Obrázek 1: $N_j(v) = v(z_{j-1})$ opět vyjde že splníme definici konečného prvku

Poznámka (K lineárnímu Lagrangeovu prvku). K čemu to je? Porovnejme jak vypadá pokud budeme KP skládat

(a) Takto prvky vypadají v případě, že uzly jsou v rozích trojúhelníků. všimněme si že funkce je spojitá

(b) Takto prvky vypadají v případě, že uzly nejsou v rozích trojúhelníků. Jsou spojité v jedné hodnotě ale jinak většinou nejsou.

Většinou doporučujeme používat uzly v rozích z důvodů nespojitosti, ale existují příklady kdy se používá druhá možnost. Například se zmiňme o tzv. Cruzeix-Raviartův prvek. Ten se používá v problematice proudění u tzv. nekonformní metody konečných prvků.

0.1 Kvadratický Lagrangeův prvek

$\mathcal{P}$ obsahuje polynomy stupně menší než 2

$$v \in \mathcal{P} \implies v(x_1, x_2) = a + bx_1 + cx_1 + dx_1^2 + ex_1x_2 + fx_2^2 \implies \dim \mathcal{P} = 6 \quad (1)$$

$$\mathcal{N} = (N_1, ..., N_6) : N_j(v) = v(z_{j-1}), j = 1, ..., 6 \text{ pro } v \in C(\bar{K})$$

Tvrzení 0.1
$\mathcal{N}$ je báze $\mathcal{P}^\#$

Obrázek 3: Kvadratický Lagrangeův prvek

Důkaz: Použijeme opět kritérium: $(N_j(v) = 0 \forall j = 1, ..., 6) \implies v \equiv 0$.

Tedy nechť: $v(z_5) = 0, v(z_n) = 0, ..., v(z_0) = 0$

V_1 dána funkcionálem $L_1 : V_1 \equiv L_1(x_1, x_2) = 0$ a $\dim V_1 = 1$ a $v(z_0) = 0, v(z_1) = 0, v(z_3)$, tj. Kvadratický polynom 1 proměnné se rovná 0 ve 3 bodech, $\implies v|_{V_1} \equiv 0$

Použijeme lemma o redukci: $v(x_1, x_2) = L_1(x_1, x_2)w_1(x_1, x_2)$, w_1 je lineární polynom, kde $L_1(z_j) \neq 0$ pro $j = 2, 4, 5$

Protože $v(z_j) = 0, j = 2, 4, 5 \implies w_1(z_j) = 0, j = 2, 4, 5$

$w_1(z_2) = 0, w_1(z_4) = 0$ a $w_1|_{V_2}$ je lineární polynom jedné proměnné $= 0$ ve 2 bodech $\implies w_1|_{V_2} \equiv 0 \implies (V_2 \equiv L_2(x_1, x_2) = 0) \implies$

$\implies w_1(x_1, x_2) = L_2(x_1, x_2) * w_2(x_1, x_2), w_2 \equiv \text{const}$ a $w_2(z_5) = 0 \implies v = L_1L_2w_2 \equiv 0$ všude $\implies \mathcal{N}$ je báze

$\square$

Poznámka (Lagrangeovy prvky stupně $\mathcal{D} > 2$).

(a) Lagrangeovy prvky stupně 3

(b) Lagrangeovy prvky stupně 4

0.2 Hermiteův prvek

Obrázek 5: Hermiteův prvek

Funkcionály v $\mathcal{N}$ používající hodnoty funkcí a jejich derivací (tj. $\mathcal{P}$ obsahuje alespoň kubické polynomy)

Nechť tedy $\dim \mathcal{P} = 10$ (kubické) $\implies \mathcal{N} = (N_1, ..., N_{10})$:

$N_j(v) = v(z_{j-1}, j = 1,2,3)$, $N_10(v) = v(z_3)$ a $v'(z_0) = \binom{N_4(v)}{N_5(v)}, v'(z_1) = \binom{N_6(v)}{N_7(v)}, v'(z_2) = \binom{N_8(v)}{N_9(v)}$,

Tvrzení 0.2
$\mathcal{N}$ je báze $\mathcal{P}^{\#}$

Důkaz: využití redukce: na V_1: $v|_{V_1}$ je kubický polynom 1 proměnné jehož 2 hodnoty a 2 derivace = 0. $\implies v|_{V_1} \implies v = L_1 w_1$, w_1 je Kvadratický

$w_1|_{V_2}$ je kvadratický (1 hodnota, 2 derivace = 0) $\implies w|_{V_2} \equiv 0 \implies w_1 = L_2 w_2, w_2$ je lineární, $w_2|_{V_3}$ je lineární polynom (derivace = 0) $\implies$ je konstantní.

Nakonec použijme $z_3 \implies v = L_1 L_2 L_3 w_3 \equiv 0 \implies \mathcal{N}$ je báze. □

Rozmysleme jak se přenáší v' na $w'_{1,2}$

0.3 Argyrisův prvek

Obrázek 6: Argyrisův prvek

Funkcionály používající hodnoty 1. a 2. derivace argumentu.

$\mathcal{P}$ obsahuje polynomy stupně menší nebo rovno 5 $\implies \dim \mathcal{P} = 21$, tj.

$N_j(v) = v(z_{j-1}, j = 1,2,3)$, $v'(z_0) = \binom{N_4(v)}{N_5(v)}, v'(z_1) = \binom{N_6(v)}{N_7(v)}, v'(z_2) = \binom{N_8(v)}{N_9(v)}$, $v''(z_0) = \binom{N_10(v) N_12(v)}{N_12(v) N_11(v)}, v''(z_1) = \binom{N_13(v) N_15(v)}{N_15(v) N_14(v)}, v''(z_2) = \binom{N_16(v) N_17(v)}{N_17(v) N_18(v)}$, $N_{19}(v) = \partial_n v(z_3), N_{20}(v) = \partial_n v(z_4), N_{21}(v) = \partial_n v(z_5)$, kde $\partial_n v(z_j) = v'(z_j) \cdot \vec{n}(z_j)$

Tvrzení 0.3
$\mathcal{N}$ je báze $\mathcal{P}^{\#}$

Poznámka. Hermite/Agyris: používáme $v'(z_j) \in \mathbb{R}^2, v''(z_j) \in \mathbb{R}^{2,2}$, například $v'(z_j) = \binom{\partial_{x_1} v(z_j)}{\partial_{x_2} v(z_j)}$ nebo $v'(z_j) = \binom{\partial_{s_1} v(z_j)}{\partial_{s_2} v(z_j)}$. Porovnání můžeme vidět v 7

Obrázek 7: Rozdíl mezi lokální a globální bází

1 Interpolant

Poznámka. Obecnější funkce budeme promítat do $\mathcal{P}$ (nejdříve na jediném konečném prvku, pak na síti)

Definice 1.1. Nechť $(\mathcal{K}, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ je konečný prvek, $\dim \mathcal{P} = d$, $(\Phi_1, ..., \Phi_d)$ je uzlová báze, D_{N_j} je definiční obor funkcionálu $N_j \in \mathcal{N}, j = 1, ..., d$

Pak výraz $y_k u = \sum_{j=1}^{d} N_j(u)\Phi_j$ pro $u \in \bigcap_{j=1}^{d} D_{N_j}$ se nazývá lokální interpolant funkce u

Poznámka. Jde o souřadnicové vyjádření v bázi $(\Phi_1, ..., \Phi_d)$, tj pro $\hat{u} \in \mathcal{P}$ je $\sum_{j=1}^{d} N_j(\hat{u})\Phi_j = \hat{u}$, ale pro $\hat{i} \notin \mathcal{P}$ nikoliv

Obrázek 8

Příklad. Lineární Lagrange $(\mathcal{K}, \mathcal{P}, \mathcal{N})$, $N_1(v) = v(0,0), N_2(v) = v(1,0), N_3(v) = v(0,1)$

Určíme nulovou bázi, $\Phi_j(x_1, x_2) = c_{1j} + c_{2j}x_1 + c_{3j}x_2$: $N_j(\Phi_l) = \delta_{jl}$

Rovnice: fix align

$$j = 1 c_{11} = 1 j = 2 \quad c_{12} = 0 j = 3 \quad c_{13} = 0 \tag{2}$$

$$c_{11} + c_{21} = 0 \quad c_{12} + c_{22} = 1 \quad c_{13} + c_{23} = 0 \tag{3}$$

$$c_{11} + c_{31} = 0 \quad c_{12} + c_{32} = 0 \quad c_{13} + c_{33} = 1 \tag{4}$$

Z čehož dostaneme:

$$\Phi_1(x_1, x_2) = 1 - x_1 - x_2, \Phi_2(x_1, x_2) = x_1, \Phi_3(x_1, x_2) = x_2 \tag{5}$$