

0.1 Úkol 2 - Příklad 11

0.1.1 Zadání

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená oblast, $n = 2, p = 2, k = 5$. Dokažte ekvivalenci výrazů

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \|\mathcal{D}^\alpha u\|_{L_p(\Omega)} \quad (1)$$

a

$$\left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |\mathcal{D}^\alpha(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2)$$

pro $u \in \mathbb{W}_p^{(k)}(\Omega)$. Nalezněte přitom konkrétní podobu konstant ekvivalence.

0.1.2 Řešení

Nejprve dosadíme zadání do výrazů, dostaneme:

$$\|u\|_1 := \sum_{|\alpha| \leq 5} \|\mathcal{D}^\alpha u\|_{L_2(\Omega)} \quad (3)$$

a

$$\|u\|_2 := \left(\sum_{|\alpha| \leq 5} \int_{\Omega} |\mathcal{D}^\alpha(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

V (3) poznáváme normu Sobelevova prostoru $\mathbb{W}_2^{(5)}$, můžeme ji rozepsat jako

$$\|u\|_1 = \sum_{|\alpha| \leq 5} \left(\int_{\Omega} |\mathcal{D}^\alpha u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

Ukážeme tedy ekvivalenci norem,

tj. chceme ukázat že $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tak, že $a\|u\|_2 \leq \|u\|_1 \leq b\|u\|_2$

Ukažme první nerovnost:

$$a \left(\sum_{|\alpha| \leq 5} \int_{\Omega} |\mathcal{D}^\alpha(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{|\alpha| \leq 5} \|\mathcal{D}^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}$$

S použitím Minkowského nerovnosti máme:

$$\sum_{|\alpha| \leq 5} \|\mathcal{D}^\alpha u\|_{L_2(\Omega)} \geq \left\| \sum_{|\alpha| \leq 5} \mathcal{D}^\alpha u \right\|_{L_2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \left| \sum_{|\alpha| \leq 5} \mathcal{D}^\alpha(x) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \geq \quad (6)$$

Dále využijeme faktu, že $(\sum_i x_i)^2 \geq \sum_i (x_i)^2$

$$\geq \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq 5} |\mathcal{D}^{\alpha}(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq 5} \int_{\Omega} |\mathcal{D}^{\alpha}(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

Jako a tedy můžeme zvolit $a = 1$

Ukažme druhou nerovnost:

$$\sum_{|\alpha| \leq 5} \left(\int_{\Omega} |\mathcal{D}^{\alpha} u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq b \left(\sum_{|\alpha| \leq 5} \int_{\Omega} |\mathcal{D}^{\alpha}(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Využijeme toho že pro $y_i > 0, i \in \hat{n}$ platí

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i} \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{y_i} \quad (8)$$

Z toho máme:

$$\left(\sum_{|\alpha| \leq 5} \int_{\Omega} |\mathcal{D}^{\alpha}(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{\sum_{|\alpha| \leq 5} 1} \sum_{|\alpha| \leq 5} \left(\int_{\Omega} |\mathcal{D}^{\alpha} u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

Z toho vidíme:

$$b = \sum_{|\alpha| \leq 5} 1 = 21$$

Tedy nakonec platí:

$$\|u\|_2 \leq \|u\|_1 \leq 21\|u\|_2 \quad (10)$$