Solución Parcial #2

1. **Demuestre o refute: sea n un entero, $5n+1$ es impar si y sólo si $3n+2$ es par.**

Solución. Queremos monstrar les dos implicaciones.

($\Rightarrow$): Sea $n \in \mathbb{Z}$, si $5n+1$ es impar entonces $3n+2$ es par. Siendo $5n+1$ impar, existe un k entero tal que $5n+1 = 2k+1$. Tenemos:

$$\begin{aligned}
5n+1 &= 2k+1 && 5n+1 \text{ es impar}\\
5n &= 2k && \text{restando 1 a ambos lados}\\
3n+2n &= 2k && 5n = 3n+2n\\
3n &= 2k-2n && \text{moviendo } 2n\\
3n+2 &= 2k-2n+2 && \text{añadendo 2 a ambos lados}\\
3n+2 &= 2(k-n+1) && \text{factorizando 2}\\
3n+2 &= 2m && m = k-n+1 \in \mathbb{Z},
\end{aligned}$$

entonces $3n+2$ es par.

($\Leftarrow$): Sea $n \in \mathbb{Z}$, si $3n+2$ es par entonces $5n+1$ es impar. Siendo $3n+2$ par, existe un k entero tal que $3n+2 = 2k$. Tenemos:

$$\begin{aligned}
3n+2 &= 2k && 3n+2 \text{ es par}\\
3n &= 2k-2 && \text{restando 2 a ambos lados}\\
3n+2n &= 2k-2+2n && \text{añadendo } 2n \text{ a ambos lados}\\
5n &= 2k-2+2n && 5n = 3n+2n\\
5n+1 &= 2k-2+2n+1 && \text{añadendo 1 a ambos lados}\\
5n+1 &= 2(k-1+n)+1 && \text{factorizando 2}\\
5n+1 &= 2m+1 && m = k-1+n \in \mathbb{Z},
\end{aligned}$$

entonces $5n+1$ es impar.

$\square$

2. **Demuestre o refute: sean a y b enteros, $a \mid b^2$ si y sólo si $a \mid b$.**

Solución. Acordámonos que para refutar un "si y solo si" solo se necesita refutar una de las dos implicaciones.

En este caso vamos a refutar que si a y b son dos números enteros tales que $a \mid b^2$ entonces $a \mid b$. Sean $b = 2$ y $a = b^2 = 4$. Claramente hay $a \mid b^2$, es decir $4 \mid 4$, pero $4 \nmid 2$, es decir $a \nmid b$.

Monstramos también que la implicación "si $a \mid b$ entonces $a \mid b^2$" es cierta. Sean a y b enteros tales que $a \mid b$. Por definición, esto implica que exista un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ka$. Multiplicando ambos lados por b obtenimos: $bb = b^2 = kab = kba = (kb)a = ma$, donde $m = kb \in \mathbb{Z}$. Esto implica que $a \mid b^2$, como queríamos demonstrar. $\square$

3. **Determine si la siguiente equivalencias es cierta o no, justifique su respuesta.**

$$(\neg p \vee q) \to \neg r = (r \to \neg p) \wedge \neg(q \wedge r).$$

Solución. Vamos a monstrar que la equivalencia es falsa. Esto se puede monstrar a través de una tabla de verdad o con manipulaciones algebraicas como haremos nosotros. Tenemos:

$$\begin{aligned}
(\neg p \vee q) \to \neg r &= \neg(\neg p \vee q) \vee \neg r && \text{definición de } \to \\
&= (\neg\neg p \wedge \neg q) \vee \neg r && \text{ley de DeMorgan} \\
&= (p \wedge \neg q) \vee \neg r && \text{doble negación} \\
&= (p \vee \neg r) \wedge (\neg r \vee \neg q) && \text{distributividad} \\
&= (p \vee \neg r) \wedge \neg(r \wedge q) && \text{ley de DeMorgan} \\
&= (\neg r \vee p) \wedge \neg(q \wedge r) && \text{conmutatividad} \\
&= (r \to p) \wedge \neg(q \wedge r) && \text{definición de } \to \\
&\neq (r \to \neg p) \wedge \neg(q \wedge r)
\end{aligned}$$

La non equivalencia lógica es clara, y también se puede verificar dando valores $p = F$, $q = F$ y $r = V$. De hecho:

$$(r \to p) \wedge \neg(q \wedge r) = (V \to F) \wedge \neg(F \wedge F) = F \wedge \neg F = F \wedge V = F$$

y

$$(r \to \neg p) \wedge \neg(q \wedge r) = (V \to \neg F) \wedge \neg(F \wedge F) = (V \to V) \wedge \neg F = V \wedge V = V \qquad \square$$

4. **Dado el conjunto $\{0, 2, 3, 5, 8\}$.**

   a) **¿Cuántos números de 6 dígitos que son múltiplos de 5 se pueden formar con los elementos del conjunto?**

   b) **¿Cuántos números de 4 dígitos sin repetir números se pueden formar con los elementos del conjunto?**

Solución. Procedemos por puntos:

a) Queremos formar números de 6 dígitos que sean múltiplos de 5. Como primer dígito podemos escoger cualquier número en el conjunto, con la excepción del 0, porque si no el número resultaría formado de menos dígitos de los que nos requiere el problema, por ejemplo: $023555 = 23555$ tiene solo 5 dígitos. Entonce, tenemos $5 - 1 = 4$ elecciones para el primer dígitos. Para que el número sea un múltiplo de 5, necesariamente el ultimo dígito tiene que ser igual a 0 o 5, y por eso tenemos solo 2 elecciones para el último dígito. Los demás dígitos no tienen restricciones, y por eso podemos formar

$$4 * 5^4 * 2$$

números de 6 dígitos que sean múltiplos de 5 utilizando los elementos del conjunto $\{0, 2, 3, 5, 8\}$.

b) En este caso también hay que poner cuidado: no podemos elegir como primer dígito el 0, y por eso tenemos 4 elecciones para el primer dígito. Ahora, para el segundo dígito podemos elegir cualquier de los 3 elementos que nos quedan, más el 0. Entonces tenemos: $3+1=4$ elecciones para el segundo dígito. Para los demás dígitos, vamos a tener cada vez una elección menos. Finalmente hay

$$4 * 4 * 3 * 2 = 4 * (4)_3 = 4 * 4!$$

posibles números de 4 dígitos sin repetir elementos del conjunto $\{0, 2, 3, 5, 8\}$.

$\square$

5.

a) Sean $C = \{x \in \mathbb{Z} : x|12\}$ y $D = \{x \in \mathbb{Z} : x|36\}$. Demuestre que $C \subseteq D$.

b) Sean a y b enteros. Definamos $A = \{x \in \mathbb{Z} : x|a\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Z} : x|b\}$. Demuestre que $A \subseteq B$ implica que $a|b$.

Solución. Procedemos por puntos:

a) Sea $x \in C$, queremos monstrar que $x \in D$ también. Siendo $x \in C$ sabemos que $x \in \mathbb{Z}$ y $x \mid 12$, es decir, existe un $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$12 = nx.$$

Multiplicando ambos lados por 3, obtenimos

$$36 = 3nx = (3n)x = mx,$$

con $m = 3n \in \mathbb{Z}$. Esto implica que $x \mid 36$ y por eso $x \in D$.

b) Sabemos que $A \subseteq B$, es decir todos $x \in A$ también pertecen a B, y queremos monstrar que $a \mid b$. Por definición $x \in A$ si y solo si x es un entero tal que $x \mid a$. En particular, $a \in \mathbb{Z}$ divide a si mismo, es decir $a \mid a$ y por eso $a \in A$. Siendo $A \subseteq B$, también $a \in B$. Por definición de B esto significa que $a \mid b$.

$\square$