0.1 Úkol 4 - Příklad 3

0.1.1 Zadání

Rozviňte do Taylorova polynomu typu 4 v bodě $[0,0]$ funkci $\sin(x^2 - y^2)$.

0.1.2 Řešení

Z definice hledáme:

$$T^{(4)}_{[0,0]} \sin(x^2 - y^2) = \sum_{|\alpha|<4} \frac{1}{\alpha!} D^{\alpha} \sin(x^2 - y^2)|_{[0,0]} x_1^{\alpha} y_2^{\alpha}$$

Pro zjednodušení zápisu označme $f(x,y) = \sin(x^2 - y^2)$
Využíváme toho že můžeme zaměňovat pořadí derivací.
Spočtěme tedy derivace až do 3. řádu včetně, vyhodnocené v $[0,0]$:

$$\frac{\partial \sin(x^2 - y^2)}{\partial x}|_{[0,0]} = 2x\cos(x^2 - y^2)|_{[0,0]} = 0$$
$$\frac{\partial \sin(x^2 - y^2)}{\partial y}|_{[0,0]} = -2y\cos(x^2 - y^2)|_{[0,0]} = 0$$
$$\frac{\partial \sin(x^2 - y^2)}{\partial x \partial y}|_{[0,0]} = 4xy\sin(x^2 - y^2)|_{[0,0]} = 0$$
$$\frac{\partial \sin(x^2 - y^2)}{\partial x^2}|_{[0,0]} = 2\cos(x^2 - y^2) - 4x^2\sin(x^2 - y^2)|_{[0,0]} = 2$$
$$\frac{\partial \sin(x^2 - y^2)}{\partial y^2}|_{[0,0]} = -2\cos(x^2 - y^2) + 4y^2\sin(x^2 - y^2)|_{[0,0]} = -2$$
$$\frac{\partial \sin(x^2 - y^2)}{\partial x^3}|_{[0,0]} = -4x\sin(x^2 - y^2) - 8x\sin(x^2 - y^2) - 8x^3\cos(x^2 - y^2)|_{[0,0]} = 0$$
$$\frac{\partial \sin(x^2 - y^2)}{\partial y^3}|_{[0,0]} = -4y\sin(x^2 - y^2) - 8y\sin(x^2 - y^2) + 8y^3\cos(x^2 - y^2)|_{[0,0]} = 0$$
$$\frac{\partial \sin(x^2 - y^2)}{\partial x^2 \partial y}|_{[0,0]} = 4y\sin(x^2 - y^2) + 8x^2 y\cos(x^2 - y^2)|_{[0,0]} = 0$$
$$\frac{\partial \sin(x^2 - y^2)}{\partial x \partial y^2}|_{[0,0]} = 4x\sin(x^2 - y^2) - 8xy^2\cos(x^2 - y^2)|_{[0,0]} = 0$$

Spočtené hodnoty dosaďme do definice a dostaneme:

$$T^{(4)}_{[0,0]} \sin(x^2 - y^2) = \frac{2}{2}x^2 + \frac{-2}{2}y^2 = x^2 - y^2$$