Parcial #1

1. **Defina lo que significa ser el *punto medio* de un segmento.**

   Solución. Un punto C de un segmento AB se dice *punto medio* si la distancia entre A y C es igual a la distancia entre C y B. □

2. **Sean x y y números enteros, considere las proposiciones:**

   - $A : xy \geq 0$.
   - $B : x \geq 0$ **y** $y \geq 0$.

   Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

   ***a*) Si A entonces B.**
   ***b*) Si B entonces A.**
   ***c*) A, si y sólo si, B.**

   Solución. Procedemos por puntos:

   a) La proposición "si A entonces B" es falsa: sean $x = y = -1$. Tenemos $xy = (-1)(-1) = 1 \geq 0$, pero $x = y = -1 < 0$.
   b) La proposición "si B entonces A" es cierta: si x y y son dos enteros non-negativos, su producto será non-negativo y entonces $xy \geq 0$.
   c) La proposición "A si y solo si B" es falsa por que la implicación "si A entonces B" lo es.

   □

3. **Dos números primos se denominan *gemelos* si su diferencia es 2. Explique si los siguientes números son gemelos: 2 y 4, 3 y 5, 12 y 14, 27 y 29.**

   Solución. *a*) 2 y 4 no son primos gemelos, porque $4 = 2 * 2$ no es primo.
   b) 3 y 5 son primos y $5 - 3 = 2$, entonces 3 y 5 son primos gemelos.
   c) 12 y 14 no son primos gemelos porque ninguno de los dos es primo: $12 = 4 * 3$ y $14 = 2 * 7$.
   d) 27 y 29 no son primos gemelos porque $27 = 9 * 3$ no es primo.

   □

4. **Considere la siguiente proposición: *Si un número divide a otros dos, entonces divide a la diferencia de estos.***

a) **Transforme el enunciado en un enunciado de la forma "Si, entonces" usando letras indeterminadas.**

b) **Demuestre de forma directa la proposición.**

Solución. *a*) Sean a, b y c números enteros. Si $a \mid b$ y $a \mid c$ entonces $a \mid (b - c)$.

b) Sean a, b y c números enteros tales que $a \mid b$ y $a \mid c$. Siendo $a \mid b$, existe un entero n tal que $b = na$. Similmente, podemos escribir $c = ka$, con $k \in \mathbb{Z}$. Combinando las dos ecuaciones, obtenemos

$$b - c = na - ka = (n - k)a = ma,$$

donde $m = n - k \in \mathbb{Z}$. Esto implica que $a \mid (b - c)$, como queríamos demonstrar.

$\square$

5. **Sea n un número entero. Demuestre que si $3n + 5$ es par, entonces n es impar.**

Solución. Sea n un número entero tal que $3n + 5$ sea par, queremos monstrar que n es impar. Por definición de par, existe un entero k tal que

$$3n + 5 = 2k.$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
3n + 5 &= 2k && \text{definición de par} \\
3n &= 2k - 5 && \text{moviendo el 5} \\
n + 2n &= 2k - 5 && 3n = n + 2n \\
n &= 2k - 5 - 2n && \text{moviendo el } 2n \\
n &= 2k - 6 - 2n + 1 && -5 = -6 + 1 \\
n &= 2(k - 3 - n) + 1 && \text{factorizando el 2} \\
n &= 2m + 1 && \text{llamando } m = k - 3 - n,
\end{aligned}$$

y entonces n es impar. $\square$