高数 第二章 导数与微分

导数

- 定义

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$y'\Big|_{x=x_0}\quad or\quad \frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}\quad or\quad \frac{df(x))}{dx}\Big|_{x=x_0}$$

- 两种形式:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

- 常见导数公式:
  - $$(C)'=0$$
  - $$(x^n)'=nx^{n-1},(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$$
  - $$(\sin x)'=\cos x$$
  - $$(\cos x)'=-\sin x$$
  - $$(a^x)'=a^x\ln a\quad (e^x)'=e^x$$
  - $$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}\quad (\ln x)'=\frac{1}{x}$$
- 单侧导数:
  - 定义
  - 在闭区间可导定义
- 导数的几何意义 - 切线的斜率
- 函数可导性与连续性
  - 可导必连续
  - 连续不一定可导

函数的求导法则

- 函数的和、差、积、商的求导法则
  - 定理1:
    - $$[u(x)\pm v(s)]'=u'(x)\pm v'(x)$$
    - $$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$
    - $$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}\quad (v(x)\neq 0)$$
- 反函数的求导法则
  - 定理2: $y=f(x)$ 在 区 间 I_y 内 单 调 、 可 导 且 $f'(x)\neq 0$
    - $$[f^{-1}(x)]'=\frac{1}{f'(x)}\quad 或\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$
- 复合函数的求导法则
  - 定理3:
    - $$y=f[g(x)]\quad 导\ 数\ 为: \frac{dy}{dx}=f'(u)\cdot u'(x)\ 或\ \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$
- 基本求导法则与导数公式
  - 1.常用和基本初等函数的求导公式
    - $$(C)'=0\quad (x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$$
    - $$(\sin x)'=\cos x\quad (\cos x)'=-\sin x\quad (\tan x)'=(\sec x)^2$$
    - $$(\cot x)'=-(\csc x)^2\quad (\sec x)'=\sec x\tan x\quad (\csc x)'=-\csc x\cot x$$
    - $$(a^x)'=a^x\ln a\quad (a>0,a\neq 1)\quad (e^x)'=e^x$$
    - $$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}\quad (\ln x)'=\frac{1}{x}$$
    - $$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad (\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
    - $$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}\quad (arccot\,x)'=-\frac{1}{1+x^2}$$

- 2.函数的和、差、积、商的求导法则
  - $u = u(x), v = v(x)$, 都 可 导
  - $$(u \pm v)' = u' \pm v' \quad (Cu)' = Cu' \quad (uv)' = u'v + uv' \quad \left[\frac{u}{v}\right] = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$
- 3.反函数的求导法则
  - $y = f(x)$ 在 区 间 I_y 内 单 调 、 可 导 且 $f'(x) \neq 0$
  - $$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(x)} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$
- 4.复合函数的求导法则
  - $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad y'(x) = f'(u) \cdot g'(x)$$
- 5.双曲函数以及反双曲函数导数：
  - $$(\backslash\text{shx})' = \backslash\text{chx} \quad (\backslash\text{chx})' = \backslash\text{shx} \quad (\backslash\text{thx})' = \frac{1}{(\backslash\text{chx})^2}$$
  - $$(arshx)' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \quad (archx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad (arthx)' = \frac{1}{1 - x^2}$$

高阶导数

- 定义：二阶导数，n阶导数
- 初等函数的n阶导数：
  - $$(e^x)^{(n)} = e^x$$
  - $$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \quad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$
  - $$(\ln(1 + x))^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$
  - $$(x^\mu)^{(n)} = \mu(\mu - 1)(\mu - 2)\ldots(\mu - n - 1)x^{\mu - n} \quad (x^n)^{(n)} = n! \quad (x^n)^{(n+k)} = 0\ (k = 1, 2, 3\ldots)$$
  - $$(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$$
  - $$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv'' \quad (uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$$
  - $$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \cdots + u^0v^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$$
  - $$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

隐函数及由参数方程所确定的函数的导数 相关变化率

- 隐函数的导数
  - 定义：显函数定义、隐函数定义、什么是隐函数的显化
  - 隐函数求导过程：
    - 1.在y=f(x)两边求导数；
    - 2.计算等号两边导数；
    - 3.解出所需导数 $\frac{dy}{dx}$

> 求隐函数：$e^y + xy - e = 0$的一阶导数$\frac{dy}{dx}$
>
> 1.方程两边求导数：$\frac{d}{dx}(e^y + xy - e) = (0)'$
>
> 2.方程两边计算导数：左边=$e^y\frac{dy}{dx} + y + x\frac{dy}{dx}$,右边=(0)' = 0
>
> 3.所以$e^y\frac{dy}{dx} + y + x\frac{dy}{dx} = 0$
>
> 4.从而：$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x + e^y}$

- 对数求导法(一般用于幂指函数 $y = u^v(u > 0)$)：
  - 1.在y=f(x)两边去对数
  - 2.然后求y的导数

$$y = u^v = e^{v\ln u}y' = e^{v\ln u}\left(v'\ln u + \frac{vu'}{u}\right) = u^v\left(v'\ln u + \frac{vu'}{u}\right)$$

- 由参数方程所确定的函数的导数
  - 定义：参数方程：
  - $$\{x = \phi(t), \quad \text{x是t的函数}\ y = \psi(t) \quad \text{y是t的函数}$$

- 则其导数为：
  - $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}$$
  - $$\frac{d^2y}{d^2x} = \frac{\psi''(t)\phi'(t) - \psi'(t)\phi''(t)}{\phi'^3(x)}$$

- 相关变化率

函数的微分

- 微分的定义：
  - 设 函 数 $y = f(x)$ 在 某 区 间 内 有 定 义 ， x_0 以 及 $x_0 + \Delta x$ 在 该 区 间 内 ， 若 函 数 的 增 量 ： $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x_0)$ 可 表 示 为 $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x), A$ 是 不 依
  - $$A = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$
  - 函数f(x)在点x_0可微的 充分必要条件 是 函数f(x)在点x_0可导,其微分为$dy = f'(x_0)\Delta x$
  - $$\Delta y = dy + o(dy)$$
  - 名词术语：主部、线性主部、函数的微分、自变量的微分
- 微分的几何意义：
  - 在某点附近，用切线段来近似代替曲线段；即在局部范围内用线性函数近似代替非线性函数
- 基本初等函数的微分公式
  - 函数的微分表达式：
    - $$dy = f'(x)dx$$

导数公式	微分公式
$y' = f'(x)$	$dy = df(x) = f'(x)dx$
$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$	$d(x^\mu) = \mu x^{\mu-1}dx$
$(\sin x)' = \cos x$	$d(\sin x) = \cos x dx$
$(\cos x)' = -\sin x$	$d(\cos x) = -\sin x dx$
$(\tan x)' = \sec^2 x$	$d(\tan x) = \sec^2 x dx$
$(\cot x)' = -\csc^2 x$	$d(\cot x) = -\csc^2 x dx$
$(\sec x)' = \sec x \tan x$	$d(\sec x) = \sec x \tan x dx$
$(\csc x)' = -\csc x \cot x$	$d(\csc x) = -\csc x \cot x dx$
$(a^x)' = a^x \ln a\ (a > 0\ and\ a \neq 0)$	$d(a^x) = a^x \ln a dx\ (a > 0\ and\ a \neq 0)$
$(e^x)' = e^x$	$d(e^x) = e^x dx$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}\ (a > 0\ and\ a \neq 1)$	$d(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}dx\ (a > 0\ and\ a \neq 1)$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$d(\ln x) = \frac{1}{x}dx$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$d(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}dx$
$(arccot\ x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$d(arccot\ x) = -\frac{1}{1+x^2}dx$
$(\backslash\mathrm{sh}x)' = \backslash\mathrm{ch}x$	$d(\backslash\mathrm{sh}x) = \backslash\mathrm{ch}x dx$
$(\backslash\mathrm{ch}x)' = \backslash\mathrm{sh}x$	$d(\backslash\mathrm{ch}x) = \backslash\mathrm{sh}x dx$
$(\backslash\mathrm{th}x)' = \frac{1}{(\backslash\mathrm{ch}x)^2}$	$d(\backslash\mathrm{th}x) = \frac{1}{(\backslash\mathrm{ch}x)^2}dx$
$(arshx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$d(arshx) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{dx}$
$(archx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$d(archx) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$
$(arthx)' = \frac{1}{1-x^2}$	$d(arthx) = \frac{1}{1-x^2}dx$

- 函数和差积商的微分法则

求导法则	微分法则

求导法则	微分法则
$(u \pm v)' = u' \pm v'$	$d(u \pm v) = du \pm dv$
$(Cu)' = Cu'$	$d(Cu) = Cdu$
$(uv)' = u'v + uv'$	$d(uv) = udv + vdu$
$(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}\ (v \neq 0)$	$d(\frac{u}{v}) = \frac{vdu - udv}{v^2}\ (v \neq 0)$

- 复合函数的微分法则
  - 微分形式不变性：$y = f(u), u = g(x), y = f[g(x)], dy = f'(u)du = f'(u)g'(x)dx$
  - Tip:根据微分求原始函数时需要加常数C，$d(f(x) + C) = f'(x)dx$
- 微分在近似计算中的应用
  - 函数的近似计算：当Δx很小时，$\Delta y \approx dy = f'(x)\Delta x$
  - 即：$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$
  - 那么:$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$
  - 令$x = x_0 + \Delta x$，则$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
  - 即：用曲线$y = f(x)$，在点$(x_0, f(x_0))$处的切线来近似代替该曲线
  - 当x取0时，$f(x) \approx f(0) + f'(0)x$
  - 常用的在工程上是近似公式：
    - $$(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x \quad (\alpha \in R)$$
    - $$\sin x \approx x \quad (x\text{用弧度单位表示})$$
    - $$\tan x \approx x \quad (x\text{用弧度单位表示})$$
    - $$e^x \approx 1 + x$$
    - $$\ln(1 + x) \approx x$$
  - 误差估计：
    - 术语名称：
      - 间接测量误差，绝对误差=$|A - a|$,相对误差=$\frac{|A - a|}{|a|}$，绝对误差限=$\delta_A = |A - a|$，相对误差限 = $\frac{\delta_A}{a}$
    - 一般，若y=f(x)的直接测量值为x,若要计算y,x的绝对误差限为δ_x，即$|\Delta x| \leq \delta_x$,
    - 当$y' \neq 0$时，y的绝对误差$\Delta y \approx |dy| = |y'| \cdot |\Delta x| \leq |y'| \cdot \delta_x$，则$y$的绝对误差限为：$\delta_y = |y'| \cdot \delta_x$,
    - y的相对误差限：
    - $$\frac{\delta_y}{|y|} = \left|\frac{y'}{y}\right| \cdot \delta_x$$

课后习题

- 2-3
  - 4. 试从$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'}$导出：

> $$(1)\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{y''}{(y')^3}$$
> $$(2)\frac{d^3x}{dy^3} = \frac{3(y'')^2 - y'y'''}{(y')^5}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\theta_j}J(\theta) &= \frac{\partial}{\partial\theta_j}[-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}[-y^{(i)}\log_a(1 + e^{-\theta^T x^{(i)}}) - (1 - y^{(i)})\log_a(1 + e^{\theta^T x^{(i)}})]] \\
&= -\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}[\frac{\partial}{\partial\theta_j}(-y^{(i)}\log_a(1 + e^{-\theta^T x^{(i)}}) - (1 - y^{(i)})\log_a(1 + e^{\theta^T x^{(i)}}))] \\
&= -\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}[-y^{(i)}\frac{\partial}{\partial\theta_j}(\log_a(1 + e^{-\theta^T x^{(i)}})) - (1 - y^{(i)})\frac{\partial}{\partial\theta_j}(\log_a(1 + e^{\theta^T x^{(i)}}))] \\
&= -\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}[-y^{(i)}\frac{\partial}{\partial\theta_j}(\log_a(1 + e^{-\theta^T x^{(i)}})) - (1 - y^{(i)})\frac{\partial}{\partial\theta_j}(\log_a(1 + e^{\theta^T x^{(i)}}))]
\end{aligned}$$