

**Věta 0.1** (Minkowského nerovnost).

$$\left( \int_{\Omega} |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_{\Omega} |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1)$$

**Věta 0.2** (Holderova nerovnost). Nechť  $\left( \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right)$ ,  $f \in \mathbb{L}_p(\Omega)$ ,  $g \in \mathbb{L}_q(\Omega)$

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} * \left( \int_{\Omega} |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \quad (2)$$

**Věta 0.3** (Vnoření  $L_p$  prostorů).  $p_2 > p_1 \geq 1 \implies \mathbb{L}_{p_2}(\Omega) \subset \mathbb{L}_{p_1}(\Omega)$

**Věta 0.4** (Věta o stopách).  $\Omega$  - omezená oblast,  $\partial\Omega$  - Lipschitzovská

$\exists_1 T : \mathbb{W}_2^{(1)}(\Omega) \mapsto \mathbb{L}_p(\partial\Omega)$ , omezený lineární operátor tak, že  
 $\forall f \in C(\bar{\Omega}), Tf = f|_{\partial\Omega}$

**Věta 0.5** (Lax-Milgramova věta). Nechť  $V$  je Hilbertův prostor,  $a(\cdot, \cdot)$  je bilineární forma,  $F$  je spojitý lineární funkcionál na  $V$  a platí:

1.  $a(\cdot, \cdot)$  je omezená:  $(\exists K > 0)(\forall u, v \in V)(|a(u, v)| \leq K||u|||v||)$
2.  $a(\cdot, \cdot)$  je  $V$ -eliptická:  $(\exists \alpha > 0)(\forall v \in V)(a(v, v) \geq \alpha||v||^2)$

Pak  $(\exists_1 z \in V)(\forall v \in V)(a(z, v) = F(v))$

**Věta 0.6** (Céova). Nechť pro  $a(\cdot, \cdot)$  a  $F$  platí výše uvedené předpoklady a  $z$  řeší slabou formulaci úlohy. Pak pro řešení  $z_h$  úlohy Galerkinovou metodou platí

$$||z_h - z||_V \leq \frac{K}{\alpha} \min\{||z - v||_V | v \in V_h\} \quad (3)$$

**Lemma 0.7** (O redukci). Nechť  $\mathcal{P}$  je polynom stupně  $\mathcal{D} \geq 1$  v  $n$  proměnných, který je roven 0 v nadrovině  $V$ , která je popsána funkcionálem  $L \in (\mathbb{R}^n)^\#$  (tj.  $V \equiv \{x \in \mathbb{R}^n | L(x) = 0\}$ ). Pak existuje polynom  $Q$  stupně  $\mathcal{D} - 1$  tak, že  $(\forall x \in \mathbb{R}^n)(P(x) = L(x) * Q(x))$

**Tvrzení 0.1.** Lokální interpolant  $\mathcal{Y}_k$  je lineární

**Tvrzení 0.2.** Pro lokální interpolant  $\mathcal{Y}_k$  platí  $\mathcal{Y}_k * \mathcal{Y}_k = \mathcal{Y}_k$

**Tvrzení 0.3.** Nechť  $\mathcal{T}$  je triangulace  $\Omega$ . Pak existuje volba uzlů na hranách  $\mathcal{K} \in \mathcal{T}$  tak, že  $\mathcal{Y}_k$  má řád spojitosti  $n \in \mathbb{N}_0$ , kde:

$$r = 0 \text{ pro } m = 0 \quad \text{Lagrangeův prvek} \quad (4)$$

$$r = 0 \text{ pro } m = 1 \quad \text{Hermiteův prvek} \quad (5)$$

$$r = 1 \text{ pro } m = 2 \quad \text{Argyrisův prvek} \quad (6)$$

$$\quad \quad \quad (7)$$

Navíc platí, že  $\forall u \in \mathcal{C}^{(m)}(\bar{\Omega})(\mathcal{Y}_{\mathcal{T}}u \in \mathbb{W}_{\infty}^{(r+1)}(\Omega))$

**Tvrzení 0.4.** Pro každý typ Lagrangeova prvku daného stupně existuje afinně ekvivalentní rozmístění uzlů.

**Tvrzení 0.5.**  $(\mathcal{K}, \mathcal{P}, \mathcal{N})$  interpolačně ekvivalentní s  $(\mathcal{K}, \mathcal{P}, \tilde{\mathcal{N}}) \Leftrightarrow [\mathcal{N}]_{\lambda} = [\tilde{\mathcal{N}}]_{\lambda}$

# 1 Vystředované Taylorovy polynomy

**Tvrzení 1.1** (T1). Vystředovaný Taylorův polynom  $Q^{(m)}u(x)$  je polynom stupně  $m - 1$  v proměnné  $x$

**Tvrzení 1.2** (T2). Pokud  $u \in L_1(B(x_0, \varrho))$ , pak  $Q^{(m)}u(x)$  má smysl

**Tvrzení 1.3** (T3). Je-li  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  omezená, pak  $Q^{(M)} : L_1(K) \mapsto \mathbb{W}_\infty^{(i)}$  pro pevné  $i \in \mathbb{N}_0$  je lineární omezený operátor.

**Tvrzení 1.4** (T4). Nechť  $m \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \leq m - 1$ . Pak pro  $u \in \mathbb{W}_1^{|\alpha|}(B(x_0, \varrho))$  platí

$$\mathcal{D}^\alpha(Q^{(m)}u)(x) = Q^{(m-|\alpha|)}(D^\alpha u)$$

**Věta 1.1** (O podobě zbytku). Nechť  $u \in C^{(m)}(\mathcal{K}), x_0 \in \mathcal{K}, \varrho > 0, \mathcal{K}$  je  $*B(x_0, \varrho)$ . Pak platí:

$$R^m u(x) = m \sum_{|\alpha|=m} \int_{C_x} K_\alpha(x, z) \mathcal{D}^\alpha u(z) dz$$

kde  $z = x + s(y - x), s \in (0, 1), K_\alpha(x, z) = \frac{1}{\alpha!} (x - z)^\alpha$  a existuje  $C_1 > 0$  tak, že  $|K(x, z)| \leq C_1 (1 + \frac{|x - x_0|}{\varrho})^n |z - x|^{-n}$

**Tvrzení 1.5** (T5). Bod  $x_0 \in \mathcal{K}$  a  $\varrho > 0$  lze vybrat tak, že  $(\exists C_5 > 0)(\forall x, z \in \mathcal{K})$

$$(|K(x, z)| \leq C_5 (1 + \gamma)^n |z - x|^{-n})$$

**Lemma 1.2** (L1). Nechť  $p \geq 1, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$  taková, že platí tzv. alternativní předpoklad:

$$(p > 1 \wedge m > \frac{n}{p}) \vee (p = 1 \wedge m \geq n)$$

Pak:

$$(\exists C_{L1} > 0)(\forall u \in L_p(\mathcal{K})) \left( \int_{\mathcal{K}} |x - z|^{m-n} |u(z)| dz \leq C_{L1} (\text{diam} \mathcal{K})^{m-\frac{n}{p}} \|u\|_{L_p(\mathcal{K})} \right)$$

**Tvrzení 1.6** (T6). Nechť  $p \geq 1, m, n \in \mathbb{N}$  takové, že platí alternativní předpoklad. Pak existuje  $C_{T6} > 0$  tak, že pro  $u \in \mathbb{W}_p^{(m)}(\mathcal{K})$  a pro  $x \in \mathcal{K}$  platí:

$$\left| R^{(m)}u(x) \right| \leq C_{T6} (\text{diam} \mathcal{K})^{m-\frac{n}{p}} |u|_{\mathbb{W}_p^{(m)}(\mathcal{K})}$$

kde  $|u|_{\mathbb{W}_p^{(m)}(\mathcal{K})} = \sum_{|\alpha|=m} \|\mathcal{D}^\alpha u\|_{L_p(\mathcal{K})}$

**Věta 1.3** (Sobolevova nerovnost). Nechť  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  je omezená oblast,  $*B(x_0, \varrho)$ ,  $\text{diam} \mathcal{K} = d$  a platí alternativní předpoklad.

Pak existuje  $C_{V2} > 0$  tak, že  $\forall u \in \mathbb{W}_p^{(m)}(\mathcal{K}) : \|u\|_{L_\infty(\mathcal{K})} \leq C_{V2} \|u\|_{\mathbb{W}_p^{(m)}(\mathcal{K})}$  a  $u \in \mathcal{C}(\bar{\mathcal{K}})$

**Lemma 1.4.** Nechť  $p \geq 1, m \in \mathbb{N}, d = \text{diam} \mathcal{K} < +\infty, g(x) = \int_{\mathcal{K}} |x - z|^{m-n} |f(z)| dz$ .

Pak existuje  $C_{L2} > 0$  tak, že  $\|g\|_{L_p(\mathcal{K})} \leq C_{L2} d^m \|f\|_{L_p(\mathcal{K})}$

**Věta 1.5** (Bramble-Hilbert). Nechť  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  je omezená oblast,  $*B(x_0, \varrho), d = \text{diam} \mathcal{K}, \varrho > \frac{1}{2} \varrho_{max}, p \geq 1, m \in \mathbb{N}$

Pak existuje  $C_{V3} > 0$  tak, že  $\forall u \in \mathbb{W}_p^{(m)}(\mathcal{K})$  a  $\forall k = 0, \dots, m$  platí

$$\left| u - Q^{(m)}u \right|_{\mathbb{W}_p^{(k)} \mathcal{K}} \leq C_{V3} d^{m-k} |u|_{\mathbb{W}_p^{(m)} \mathcal{K}}$$

Tady mož  
upravit  
značení

**Lemma 1.6** (L3). Necht  $(\mathcal{K}, \mathcal{P}, \mathcal{N})$  je konečný prvek,  $\mathcal{P}$  obsahuje polynomy stupně  $\leq m$ .

Pro  $\mathcal{N}$  je  $\mathcal{N} \subset [\mathcal{C}^{(l)}(\bar{\mathcal{K}})]^*$ ,  $l \in \mathbb{N}_0$ , tj používají se derivace do řádu  $l$ .

Pak  $\mathcal{Y}_k : \mathcal{C}^{(l)}(\bar{\mathcal{K}}) \mapsto \mathbb{W}_p^{(m)}(\mathcal{K})$  pro  $p \geq 1$  je lineární omezený operátor.

**Věta 1.7** (O lokální interpolační chybě). Necht  $(\mathcal{K}, \mathcal{P}, \mathcal{N})$  je KP, kde:

1.  $\mathcal{K}$  je  $*B(x_0, \varrho)$
2.  $\mathcal{P}$  obsahuje polynomy stupně  $< m$
3.  $\mathcal{N} \subset [\mathcal{C}^{(l)}(\bar{\mathcal{K}})]^*$

a necht pro  $p \geq 1, m, n \in \mathbb{N}$  platí  $(p > 1 \wedge m - l > \frac{n}{p}) \vee (p = 1 \wedge m - l \geq n)$

Pak existuje konstanta  $C_{V4}$  tak, že  $\forall v \in \mathcal{C}^{(l)}(\bar{\mathcal{K}})$  a  $i = 0, \dots, m$  Platí

$$|v - \mathcal{Y}_k v|_{\mathbb{W}_1^p(\mathcal{K})} \leq C_{V4} (\text{diam} \mathcal{K})^{m-i} |v|_{\mathbb{W}_p^{(m)}(\mathcal{K})}$$

**Tvrzení 1.7.** Za daných předpokladů je norma  $\mathcal{Y}_{\tilde{\mathcal{K}}} : \mathcal{C}^{(l)}(\tilde{\mathcal{K}}) \mapsto \mathbb{W}_p^{(m)}(\tilde{\mathcal{K}})$  odhadnuta jako

$$\sigma(\tilde{\mathcal{K}}) \leq C_{ref} * \chi(\mathbb{A})$$

dopsat  
předpokla

**Věta 1.8** (V5). Necht  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  je omezená polyhedrální oblast,  $\{\mathcal{J}^h\}_{h \in (0,1]}$  je (ng).

$(\mathcal{K}, \mathcal{P}, \mathcal{N})$  referenční prvek, pro který pro nějaká  $m, l, p$  platí

1.  $\mathcal{K}$  je  $*B(x_0, \varrho)$
2.  $\mathcal{P}$  obsahuje polynomy stupně  $< m$
3. funkcionály v  $\mathcal{N}$  používají derivace řádu  $\leq l$
4.  $(p > 1 \wedge m - l - \frac{n}{p} > 0) \vee (p = 1 \wedge m - l - n \geq 0)$

Dále necht  $\forall h \in (0, 1] (\forall T \in \mathcal{J}^h) ((\mathcal{T}, \mathcal{P}_{\mathcal{T}}, \mathcal{N}_{\mathcal{T}})$  interpolačně ekvivalentní s  $(\mathcal{K}, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ )

Pak existuje konstanta  $C_{V5} = C(m, n, p, \varrho, \mathcal{K}) > 0$

kde  $\text{diam} B_{\mathcal{T}} \geq \varrho \text{diam} \mathcal{T}$ , tak, že  $(\forall s = 0, \dots, m) (\forall v \in \mathbb{W}_p^{(m)}(\Omega))$  platí

$$\left[ \sum_{\mathcal{T} \in \mathcal{J}^h} \|v - \mathcal{Y}_h v\|_{\mathbb{W}_p^{(s)}(\mathcal{T})}^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq C_{V5} h^{m-s} |v|_{\mathbb{W}_p^{(m)}(\Omega)}$$

**Tvrzení 1.8.** Necht  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  je omezená polyhedrální konvexní oblast. Pak řešení úlohy (s jednotkovou maticí a bez členu  $q$ , na tabuli 1L) je z  $\mathbb{W}_2^{(2)}(\Omega)$