Taller 1

14 de febrero de 2020

Indicaciones generales

- Pueden hacer el Taller en grupos hasta de 3 personas.
- Deben entregar el Taller el Viernes 21 de Febrero a las 13h00 (ya que se corregirá en clase).
- No se permite comunicación entre los diferentes grupos.
- Las respuestas deben estar totalmente justificadas.
- **Todos** los integrantes de cada grupo deben entender la totalidad de los ejercicios presentados.

Ejercicio 1 [1 punto]
Sea R y S dos anillos. Definamos $\langle R \times S, +, \cdot \rangle$ definendo las operaciones de la siguiente manera:

$$+ : \ (r_1, s_1) + (r_2, s_2) = (r_1 + r_2, s_1 + s_2);$$

$$\cdot : \ (r_1, s_1) \cdot (r_2, s_2) = (r_1 r_2, s_1 s_2).$$

1. Justifique si $\langle R \times S, +, \cdot \rangle$ sea o no un anillo.
2. Si los dos anillos R y S son conmutativos, ¿también $\langle R \times S, +, \cdot \rangle$ lo es? Justifique su respuesta.

Ejercicio 2 [1 punto]
Sea $D \geq 1$ un entero. Sea R el conjunto de los elementos de la forma $a + b\sqrt{-D}$, con a, $b \in \mathbb{Z}$.

1. Demuestre que R es un anillo (con las operaciones heredadas de $\mathbb{C}$);
2. Utilizando el hecho que la conjugación compleja es un isomorfísmo de $\mathbb{C}$, demuestre que la conjugación compleja induce un isomorfísmo de R.

Ejercicio 3 [1 punto]
Un elemento a de un anillo R se dice **idempotente** si $a^2 = a$.

1. Muestre que el conjunto de elementos idempotentes en un anillo conmutativo es cerrado bajo la multiplicación.
2. Encuentre los elementos idempotentes del anillo $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{14}$.

Ejercicio 4 [2 puntos] Sea $\varphi \colon R \to S$ un homomorfísmo de anillos. Demuestre

1. Si R es conmutativo entonces $\varphi(R)$ es conmutativo;
2. Si R tiene elemento unitario 1, $S \neq 0$ y φ es sobreyectiva, entonces $\varphi(1)$ es el unitario de S;
3. Si $I \subset S$ es un ideal entonces $\varphi^{-1}(I) = \{a \in R : \varphi(a) \in I\}$ es un ideal de R.