1 Příklad 11

1.1 Zadání

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená oblast, $n = 2, p = 2, k = 5$. Dokažte ekvivalenci výrazů

$$\sum_{|\alpha|\le k} \|\mathcal{D}^\alpha u\|_{L_p(\Omega)} \tag{1}$$

a

$$\left(\sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega |\mathcal{D}^\alpha(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2}$$

pro $u \in \mathbb{W}_p^{(k)}(\Omega)$. Nalezněte přitom konkrétní podobu konstant ekvivalence.

1.2 Řešení

Nejprve dosaďme zadání do výrazů, dostaneme:

$$\|u\|_1 \coloneqq \sum_{|\alpha|\le 5} \|\mathcal{D}^\alpha u\|_{L_2(\Omega)} \tag{3}$$

a

$$\|u\|_2 \coloneqq \left(\sum_{|\alpha|\le 5} \int_\Omega |\mathcal{D}^\alpha(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

V (3) poznáváme normu Sobelevova prostoru $\mathbb{W}_2^{(5)}$, můžeme ji rozepsat jako

$$\|u\|_1 = \sum_{|\alpha|\le 5} \left(\int_\Omega |\mathcal{D}^\alpha u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

Ukazujeme tedy ekvivalenci norem,
tj. chceme ukázat že $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tak, že $a\|u\|_2 \le \|u\|_1 \le b\|u\|_2$
Ukažme první nerovnost:

$$a \left(\sum_{|\alpha|\le 5} \int_\Omega |\mathcal{D}^\alpha(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \le \sum_{|\alpha|\le 5} \|\mathcal{D}^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}$$

S použitím Minkowského nerovnosti máme:

$$\sum_{|\alpha|\le 5} \|\mathcal{D}^\alpha u\|_{L_2(\Omega)} \ge \| \sum_{|\alpha|\le 5} \mathcal{D}^\alpha u\|_{L_2(\Omega)} = \left(\int_\Omega \left| \sum_{|\alpha|\le 5} \mathcal{D}^\alpha(x) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \ge \tag{6}$$

Dále využijeme faktu, že $\left(\sum_i x_i\right)^2 \ge \sum_i (x_i)^2$

$$\geq \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq 5} |\mathcal{D}^\alpha(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{|\alpha|\leq 5} \int_\Omega |\mathcal{D}^\alpha(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \tag{7}$$

Jako a tedy můžeme zvolit $a = 1$
Ukažme druhou nerovnost:

$$\sum_{|\alpha|\leq 5} \left(\int_\Omega |\mathcal{D}^\alpha u|^2 \ dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq b \left(\sum_{|\alpha|\leq 5} \int_\Omega |\mathcal{D}^\alpha(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Využijeme toho že pro $y_i > 0, i \in \hat{n}$ platí

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i} \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{y_i} \tag{8}$$

Z toho máme:

$$\left(\sum_{|\alpha|\leq 5} \int_\Omega |\mathcal{D}^\alpha(x)^2| dx \right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{\sum_{|\alpha|\leq 5} 1} \sum_{|\alpha|\leq 5} \left(\int_\Omega |\mathcal{D}^\alpha u|^2 \ dx \right)^{\frac{1}{2}} \tag{9}$$

Z toho vidíme:

$$b = \sum_{|\alpha|\leq 5} 1 = 21$$

Tedy nakonec platí:

$$\|u\|_2 \leq \|u\|_1 \leq 21 \|u\|_2 \tag{10}$$