Taller de contraejemplos

En todos los siguientes casos, se pide encontrar contraejemplos a las afirmaciones. Los ejercicios se vuelven más dificiles más abajo en la lista.

1. Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$;
2. Un entero positivo es compuesto si y solo si tiene dos factores primos distintos;
3. Sean a, b y $c \in \mathbb{Z}$. Si $a > b$ entonces $ac > bc$.
4. Sean n y $m \in \mathbb{Z}$, entonces $n^2 = m^2$ si y solo si $n = m$;
5. Sean p y q dos primos, entonces $p + q$ es compuesto;
6. Sea p un primo, entonces $2^p - 1$ también es primo;
7. Sean n, a y $b \in \mathbb{N}$, $n \mid ab$ entonces $n \mid a$ o $n \mid b$;
8. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n = a^2 + b^2$, con a y $b \in \mathbb{N}$. Entonces $n = 4c + 3$, por algún $c \in \mathbb{N}$.
9. Sean a, b y $c \in \mathbb{Z}$. Si $a \mid c$ y $b \mid c$ entonces $(a + b) \mid c$;
10. Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces $\frac{n!}{n^3} < 1$.
11. Dos triangulos rectangulos tienen la misma área si y solo si sus hipotenusas tienen la misma longitud;
12. Sean $P\{(a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{Z} \text{ y } a^2 + b^2 = c^2\}$, y $T = \{(p, q, r) : p = x^2 - y^2, q = 2xy, r = x^2 + y^2, \text{ con } x, y \in \mathbb{Z}\}$. Entonces $T = P$;
13. Ningún cuadrado tiene el perimetro igual a su área;
14. Sea $n \in \mathbb{N}$ la suma de sus factores (excluyendo a n mismo) es menor de n. Por ejemplo, los factores de 16 son 1, 2, 4 y 8, se tiene $16 > 15 = 8 + 4 + 2 + 1$;
15. Sean n_1, n_2, k_1 y $k_2 \in \mathbb{N}$. Llamamos

$$M = \text{máx}\left\{\frac{n_1 k_2}{n_2 k_1}, \frac{n_2 k_1}{n_1 k_2}\right\}.$$

Si $M = 1$ entonces $n_1 = k_1$ y $n_2 = k_2$.