$$a(u,v) = \tilde{F}(v)$$

a použijeme $w \in \mathbb{W}_2^{(1)}(\Omega) : Tw|_{\Gamma_0} = g_0 : u = w + z$. A tedy:

$$a(z,w) = F(v) - a(w,v)$$

a označme $V = \left\{ z \in \mathbb{W}_2^{(1)}(\Omega) | Tz|_{\Gamma_0} = 0 \right\}$

check that like the 3 lines above are correct

Věta 0.1. *Funkce $u \in \mathbb{W}_2^{(1)}(\Omega)$ je slabé řešení* **??** *, pokud*
$(\exists w \in \mathbb{W}_2^{(1)}(\Omega))(Tw|_{\Gamma_0} = g_0), u = w + z$
a z je řešení variační úlohy $(\forall v \in V)(a(z,v) = F(v))$

Poznámka. Pro zajištění existence řešení:
$a_{ij} \in L_\infty(\Omega), q \in L_\infty(\Omega), f \in L_2(\Omega), g_1 \in L_2(\Gamma_1), g_0 \in T(\mathbb{W}_2^{(1)}(\Omega))$

Věta 0.2 (Lax-Milgramova věta)**.** *Nechť V je Hilbertův prostor, $a(\cdot,\cdot)$ je bilineární forma, F je spojitý lineární funkcionál na V a platí:*

1. *$a(\cdot,\cdot)$ je omezená: $(\exists K > 0)(\forall u, v \in V)(|a(u,v)| \leq K||u||||v||)$*
2. *$a(\cdot,\cdot)$ je V-eliptická: $(\exists \alpha > 0)(\forall v \in V)(a(u,u) \geq \alpha ||u||^2)$*

Pak $(\exists_1 z \in V)(\forall v \in V)(a(z,v) = F(v))$

Poznámka. Splnění požadavků Lax-Milgramovy věty:

- F je spojitý, lineární:
  $|F(v)| = | - a(w,v) + \int_\omega f(x)vdx + \int_{\Gamma_1} g_1(x)v\ dS|$
  - $a(w,v)$ je dáno vlastnosti $a(\cdot,\cdot)$
  - $|\int_\omega f(x)vdx| \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v(x)|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}} =$
    $= ||f||_{L_2(\Omega)}||v||_{L_2(\Omega)}$
  - $|\int_{\Gamma_1} g_1(x)v\ dS| \leq \left(\int_{\Gamma_1} |g_1(x)|^2\ dS\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Gamma_1} |Tv(x)|^2\ dS\right) =$
    $= ||g_1||_{L_2(\Gamma_1)} \times K_t ||v||_{\mathbb{W}_2^{(1)}(\Omega)}$
- $a(\cdot,\cdot)$ je omezená:
  $|a(u,v)| = \left| \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + q(x)uv\ dx \right| \leq$
  $\leq K_{a,q} \left(\sum_{i,j=1}^n \left| |\frac{\partial u}{\partial x_j} \right| |_{L_2(\Omega)} \left| |\frac{\partial v}{\partial x_i} \right| |_{L_2(\Omega)} + ||u||_{L_2(\Omega)}||v||_{L_2(\Omega)} + \right) \leq$
  $\leq K_{a,q}(u^2 + 1)||u||_{\mathbb{W}_2^{(1)}(\Omega)}||v||_{\mathbb{W}_2^{(1)}(\Omega)}$
- $a(\cdot,\cdot)$ je V-eliptická:
  $a(u,u) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} + q(x)u^2 dx = (chybibarevne) \implies$
  $\implies a(n,n) \geq c_0 \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2\ dx + d_0 \int_\Omega |i|^2\ dx \geq$
  $\geq min\{c_0, d_0\} ||u||^2_{\mathbb{W}_2^{(1)}(\Omega)}$

0.1 Galerkinova metoda

Galerkinova metoda pro přibližné řešení variační úlohy **??** $(\forall v \in V)(a(z,v) = F(v))$

Nechť $V_h \subset\subset V$ je konečně-rozměrný podprostor V a hledáme aproximaci z_h řešení z úlohy **??** v prostoru V_h tak, aby $(\forall v \in V_n)(a(z_n, v) = F(v))$ (tohle má mít referenci v textu zatím 3)

Poznámka. Řešení 0.1 jednoznačně existuje díky Laxově-Milgramově větě.

Poznámka. Budeme zkoumat chybu Galerkinovy metody (později v kontextu MKP): $z - z_n$

Věta 0.3 (Céova)**.** *Nechť pro $a(.,.)$ a F platí výše uvedené předpoklady a z řeší* **??** *. Pak pro řešení z_h úlohy 0.1 platí*

$$||z_h - z||_V \leq \frac{K}{\alpha} min\{||z - v||_V | v \in V_h\} \tag{1}$$

Důkaz:
Z **??** a 0.1 platí $a(z,v) = F(v) \wedge a(z_h, v) = F(v)$ pro $v \in V_h \implies$
$\implies a(z,v) - a(z_h, v) = 0 \implies a(z - z_h, v) = 0$
Platí že $a(\cdot, \cdot)$ je V-eliptická:
$\alpha||z - z_h||_v^2 \leq a(z - z_h, z - z_h) =$ vkládáme $v \in V_h = a(z - v, z - z_h) + a(v - z_h, z - z_h) = (\star)$
Platí že $z - v \in V$ a $v - z_h \in V_h$, dále vidíme že druhý sčítanec je 0 díky prvnímu řádku důkazu.
$(\star) \leq a(z - v, z - z_h) \leq K||z - v||_V ||z - z_h||_V \implies$
$\implies \alpha||z - z_h||_V \leq K||z - v||_V \forall v \in V_h$ (konečně rozměrný) $\implies$
$\implies ||z - z_h||_V \leq \frac{K}{\alpha} min\{||z - v||_V | v \in V_h\}$ □

Tady možná ten obrázek koule lol

0.2 Postup MKP pro řešení ?? na konkrétní oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

?? $a(z,v) = F_v \forall v \in V$

OBRAZEK

1. Diskretizace Ω
   (a) základní rozdělení Ω podle jejího tvaru
   (b) Pravidlo zjemňování, např. podle středů stran
2. Konstrukce prostrou V_h - určíme bázi $V_h = [\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n]_\lambda$, kde ϕ_j budou po částech lineární (nebo později polynomiální) tak, aby ϕ_j byly $= 1$ v jednom uzlu a $= 0$ ve všech ostatních

Obrázek pro bod 2