Parcial 1

28 de febrero de 2020

Ejercicio 1

Sea S es el conjunto de las matrices reales de la forma $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right)$, y R son todas las matrices 2×2 con coeficientes reales. Demuestre que S es un subanillo de R o justifique lo contrario.

Solución. Vamos a monstrar que S es un subanillo de R utilizando el segundo test de subanillo que hemos visto en clase. Sean

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix},$$

donde todos los coeficientes son reales dos elementos de S. Primero queremos monstrar que si A y $B \in S$ entonces $A - B \in S$. Tenemos

$$A - B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ -b+d & a-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix},$$

donde $\alpha = a - c$ y $\beta = b - d$. Notamos que, siendo a, b, c y d reales, y siendo los reales un anillo, también $a - c$, $b - d$ son reales.
Ahora, consideramos el producto AB:

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -bc-ad & -bd+ac \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix},$$

donde $\alpha = ac - bd$ y $\beta = ad + bc$. Notamos que, siendo a, b, c y d reales, y siendo los reales un anillo, también $ac - bd$, $ad + bc$ son reales.
En conclusión, por el segundo test de subanillo S es un subanillo de R. $\square$

Ejercicio 2

Sea $I \subset \mathbb{Z}[i]$ un ideal distinto del ideal cero (0). Demuestre que I contiene un entero distinto de 0.

Solución. Sea $I \subset \mathbb{Z}[i]$ un ideal distinto del ideal cero. Entonces existe en I un elemento $z = a + bi$ distinto de 0, con a, $b \in \mathbb{Z}$. Consideramos el producto

$$(a - bi)(a + bi) = a^2 + b^2.$$

Siendo $z = a + bi \in I$ e I un ideal, $a^2 + b^2 \in I$. El hecho que $z \neq 0$ nos asegura que por lo menos uno de sus coeficientes sea distinto de 0. Esto implica que $I \ni a^2 + b^2 \neq 0$, como queríamos. $\square$

Ejercicio 3

1. Demuestre que $\mathbb{Z}_{10}$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$;

2. Demuestre que $\mathbb{Z}_8$ **no** es isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$.

Solución. Procedemos por pasos:

1. Hemos visto en clase que un homomorfísmo de $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Z}_n$ en cualquier otro anillo está determinado por la imagen de 1 o de $[1]_n$. En particular podemos construir un homomorfísmo

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{Z}_{10} &\to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \\ 1 &\mapsto (1,1) \end{aligned}$$

y extendiendo la definición por homomorfísmo a todos $n \in \mathbb{Z}_{10}$: $\varphi(n) = (n,n)$. Para monstrar que es un isomorfísmo podemos simplemente cálcular las imagenes de los elementos de $\mathbb{Z}_{10}$:

$$\begin{array}{lllll} \varphi(0) \equiv (0,0), & \varphi(1) \equiv (1,1), & \varphi(2) \equiv (0,2), & \varphi(3) \equiv (1,3), & \varphi(4) \equiv (0,4), \\ \varphi(5) \equiv (1,0), & \varphi(6) \equiv (0,1), & \varphi(7) \equiv (1,2), & \varphi(8) \equiv (0,3), & \varphi(9) \equiv (1,4). \end{array}$$

2. Como hemos visto en clase, vamos a monstrar que todos los homomorfísmos $\varphi\colon \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ no son inyectivos, y por eso no son isomorfísmos. Como antes, para construir un homomorfísmo solo tenemos que decidir la imágen de 1.

   - Si $\varphi(1) = (0,0)$, todo $\ker\varphi = \mathbb{Z}_8$;
   - Si $\varphi(1) = (1,0)$, hay $\varphi(2) = (2,0) \equiv (0,0) = \varphi(0)$,
   - Si $\varphi(1) = (0,a)$, con $a = 1,2,3$, hay $\varphi(4) = (0,4a) \equiv (0,0) = \varphi(0)$;
   - Si $\varphi(1) = (1,1)$, hay $\varphi(4) = (4,4) \equiv (0,0) = \varphi(0)$;
   - Si $\varphi(1) = (1,2)$, hay $\varphi(2) = (2,4) \equiv (0,0) = \varphi(0)$;
   - Si $\varphi(1) = (1,3)$, hay $\varphi(4) = (8,16) \equiv (0,0) = \varphi(0)$.

   Notése que se habría podido simplemente notar que, si $\varphi(1) = (a,b) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ tenemos $\varphi(4) = (4a,4b) \equiv (0,0) = \varphi(0)$.

□

Ejercicio 4

Consideramos el anillo cociente $\mathbb{Z}[i]/(2+i)$, donde $(2+i) = \{(a+bi)(2+i), a,b \in \mathbb{Z}\}$ es el ideal generado por el elemento $2+i$.

1. Demuestre que, en el cociente, $5 = 0$.
2. Demuestre que $\mathbb{Z}[i]/(2+i)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_5$.

Solución. Procedemos por pasos:

1. Por brevidad, escribimos $R = \mathbb{Z}[i]$ y $\overline{R} = \mathbb{Z}[i]/(2+i)$. Notamos que, en el cociente $\overline{R}$ hay $2+i = 0$. Equivalentemente $i = -2$. Ahora, en R hay $i^2 = -1$ y entonces eso sigue siendo cierto en $\overline{R}$ también: $-1 = i^2 = (-2)^2 = 4$. De otra manera, $5 = 0$ en $\overline{R}$.

2. Consideramos el homomorfísmo $\varphi\colon \mathbb{Z} \to \overline{R} = \mathbb{Z}[i]/(2+i)$ que manda un entero n en su *coset* módulo $I = (2+i)$. Siendo la composición de la inclusión $\iota\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[i]$ y del homomorfísmo natural $\pi\colon \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}[i]/(2+i)$, φ es un homomorfísmo. Vamos a monstrar que es sobreyectivo y que $\ker\varphi = 5\mathbb{Z}$.

Primero, siendo $i = -2$ en $\overline{R}$, sabemos que el entero de Gauss $a + bi$ está en el mismo coset del entero de Gauss $a - 2b \in \mathbb{Z}$. Esto muestra que φ es sobreyectivo.

Ahora, el primer punto nos asegura que $5\mathbb{Z} \subseteq \ker\varphi$. Vamos a monstrar la otra inclusión. Sea $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\varphi(n) = 0$ en $\overline{R}$. Entonces, n es divisible por $2 + i$, es decir existe un $a + bi \in \mathbb{Z}[i]$ tal que

$$n = (a + bi)(2 + i) = 2a + ai + 2bi - b = (2a - b) + (a + 2b)i.$$

Siendo $n \in \mathbb{Z}$, su parte imaginaria es necesariamente igual a 0. Esto implica que $a + 2b = 0$ o, equivalentemente, que $a = -2b$. Entonces

$$n = (2(-2b) - b) + (-2b + 2b)i = -5b,$$

es decir $n \in 5\mathbb{Z}$. Hemos demonstrado que $\ker\varphi \subseteq 5\mathbb{Z}$ y entonces $\ker\varphi = 5\mathbb{Z}$. Por el primer teorema de isomorfismo: $\mathbb{Z}[i]/(2+i) = \mathrm{Im}(\varphi) \cong \mathbb{Z}/\ker\varphi = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_5$, como queríamos.

$\square$