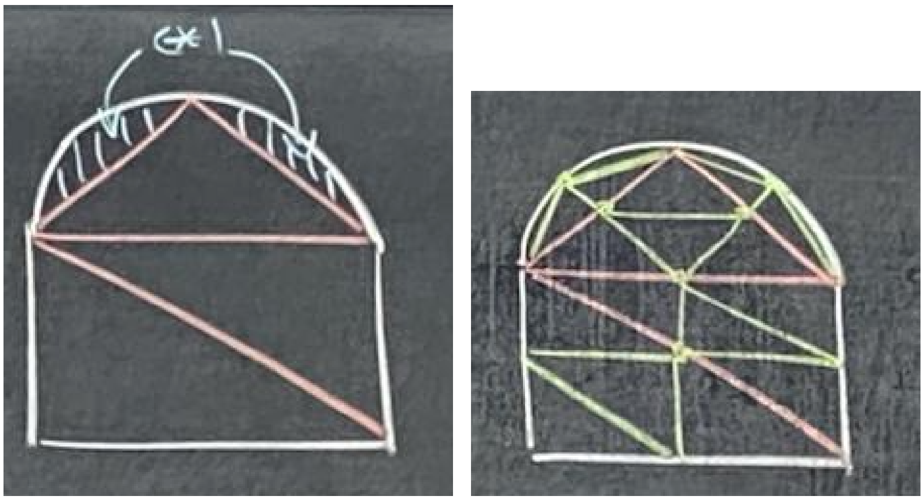
Vlastnost aproximace z_h:

$$z_h(x_J) = \sum_{j=1}^{D} \alpha_j \phi_j(x_j) = \sum_{j=1}^{D} \alpha_j \delta_{jJ} = \alpha_J \tag{1}$$

Poznámka (Zpracování zaoblených částí $\partial\Omega$).
Buď se modré částí z 1a se převedou pomocí konformních zobrazení na $\triangle$ nebo tvar Ω aproximujeme polygonem, viz 1b



(a) Příklad zaoblené oblasti (b) Aproximace zaoblení trojúhelníky

Obrázek 1

Příklad (MKP v 1D). Okrajová úloha (tj. **??**)

$$-(p(x)u')' + q(x)u = f(x), \text{na}(a,b) \tag{2}$$

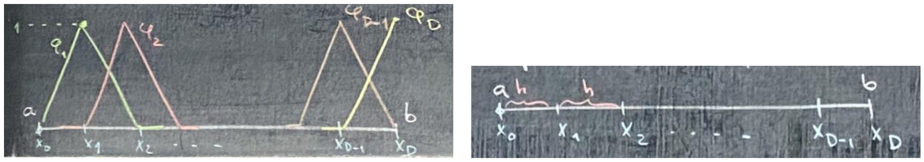
$$u(a) = 0, u'(b) = 0 \tag{3}$$

Variační formulace (tj. **??**):

$$a(u,v) = \int_a^b p(x)u'v' + q(x)uv\ dx, F(v) = \int_a^b f(x)v\ dx \implies$$
$$\implies V = \{v \in \mathbb{W}_2^{(1)}(a,b) | v|_{x=a} = 0\}, a(u,v) = F(v) \forall v \in V \tag{4}$$

MKP pro 4: (a,b) dělíme stejnoměrně (viz obrázek 2b) kde $h = \frac{b-a}{D}$
Dostáváme funkce ϕ_k jako v obrázku 2a
Z toho vidíme že platí:

$$a(\phi_j, \phi_l) = \begin{cases} 0 & \text{pro } l \neq j-1, j, j+1 \\ \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} & \\ \int_{x_{j-1}}^{x_j} & \text{pro } l = j-1 \\ \int_{x_j}^{x_{j+1}} & \text{pro } l = j+1 \end{cases} \tag{5}$$



(a) Funkce ϕ_k na 1D oblasti

(b) Příklad diskretizace 1D oblasti

Obrázek 2

Tvar bazické funkce:

$$\phi_j(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} & \text{na} < x_{j-1}, x_j > \\ \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} & \text{na} < x_j, x_{j+1} > \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \tag{6}$$

Pak:

$$\begin{aligned} a(\phi_j, \phi_j) = \int_{x_{j-1}}^{x_j} p(x) \left(\frac{1}{x_j - x_{j-1}} \right)^2 + q(x) \left(\frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \right)^2 \, dx + \\ + \int_{x_j}^{x_{j+1}} p(x) \left(\frac{-1}{x_{j+1} - x_j} \right)^2 + q(x) \left(\frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} \right)^2 \, dx \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} a(\phi_j, \phi_{j-1}) = \int_{x_{j-1}}^{x_j} p(x) \left(\frac{1}{x_j - x_{j-1}} \right) \left(\frac{-1}{x_j - x_{j-1}} \right) + \\ + q(x) \left(\frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \right) \left(\frac{x_j - x}{x_j - x_{j-1}} \right) \, dx \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} a(\phi_j, \phi_{j+1}) = \int_{x_j}^{x_{j+1}} p(x) \left(\frac{-1}{x_{j+1} - x_j} \right) \left(\frac{1}{x_{j+1} - x_j} \right) + \\ + q(x) \left(\frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} \right) \left(\frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} \right) \, dx \end{aligned} \tag{9}$$

Použijeme substituci:

$$y = \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \text{na} < x_{j-1}, x_j > \mapsto < 0, 1 > \tag{10}$$

$$y = \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} \text{na} < x_j, x_{j+1} > \mapsto < 0, 1 > \tag{11}$$

Pak:

$$a(\phi_j,\phi_j) = \int_0^1 p((x_j - x_{j-1})y + x_{j-1})\frac{dy}{x_j - x_{j-1}} + \\ + \int_0^1 q((x_j - x_{j-1})y + x_{j-1})y^2(x_j - x_{j-1})\ dy - \\ - \int_0^1 p(-(x_{j+1} - x_j)y + x_{j+1})\frac{dy}{x_{j+1} - x_j} - \\ - \int_0^1 q(-(x_{j+1} - x_j)y + x_j + 1)y^2(x_{j+1} - x_j)\ dy \quad (12)$$

$$a(\phi_j,\phi_{j-1}) = -\int_0^1 p((x_j - x_{j-1})y + x_{j-1})\frac{dy}{x_j - x_{j-1}} - \\ - \int_0^1 q((x_j - x_{j-1})y + x_{j-1})y(1-y)(x_j - x_{j-1})\ dy \quad (13)$$

$$a(\phi_j,\phi_{j+1}) = \int_0^1 p(-(x_{j+1} - x_j)y + x_{j+1})\frac{dy}{x_{j+1} - x_j} - \\ - \int_0^1 q(-(x_{j+1} - x_j)y + x_{j+1})y(1-y)(x_{j+1} - x_j)\ dy \quad (14)$$

Z toho je poznat že matice $a(\phi_j,\phi_l)$ je symetrická

1 Základní aspekty MKP (Ciarlet str. 38)

Věta 1.1 (MKP1)
*Množina $\bar{\Omega}$ (z **??**) je rozdělena triangulací $\mathcal{T}_h$ na konečný počet podmmnožin K (oblastí konečných prvků) tak, že*

1. $\bar{\Omega} = \bigcup_{K\in\mathcal{T}_h} \bar{K}$
2. $(\forall K \in \mathcal{T}_h)(K \neq \emptyset$ *a* K *je oblast*$)$
3. $(\forall K_1, K_2 \in \mathcal{T}_h)(K_1 \neq K_2 \implies K_1 \cap K_2 = \emptyset)$
4. $(\forall K \in \mathcal{T}_h)(\partial K$ *je Lipschitzovská*$)$

Věta 1.2 (MKP2)
Na každé množině $K \in \mathcal{T}_h$ definujeme vhodné funkce sloužící k aproximaci řešení variační úlohy **??** *. Tyto funkce jsou polynomy, nebo "blízké" polynomům*

Věta 1.3 (MKP3)
Aproximaci řešení variační úlohy **??** *hledáme pomocí bazických funkcí, jejichž nosič je co nejmenší při zachování shodného popisu tvaru těchto funkcí.*

Definice 1.1 (Konečný prvek)**.** Nechť

1. $K \subset \mathbb{R}^n$ je omezená oblast s po částech hladkou hranicí
2. $\mathcal{P}$ je konečně rozměrný prostor funckí na $\bar{K}$
3. $\mathcal{N} = \{N_1, ..., N_2\}$ je báze $\mathcal{P}^{\#}$

Pak $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ se nazývá konečný prvek, K je oblast prvku, $\mathcal{P}$ jsou tvarové funkce a $\mathcal{N}$ uzlové proměnné.

Báze v $\mathcal{P}$ duální k $\mathcal{N}$ se nazývá nulová báze.