四色定理的证明与应用

梁增勇

摘要：本文用图论的方法证明了三角形结构连通图具有延伸和轮形两大的不可避免构形集。以及有它们组成的 8 个不可避免构形，它们的子图色数都≤4。通过分析这些构形的组合（图）的顶点颜色关系和运用顺序着色的方法完成图的正常 4-着色。从而证明了三角形结构连通图（及平面连通图）的色数≤4。本文解决了切实可行的新方法对四色定理的书面证明，同时对四色定理的实际应用也具有一定的意义。

关键词： 三角形结构连通图； 不可避免构形集； 延伸结构； 轮形结构； 顺序着色法

1 前言

四色猜想是世界数学界关注的问题，给出四色定理无需借助于计算机的证明仍然是一个未获解决的数学难题。我们已知四色定理可以通过证明平面连通图 G'的色数≤4 来实现。而平面连通图的色数不大于由它增加边而得到的三角形结构连通图 G (triangulated graph) 的色数[1]。因此，只需证明任意三角形结构连通图的 $\chi(G)\leq 4$, 即可解决四色定理的证明难题。

2 三角形结构连通图

定义 1 如果一个简单图 G 它所有的内部的面都是 C_3 ,则称之为三角化图或三角形结构连通图[2]。

很明显，三角形结构连通图 G 可由平面连通图 G'中内部所有长≥ 4 的圈增加边，使其所有内部面皆为 C_3 而得。在图中增加边，只可能增加图的色数，所以 $\chi(G')\leq\chi(G)$ [2]。

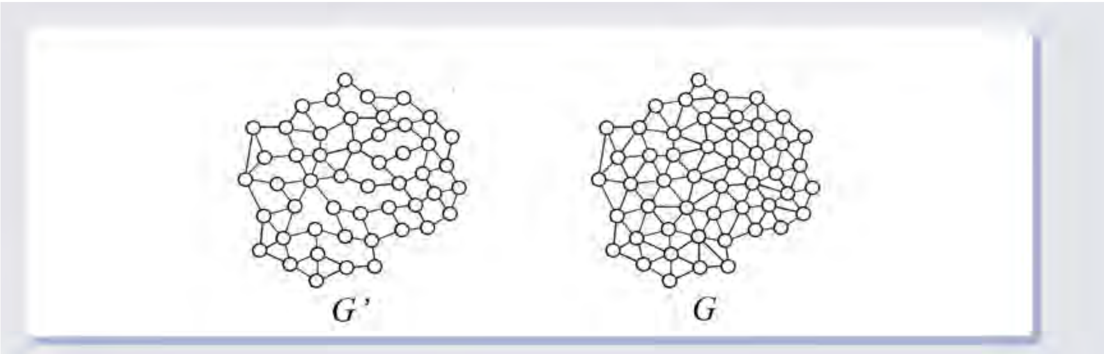


图 1 平面连通图和三角形结构连通图

3 两大不可避免构形集

定义 2 如果一个子图包括一个圈 C_{n-1} 和一个中心顶点 v, v 和其它所有圈的顶点都邻接，则称之为**轮形结构**（轮图），简称**轮形**,用 W_n 表示。不包含有轮形结构的三角形结构子图称为**延伸结构**，用 E_n 表示。

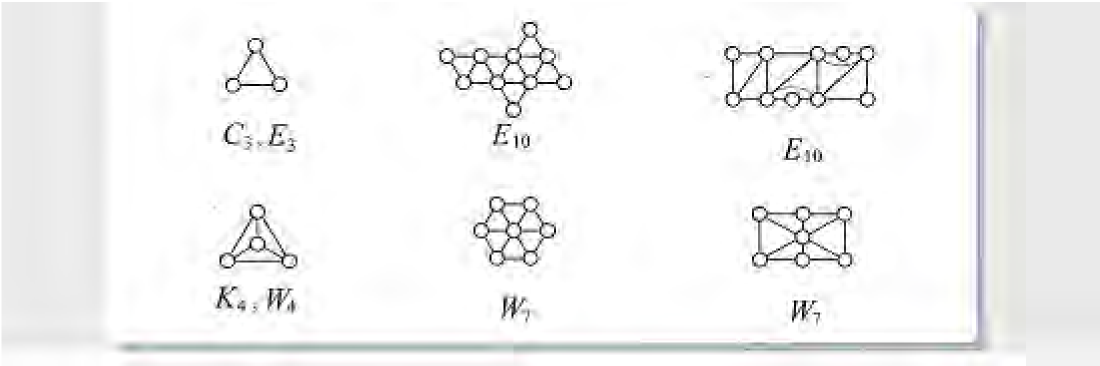


图 2　延伸结构和轮形结构

在图 2 中我们展示了延伸结构和轮形结构以及它们的同构子图，其中方形的子图是本文在分析中常用的形式。

定理 1.　三角形结构连通图仅有延伸和轮形两种结构方式。

证. (1) 一个三角形有三条边，它与其它三角形邻接的情况只有三种：a)有一条公共边；b)有两条公共边；　c)有三条公共边。那么 a 和 c 属于延伸结构，b 属于轮形结构。

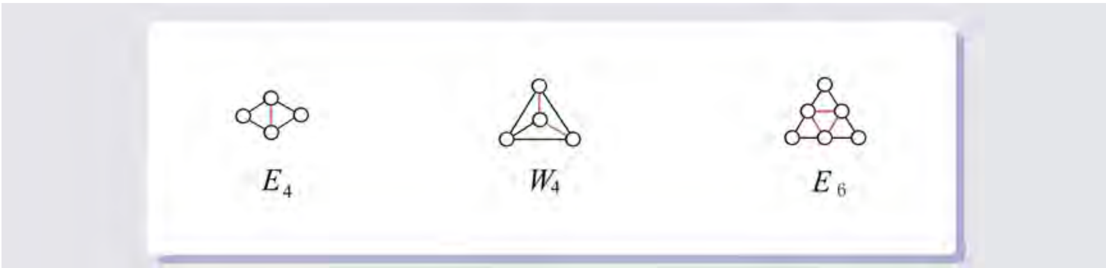


图 2　一个三角形与其它三角形邻接的三种情况

(2)我们可以用逐个增加三角形来构造一个三角形结构子图（参见图 3）。可用欧拉公式解释，在一个面中增加三个顶点和三条边可得一个三角形（C_3）,它是三角形结构连通图的最基本的单位结构，由于它的形状和子图色数以及延伸结构的定义，我们将它归属于延伸结构。同时，用欧拉公式可以证明再增加三角形仅有两种情况：a) 为了增加一个三角形面需要增加一个顶点和两条边（E_4, E_7）　；　b)为了增加一个三角形面仅需要增加一条边。当仅为 a 的情况只可能产生延伸结构；当有 b 的情况会产生一个新的轮形结构（W_4, W_7）。(增加边数多于 3 的情况不可能存在，因为新三角形仅有 3 条边，且一条边必须是与旧三角形的公共边）（3）延伸结构和轮形结构之间的邻接组成的子图还是延伸结构或属于它们的并图，不会产生新的结构[3]。

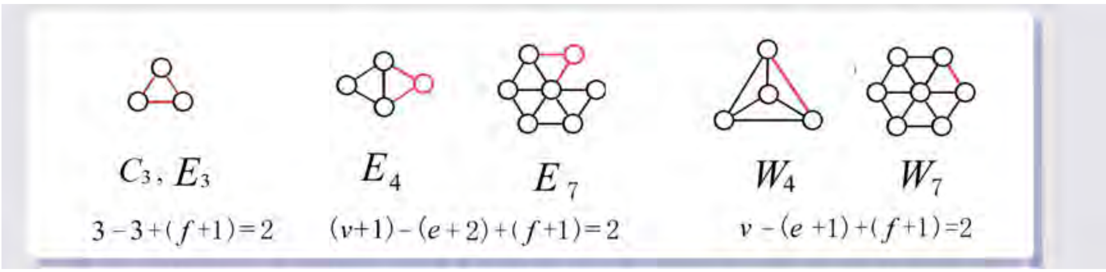


图 3 增加一个三角形面与欧拉公式的关系

定理 2.　延伸结构子图色数等于 3。

证　对 n 用归纳法。（1）当 n=4 时，$\chi(E_4)=3$。（2）假设 $\chi(E_n)\leqslant 4$ 成立。那么增加顶点 v_{n+1} 和两条边构成新的三角形，顶点 v_{n+1} 可使用与同在新三角形中的另两个顶点不同的颜色即可。所以 E_{n+1} 的顶点所使用的的颜色种类集合还是在{1,2,3,4}范围之中，那么 $\chi(E_{n+1})\leqslant 4$ 也成立。

引理 1 轮图色数≤4[4]。

以上说明，作为三角形结构连通图的不可避免构形集的两大类构形的色数都≤4 。下面我们研究以这两大类构形为子图所构造的三角形结构连通图是否色数也≤4 。

4 延伸结构和轮形结构的邻接

3.1 延伸结构与延伸结构:

a) 如果它们的公共部分是一条边，则它们的并图是一个新的延伸结构；

b) 如果它们的公共部分大于一条边（即等于或多于一个顶点和两条边），则产生新的轮形结构。

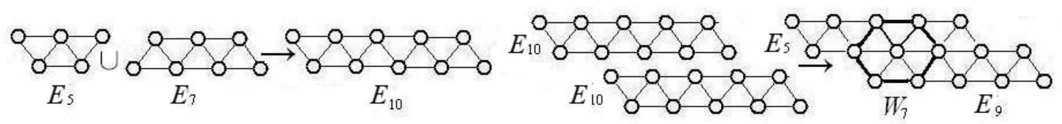


图 4　延伸结构与延伸结构的邻接

3.2 轮形结构和轮形结构邻接:

轮形和轮形邻接，基本不变。

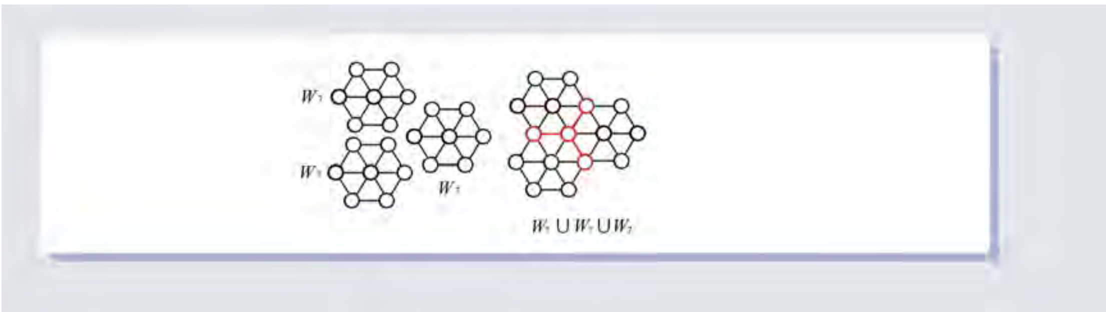


图 5　轮形结构和轮形结构邻接

3.3 延伸结构和轮形结构邻接:

延伸结构和轮形结构邻，基本不变。

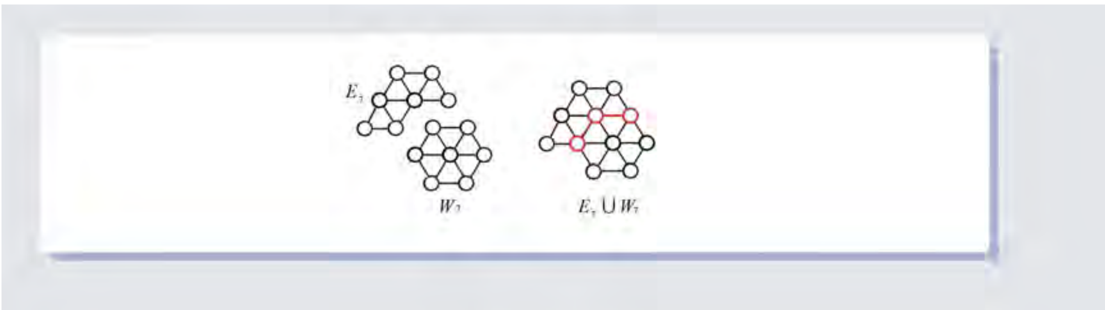


图 6　延伸结构和轮形结构邻接

5　顶点颜色关系

在经典的使用计算机的四色定理证明中，只要把平面图的不可避免构形集找出和证明构

形的可约（可正常 4-着色），就算完成四色定理的证明了。但我们将通过以下的证明步骤证明如果构形的不恰当安排（确定）也是不能完成正常 4-着色的。换句话说，仅有前面的证明步骤，证明本身还是不充分的。

5.1 顶点颜色关系

定义

换句话说，如果一个图着色不出现颜色冲突，则是正常4-着色。

5.1.1 顶点的限制作用和隔离作用

定理 在k-色图中， 两个顶点之间有邻接边不能同色，就是顶点的限制作用。再增加一边一顶点与第二个顶点邻接。第三个顶点可与第一个顶点同色，所以第二个顶点起到隔离作用。

显然圈的顶点也有这些作用。而圈的顶点的隔离作用就把圈内和圈外的顶点隔离起来。在图着色时，只要全的顶点颜色不变，调整圈内的顶点颜色就不影响圈外的顶点。

因此，在考虑一个子图和临近另一个子图的着色，如果第二个子图着色不改动第一个子图的外圈顶点颜色，就不会影响到第一个子图内部的顶点颜色。这就是利用圈的隔离关系。

定义 5.在 K_4,路径和两个轮形之间的顶点颜色，仅受与它们周围邻接的顶点的颜色限制（发生关系），并称为**色自由顶点**（见下图红色顶点）。因此，必要时也可以在简化图中予以省略，或者在顺序配色程序的最后步骤才确定它们的颜色。

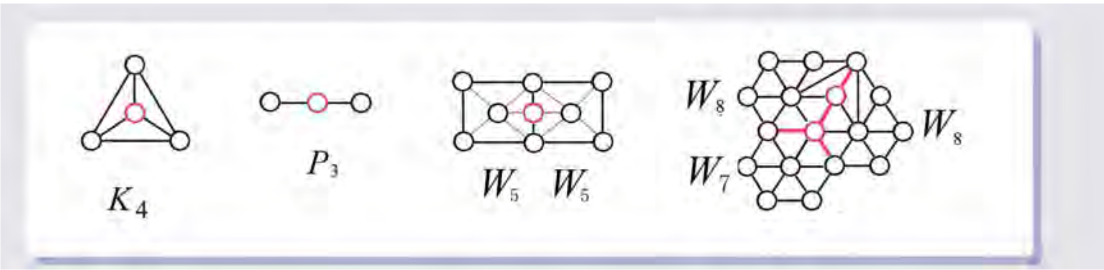


图 14 各种色自由顶点案例

定义 6．在给定的色数范围内，子图的顶点颜色会呈现固定顺序的现象（性质）称之为**有序图**，反之称为**无序图**。例如：2 色图中的路径和偶圈，给定 3 色的延伸结构子图。

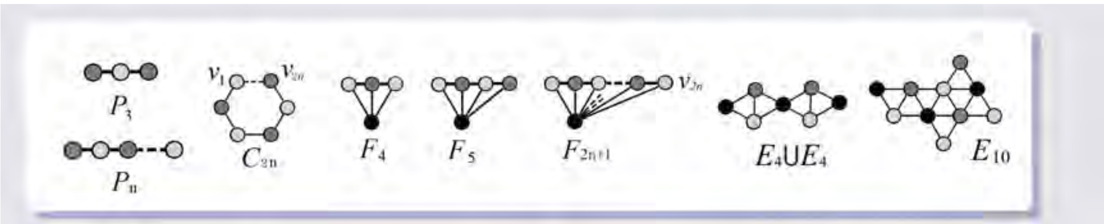


图 15 各种有序子图

5.2 顶点颜色关系的传递

定义 在k-色图中，如果一个顶点（或多个）顶点的颜色可决定另外一个（或多个）顶点的

颜色，就称这个作用为顶点颜色关系的传递。显然，有序图就是顶点颜色关系的传递的例子。而完成点颜色关系的传递的最小结构称为传递因子。。

定理　在3-色图中，E_4是起到顶点颜色关系传递作用的传递因子。
证　因为

传递条件：k色图

传递因子

定理 3　给定 3 色的延伸结构子图是有序图。

证　我们用数学归纳法：（1）显然，当 n=4, 任意两个三角形组成的延伸结构子图 E_{4} 是有序图。

(2) 假设当 n=k, 三角形组成的延伸结构子图 E_k 是有序图。那么，添加第 k+1 个顶点 v_{k+1} 和两条边构成新的三角形（面），顶点 v_{k+1} 须使用与同一个三角形的另两个顶点不同的颜色，即与它对边所对的另一个邻接三角形的顶点同色，这就是它所保持的颜色顺序。所以 E_{k+1} 也是有序图。

5.3 颜色冲突的产生和消除

定义　在图着色中。两个有公共边的顶点称为邻接顶点，它们的颜色必须不相同。
当色图中有邻接边的两个顶点颜色相同是不允许的，叫做顶点颜色冲突，简称颜色冲突。
那么，对任意平面图着色不出现颜色冲突，或者出现颜色冲突也能通过调换顶点颜色消除冲突，就说明任意平面图是可以 4-着色的。

颜色冲突的产生条件：
1、　顶点颜色必须固定；
2、　有相同颜色的两个顶点之间有邻接边。
颜色冲突的消除
如何发现和分析顶点的颜色冲突

定义 7．如果在一个有序图的两个相同颜色的顶点还邻接一条公共边，这是正常 k-着色不允许的,称之为**颜色冲突**。
例如，下图中 v_1 和 v_{3k+1} 发生了颜色冲突。由于 v_1 和 v_{3k+1} 构成一个多边形，因为三角形结构图内部无多边形的面，显然它是轮形的边。解决颜色冲突的办法是改变轮形中心顶点的位置，见图 13：

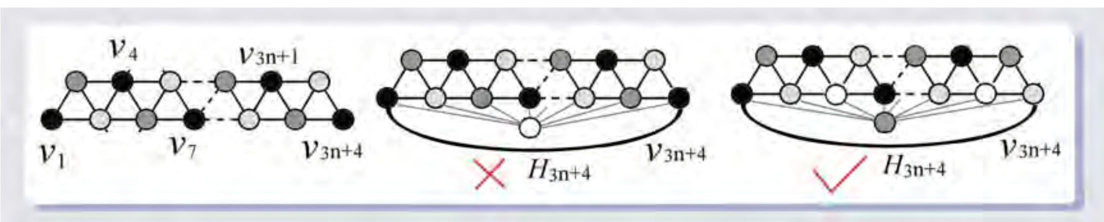


图 16　颜色冲突的产生原因及消除方法

定理 4．改变轮形的中心顶点的位置可以消除顶点颜色冲突。

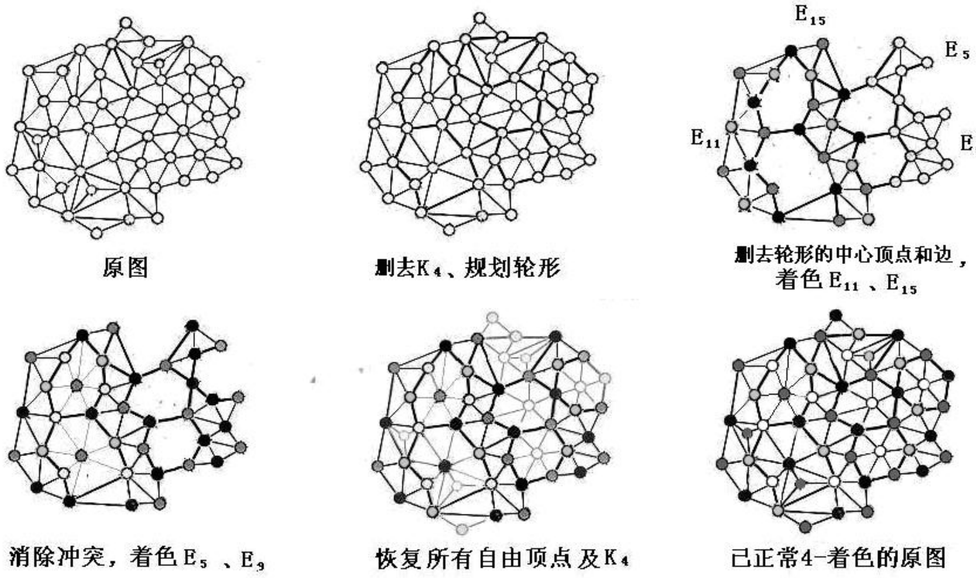
证　假设延伸结构的顶点 v_1 和 v_{3k+1} 存在边 v_1 和 v_{3k+1} 并发生了颜色冲突。由于 v_1 和 v_{3k+1} 及它们的边构成一个多边形（边数大于 3），而三角形结构图内部无多边形的面，显然它是轮形的边。解决颜色冲突的办法就是改变轮形中心顶点的位置，将所有轮形中非端点的其中之一种颜色的顶点，与轮形中心顶点对换颜色。(即改变轮形的中心顶点的位置)，那么，原来的有序图的固有颜色顺序将被破坏，消除颜色冲突（见图 16)。

例如：

（1）在下图中左边的分析图显示按照一般情况配色，有一对顶点颜色冲突是不可解决的。

（2）在下图中右边的分析图显示按照特殊情况处理，经过改变轮形结构的中心顶点位置，改变了上面的延伸结构顶点颜色的顺序，颜色冲突消除，该块可实现正常 4- 着色。

图 17　颜色冲突及消除的案例



5　　四色定理的应用

2、三角形平面连通图如果是正确的4着色，那么延伸结构和轮形结构的位置也正确。当把轮形的中心顶点着白色，延伸结构就是另3色. 因为白色与另3色没有冲突。 因此在给另3种颜色的顶点着色时可以不考虑白色的 存在。只考虑延伸结构的 3色顶点有无冲突就行了。这就是图收缩的 依据。（当然，你不习惯，不删也行，但图就花多了。）

3、在 3 色的限制下，延伸结构顶点有明显的颜色关系，顶点的颜色是绑定的。哪里出现颜色冲突（即两个相同颜色的顶点之间还有邻接边），都一清二楚。所以该怎么处理（我在以后的证明中会说清楚）都明白。这是本方法的一大优势。

顺序配色法

在图中的顶点只有色集之分而无顺序之分。

所谓顺序着色法是指按照一定的顺序可以更快地判断结构与结构的关系和确定顶点正确的颜色的科学方法。

试想，一个有9个顶点的4色图，每个顶点就可能有4种颜色选择，那么就有该图就有4^9=262144种着色方案，凭人工是极难完成正常4-着色的。但懂得和掌握顺序着色法，通过几个步骤就可以在不到十分钟完成正常4-着色。

在上节中我们已经了解在三角形结构连通图 G 中延伸结构是被轮形结构分隔的，我们可以将图 G 做好一个初步的结构位置规划（或称之为{预分配}）。在规划构形位置时形成轮形包围延伸结构的布局，使之出现更多小的延伸结构。然后逐个对延伸结构使用颜色关系分析图进行分块分析和配色，直至完成落实全部图的顶点的 4-正常着色，这一方法称之为**顺序配色法**。下面我们将通过顺序配色法完成以后的证明部分。

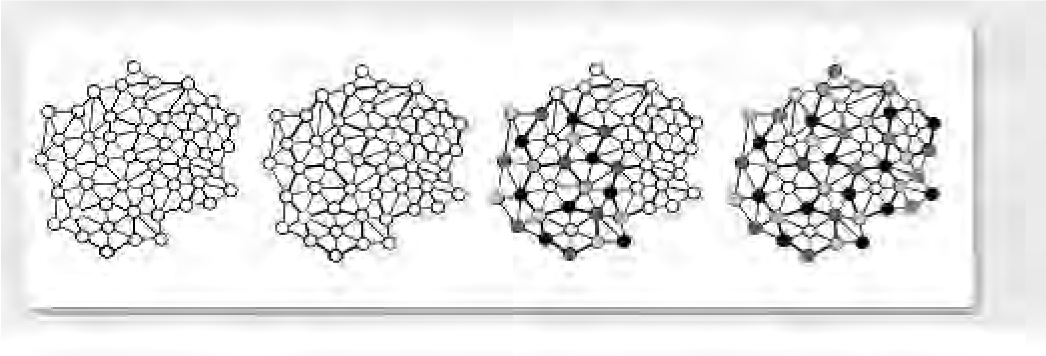


图 18. 顺序配色法的基本步骤

4.1 顺序配色法的基本步骤: .

顺序配色法的基本步骤是：

(1) 首先做好一个初步的轮形结构位置规划（或称之为预分配）见图 7 中第 2 个图，用粗线表明轮形的边.。

(2) 用颜色关系分析图对一组相邻延伸结构和轮形结构组合的块进行配色。见图 7 中第 3 个图，上好颜色的顶点是一个块。两个延伸结构（E_{10} ，E_{13}）中间隔着三个轮形（W_4，W_4，W_8, W_7, W_7)，它们组成了一个颜色关系分析图（见图 8)。

（3）如此按照延伸结构的顺序一个接一个地完成正常 4-着色。

(4) 最后完成整个图的正常 4-着色 。

5 图收缩

图的收缩

因为轮形的定点使用一种颜色，和其它三色的顶点不会产生颜色冲突，所以可以把它们删去。这样，剩下的图会更简单，同时要求它们能够使用三种颜色正常着色。这就叫做图的收缩，而剩下的图必须

是三色图。剩下的图会更简单，分析颜色冲突和处理更容易。见下图。

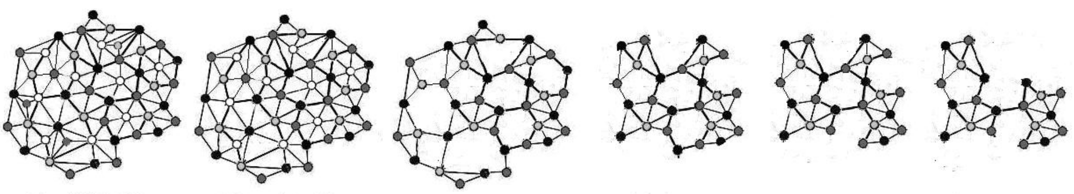


图 19.　图的收缩和正常 2 着色

1、 关于 K_4 的处理

因为不管 K_4 的三个外圈的顶点颜色如何，中心顶点总可以使用与它们不同的第四种颜色，为了简化分析程序，我们在顺序配色过程的开始将 K_4 看作 C_3 处理，如同所有自由顶点的处理方法一样，直至程序的最后一步，才确定所有 K_4 的中心顶点的颜色。

2、三角形平面连通图如果是正确的 4 着色，那么延伸结构和轮形结构的位置也正确。

当把轮形的中心顶点着白色，延伸结构就是另 3 色. 因为白色与另 3 色没有冲突。 因此在给另 3 种颜色的顶点着色时可以不考虑白色的 存在。只考虑延伸结构的 3 色顶点有无冲突就行了。这就是图收缩的 依据。（当然，
你不习惯，不删也行，但图就花多了。）

3、在 3 色的限制下，延伸结构顶点有明显的颜色关系，顶点的颜色是绑定的。哪里出现颜色冲突（即两个相同颜色的顶点之间还有邻接边），都一清二楚。所以该怎么处理（我在以后的证明中会说清楚）都明白。这是本方法的一大优势。

4、通过 1、2、3 可以证明任何三角形平面连通图都能正常 4-着色（即没有颜 色冲突），那么图的色数不就是 4 吗？

真正的证明文字很多。这里仅介绍证明方法的步骤

常 k 着色，则称此顺序为正确的着色顺序，此方法称为顺序着色法。显然，利用顺序着色法进行着色，后面着色的顶点颜色是顺从于前面着色的顶点颜色关系的。换句话说，后面着色的顶点可以不考虑它们的存在，即可以使用这一原则将复杂的图收缩为简单的图。那么顺序着色法的实际操作步骤就包括：1、图收缩：将复杂的图化为简单的图，进行分析关键顶点的颜色关系；2、确定正确的轮形结构位置；3、按照正确的着色顺序完成正常 4-着色。

5.6　一个完整的顺序配色法的实施案例

顺序着色法实际操作步骤为：.

1、.由于 k_4 的特点，不管外圈三个顶点是什么颜色，中心顶点都可以用第四色着色。所以在 4 色图中可以将 k_4 看作 k_3 处理，可将复杂的原图收缩为无 k_4 的 3 色简单图.。

2、在简单图中将所有轮形结构的中心顶点用白色着色,再将所有的白色中心顶点(及边)删去, 同时删去剩下的自由顶点就能再使用图收缩的方法得到一个限制色数为3色的仅含若干个延伸结构子图和它们之间的邻接边组成的简单图.。

3、在经过收缩得到的简单图中，根据延伸结构子图是有序 3 色图（E_4是传递顶点颜色的最小因子）.，当遇到两个相同颜色的顶点之间再有邻接边而形成冲突链，而产生顶点颜色冲突。这样就可以判定颜色冲突的顶点位置,同时可以根据定理 3 重新调整轮形结构的位置消除冲突,那么便可以得到一个没有颜色冲突的正常 4-着色的 4 色图。

4、恢复所有的轮形结构的中心顶点和边,恢复所有 k_4和自由顶点并着色,就能得到一个与原图同构的正常 4-着色的 4-色图.。

。

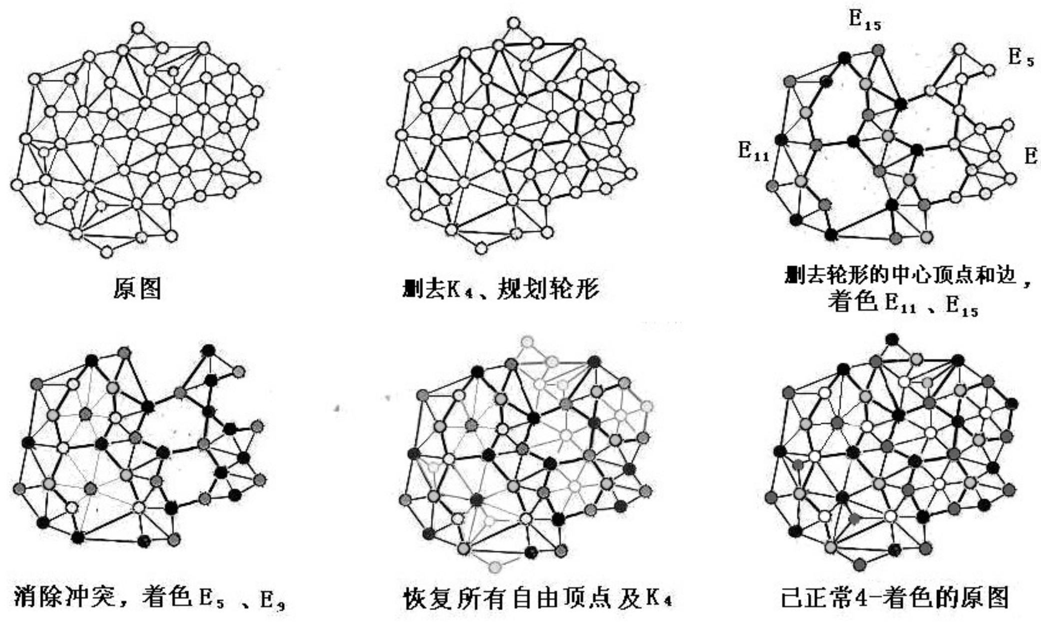


图 30　一个完整的顺序配色法的实施案例

上图便是一个顺序着色法例案。根据以上几点就可证明：

定理 5 任何复杂的三角形结构平面图都可以使用以上的顺序着色法步骤实现正常 4-着色。 即三角形结构平面图的色数不大于 4.。

定理 6 由于平面连通图的色数不大于三角形结构平面图的色数[4], 所以任何平面连通图的色数不大于 4。

至此, 四色定理的终结证明大功告成.

6 命题证明

定理 5（四色定理） .任何平面连通图是 4-可着色的。

证 . (1) 设 G ‘是一个平面连通图 , G 是由 G ‘ 增加边而得到的三角形结构连通图~. 那么由（1）可知 $\chi(G') \leq \chi(G)$.

(2) 运用顺序配色法，将 G 划分为延伸结构和轮形结构的组合，同时按顺序将这些结构组成不同的块，并逐个按顺序完成块的颜色配色，由上面的分析可知图 G 是这些子图（块）的并图 ，且每个子图的色数≤4 。使用顺序配色法，同时每个块之间没有颜色冲突。那么令 B_i 表示本块子图，E_1、E_2、...、E_j 和 W_1、W_2、...、W_k 分别为它所含的延伸结构和轮形结

构。则

$$C(B_i) = C(E_1) \cup C(E_2) \quad ... \cup \ C(E_j) \ \cup \ C(W_1) \cup \ ... \ \cup C(W_1). \qquad （5）$$

由于每个延伸结构和轮形结构的色数≤4，同时每个结构之间没有颜色冲突。所以 $\chi(B_i) \leq 4$ 。

（3）另外，我们用 S 表示所有自由顶点的集合，C(S)表示它们颜色种类的集合，由自由顶点的定义可知，它们与周遍的顶点没有颜色冲突，可以使用 4 种颜色范围的色，因此，C(S)={1,2,3,4} 。

那么

$$C(G)=C(B_1) \cup \ C(B_2) \cup \ ... \ \cup \ C(B_i) \cup \ C(S) \qquad (6)$$

因为根据（5）可得出所有 $C(B_1)$ 、$C(B_2)$ 、... 、$C(B_i)$ 都∈{1,2,3,4} ，同时 C(S)∈{1,2,3,4} 所以 C(G)∈{ 1,2,3,4 } ,那么

$\chi(G) \leq 4$ 。

最后，由（1）可得 $\chi(G') \leq \chi(G) \leq 4$ 。即任何平面连通图 G'的色数不大于 4 。证毕。

9 结论

通过以上分析证明，任何平面连通图 G'都可以通过增加边得到它对应的三角形结构连通图 G，它们的色数 $\chi(G') \leq \chi(G) \leq 4$, 这就完成了四色定理的证明。另外，应该看到，本文同时解决了如何对任何一个平面连通图实施正常 4-着色。这对四色定理的证明和应用都有着实际的意义。

参考文献

[1]R.Balakrishnan , K.Ranganathan,, A Textbook of Graph Theory[M]科学出版社，:北京：2011（187-188）

[2] 王树禾，图论[M] 北京：科学出版社，2004：（90）

[3] 屈婉玲，耿素云，张立昂，离散数学[M]高等教育出版社，北京：2008：（324-325）

四色定理的双迹法证明

梁增勇

2019

摘要：本文介绍了一个证明四色定理既简单又严谨还实用的证明方法。掌握了双迹法的要领，任何复杂的平面连通图都可以轻易的完成正常 4-着色（即 4 色图）。

关键词：色数；不可避免构形集；迹；圈。

1 前言

（略）

2 双迹法

1)双迹法定义：在三角形结构连通平面图中把四种颜色的顶点分为两大双色集合 A 和 B，由 a、b 两色（或 c、b 两色）的顶点和它们之间的边所构成的子图称之为迹。这里，这里，由 a、b 两色组成的迹称之为 A-B 迹，我们用符号 j_n^1 表示;符号 j_n^2 则表示有 n 个顶点 的 C-D 迹（含 c、d 两色）。利用迹的优越性质对平面图进行正常 4-着色的方法就叫做双迹法。

2)双迹图定义：由双迹和色顶点以及公共边组成的三角形结构连通平面图就叫做双迹图。由无奇圈的迹组成的双迹图也叫做标准双迹图。

3 双迹图性质:

3.1 标准双迹图的不可避免构形集

标准双迹图的不可避免构形集中的构形基本是路径、树，它的特殊构形是单顶点和含偶圈的迹。见图 3。

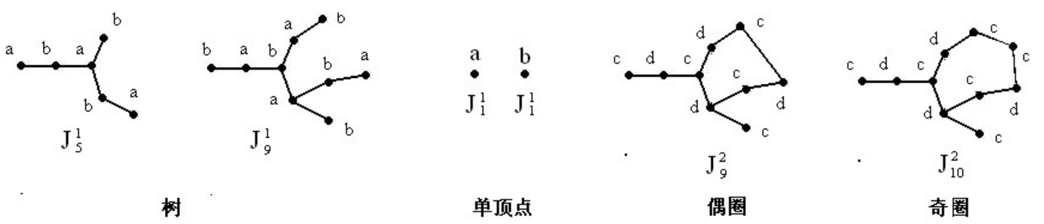


图 1

因为在不正确的着色过程中也可能出现奇圈，而造成迹不能正常 2-着色。这是在标准双迹图中所不允许出现的，同时它也是可以消除避免的（见后面章节）.因此，奇圈不能作为双迹图的不可避免构形。

证 因为 双迹图是由两大色集的顶点组成。1）当一个色集的顶点只有一个顶点是迹的特殊情况。2）两个和多个顶点和它门之间的边构成的子图（如果没有分叉）是路径。3）多条路径的结合含有分叉的迹子图就是树结构。4）如果迹的顶点和边形成一个回路就是圈结构。含有圈结构的迹也是一种特殊的构形。因为迹是一种线状结构，顶点的度不超过 3，因此它仅能组成以上 4 种结构的形式。

3.2 双迹图迹顶点颜色可调的灵活性

(1) 标准双迹图迹顶点颜色可调的灵活性之一，表现在一个标准双迹图中迹的顶点不管迹是什么构形，都能正常 2-着色，因为它的色数是 2。

（2）标准双迹图迹顶点颜色可调的灵活性之二，是 A-B 迹和 C-D 迹的顶点可以互换。这对消除迹的奇圈是十分有用的。在图 2 中：（1）
在第一行的左起第 2 个 A-B 迹顶点（b 颜色），因为它附近的公共边是 V 形的，很容易将它该为 C-D 迹的 c 颜色。（2）在左起第 3 个 A-B 迹顶点（a 颜色），因为它附近的公共边是” ^”形的，调换两迹顶点须修改三个顶点: 第一行一个 a 颜色顶点改为 d 颜色，第二行一个 d 颜色顶点改为 a 颜色, 第三行一个 a 颜色顶点改为 d 颜色。（3）在左起第 3 个 A-B 迹顶点（a 颜色），因为它附近的公共边是 “// “形的，调换两迹顶点须修改两个顶点:第一行一个 a 颜色顶点改为 d 颜色，第二行一个 d 颜色顶点改为 a 颜色。

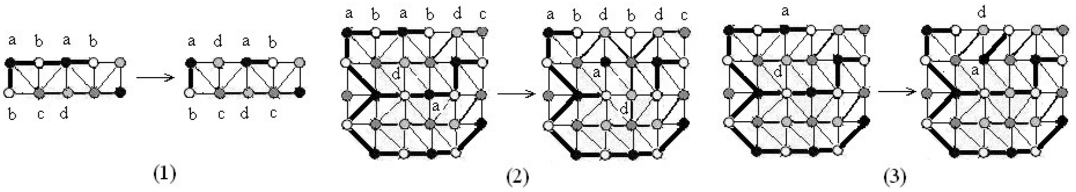


图 2

3.3 奇圈的消除

在平面连通图中,偶圈和奇圈 是可能同时存在的. 但在双迹图中, 在规划迹的分布过程中,有时会遇到奇圈的出现.为了能实现标准的双迹图. 就必须采取措施消除迹的奇圈。

（注意：在后面的图例中，为了更简单明了的表现顶点颜色，我们使用黑、白、深灰和浅灰色对应代表 a、b 、c 和 d 四色。）

定理 2　迹的奇圈可以消除避免.

证　由于双迹图迹顶点颜色可调的灵活性，A-B 迹和 C-D 迹的顶点可以灵活对换。这就为消除当前出现的某迹（例如 A-B 迹）的奇圈打下基础。实际操作见图 3 破圈的例子：

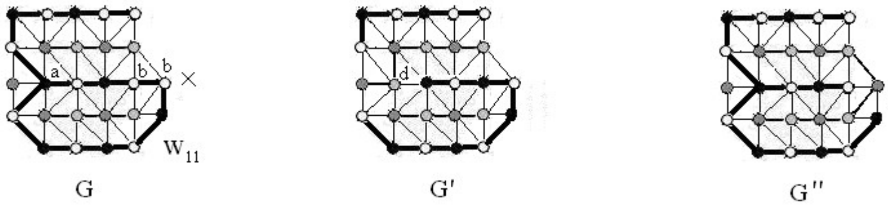


图 3

图 3 显示了图 G 有一个 A-B 迹的奇圈 W_{11} 出现，在“×”处两个白色的顶点产生了颜色冲突。图 G’将 A-B 迹的一个黑色顶点（a 色）换成邻近 C-D 迹的浅灰色顶点(d 色)，A-B 迹的奇圈消失。此外，
图 G”只将在“×”处的 b 色顶点该为 c 色顶点，就消除了迹的奇圈。

3.4 标准双迹图迹的色数

定理 1　标准双迹图的单迹色数为 2。

证 因为标准双迹图的定义迹是不含奇圈的。那么：1）单顶点的色数是 1；2）当迹为一条路径，顶点的颜色以 a-b-a-…形式相间排列，显然只用两种颜色；3）当迹为树的构形，以某条路径端点为起点可以用两种颜色着色，在分叉点后续的二级路径以分叉点的颜色为起点颜色，同样可用 a、b 两种颜色着色。以此类推，不管有多少个分叉，后续的 n 级路径的顶点都可使用 a、b 两种颜色着色。因此，树结构的迹子图色数也是 2。4）我们已经知道偶圈的色数是 2，它可以看作两个端点重合的路段，所以含偶圈的迹的子图的色数也还是 2。

3.4 双迹图的正常着色标准

仅有三个标准，也是标准双迹图的着色原则：

a)迹: A-B 迹和 C-D 迹相间隔处置。

b)不允许迹的奇圈存在.。

c)顶点颜色: a 和 b 两种颜色的顶点在迹中相间隔排列。

它也突显了双迹法着色过程简单（不用考虑太多的顶点的之间的颜色关系）的另一大优点之一。

定理 3　任何一个复杂的三角形平面连通图 G 都可以变成标准双迹图 G’。

证 任何一个复杂的三角形平面连通图 G 都可通过逐个增加顶点和边的方法构成与图 G 同构的图 G’。如果在每次增加新顶点和边的同时，将顶点分迹并着色，那么，最后就可得到一个标准的双色图。在操作的过程中会遇到以下几种情况：

（1）仅增加一条新的边：见图 4（1）中的 G。出现了一个 A-B 迹的奇圈 W_3，为了消除奇圈，可将一个 b 色顶点该为 d 色顶点；另外 三个 a、b、a 颜色的顶点也要改动，相当于 A-B 迹的顶点往右移动 。

（2）同时，增加几条边，如图 4 中,的（2）。出现了两个 A-B 迹的奇圈 W_3，为了消除奇圈，改动第一行的两个顶点的的颜色和第 2、3 行的两个顶点（有标明）。

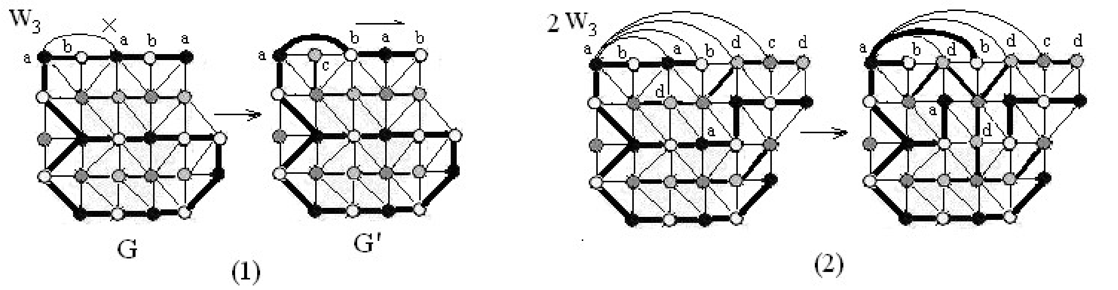


图 4

（3）仅增加一个新顶点和两条边，见图 5 的（3）。新顶点可用和它所邻接的两个旧顶点不同的颜色。

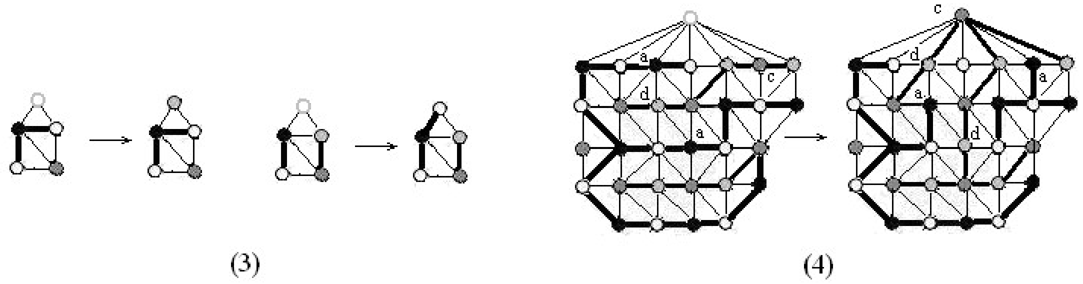


图 5

（3）增加一个新顶点和多条边，并与 4 种颜色的顶点邻接，见图 5 的（4）。新顶点可用其中一种颜色，并改动四个顶点的颜色。

以上就是一个新顶点与一个标准双迹图 G_k 的顶点邻接或增加边，它将会遇到几种典型的情况。说明任何一个新顶点都可以顺利的融入已经着色的标准双迹图 G_k，成为一个新的标准双迹图 G_{k+1}。

提示：因为子图的外围顶点保持不改变颜色，预示着新顶点仅在小范围变动顶点颜色，与外围早已经着色的旧图复杂程度无关。

提示：因为子图的外围顶点保持不改变颜色，预示着新顶点仅在小范围变动顶点颜色，与外围早已经着色的旧图复杂程度无关。

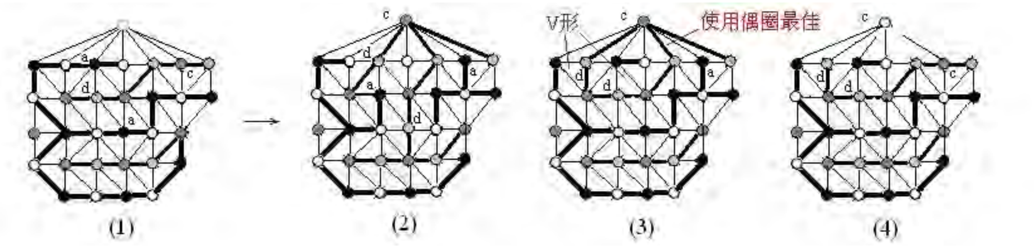
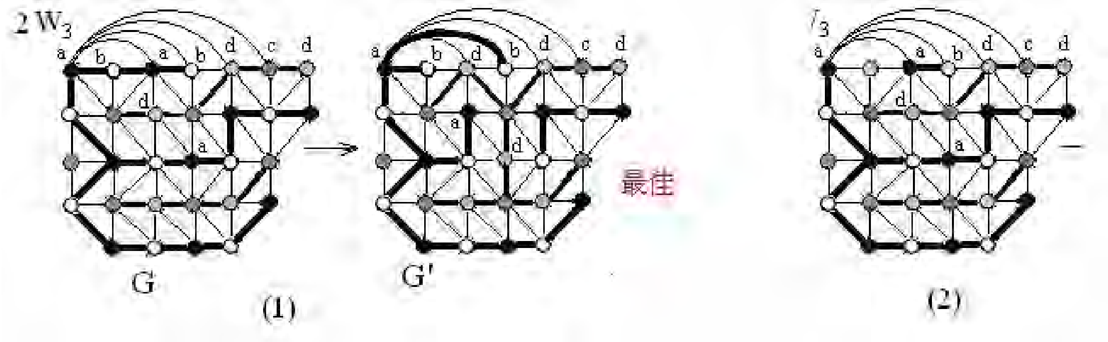


图 6

着色技巧：尽量利用 V 形结构和偶圈。



定理 5　任何复杂的标准双迹图色数不大于 4。

证　在前面我们已经证明，任何复杂的双迹图都是由 A-B 迹和 C-D 迹两大类子图构成，同时当出现迹含有奇圈，可以采取措施消除、避免奇圈的存在。在各个迹顶点之间也不会产生颜色冲突。换句话说，
整个标准双迹图的顶点颜色只有 a、b、c 和 d 四钟颜色，所以标准双迹图的色不会大于 4。

4　四色定理的证明

命题　（四色定理）．任一平面连通图的色数不大于 4。

证　在定理 3 已经证明，任何一个复杂的连通平面图 G 都可以变为双迹法结构的图 G’实现正常 4-着色, 由定理 4 可证 $\chi(G)=\chi(G')\leqslant 4$ 。

6　结论

双迹法科学的把四种颜色的顶点分成两条迹。迹之间的两种颜色的顶点相间排列。同时 A-B 迹与 C-D 迹之间不会产生冲突。当一条迹的颜色形成的奇圈也容易把其中一个顶点换成另一条迹的顶点（解除颜色冲突）。只要掌握了双迹法的要领，任何复杂的平面连通图都可以轻易的完成正常 4-着色（即 4 色图）。所以说双迹法是证明四色定理既简单又严谨的证明方法。

参考文献

（略）