Duální báze k $\mathcal{N} = (N_1, ..., N_d)$ v $\mathcal{P} : (\Phi_1, ..., \Phi_d)$, kde $N_i(\Phi_j) = \delta_{ij}$

## 0.1 Příklady:

### 0.1.1 1D prvek s nejvýše lineárními polynomy:

$K = (0, 1), \mathcal{P} = \{v :< 0, 1 >\mapsto \mathbb{R} | v(x) = a + bx, a, b \in \mathbb{R}\} \implies dim(\mathcal{P}) = 2 \implies \mathcal{N} = (N_1, N_2)$

Proto zvolíme: $N_1(v) = v(0), N_2(v) = v(1)$

**Lemma 0.1**
*Pak* $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ *je KP*

*Důkaz:*

- $K = (0, 1)$ je omezená oblast v $\mathbb{R}$ ✓
- $\mathcal{P}$ má dimenzi 2 ✓
- Je $\mathcal{N}$ báze $\mathcal{P}^{\#}$ ? tj LN?:
  Nechť $v_0(x) = a + bx$ je libovolný, $\implies (N_1(v_0) = v_0(0) = a) \wedge N_2(v_0) = v_0(1) = a + b$ a nechť $N_1(v_0) = 0 \wedge N_2(v_0) = 0$
  $\implies (a = 0) \wedge (a + b = 0) \implies a = b = 0 \implies v_0(x) = 0 \implies (N_1, N_2)$ je LN ✓

□

**Definice 0.1.** Tento prvek nazýváme jako tzv. lineární Lagrangeův prvek

**Definice 0.2** (Duální (uzlové) báze)**.** $N_i(\Phi_j) = \delta_{ij}$ označme $\Phi_i(x) = a_i + b_i x, i = 1, 2 \implies$

Highlight prave s hl strany + align

$$\begin{array}{ll} N_1(\Phi_1) = 1(\Phi_1(0) = 1) : a_1 = 1 & N_1(\Phi_2) = 0(\Phi_2(0) = 0) : a_2 = 0 \\ N_2(\Phi_1) = 0(\Phi_1(1) = 0) : a_1 + b_1 = 0 & N_2(\Phi_2) = 1(\Phi_2(1) = 1) : a_2 + b_2 = 1 \end{array} \quad (1)$$

Zapišme dohromady že se zvýrazněné strany rovnají.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \implies \begin{array}{c} \Phi_1(x) = 1 - x \\ \Phi_2(x) = x \end{array} \quad (2)$$

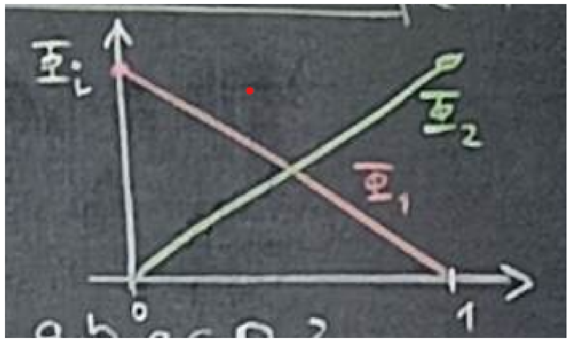
### 0.1.2 1D prvek s nejvýše kvadratickými polynomy:

$K = (0, 1), \mathcal{P} = \{v :< 0, 1 >\mapsto \mathbb{R} | v(x) = a + bx + cx^2, a, b, c \in \mathbb{R}\} \implies dim(\mathcal{P}) = 3 \implies \mathcal{N} = (N_1, N_2, N_3)$ Například zvolme $N_1(v) = v(0), N_2(v) = v(1), N_3(v) = v(\frac{1}{2})$

**Lemma 0.2**
$(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ *je KP*

*Důkaz:*

- $K = (0, 1)$ je omezená oblast v $\mathbb{R}$ ✓




Obrázek 1: Vzhled 1D Lagrangeovského prvku

- $\mathcal{P}$ má dimenzi 3, obsahuje polynomy ✓
- Je $\mathcal{N}$ báze $\mathcal{P}^{\#}$ ? tj LN?:
  Nechť $v_0(x) = a + bx + cx^2$ je libovolný, v situaci $N_1(v_0) = 0 \wedge N_2(v_0) = 0 \wedge N_3(v_0) = 0$ máme
  $\implies (a = 0) \wedge (a + b + c = 0) \wedge (a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}c = 0) \implies a = b = c = 0 \implies (N_1, N_2, N_3)$ je LN ✓

$\square$

**Definice 0.3.** Toto nazýváme kvadratickým Lagrangeovským prvkem.

**Definice 0.4** (Duální báze)**.** Chceme $N_i(\Phi_j) = \delta_{ij}$, označme $\Phi_i(x) = a_i + b_i x + c_i x^2$. Dostáváme následující rovnice.

$$\begin{aligned} \Phi : a_1 = 1 \Phi_2 : a_2 = 0 \Phi_3 : a_3 = 0 \\ a_1 + b_1 + c_1 = 0 a_2 + b_2 + c_3 = 1 a_3 + b_3 + c_3 = 0 \\ a_1 + \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{4}c_1 = 0 a_2 + \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{4}c_2 = 0 a_1 + \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{4}c_1 = 1 \end{aligned} \quad (3)$$

Zapišme tento systém jako matici: matice

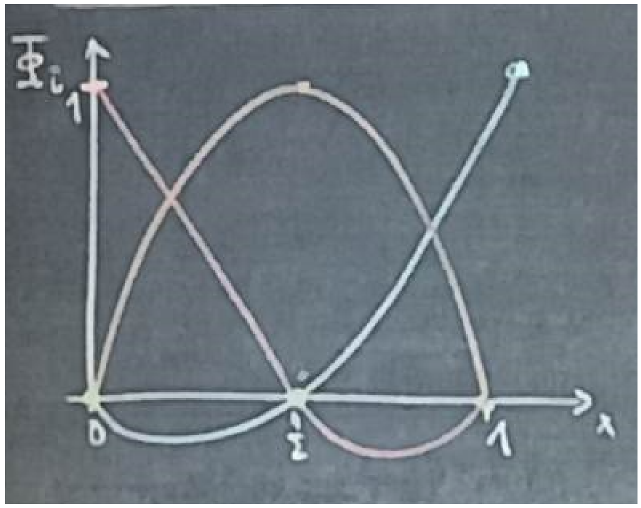
Dostáváme následující:

$$\Phi_1(x) = 1 - 3x + 2x^2, \Phi_2(x) = -x + 2x^2, \Phi_3(x) = 4x - 4x^2 \quad (4)$$

*Poznámka.* Pro vlastnost 3. jsme použili kritérium LN v $\mathcal{P}^{\#}$
$(N_1, ..., N_d)$ je LN <=> $[(\forall v_0 \in \mathcal{P})(\forall j \in \{1, ..., d\})(N_j(v_0) = 0) \implies v_0 \equiv 0]$ maybe fix the last 0

*Poznámka.* Budeme využívat zužování polynomů na lineární nadplochy v $\mathbb{R}^n$ popsatelné pomocí lineárních funkcionálů:
$M \subset \mathbb{R}^n$ je lineární nadplocha <=> $(\exists \alpha \in \mathbb{R})(\exists f \in (\mathbb{R}^n)^{\#})(M \equiv \{x \in \mathbb{R} | f(x) = \alpha\})$

Pro jednoduchost níže zvolíme $\alpha = 0$ (Případným posunem počátku souřadnic)




Obrázek 2: Vzhled 1D kvadratického Lagrangeovského prvku

**Lemma 0.3** (O redukci)
*Nechť $\mathcal{P}$ je polynom stupně $\mathcal{D} \geq 1$ v $n$ proměnných, který je roven $0$ v nadrovině $V$, která je popsána funkcionálem $L \in (\mathbb{R}^n)^{\#}$ (tj. $V \equiv \{x \in \mathbb{R}^n | L(x) = 0\}$). Pak existuje polynom $Q$ stupně $\mathcal{D} - 1$ tak, že $(\forall x \in \mathbb{R}^n)(P(x) = L(x) * Q(x))$*

*Důkaz:* Záměna proměnných tak, že $L(x) = L(\hat{x}, x_n) = x_n$ (kde $\hat{x} = [x_1, ..., x_{n-1}]$), pak $V \equiv x_n = 0$

Pak $P(x) = P(\hat{x}, x_n) = \sum_{j=0}^{\mathcal{D}} \sum_{|\hat{j}|=0}^{\mathcal{D}-j} c_{\hat{j}j} \cdot \hat{x}^{\hat{j}} \cdot x_n^j$ kde $\hat{j} = [j_1, ..., j_{n-1}]$, $|\hat{j}| = \sum_{k=1}^{n-1} j_k$, $\hat{x}^{\hat{j}} = \prod_{l=1}^{n-1} x_l^{j_l}$

Z podmínky $P|_V = 0 \implies P|_V = P(\hat{x}, 0) = \sum_{j=0}^{\mathcal{D}} \sum_{|\hat{j}|=0}^{\mathcal{D}-j} c_{\hat{j}j} \cdot \hat{x}^{\hat{j}} \cdot 0^j$ $\implies \sum_{|\hat{j}|=0}^{\mathcal{D}-j} c_{\hat{j}0} \cdot \hat{x}^{\hat{j}} \equiv 0, \forall \hat{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$

$\implies c_{\hat{j}0} = 0 \forall j$

$\implies P(\hat{x}, x_n) = \sum_{j=1}^{\mathcal{D}} \sum_{|\hat{j}|=0}^{\mathcal{D}-j} c_{\hat{j}j} \cdot \hat{x}^{\hat{j}} \cdot x_n^j = x_n \sum_{j=1}^{\mathcal{D}} \sum_{|\hat{j}|=0}^{\mathcal{D}-j} c_{\hat{j}j} \cdot \hat{x}^{\hat{j}} \cdot x_n^{j-1}$

$x_n$ je námi hledané $L(x)$, zbytek označme jako $Q(x)$ □

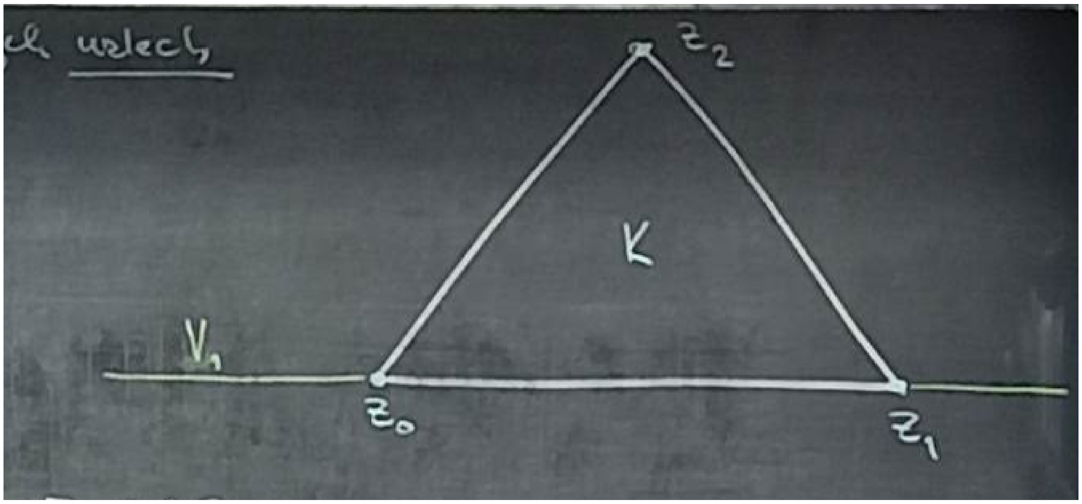
# 1 Nejpoužívanější typy konečných prvků

*Poznámka.* Ukážeme v $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{K}$ bude simplex s vrcholy $z_1, z_2, z_3$.

Lineární polynom v $\mathbb{R}^2 : v_0(x_1, x_2) = a + bx_1 + cx_2$ Kvadratický polynom v $\mathbb{R}^2 : v_0(x_1, x_2) = a + bx_1 + cx_2 + dx_1^2 + ex_1x_2 + fx_2^2$

## 1.1 Lagrangeův prvek

Uzlové proměnné poskytují hodnoty funkcí v $\mathcal{P}$ ve vybraných uzlech




Obrázek 3: Simplex ve 2D

### 1.1.1 Lineární Lagrangeův prvek

$\mathcal{P}$ obsahuje nejvýše lineární polynomy v $\mathbb{R}^n$

- $K$ je simplex ✓
- $\mathcal{P}$ má dimenzi 3 ✓
- Jako bázi $\mathcal{N}$ navrhneme $N_1(v) = v(z_0), N_2(v) = v(z_1), N_3(v) = v(z_2)$

**Lemma 1.1**
*Pak $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ je KP*

*Důkaz:* Ukážeme LN $(N_1, N_2, N_3)$ pomocí kritéria výše:
Nechť pro všechna $v \in \mathcal{P} : N_j(v) = 0, j \in \{1,2,3\} \implies v(z_j) = 0$
Argument jedné proměnné:
Protože $v(z_0) = 0 \wedge v(z_1) = 0 \wedge v \in \mathcal{P}$ je lineární polynom $\implies v|_{V_1}$ je lineární polynom jedné proměnné
tj: $V_1 \equiv \begin{cases} x_1(s) & = z_0^1 + (z_1^1 - z_0^1)s \\ x_2(s) & = z_0^2 + (z_1^2 = z_0^2)s \end{cases}, s \in \mathbb{R} \implies v|_{V_1} = v(x_1(s), x_2(s))$ je lineární polynom proměnné s̲

$\square$