$$A^n = (C - a)^n = C^n - n C^{n-1} a + \ldots + n C a^{n-1} + a^n$$

$$B^n = (C - b)^n = C^n - n C^{n-1} b + \ldots + n C b^{n-1} + b^n$$

$$A^n + B^n = (C^n - n C^{n-1} a + \ldots + n C a^{n-1} + a^n) + (C^n - n C^{n-1} b + \ldots + n C b^{n-1} + b^n)$$

$$= 2 C^n - n C^{n-1}(a+b) + \ldots + n C(a^{n-1} + b^{n-1}) + a^n + b^n$$

即

$$C^n - n C^{n-1}(a+b) + \ldots + n C(a^{n-1} + b^{n-1}) + (a^n + b^n) = 0 \tag{2}$$

对比（2）（4），由定理 1 得：

$a+b=q=C$,

$a^2 + b^2 = q^2 = C^2$,

……

$a^n + b^n = C^n$,

这是不可能的。

定理 1 若

$$C^n - n C^{n-1} q + \ldots + n C q^{n-1} + q^n = 0$$

则必须 $C = q$ 。

证 已知

$$(C - q)^n = C^n - n C^{n-1} q + \ldots + n C q^{n-1} + q^n \tag{3}$$

由 （3）可知，只有当 $C - q = 0$, 才有 $(C - q)^n = 0$，和

$$C^n - n C^{n-1} q + \ldots + n C q^{n-1} + q^n = 0 \tag{4}$$

（20190307）

第 4 个证明

费马大定理：

$$A^n+B^n=C^n \tag{1}$$

其中，$n\geq 2$。

证 令 $C=A+c$,

$$A^n+B^n=(A+c)^n$$

$$A^n+B^n=A^n+nA^{n-1}c+\ldots\ldots+nAc^{n-1}+c^n$$

$$B^n=nA^{n-1}c+\ldots\ldots+nAc^{n-1}+c^n$$

$$\boldsymbol{B}^n=\mathbf{c}\,(\mathrm{n\,A^{n-1}}+\ldots\ldots+\mathrm{n\,A\,c^{n-2}+c^{n-1}}) \tag{2}$$

则 B 含 c, $c|B$。

令 $B=c\,k$, 代入(2)：

$$c^nk^n=c\,(nA^{n-1}+\ldots\ldots+nAc^{n-2}+c^{n-1}),$$

$$c^{n-1}k^n=nA^{n-1}+\ldots\ldots+nAc^{n-3}+c^{n-2},$$

$$c^{n-1}k^n=nA^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}A^{n-2}c\ldots\ldots+nAc^{n-3}+c^{n-2},$$

$$c^{n-1}k^n-c^{n-2}=nA^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}A^{n-2}c\ldots\ldots+nAc^{n-3},$$

$$c^{n-2}(c\,k^n-1)=nA(A^{n-2}+\frac{n-1}{2}A^{n-3}c\ldots\ldots+\ c^{n-3})\,。\tag{3}$$

则 1）c^{n-2} 和 nA 不 可能含公共因子，因为 $C=A+c$。

2）那么，c^{n-2} 和$(A^{n-2}+\frac{n-1}{2}A^{n-3}c\ldots\ldots+\ c^{n-3})$ 含公共因子，又导致

c 和 A 含公共因子。

无论如何，都会导致 c 和 A 含公共因子，所以方程（3）、（2）和（1）不成立。

（20181108）

友情提示，若需要交流，可链接：
http://www.mathchina.com/bbs/forum.php?mod=viewthread&tid=2051239