Taller de cuantificadores

Los ejercicios se vuelven más díficiles más abajo en la lista.

1. Considere el enunciado: "Hay un número entero tal que su suma con cualquier número entero da este último".
   a) Escriba el enunciado en símbolos, con los cuantificadores apropiados;
   b) Demuestre la proposición.
2. Considere el enunciado: "Hay un número entero más grande que cualquier otro".
   a) Escriba el enunciado en símbolos, con los cuantificadores apropiados;
   b) Niegue el enunciado;
   c) Muestre que el enunciado es falso, demonstrando su niegación.
3. Considere el enunciado: "El cuadrado de un impar es impar"
   a) Escriba el enunciado en símbolos, con los cuantificadores apropiados;
   b) Demuestre la proposición.
4. Demuestre o refute:
   a) $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} : xy = x$;
   b) $\exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z} : xy = x$;
   c) $\exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z} : xy = y$.

   En caso de refutar, primero escriba la niegación de la afimación misma.
5. Una región R en el plano se define *convexa* si, para cada pareja de puntos de R, todo el segmento que los une está contenido en R.
   a) Escriba la definición de región convexa utilizando letras y cuantificadores. *[Sugerencia: utilize $L(a, b)$ para la linea entre a y $b$se necesitan tres $\forall$]*
   b) Niegue la definición que obtenió en el primer punto.
   c) Haga un ejemplo de una región convexa en el plano y de una que no sea convexa.
6. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un conjunto. Un número $s \in \mathbb{R}$ se dice *supremo* del conjunto I si $s \geq a$, para todos $a \in I$ y además
   $$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in I : a > s - \varepsilon.$$
   a) Escriba en español la definición;
   b) Niegue la parte $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in I : a > s - \varepsilon$.
7. Considere la siguiente afimación
   $$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \varepsilon \implies |f(x) - f(x_0)|.$$

a) Escriba en español la definición y su niegación;

b) Niegue la definición, utilizando los cuantificadores, y comparela con su niegación en español de antes.

8. Sea
$$I = \left\{ 1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}, n > 0 \right\}.$$
Demuestre que $\sup I = 1$.