Taller 2

03 de abril de 2020

Indicaciones generales

- Pueden hacer el Taller en grupos hasta de 3 personas.
- Deben entregar el Taller el Jueves 16 de abril a comienzo de la monitoría (ya que se corregirá en esa).
- Las respuestas deben estar totalmente justificadas.
- **Todos** los integrantes de cada grupo deben entender la totalidad de los ejercicios presentados.

Ejercicio 1 [1 punto]

Sean $f(x) = x^3 - x + 1$ y $g(x) = x^3 - x - 1$ dos polinomios irreducibles en $\mathbb{F}_3[x]$. Muestre que $\mathbb{F}_3[x]/(f(x)) \cong \mathbb{F}_3[x]/(g(x))$.
[*Sugerencia: muestre primero que existe un* $\alpha \in \mathbb{F}_3[x]/(g(x))$ *tal que* $f(\alpha) = 0$ *en ese campo. Utilice el primer teorema de isomofismos de anillos.*]

Ejercicio 2 [1 punto]

Sean G y G' dos grupos. Demuestre que $G \times G' = \{(g, g'), g \in G \text{ y } g' \in G'\}$ es un grupo con las operación definida por

$$(g, g')(h, h') = (gh, g'h'),$$

donde gh es el producto de g con h en G, y de manera similar para $g'h' \in G'$. El grupo $G \times G'$ con esta operación se llama *grupo producto*.

Ejercicio 3 [2 puntos]

Sean H y K dos subgrupos de un grupo G.

1. Si $H \cap K = \{e\}$, la aplicación producto $p\colon H \times K \to G$, definida por $p(h, k) = hk$ es inyectiva. La imagen de p es el conjunto $HK = \{g \in G, g = hk, \text{ con } h \in H \text{ y } k \in K\}$.
2. Si H o K son subgrupos normales de G, entonces $HK = KH$ y HK es un subgrupo de G.
3. Si H y K son normales y $H \cap K = \{e\}$ y $HK = G$, entonces G es isomorfo al grupo producto $H \times K$.

Ejercicio 4 [1 puntos]

Sean H y K subgrupos de un grupo *finito* G tales que $K \leq H \leq G$. Demuestre la fórmula

$$|G : K| = |G : H||H : K|.$$