第一部分 基础知识

- 算法导论

第一章 算法在计算中的应用

- 什么是算法 algorithm
- 数据结构
- NP完全问题
- 作为一种技术的算法
    - 1.算法的效率计算与衡量

2 算法基础

- 伪代码约定
    - 1.缩进表示块结构
    - 2.循环结构：while，for,repeat-until;条件结构：if-else;
    - 3.注释：//
    - 4.数组访问：数组名[下标],从1开始

2.1 循环不变式loop invariant

- 循环不变式的三条性质：
    - 1.初始化：在第一次迭代前，是正确的；
    - 2.保持：若某次迭代前是正确的，则下次迭代前仍为正确；
    - 3.终止：循环终止时，不变式提供有用的性质，证明算法正确性；
- 类似于数学归纳法
    - 初始条件基本情况证明
    - 归纳步骤证明

```
//插入排序算法
void InsertSort(int *a, int len)
{
    int i = 1;
    while (i < len)
    {
        int key = a[i];//取出要插入的Key
        int j = i - 1;
        while (j >= 0 && a[j] > key)//向前遍历和移动已排序队列
        {
            a[j + 1] = a[j];
            j--;
        }
        a[j + 1] = key;//插入已找到的位置i
        i++;
    }
}
```

- 插入排序的循环不变式证明
    - 初始化：第一次迭代开始前，A=A[1],结果成立
    - 保持：对于外层循环变量所有元素，针对每个元素key,在该key之前排好序的数组中找到合适的位置，然后插入该位置，结果正确
    - 终止：内层循环终止条件为遍历到第一个元素或者找到一个元素比Key小（即找到插入位置），外层循环终止条件为遍历到结束，输出数组为已排序的A[1..n]

2.3 算法的分析

- 假定模型：RAM
    - 假设每条代码的运行时间相同
- 运行时间分析:指定输入规模时，算法的运行时间 = 所有的代码运行时间总和
    - 最佳情况与最坏情况
- 时间复杂度：最坏情况运行时间

2.4 算法设计

- 增量方法：插入排序:$O(n^2)$;
- 分治法：归并排序:$O(n\log_2 n)$
    - 分治模式：
        - 分解Divide
        - 解决Conquer
        - 合并Combine

- 插入排序
  - 时间复杂度:$\Theta(n^2)$
- 归并排序算法
  - 时间复杂度:$\Theta(n\lg(n))$

```
//p<=q<r
//合并子数组a[p,q],a[p+1,r]
//p<=q<r
//合并子数组a[p,q],a[p+1,r]
void Merge(int *a, int p, int q, int r)
{
    int k = 0;
    int *ret = (int *)malloc((r - p + 1) * sizeof(int));
    for (k = p; k <= r; k++)
    {
        ret[k - p] = a[k];
    }
    int i = 0;
    int j = q - p + 1;
    for (k = p; k < r + 1; k++)
    {
        if (i == q + 1 - p)
        {
            a[k] = ret[j];
            j++;
            continue;
        }
        if (j == r + 1 - p)
        {
            a[k] = ret[i];
            i++;
            continue;
        }
        if (ret[i] < ret[j])
        {
            a[k] = ret[i];
            i++;
        }
        else
        {
            a[k] = ret[j];
            j++;
        }
    }
    free(ret);
}
void MergeSort(int *a, int p, int r)
{
    if (p < r)
    {
        int q =(p + r) / 2;
        MergeSort(a, p, q);
        MergeSort(a, q + 1, r);
        Merge(a, p, q, r);
    }
}
void MergeSortIn(int *a, int len)
{
    MergeSort(a, 0, len - 1);
}
```

2.5 思考

- 在归并排序中对小数组采用插入排序
  - 对n/k个长度为k的子列表进行排序，然后采用标准的合并方式进行合并k为待定值
  - a.证明：在最坏情况下，n/k个子列表(每个子列表长度为k)可以采用插入排序在$\Theta(nk)$时间内完成

> $$总时间 = \frac{n}{k}\cdot\Theta(k^2) = \Theta(nk)$$

  - b.证明：子列表可以在$\Theta(n\lg(n/k))$最坏情况时间内完成
  - c.若修改后的合并算法的最坏情况的运行时间为$\Theta(nk+n\lg(n/k))$,若使该算法与标准合并算具有一样的渐进时间，则k的最大近似值?

> $$\Theta(nk+n\lg(n/k)) = \Theta(n\lg(n)) \qquad nk+n\lg(n/k) = n\lg(n) \;\; k+\lg(n)-\lg(k) = \lg(n) \qquad k-\lg(k) = 2\lg(n) \;\; \lg(2^k)-\lg(k) = \lg(n^2) \qquad \lg($$

- d.实际取值问题?
- 冒泡排序算法的正确性
  - 冒泡排序的伪代码
  - 采用循环不变式证明冒泡排序的正确输出
  - 运行时间$\Theta(n^2)$
- 霍纳规则的正确性
  - 计算多项式的值$P(x)=\sum_{k=0}^{n}(a_kx^k)=a_0+x(a_1+x(a_2+\cdots+x(a_{n-1}+xa_n)\cdots))$

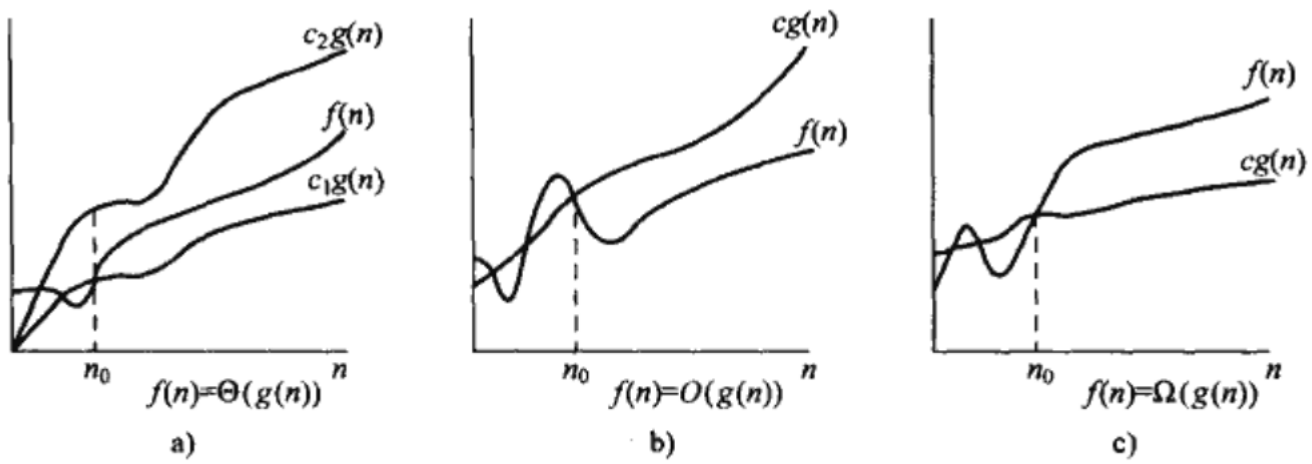
```
int p_x(int* a,int len,int x){
  int y=0;
  int i=0;
  while(i < len){
    y = a[i]+x*y;
    i++;
  }
  return y;
}
```

  - 运行时间：$\Theta(n)$
  - 写出朴素多项式求值算法，运行时间
  - 采用循环不变式证明
- 逆序对inversion
  - 定义：数组A[1...n]包含不同数组，若对于任意i < j时，存在A[i]>A[j],则(i,j)称为A中的一个逆序对
  - a.列出[2,3,8,6,1]中的5个逆序对
  - b.若数组取自集合{1,2,..n},则在降序时，逆序对最多数量为$n*(n-1)+(n-1)(n-2)+...+21$
  - c.插入排序的运行时间与输入数组中逆序对数量之间的关系:
  - d.写出运行时间为nlgn求n个元素数组的逆序对数目的算法

3 函数的增长

- 简化算法分析的渐进分析

3.1 渐进记号



- Θ记号
  - 渐进紧确界：$f(n)=\Theta(g(n))$
    - 舍弃低阶项，忽略最高项系数
  - 渐进上界：$f(n)=\backslash\mathrm{Omicron}(g(n))$
  - 渐进下界：$f(n)=\Omega(g(n))$
- 渐进紧缺界:
  - $f(n)=\Theta(g(n))f(n)$：存在正常量c_0,c_1,存在$n_0>0$,当$n>n_0$时,有$0\leq c_0g(n)\leq f(n)\leq c_1g(n)$
- 渐进上界:
  - $f(n)=\backslash\mathrm{Omicron}(g(n))f(n)$：存在正常量$c$,存在$n_0>0$,当$n>n_0$时,有$0\leq f(n)\leq cg(n)$
- 渐进下界:
  - `f(n) = \Omega (g(n)) {f(n):存在正常量c,存在n_0>0,当n>n_0时,有0 \leq cg(n) \leq f(n)}`
- 定理:对任意的两个函数$f(n)g(n)$,若$f(n)=\Theta(g(n))$,当且仅当$f(n)=\backslash\mathrm{Omicron}(g(n))$且$f(n)=\Omega(g(n))$
- 非渐进紧缺的上界:
  - $f(n)=o(g(n))f(n)$：对任意正常量c,存在$n_0>0$,当$n>n_0$时,有$0\leq f(n)\leq cg(n)$
- 非渐进紧缺的下界:
  - $f(n)=\omega(g(n))f(n)$：对任意正常量c,存在$n_0>0$,当$n>n_0$时,有$0\leq cg(n)\leq f(n)$
- 性质:
  - 传递性:
    - $f(n)=\Theta(g(n))\qquad g(n)=\Theta(h(n))$,则$f(n)=\Theta(h(n))\ldots$

- 自反性:
  - $f(n)=\Theta(f(n))\quad f(n)=\Omicron(f(n))\quad f(n)=\Omega(f(n))$
- 对称性:
  - $f(n)=\Theta(g(n))\quad g(n)=\Theta(f(n))$
- 转置对称性:
  - $f(n)=\Omicron(g(n))\quad g(n)=\Omega(f(n))$
  - $f(n)=o(g(n))\quad g(n)=\omega(f(n))$

3.2 标准记号与常用函数

- 概念：单调性、向上取整、向下取整、模运算、多项式、指数、对数、阶乘、多重函数、斐波那契数列、黄金分割
  - 取模运算：$a mod n = a - a/nn \qquad a/n的余数
    $a>1:n^b=o(a^n)$ 指数标记 $:e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}\qquad e^x=1+x+\Theta(x^2)\qquad \lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n=e^x$ 对数标记 $:\lg n=\log_2 n$
    $ 增长非常缓慢：\ \lg^*2 = 1 \qquad \lg^4 = 2 \qquad \lg^16 = 3 \quad (\lg^{2^4}) \ \lg^65536 = 4 \quad (\lg^{2^16}) \qquad \lg^{2^{65536}} = 5 $$

渐进标记总结

函数	条件
$n=\Theta(1)$	
$c_0n^a+c_1n^{a-1}+\cdots+c_a=\Theta(n^a)$	$a>0$
$n^a=o(n^b)$	$b>a>0$
$n^b=o(a^n)$	$a>1$
$n!=o(n^n)$	
$n!=\omega(2^n)$	
$\lg n!=\Theta(n\lg n)$	$n>1$
$\lg^b n=o(n^n)$	
$\ln(1+n)=o(n)$	$n>-1$
$\ln(1+n)=\omega(\frac{n}{1+n})$	$n>-1$

第四章 递归式

- 求解递归式:

$$T(n)=\{\Theta(1),\quad n=1\ 2T(n/2)+\Theta(n),\quad n>1\qquad 其解:T(n)=\Theta(n\lg n)$$

- 三种求递归式的方法:
  - 代入法：猜测一个边界然后使用数学归纳法证明此边界的正确性
  - 递归树：将递归式转换为一颗树，结点表示不同层次的递归调用的代价，采用边界和技术求解
  - 主方法:
    $T(n)=aT(n-1)+f(n),a\geq 1,b>1,f(n)$为给定的函数，生成$a$个子问题，每个子问题的求解规模为原问题的$1/b$，分解与合并的花费时间总和$f(n)$
- 两个问题:
  - 1.求解最大子数组问题;
  - 2.求解$n\times n$矩阵乘法问题;
- 最大子数组问题Maximum Subarray:
  - 问题分析:
  - 问题变换:
  - 求解策略:
  - 算法分析：暴力破解：$\Theta(n^2)$,分治算法:$\Theta(n\lg n)$
- $n\times n$矩阵乘法:
  - 矩阵基础算法:
    - $$C=A\cdot B\qquad c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot b_{kj}$$
    - 时间：$T(n)=\Theta(n^3)$
  - 简单归并算法:
    - 1.分解矩阵：A,B,C 分解为12个$n/2\times n/2$的子矩阵;
    - 2.递归计算子矩阵乘法,得到8个子结果矩阵;
    - 3.相加结果矩阵得到结果矩阵C的子矩阵;
    - 运行时间：$T(n)=\Theta(n^3)$

$$T(n)=\{\Theta(1),\quad n=1\ 8T(n/2)+\Theta(n^2),\quad n>1$$

- **Strassen算法**
  - 1.分解矩阵：A,B,C分解为n/2子矩阵;
  - 2.创建10个子矩阵S_i，S_i为步骤1子矩阵的加减所得;
  - 3.通过S_i子矩阵的运算，递归计算7个矩阵积P_i;
  - 4.通过P_i矩阵的不同运算，计算结果矩阵C的子矩阵$C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}$

$$T(n) = \{\Theta(1), \quad n = 1 \; 7T(n/2) + \Theta(n^2), \quad n > 1$$

  - 运行时间：$T(n) = \Theta(n^{\lg 7}) \qquad 2.80 < \lg 7 < 2.81$
  - 细节揭示：

$$Step1: \quad A = | A_{11} \quad A_{12} \; A_{21} \quad A_{22} \; | \qquad B = | B_{11} \quad B_{12} \; B_{21} \quad B_{22} \; | \qquad C = | C_{11} \quad C_{12} \; C_{21} \quad C_{22} \; | \; Step2: \qquad S_1 = B_{12} - B_{22} \qquad S$$

4.1 代换法

- 递归式的求解方法
- 分两步：
  - Step1 猜测解的形式
  - Step2 用数学归纳法求解中常数，证明解的正确
- 注意：
  - 1.要求边界条件成立
  - 2.猜测：可以从较松的上下界，逐渐缩小不确定范围
  - 3.从猜测界减去较低项
  - 4.证明结果需与归纳假设一致
  - 5.变量代换
    - 通过变量代换将不熟悉的递归式变换为熟悉的递归式形式

4.2 递归树

- 递归树结构
  - 每个结点代表递归函数调用集合中一个子问题的代价
  - 总代价 = 计算每层的代价和+计算所有层的代价和
  - 表示分治算法时，较有效
- 举例：
  - $T(n) = 3T(n/4) + \Theta(n^2)$
  - $T(n) = 3T(n/4) + cn^2$
- 第0层代价：cn^2
- 第一层代价：$c(\frac{n}{4})^2 \qquad c(\frac{n}{4})^2 \qquad c(\frac{n}{4})^2$
- 最后一层：$T(1)$
- 分析：
  - 1.问题规模每一步减少上一步规模的四分之一：
    - 深度为i的子节点对应问题规模为:$n/4^i$,最底层问题规模为1，即$n/4^i = 1$,因此总深度为：$i = \log_4 n + 1$
  - 2.问题每一层的节点数都是上一层的3倍，因此第k层总节点数为：3^k,且深度为i的每个节点的代价为：$c(n/4^i)^2$,因此深度为i层的所有节点总代价为：$3^i c(n/4^i)^2$
  - 3.整颗树总代价：

$$T(n) \; = cn^2 + \frac{3}{16}cn^2 + (\frac{3}{16})^2 cn^2 + \cdots + (\frac{3}{16})^{\log_4 n - 1} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \qquad = \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} (\frac{3}{16})^i cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \; = \frac{(3/16)^{\log_4 n} - 1}{(3/16) - 1} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) < \sum_{i=0}^{\infty} (\frac{3}{16})^i c$$

4.3 主方法

- 递归式形式：$T(n) = aT(n/b) + f(n), a \geq 1, b > 1, f(n)$为渐进正函数
- 描述：
  - 将规模为n的问题分解为a个子问题，每个子问题的规模为n/b,a个子问题递归求解，花费时间为T(n/b);f(n)表示问题分解和问题合并的代价
- 主定理：

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),令a \geq 1, b > 1, f(n)为一个函数，T(n)定义在非负整数上的递归式，其中n/b解释为向上或向下取整 \; T(n) = \{\Theta(n^{\log_b a}) \quad 1.若对某个常数\epsilon > 0, 有f(n) = O($$

- 函数$f(n)$与$n^{\log_b^a}$进行比较：
  - 第一种情况$n^{\log_b^a}$，条件：必须是多项式小于差$n^\epsilon, \epsilon > 0$
  - 第三种情况$f(n)$较大,条件：必须是多项式大于，同时满足$af(n/b) \leq cf(n)$
  - 第二种情况两者相等
- 注意：在情况1和情况2之间的一定间隙 和 情况2和情况3之间的一定间隙 不能使用主定理
- EG:
  - $T(n) = 9T(n/3) + n$,适用于情况1，$T(n) = \Theta(n^2)$
    - $[f(n) =$ \Omicron $(n^{\log_3^9 - \epsilon})]$
  - $T(n) = T(2n/3) + 1$,适用于情况2，$T(n) = \Theta(\lg n)$
    - $[f(n) = \Theta(n^{\log_{3/2} 1})]$
  - $T(n) = 3T(n/4) + n\lg n$,适用于情况3，$T(n) = \Theta(n\lg n)$
    - `$f(n)=n\lg{n} < n^{\log_4{3}+\epsilon}, \log_4{3} \approx 0.793,f(n)=\Omega(n^{\log_4{3}+\epsilon}),af(n/4)=3/4n\lg{(n/4)}` ❤️ `/4n\lg{n},c=3/4$`
  - $T(n) = 2T(n/2) + n\lg n$,不适用于任何情况，在情况2和3之间
    - $n^{\log_b a} = n, f(n) = n\lg n$,但是不是多项式大于,$n^\epsilon$

4.4 主定理的证明

- 1.分析主递归式，并假设T(n)在b的整数幂上,即$n = 1, b, b^2, b^3, \cdots$
  - a.将解原递归式的问题归约为一个含和式的求值问题
  - b.确定含和式的边界
  - c.证明当n为b的正合幂时主定理成立
- 2.将分析从整数幂扩展到所有正整数
- **引理4.2** (可采用递归树进行证明)

$$设常数a \geq 1, b > 1, f(n)为定义在b正合幂上的非负函数,定义T(n) \begin{cases} \Theta(1) & n = 1 \\ aT(n/b) + f(n) & n = b^i \end{cases} (i为正整数)则有：T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) + \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^i f(n/b^i$$

- **引理4.3**

$$设常数a \geq 1, b > 1, f(n)为定义在b正合幂上的非负函数,定义g(n) : \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j f(n/b^j)\ 对b的整数幂，该函数的渐进上界为g(n) = \Omicron(n^{\log_b a})\quad 条件：存在常数\epsilon, 使f(n) =$$

- $T(n) = aT(a/b) + f(n) = \Theta(n^{\log_b a}) + \sum_{j=1}^{\log_b a - 1} a^j f(n/b^j)$
  - 两个部分中的阶数较高者决定和式的上界，第一部分为叶子的总和，第二部分为除叶子节点外各层节点和
  - 若第一部分阶数较高，则递归树总代价由叶子代价决定
  - 若两者阶数相同，则递归树总代价由叶子节点和其他节点共同决定
  - 若第二部分阶数较高，则递归树总代价由内层叶子决定，即划分问题代价总和决定
- 参考(https://my.oschina.net/u/240275/blog/232763?p={{currentPage-1}})
- **主定理证明 第一阶段(b正整数幂)**:
- $T(n) = aT(a/b) + f(n) = \Theta(n^{\log_b a}) + \sum_{j=1}^{\log_b a - 1} a^j f(n/b^j)$

$$在b的正整数幂上，令g(n) = \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j f(\frac{n}{b^j})\ 情况1：因为f(n) = \Omicron(n^{\log_b a - \epsilon}), 所以\ 代入n = \frac{n}{b^j}, 可得f(\frac{n}{b^j}) = \Omicron(\frac{n^{\log_b a - \epsilon}}{b^j})\ 根据渐进上界性质，可得f(\frac{n}{b^j}$$

- **主定理证明 第二阶段(扩展到所有整数)**=
- $T(n) = aT(\lceil \frac{n}{b} \rceil) + f(n) \quad or \quad T(n) = aT(\lfloor \frac{n}{b} \rfloor) + f(n)$
- 令: $g(n) = \sum_{j=0}^{\lfloor \log_b n \rfloor - 1} a^j f(\lceil \frac{n}{b^j} \rceil)$

$$情况1：$$

第五章 概率分析和随机算法

- 概率分析 probabilistic analysis
- 随机算法 randomized algorithm

5.1 雇佣问题

- 面试费用: c_i,雇佣费用: c_h,雇佣人数: m,面试人数: n
- 总费用: $\Omicron(nc_i + mc_h)$
- 最坏情况: 雇佣n次$\Omicron(nc_h)$
- 随机分析: 分析描述一个合理的输入分布
- 随机算法: 算法的行为不仅由输入决定，而是由随机数生成器产生的数值决定

5.2 指示器随机变量

- 指示器随机变量(indicator random variable)IA定义:

$$IA = \begin{cases} 1 & 如果A发生 \\ 0 & 如果不A发生 \end{cases}$$

- EG:定义样本空间S={H,T},H发生的概率为p,随机变量为Y,指示器随机变量为X_H表示事件H,则

$$X_H = IY = H = \begin{cases} p & 若H发生 \\ 1 - p & 若T发生 \end{cases}$$

期望$E[X_H]$:

$$E[X_H] = E[IY = H] = 1 \cdot P_r Y = H + 0 \cdot P_r Y = T = pP_r H$$

- **引理5.1**

> 一个事件A对应的指示器随机变量的期望值等于事件A发生的概率,即$E[X_A] = P_r A$

- 雇佣问题分析:
-
- **引理5.2**

> 假设应聘者以随机次序出现，算法Hire-Assistant的总雇佣费用平均情形下为: $(c_h \ln n), E(x) = \sum_{i=1}^{n} 1/i = \ln n + \Omicron(1)$

```
Hire-Assistant(n)
    best = 0
    for i = 0 to n
        interview candidate i
        if candidate i is better than candidate best
            best = i
            hire candidate i
```

5.3 随机算法

```
Randomize-Hire-Assistant(n)
    rendomly permute the list of candidates
    best =0 //candidates 0 is least-qualified dummy candidate
    for i = 0 to n
        interview candidate i
        if candidate i is better than candidate best
            best = is
            hire candidate i
```

- 概率分析和随机算法的区别
- **引理5.3**：过程$Randomize-Hire-Assistant$的期望雇佣费为：$O(c_h \ln n)$
  - 5.2引理与5.3引理的区别：
    - 5.2 在输入上进行假设，5.3没有，而是采用随机化输入
    - 5.2 采用平均情形下的雇佣费用，5.3 采用期望雇佣费用
- 随机排列数组
  - 目标：将给定1-n的数组构造为1-n的的随机数组
  - 方法：
    - Permute-by-Sorting:
      - 给每一个元素赋予一个随机的优先级($1-n^3$)，然后按照优先级进行排序，排序后是数组即为随机数组
    - Randomize-in_place:原址排列给定数组：
  - 均匀随机排列：每种排列都是等可能被产生的
- **引理5.4**:若所有的优先级都是唯一的，那么过程Permute_by_Sorting可以产生输入的均匀随机排列
- 均匀随机排列:等可能的产生1-n的每一种排列;
- n元素的k排列(k-permutation):n个元素中的k个元素的子序列，并且不重复，共有n!/(n-k)!种可能;

```
void permute_by_sorting(int * a,int len) {
  int* ap=(int*)malloc(len*sizeof(int));
  int l = 0, max = n*n*n;
  //产生优先级序列
  while(l < len){
    ap[l]=random(1,max);
    l++;
  }
  //根据优先级进行排序
  for(l=1;i < len;l++){
    int key=ap[l];
    int v =a[l];
    int j = l;
    for(;j > 0;l--){
      if(ap[j] < ap[j-1]){
        ap[j]=ap[j-1];
        a[j]=a[j-1];
      }
    }
    ap[j]=key;
    a[j]=v;
  }
}
void randomize-in-place(int* a ,int len) {
    for(int i=0;i< len;i++){
      int r = random(i,len-1);
      a[i]^=a[r];
      a[r]^=a[r];
      a[i]^=a[r];
    }
}
```

- 证明：假设所有的优先级都是唯一的,优先级排序的随机数组是均匀随机数组.

> 令X_i是元素$A[i]$得到第i个优先级的事件，则对所有i，事件X_i发生的概率为：
>
> $P_r X_1 \cap X_2 \cap X_3 \cap \cdots \cap X_{n-1} \cap X_n \quad = P_r X_1 \cdot P_r X_2 | X_1 \cdot P_r X_3 | X_1 \cap X_2 \cdots \quad P_r X_i | X_{i-1} \cap X_{i-2} \cap \cdots X_2 \cap X_1 \cdot P_r \cdot X_n | X_{n-1} \cap \cdots X_2 \cap X_1 \quad X_1$

- 证明：randomize-in-place可以产生一个均匀随机排列.

  采用循环不变式证明，初始化：第一次迭代前，排列未含任何元素，其概率为1，$i = 1, (n - 1)!/n!$ 保持：第i次迭代，每种可能的$(i-1)$排列出现在$A[1..i-1]$中的概

- 问题：
  - 1.如何证明一个随机算法是可以产生均匀随机排列？
  - 2.如何设计一个可以产生均匀随机排列的随机算法？

5.4 概率分析和指示器随机变量的进一步应用

- 生日悖论
  - 问题：一年总天数n=365，假设生日均匀分布于全年，如何确定k个人中，至少有某两人生日相同的概率

  > 概率分析：

某人b_i生日在某天r的概率为：$P_r b_i = r = \frac{1}{n}$ 两人生日在某天r的概率为：$P_r b_i = r \; and \; b_j = r = \frac{1}{n^2}$ 两人生日在同一天概率：$P_r b_i = b_j = \sum_{r=1}^{n} P_r b_i = r \; and \; b_j = r = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$

- 概率分析求解：

> 采用事件的补方法，k个人至少有两人同一天生日的概率 = 1 - k个人生日都不同的概率B_k:
>
> $B_k = \bigcap_{i=1}^{k} A_i$，$A_i$指对于所有$j < i$，$i$与$j$不同生日的事件，$B_k = A_i \bigcap B_{k-1}$，因此：$P_r B_k = P_r B_{k-1} P_r A_k | B_{k-1}$ 且$P_r B_1 = P_r A_1 = 1$，且$P_r A_k | B_{k-1} = \frac{n-k+1}{n}$

$$P_r B_k = P_r A_k | B_{k-1} \quad = P_r B_{k-2} P_r A_{k-1} | B_{k-2} P_r A_k | B_{k-1} \quad = 1 \cdot (\frac{n-1}{n}) \cdot (\frac{n-2}{n}) \cdots (\frac{n-k+1}{n}) \quad = 1 \cdot (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{k-1}{n})$$

> 由于$1 + x \leq e^x$,所以：
>
> $$P_r B_k \leq e^{-1/n} e^{-2/n} \cdots e^{-(k-1/n)} \quad = e^{-\sum_{i=1}^{k-1} i/n} = e^{-k(k-1)/2n} \leq 1/2$$
>
> 即:$k(k-1) \geq 2n \ln 2$，即$k \geq (1 + \sqrt{1 = (8 \ln 2)n})/2$,对于：n=365，求解得:$k \geq 23$

- 指示器随机变量求解：

$$ \begin{aligned} &k个人的每一对(i,j),对于1 \geq i < j \geq k,定义指示器随机变量X_{ij}:\ &X_{ij} = I{i,j生日相同} = \begin{cases} & 1 \quad 若i,j生日相同\ & 0 \quad 其他 \end{cases}\ &E[X_{ij}] = P_r{i,j生日相同} = 1/n\ &定义X表示计数生日相同两人对数目的随机变量，\ &X = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=i+1}^{k}X_{ij}\ ☑ =E [\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=i+1}^{k}X_{ij}] = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=i+1}^{k}E[X_{ij}] = \frac{k(k-1)}{2n}\ &令期望数至少为1则k=\sqrt{2n}+1=28 \end{aligned} $$

> 总结，虽然两种分析的结果不一样，但是在渐进意义上是相同的都是$\Theta(\sqrt{2n})$

- 球与箱子
  - 问题：向b个箱子随机投球，每次投球独立，每次投球，等可能落入每一个箱子，需要投多少次球，才能使每个箱子里至少有一个球？

> 解决：
> 命中：一次投球落入一个空箱子，称为一次命中
> 假设b次命中所需投球次数n;n次投球划分b个阶段，第i个阶段包括从第i-1次命中到第i次命中所需的投球数，第i阶段每次投球有i-1个非空箱子，b-i+1个空箱子，即第i阶段每次的命中概率为(b-i+1)/n;
> 则
>
> n_i表示第i阶段总的投球次数，即$E[n_i] = \frac{b}{b-i+1}$ 那么总投球次数$n = \sum_{i=1}^{b} n_i$，总期望$E[n] = \sum_{i=1}^{b} E[n_i]$，由期望的线性性质：$E[n] = E[\sum_{i=1}^{b} n_i] \quad = \sum_{i=1}^{b} \frac{b}{b-i+1}$

- 礼券收集者问题：若想要收集b种不同的礼券中的每一种，大约需要 $b \ln b$ 张随机礼券.

- 特征序列

- 问题：抛一枚标准硬币n次，连续正面的最长序列的期望长度是多少？

- A:$\Theta(\lg n)$

- 证明：

> 证明上界为$\Omicron(\lg n)$，下界为$\Omega(\lg n)$
> 上界$\Omicron(\lg n)$:
>
> 令A_{ik}为长度至少为k的正面特征序列开始于第i次抛掷的事件，即第i次抛掷，$i+k-1$次都是正面 $1 \leq k \leq n, 1 \leq i \leq n-k+1, P_r A_{ik} = \frac{1}{2^k}$ 取$k = \lceil \lg n \rceil$， $P_r A_{i,\lceil \lg n \rceil} = \frac{1}{2^{\lceil \lg n \rceil}}$

$$且 \sum_{j=2\lceil\lg n\rceil}^{n} P_r L_j < 1/n, \sum_{j=0}^{n} P_r L_j = 1, \sum_{j=0}^{2\lceil\lg n\rceil-1} P_r L_j \leq 1 \qquad j < 2\lceil\lg n\rceil - 1, j < n$$

$$所以,原式 \qquad < \sum_{j=0}^{2\lceil\lg n\rceil-1} 2\lceil\lg n\rceil P_r L_j + \sum_{j=2\lceil\lg n\rceil}^{n} n P_r L_j = 2\lceil\lg n\rceil \sum_{j=0}^{2\lceil\lg n\rceil-1} P_r L_j + n \sum_{j=2\lceil\lg n\rceil}^{n} P_r L_j \qquad < 2\lceil\lg n\rceil + n(1/n) = \color{red}{\backslash\mathrm{Omicron}}(\lg n)$$