1 Úkol 1

1.1 Zadání

Určete prvky matice lineární soustavy rovnic pro okrajovou úlohu řešenou metodou konečných prvků

$$-(\lambda(x)u')' + q(x)u = f(x) \text{ v } (a,b) \tag{1}$$

$$u|_{x=a} = 0, u|_{x=b} = 0 \tag{2}$$

kde $a = 2, b = 3, \lambda(x) = 1 + x, q(x) = 2$ a síť MKP je rovnoměrná a daná uzly:

$$x_j = a + jh, h = \frac{b-a}{m} \tag{3}$$

kde $m \in \mathbb{N}$ je počet prvků diskretizující interval (a,b), který je obecným parametrem.

1.1.1 Vzorce použité z přednášky

$$\begin{aligned} a(\phi_j, \phi_j) = &\int_0^1 p((x_j - x_{j-1})y + x_{j-1}) \frac{dy}{x_j - x_{j-1}} + \\ &+ \int_0^1 q((x_j - x_{j-1})y + x_{j-1})y^2(x_j - x_{j-1})\ dy - \\ &- \int_0^1 p(-(x_{j+1} - x_j)y + x_{j+1}) \frac{dy}{x_{j+1} - x_j} - \\ &- \int_0^1 q(-(x_{j+1} - x_j)y + x_{j+1})y^2(x_{j+1} - x_j)\ dy \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} a(\phi_j, \phi_{j-1}) = &- \int_0^1 p((x_j - x_{j-1})y + x_{j-1}) \frac{dy}{x_j - x_{j-1}} - \\ &- \int_0^1 q((x_j - x_{j-1})y + x_{j-1})y(1-y)(x_j - x_{j-1})\ dy \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} a(\phi_j, \phi_{j+1}) = &- \int_0^1 p(-(x_{j+1} - x_j)y + x_{j+1}) \frac{dy}{x_{j+1} - x_j} - \\ &- \int_0^1 q(-(x_{j+1} - x_j)y + x_{j+1})y(1-y)(x_{j+1} - x_j)\ dy \end{aligned} \tag{6}$$

1.1.2 Řešení

Ze zadání vidíme následující užitečné vztahy:

$$h = \frac{1}{m} \tag{7}$$

$$x_j - x_{j-1} = h = x_{j+1} - x_j \tag{8}$$

$$x_{j-1} - x_{j+1} = -2h \tag{9}$$

Dosazením zadání do (4) a použitím (8) dostaneme:

$$\begin{aligned} a(\phi_j, \phi_j) = \int_0^1 (1 + hy + x_{j-1}) \frac{dy}{h} + \int_0^1 2y^2(h)\ dy- \\ - \int_0^1 (1 - hy + x_{j+1}) \frac{dy}{h} - \int_0^1 2y^2(h)\ dy \end{aligned} \tag{10}$$

$$a(\phi_j, \phi_j) = \int_0^1 \frac{1}{h} (1 + hy + x_{j-1}) + 2hy^2 - \frac{1}{h}(1 - hy + x_{j+1}) - 2hy^2\ dy \tag{11}$$

$$a(\phi_j, \phi_j) = \int_0^1 \frac{1 + x_{j-1}}{h} + y + 2hy^2 - \frac{1 + x_{j+1}}{h} + y - 2hy^2\ dy \tag{12}$$

$$a(\phi_j, \phi_j) = \int_0^1 \frac{x_{j-1} - x_{j+1}}{h} + 2y + 0y^2\ dy \tag{13}$$

Použijeme vztah (9)

$$a(\phi_j, \phi_j) = \int_0^1 \frac{-2h}{h} + 2y\ dy \tag{14}$$

$$a(\phi_j, \phi_j) = \int_0^1 -2 + 2y\ dy \tag{15}$$

$$a(\phi_j, \phi_j) = -2 + 1 = -1 \tag{16}$$

Stejným způsobem spočtěme (5):

$$a(\phi_j, \phi_{j-1}) = -\int_0^1 (1 + hy + x_{j-1}) \frac{dy}{h} - \int_0^1 2y(1-y)(h)\ dy \tag{17}$$

$$a(\phi_j, \phi_{j-1}) = -\int_0^1 \frac{1 + x_{j-1}}{h} + y + 2hy(1-y)\ dy \tag{18}$$

$$a(\phi_j, \phi_{j-1}) = -\int_0^1 \frac{1 + x_{j-1}}{h} + (1+2h)y - 2hy^2\ dy \tag{19}$$

$$a(\phi_j, \phi_{j-1}) = -\frac{1 + x_{j-1}}{h} - \frac{(1+2h)}{2} + \frac{2h}{3} \tag{20}$$

Dosaďme za $x_{j-1} = 2 + (j-1)h$:

$$a(\phi_j, \phi_{j-1}) = -\frac{3}{h} - (j-1) - \frac{(1+2h)}{2} + \frac{2h}{3} \tag{21}$$

$$a(\phi_j, \phi_{j-1}) = -j + \frac{1}{2} - \frac{3}{h} - \frac{h}{3} \tag{22}$$

Nakonec ještě použijeme (7):

$$a(\phi_j, \phi_{j-1}) = -j + \frac{1}{2} - 3m - \frac{1}{3m} \tag{23}$$

Pro (6) buď využijme toho že matice je symetrická nebo jednoduše spočtěme:

$$a(\phi_j, \phi_{j+1}) = -\int_0^1 (1 - hy + x_{j+1})\frac{dy}{h} - \int_0^1 2hy(1-y)\ dy \tag{24}$$

$$a(\phi_j, \phi_{j+1}) = -\int_0^1 \frac{(1 - hy + x_{j+1})}{h} + 2hy(1-y)\ dy \tag{25}$$

$$a(\phi_j, \phi_{j+1}) = -\int_0^1 \frac{(1 + x_{j+1})}{h} + (2h-1)y - 2hy^2\ dy \tag{26}$$

Opět dosaďme za $x_{j+1} = 2 + (j+1)h$:

$$a(\phi_j, \phi_{j+1}) = -\int_0^1 \frac{(3 + (j+1)h)}{h} + (2h-1)y - 2hy^2\ dy \tag{27}$$

$$a(\phi_j, \phi_{j+1}) = -\left(\frac{(3 + (j+1)h)}{h} + \frac{2h-1}{2} - \frac{2h}{3}\right) \tag{28}$$

$$a(\phi_j, \phi_{j+1}) = -\frac{(3 + (j+1)h)}{h} - \frac{1}{2} + \frac{2h}{6} \tag{29}$$

$$a(\phi_j, \phi_{j+1}) = -\frac{3}{h} - j - \frac{1}{2} + \frac{2h}{6} \tag{30}$$

A opět použijeme (7):

$$a(\phi_j, \phi_{j+1}) = -3m - j - \frac{1}{2} + \frac{1}{3m} \tag{31}$$

1.1.3 Výsledek

Nakonec tedy dostáváme:

$$a(\phi_j, \phi_j) = -1 \tag{32}$$

$$a(\phi_j, \phi_{j-1}) = -j + \frac{1}{2} - 3m - \frac{1}{3m} \tag{33}$$

$$a(\phi_j, \phi_{j+1}) = -3m - j - \frac{1}{2} + \frac{1}{3m} \tag{34}$$