Věta 0.1 (Minkowského nerovnost)**.**

$$\left(\int_\Omega |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1}$$

Věta 0.2 (Holderova nerovnost)**.** Nechť $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right), f \in \mathbb{L}_p(\Omega), g \in \mathbb{L}_q(\Omega)$

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\, dx \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} * \left(\int_\Omega |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2}$$

Věta 0.3 (Vnoření L_p prostorů)**.** $p_2 > p_1 \geq 1 \implies \mathbb{L}_{p_2}(\Omega) \subset \mathbb{L}_{p_1}(\Omega)$

Věta 0.4 (Věta o stopách)**.** Ω - omezená oblast, $\partial\Omega$ - Liepschitzovská
$\exists_1 T : \mathbb{W}_2^{(1)}(\Omega) \mapsto \mathbb{L}_p(\partial\Omega)$, omezený lineární operátor tak, že
$\forall f \in C(\bar{\Omega}), Tf = f/_{\partial\Omega}$

Věta 0.5 (Lax-Milgramova věta)**.** Nechť V je Hilbertův prostor, $a(\cdot,\cdot)$ je bilineární forma, F je spojitý lineární funkcionál na V a platí:

1. $a(\cdot,\cdot)$ je omezená: $(\exists K > 0)(\forall u, v \in V)(|a(u,v)| \leq K||u||||v||)$
2. $a(\cdot,\cdot)$ je V-eliptická: $(\exists \alpha > 0)(\forall v \in V)(a(u,u) \geq \alpha||u||^2)$

Pak $(\exists_1 z \in V)(\forall v \in V)(a(z,v) = F(v))$

Věta 0.6 (Céova)**.** Nechť pro $a(.,.)$ a F platí výše uvedené předpoklady a z řeší slabou formulaci úlohy . Pak pro řešení z_h úlohy Galerkinovou metodou platí

$$||z_h - z||_V \leq \frac{K}{\alpha} min\{||z-v||_V | v \in V_h\} \tag{3}$$

Lemma 0.7 (O redukci)**.** Nechť $\mathcal{P}$ je polynom stupně $\mathcal{D} \geq 1$ v n proměnných, který je roven 0 v nadrovině V, která je popsána funkcionálem $L \in (\mathbb{R}^n)^\#$ (tj. $V \equiv \{x \in \mathbb{R}^n | L(x) = 0\}$). Pak existuje polynom Q stupně $\mathcal{D}-1$ tak, že $(\forall x \in \mathbb{R}^n)(P(x) = L(x) * Q(x))$

Tvrzení 0.1. Lokální interpolant $\mathcal{Y}_k$ je lineární

Tvrzení 0.2. Pro lokální interpolant $\mathcal{Y}_k$ platí $\mathcal{Y}_k * \mathcal{Y}_k = \mathcal{Y}_k$

Tvrzení 0.3. Nechť $\mathcal{T}$ je triangulace Ω. Pak existuje volba uzlů na hranách $\mathcal{K} \in \mathcal{T}$ tak, že $\mathcal{Y}_k$ má řád spojitosti $n \in \mathbb{N}_0$, kde:

$$r = 0 \text{ pro } m = 0 \qquad \text{Lagrangeův prvek} \tag{4}$$
$$r = 0 \text{ pro } m = 1 \qquad \text{Hermiteův prvek} \tag{5}$$
$$r = 1 \text{ pro } m = 2 \qquad \text{Argyrisův prvek} \tag{6}$$
$$\tag{7}$$

Navíc platí, že $\forall u \in \mathcal{C}^{(m)}(\bar{\Omega})(\mathcal{Y}_\mathcal{T} u \in \mathbb{W}_\infty^{(r+1)}(\Omega))$

Tvrzení 0.4. Pro každý typ Lagrangeova prvku daného stupně existuje afinně ekvivalentní rozmístění uzlů.

Tvrzení 0.5. $(\mathcal{K}, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ interpolačně ekvivalentní s $(\mathcal{K}, \mathcal{P}, \tilde{\mathcal{N}}) \Leftrightarrow [\mathcal{N}]_\lambda = [\tilde{\mathcal{N}}]_\lambda$

1 Vystředované Taylorovy polynomy

Tvrzení 1.1 (T1)**.** Vystředovaný Taylorův polynom $Q^{(m)}u(x)$ je polynom stupně $m-1$ v proměnné x

Tvrzení 1.2 (T2)**.** Pokud $u \in L_1(B(x_0, \varrho))$, pak $Q^{(m)}u(x)$ má smysl

Tvrzení 1.3 (T3)**.** Je-li $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ omezená, pak $Q^{(M)} : L_1(K) \mapsto \mathbb{W}_{\infty}^{(i)}$ pro pevné $i \in \mathbb{N}_0$ je lineární omezený operátor.

Tvrzení 1.4 (T4)**.** Nechť $m \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \leq m-1$. Pak pro $u \in \mathbb{W}_1^{|\alpha|}(B(x_0, \varrho))$ platí

$$\mathcal{D}^{\alpha}(Q^{(m)}u)(x) = Q^{(m-|\alpha|)}(D^{\alpha}u)$$

Věta 1.1 (O podobě zbytku)**.** Nechť $u \in C^{(m)}(\mathcal{K}), x_0 \in \mathcal{K}, \varrho > 0, \mathcal{K}$ je $*B(x_0, \varrho)$. Pak platí: Tady mož upravit značení

$$R^m u(x) = m \sum_{|\alpha=m|} \int_{C_x} K_{\alpha}(x,z)\mathcal{D}^{\alpha}u(z)dz$$

kde $z = x+s(y-x), s \in <0,1>, K_{\alpha}(x,z) = \frac{1}{\alpha!}(x-z)^{\alpha}$ a existuje $C_1 > 0$ tak, že $|K(x,z)| \leq C_1(1+\frac{|x-x_0|}{\varrho})^n|z-x|^{-n}$

Tvrzení 1.5 (T5)**.** Bod $x_0 \in \mathcal{K}$ a $\varrho > 0$ lze vybrat tak, že $(\exists C_5 > 0)(\forall x, z \in \mathcal{K})$

$$\big(|K(x,z)| \leq C_5(1+\gamma)^n|z-x|^{-n}\big)$$

Lemma 1.2 (L1)**.** Nechť $p \geq 1, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$ taková, že platí tzv. alternativní předpoklad:

$$(p > 1 \wedge m > \frac{n}{p}) \vee (p = 1 \wedge m \geq n)$$

Pak:

$$(\exists C_{L1} > 0)(\forall u \in L_p(\mathcal{K}))(\int_{\mathcal{K}} |x-z|^{m-n}|u(z)|dz \leq C_{L1}(diam K)^{m-\frac{n}{p}}||u||_{L_p(\mathcal{K})})$$

Tvrzení 1.6 (T6)**.** Nechť $p \geq 1, m, n \in \mathbb{N}$ takové, že platí alternativní předpoklad. Pak existuje $C_{T6} > 0$ tak, že pro $u \in \mathbb{W}_p^{(m)}(\mathcal{K})$ a pro $x \in \mathcal{K}$ platí:

$$\left|R^{(m)}u(x)\right| \leq C_{T6}(diam\mathcal{K})^{m-\frac{n}{p}}|u|_{W_p^{(m)}(\mathcal{K})}$$

kde $|u|_{W_p^{(m)}(\mathcal{K})} = \sum_{|\alpha|=m} ||\mathcal{D}^{\alpha}u||_{L_p(\mathcal{K})}$

Věta 1.3 (Sobolevova nerovnost)**.** Nechť $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ je omezená oblast, $*B(x_0, \varrho)$, $diam\mathcal{K} = d$ a platí alternativní předpoklad.

Pak existuje $C_{V2} > 0$ tak, že $\forall u \in \mathbb{W}_p^{(m)}(K) : ||u||_{L_{\infty}(\mathcal{K})} \leq C_{V2}||u||_{\mathbb{W}_p^{(m)}(\mathcal{K})}$ a $u \in \mathcal{C}(\bar{\mathcal{K}})$

Lemma 1.4. Nechť $p \geq 1, m \in \mathbb{N}, d = diam\mathcal{K} < +\infty, g(x) = \int_{\mathcal{K}} |x-z|^{m-n}|f(z)|dz$.

Pak existuje $C_{L2} > 0$ tak, že $||g||_{L_p(\mathcal{K})} \leq C_{L2}d^m||f||_{L_p(\mathcal{K})}$

Věta 1.5 (Bramble-Hilbert)**.** Nechť $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ je omezená oblast, $*B(x_0, \varrho), d = diam\mathcal{K}, \varrho > \frac{1}{2}\varrho_{max}, p \geq 1, m \in \mathbb{N}$

Pak existuje $C_{V3} > 0$ tak, že $\forall u \in \mathbb{W}_p^{(m)}(\mathcal{K})$ a $\forall k = 0, ..., m$ platí

$$\left|u - Q^{(m)}u\right|_{W_p^{(k)}\mathcal{K}} \leq C_{V3}d^{m-k}|u|_{W_p^{(m)}\mathcal{K}}$$

Lemma 1.6 (L3)**.** Nechť $(\mathcal{K}, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ je konečný prvek, $\mathcal{P}$ obsahuje polynomy stupně $< \tilde{m}$.

Pro $\mathcal{N}$ je $\mathcal{N} \subset \left[\mathcal{C}^{(l)}(\bar{\mathcal{K}})\right]^*, l \in \mathbb{N}_0$, tj používají se derivace do řádu l.

Pak $\mathcal{Y}_k : \mathcal{C}^{(l)}(\bar{\mathcal{K}}) \mapsto \mathbb{W}_p^{(m)}(\mathcal{K})$ pro $p \geq 1$ je lineární omezený operátor.

Věta 1.7 (O lokální interpolační chybě)**.** Nechť $(\mathcal{K}, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ je KP, kde:

1. K je $*B(x_0, \varrho)$
2. $\mathcal{P}$ obsahuje polynomy stupně $< m$
3. $\mathcal{N} \subset \left[C^{(l)}(\bar{\mathcal{K}})\right]^*$

a nechť pro $p \geq 1, m, n \in \mathbb{N}$ platí $(p > 1 \wedge m - l > \frac{n}{p}) \vee (p = 1 \wedge m - l \geq n)$

Pak existuje konstanta C_{V4} tak , že $\forall v \in \mathcal{C}^{(l)}(\bar{\mathcal{K}})$ a $i = 0, ..., m$ Platí

$$|v - \mathcal{Y}_k v|_{\mathbb{W}^{\beth}(\mathcal{K})} \leq C_{V4}(diam\mathcal{K})^{m-i}|v|_{\mathbb{W}_p^{(m)}(\mathcal{K})}$$

Tvrzení 1.7. Za daných předpokladů je norma $\mathcal{Y}_{\tilde{\mathcal{K}}} : \mathcal{C}^{(l)}(\bar{\tilde{\mathcal{K}}}) \mapsto \mathbb{W}_p^{(m)}(\tilde{\mathcal{K}})$ odhadnuta jako dopsat předpokla

$$\sigma(\tilde{\mathcal{K}}) \leq C_{ref} * \chi(\mathbb{A})$$

Věta 1.8 (V5)**.** Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená polyhedrální oblast, $\left\{\mathcal{J}^h\right\}_{h \in (0,1>}$ je nedegerovaný.

$(\mathcal{K}, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ referenční prvek, pro který pro nějaká m,l,p platí

1. $\mathcal{K}$ je $*B(x_0, \varrho)$
2. $\mathcal{P}$ obsahuje polynomy stupně $< m$
3. funkcionály v $\mathcal{N}$ používají derivace řádu $\leq l$
4. $(p > 1 \wedge m - l - \frac{n}{p} > 0) \vee (p = 1 \wedge m - l - n \geq 0)$

Dále nechť $\forall h \in (0, 1 > (\forall T \in \mathcal{J}^h)((\mathcal{T}, \mathcal{P}_\mathcal{T}, \mathcal{N}_\mathcal{T})$ interpolačně ekvivalentní s $(\mathcal{K}, \mathcal{P}, \mathcal{N}))$

Pak existuje konstanta $C_{V5} = C(m, n, p, \varrho, \mathcal{K}) > 0$

kde $diam B_\mathcal{T} \geq \varrho diam\mathcal{T}$, tak, že $(\forall s = 0, ..., m)(\forall v \in \mathbb{W}_p^{(m)}(\Omega))$ platí

$$\left[\sum_{\mathcal{T} \in \mathcal{J}^h} ||v - \mathcal{Y}_h v||^p_{\mathbb{W}_p^{(s)}(\mathcal{T})}\right]^{\frac{1}{p}} \leq C_{V5} h^{m-s} |v|_{\mathbb{W}_p^{(m)}(\Omega)}$$

Tvrzení 1.8. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená polyhedrální konvexní oblast. Pak řešení úlohy (s jednotkovou maticí a bez členu q, na tabuli 1L) je z $\mathbb{W}_2^{(2)}(\Omega)$