高等数学 第一章函数与极限

基本函数与常用公式

- 指数函数

$$a^x \times a^y = a^{x+y}$$
$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$
$$(a^x)^y = a^{xy}$$

- 对数函数

$$y = \log_a x \quad (a > 0\ and\ a \neq 1)$$
$$\log_a b \times \log_b a = 1$$
$$n\log_a m = log_a m^n$$
$$\log_a mn = \log_a m + \log_a n$$
$$\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$$
$$a^{\log_a N} = N$$
$$\log_{a^b} m^n = \frac{n}{b}\log_a m$$
$$\text{换底公式：} \log_a b = \frac{\log_m b}{\log_m a} \quad (b > 0\ and\ b \neq 1)$$

- 三角函数

$$y = \sin x \quad y = \cos x \quad y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$
$$\text{余切：} \cot x = \frac{1}{\tan x}$$
$$\text{正割：} \sec x = \frac{1}{\cos x}$$
$$\text{余割：} \csc x = \frac{1}{\sin x}$$
$$\text{倒数：} \tan x \cdot \cot x = 1 \quad \sin x \cdot \csc x = 1 \quad \cos x \cdot \sec x = 1$$
$$\text{平方和：} (\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1 \quad (\sec x)^2 - (\tan x)^2 = 1 \quad (\csc x)^2 - (\cot x)^2 = 1$$

- 两角和差：

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$
$$\text{和差化积：}$$
$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\text{积化和差：}$$
$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$$
$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$$
$$\text{二倍角公式：}$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = (\cos\alpha)^2 - (\sin\alpha)^2 = 2(\cos\alpha)^2 - 1 = 1 - 2(\sin\alpha)^2$$

- 特殊函数值：

α	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

- 双曲函数：
  - 双曲正弦：$\sh x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\quad D\in(-\infty,+\infty),D_f\in(-\infty,+\infty)$,奇函数,单调增加, 当$x\to\pm\infty$时,$f(x)\to y=\pm\frac{1}{2}e^{\pm x}$
  - 双曲余弦：$\ch x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\quad D\in(-\infty,+\infty),D_f\in[1,+\infty)$,偶函数，在 $(0,+\infty)$ 单调递增, 当$x\to\infty$时,$f(x)\to y=\frac{1}{2}e^{\pm x}$
  - 双曲正切：$\th x=\frac{\sh x}{\ch x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},D\in(-\infty,+\infty),D_f\in(-1,1)$,奇函数，在定义域内单调递增，当$x\to\pm\infty$时，$f(x)\to\pm1$
  - 公式：
    - $\sh(x\pm y)=\sh x\ch x\pm\ch x\sh y$
    - $\ch(x\pm y)=\ch x\ch y\pm\sh x\sh y$
    - $(\ch x)^2-(\sh x)^2=1$
    - $\sh 2x=2\sh x\ch x$
    - $\ch 2x=(\ch x)^2+(\sh x)^2$
  - 反函数：
    - 反双曲正弦：$y=arshx=\ln(x+\sqrt{x^2+1}),D\in(-\infty,+\infty),D_f\in(-\infty,+\infty)$,奇函数,在定义域内单调递增
    - 反双曲余弦：$y=archx=\ln(x+\sqrt{x^2-1}),D\in[1,+\infty),D_f\in[0,+\infty)$ ，在定义域内单调递增
    - 反双曲正切：$y=arthx=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},D\in(-1,1),D_f\in(-\infty,+\infty)$,奇函数,在定义域内单调增加
- 牛顿二项公式：
  - $$(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}C_n^r a^{n-r}b^r$$
  - $$C_n^r=\frac{n!}{r!(n-r)!},\text{记为：}\left(\frac{n}{r}\right),\text{其中：}n!=1\times2\times3\times\cdots\times(n-1)\times n$$
- 三次方差公式：
  - $$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$
- 点到直线距离公式：
  - $$\text{点}(x_0,y_0),\text{直线}Ax+By+C=0,\text{距离}D=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$$
- 一元二次方程通解：
  - $$ax^2+bx+c=0,(a,b,c\in R,a\neq0),\text{通解：}x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

CH1 函数与极限

常用极限

- $$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$
- $$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$$
- 推导：
  - $$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$$
  - $$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x=\frac{1}{e}$$
  - $$\lim_{x\to0}(1+\frac{1}{x})^x=e$$
  - $$\lim_{x\to0}(1-\frac{1}{x})^x=\frac{1}{e}$$
  - $$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$$
  - $$\lim_{x\to0}\sqrt[n]{(1+x)^m}=1\quad(m=n-1,n-2,\cdots,1)$$

等价无穷小：

- $(x\to0\ and\ x\neq0)\quad x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x$
- $(x\to0)\quad(1-\cos x)\sim\frac{1}{2}x^2$
- $(x\to0)\quad\ln(1+x)\sim x$
- $(x\to0)\quad e^x-1\sim x$
- $(x\to0)\quad(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$
- $(x\to0\ and\ x\neq0)\quad\log_a(1+x)\sim\frac{x}{\ln a}\quad x^a\sim x\ln a$

数学定义

- 函数定义：

- 设数集$D \subset R$，则称映射：$f: D \rightarrow \mathbb{R}$为定义在D上的函数，记为：$y=f(x), x \in D$,x为自变量，y为因变量，D为定义域，记作:$D_f$,即$D_f=D$,值域记作:$R_f$或$f(D)$
- 函数的特性：
  - 有界性：
    - 定义：设函数$f(x)$的定义域为D，数集$X \Subset D$
    - 若存在数K_1，使得:$f(x) \leq K_1$,对于任一$x \in X$都成立，则称函数$f(x)$有上界（K_1为其中一个上界）；
    - 若存在数K_2，使得:$f(x) \geq K_2$,对于任一$x \in X$都成立，则称函数$f(x)$有下界（K_2为其中一个下界）；
    - 若存在正数M，使得:$|f(x)| \leq M$,对于任一$x \in X$都成立，则称函数$f(x)$在X上有界
  - 单调性
  - 周期性

数列的极限

- 定义：
设x_n为一数列，若存在常数a，对于任意给定的正数ϵ,总存在正整数N，使得当$n>N$时，不等式$|x_n-a|<\epsilon$都成立，则称常数啊是数列x_n的极限,或称数列x_n收敛于

> $$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$
>
> $$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\ \epsilon > 0 \quad \exists 正整数 N, 当 n > N 时，有 |x_n - a| < \epsilon$$

- 收敛数列的性质：
  - 定理1 极限的唯一性
  - 定理2 收敛数列的有界性
  - 定理3 收敛数列的保号性 - 推论
  - 定理4 收敛数列与子数列关系

函数的极限

- 定义
  - 1.自变量趋于有限值时函数的极限

    > $$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, 当 |x - x_0| < \delta 时, 有 |f(x) - A| < \epsilon$$

  - 2.自变量趋于无穷大时函数的极限

    > $$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists X > 0, 当 |x| > X 时, 有 |f(x) - A| < \epsilon$$
    >
    > 几何含义：y=A 是x趋于无穷时，f(x)极限为A的 水平渐近线

- 函数极限的性质
  - 定理1 函数极限的唯一性
  - 定理2 函数极限的局部有界性
  - 定理3 函数极限的局部保号性 - 推论
  - 定理4 函数极限与数列极限的关系

无穷大与无穷小

- 无穷小定义:

- 无穷大定义:

> 定理1 :$x \rightarrow x_0 (x \rightarrow \infty), f(x)$具有极限$A$的充分必要条件：$f(x) = A + \alpha$,其中$\alpha$是无穷小

> 定理2 :若$f(x)$为无穷大，则$\frac{1}{f(x)}$为无穷小，反之，若$f(x)$为无穷小，则$\frac{1}{f(x)}$为无穷大

极限运算法则

- 定理1：两个无穷小的和是无穷小 - 推论
- 定理2：有界函数与无穷小的乘积是无穷小 - 推论1 2 3
- 定理3：(函数极限运算)若lim f(x)=A,lim g(x)=B,则
  - (1) $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$
  - (2) $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$
  - (3) 若$B \neq 0$, 则$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B}$
  - 推论1 2
- 定理4（数列的极限运算）
- 定理5（函数极限的比较）
- 定理6 (复合函数的极限运算法则)

极限的存在准则 两个重要极限

- 准则1 （数列 函数 夹逼准则）

> $$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

- 准则2 单调有界数列必有极限,函数在x0左极限存在...

> $$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e = 2.718281828$$

- 柯西（Cauchy）极限存在准则（柯西审敛原理）：数列收敛的充分必要条件...

无穷小的比较

- 定义

> 高阶无穷小、低阶无穷小、同阶无穷小、k阶无穷小、等价无穷小

- 定理1 等价无穷小的充分必要条件
- 定理2 等价无穷小的之比的极限

函数的连续性与间断点

- 函数连续性定义
- 函数间断点定义、间断点类型

连续函数的运算与初等函数的连续性

- 连续函数的和、差、积、商的连续性

> 定理1

- 反函数与复合函数的连续性

> 定理2 (反函数的连续性)

> 定理3 (复合函数的连续性 内层函数极限存在的情况)

> 定理4 (复合函数的连续性 内层函数连续的情况)

- 初等函数的连续性

> 基本初等函数在其定义域内都是连续的

闭区间上连续函数是性质

- 有界性与最大值最小值定理

> 定理1 (有界性与最大值最小值定理)

- 零点定理与介值定理

> 定理2 (零点定理) 定理3 (介值定理) - 推论

- 一致连续性
  - 一直连续性定义：自变量接近到一定程度，一定可使函数值接近到指定程度
- 定理4 (一致连续性定理 连续与一致性连续关系) 函数在闭区间上连续则函数在该区间一定一致性连续

课后习题

- 1-1
  - 5.$f(x)d$定义域为$(-l,l)$的奇函数，若$f(x)$在$(0,l)$内单调增加,则$f(x)$在$(0,l)$内也单调增加
  - 6.
    定义域为$(-l,l)$的函数,奇函数$+$奇函数$=$奇函数，偶函数$+$偶函数$=$偶函数，偶函数$\times$偶函数$=$偶函数，奇函数$\times$奇函数$=$偶函数，奇函数$\times$偶函数$=$
- 1-2
  - 2.数列有界性是数列收敛的必要非充分条件；无界数列一定发散；有界数列不一定收敛，EG：周期函数：$\sin x$；
- 1-6
  - 4.(3)证明:数列$\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdots$的极限存在。
- 1-10
  - 4.证明:任一最高次幂的指数为奇数的代数方程：$a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n}x+a_{2n+1}=0$ 至少有一实根，其中$a_0,a_1,\cdots,a_{2n+1}$均为常数,$n\in N$
  - 5.若$f(x)$在$[a,b]$上连续,$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b\quad(n\geq 3)$,则在$(x-1\text{ , }x_n)$至少存在一点$\xi$,使$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$.
  - 6.函数$f(x)$对于闭区间$[a,b]$上任意两点x,y恒有$|f(x)-f(y)|=L|x-y|,L$为常数，且$f(a)\cdot f(b)<0$.证明：至少有一点$\xi\in(a,b)$,使得$f(\xi)=0$.
  - 7.证明：若$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，且$\lim_{x\to\infty}f(x)$存在，则$f(x)$必在$(-\infty,+\infty)$内有界.
- 总习题一
  - 14.渐近线与斜渐进线定义：

> 若存在直线$L:y=kx+b$,使得当$x\to\infty$(或$x\to+\infty,x\to-\infty$)时，曲线：$y=f(x)$上的点M到直线L的距离$d(M,L)\to 0$,则称L为曲线$y=f(x)$的渐近线.

(1)证明：直线$L:y=kx+b$为曲线$y=f(x)$的渐近线的充分必要条件是：

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$
$$\left(\begin{matrix} x\to+\infty \\ x\to-\infty \end{matrix}\right)$$
$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)x]$$
$$\left(\begin{matrix} x\to+\infty \\ x\to-\infty \end{matrix}\right)$$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, \quad b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]$$

(2)求曲线$y=(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$的斜渐近线.