1 Úvod

1.1 Značení

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ omezená oblast
- $\partial\Omega$ Liepschitzovská oblast - lze pokrýt konečně mnoha grafy Liepschitzovských zobrazení, tj. $(|\phi(x) - \phi(y)| < L||x - y||)$
- $\bar{\Omega}$ - uzávěr oblasti Ω
- $\mathcal{C}^{(k)}(\Omega)$ spojité funkce s derivacemi do k-tého řádu spojité na Ω
- $\mathcal{C}^{(\infty)}(\Omega)$ hladké funkce na Ω
- $\mathcal{C}_0^{(\infty)}(\Omega)$ hladké funkce na Ω s kompaktním nosičem
- $f \in \mathcal{C}^{(k)}(\Omega), \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \ldots \partial^{\alpha_n} x_n} f = \mathcal{D}^\alpha, \alpha = [\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n], |\alpha| = \sum_i \alpha_i$

Lebesgueovy prostory

- $\mathbb{L}_p(\Omega) = \{f : \Omega \mapsto \mathbb{R} | \text{měritelné}, \int_\Omega |f(x)|^p dx < +\infty\}\ p \in < 1, +\infty)$
- $\mathbb{L}_\infty(\Omega) = \{f : \Omega \mapsto \mathbb{R} | \text{měřitelné}, (\exists K > 0)(s.v. x \in \Omega)(|f(x)| \leq K)\}$

1.2 Vztahy

Věta 1.1 (Minkowského nerovnost)

$$\left(\int_\Omega |f(x) + g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1}$$

Věta 1.2 (Holderova nerovnost)
Nechť $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right), f \in \mathbb{L}_p(\Omega), g \in \mathbb{L}_q(\Omega)$

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\, dx \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} * \left(\int_\Omega |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2}$$

Věta 1.3 (Vnoření L_p prostorů)
$p_2 > p_1 \geq 1 \implies \mathbb{L}_{p_2}(\Omega) \subset \mathbb{L}_{p_1}(\Omega)$
Důkaz:

$$\int_\Omega |f(x)|^{p_1} dx \leq \text{Holder (2)} \leq \left(\int_\Omega (|f(x)|^{p_1})^{\frac{p_1}{p_2}}\right)^{\frac{p_1}{p_2}} * \left(\int_\Omega 1^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\int_\Omega |f(x)|^{p_1} dx \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^{p_2}\right)^{\frac{p_1}{p_2}} * |\Omega|$$

$$\int_\Omega |f(x)|^{p_1} dx \leq |\Omega| \int_\Omega |f(x)|^{p_2}$$

□

1.3 Sobolevovy prostory

$\mathbb{D} = \mathcal{C}^{(\infty)}(\Omega)$

norma: $||u||_{W_p^{(k)}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq K} ||D^\alpha u||_{\mathbb{L}_p(\Omega)}$

normovaný prostor: $S_p^{(k)}(\Omega) = (\mathbb{D}; ||.||_{V_p^{(k)}(\Omega)})$

Tento prostor není úplný, proto použijeme standartní zúplňovací proceduru a dostaneme: $\mathbb{W}_p^{(k)}(\Omega)$

Obdobně můžeme postupovat pro $\mathbb{D} = \mathcal{C}_0^{(\infty)}(\Omega)$ a dostaneme $\mathbb{W}_p^{0(k)}(\Omega)$

Věta 1.4 (Věta o stopách)
Ω - *omezená oblast,* $\partial\Omega$ - *Liepschitzovská*

$\exists_1 T : \mathbb{W}_2^{(1)}(\Omega) \mapsto \mathbb{L}_p(\partial\Omega),$ *omezený lineární operátor tak, že*

$\forall f \in C(\bar{\Omega}), Tf = f/_{\partial\Omega}$

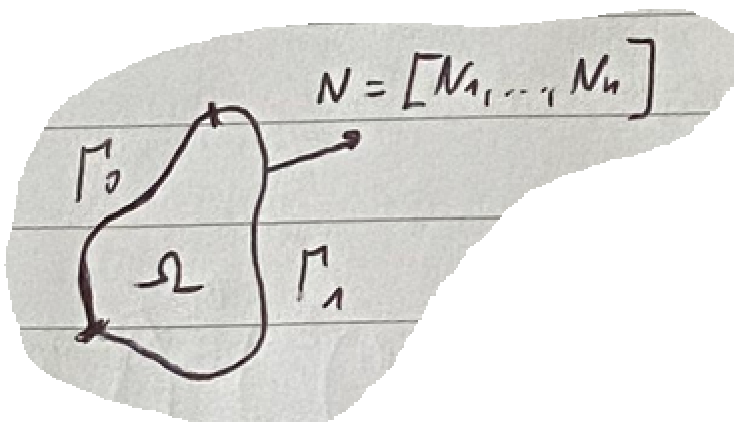
2 Okrajová úloha

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - omezená oblast, $\partial\Omega$ - Liepschitzovská

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + q(x) * u = f \quad \text{v } \Omega \tag{3}$$

$$u|_{\Gamma_0} = g_0 \quad \text{na } \Gamma_0 \quad \text{(Dirichletova část)} \tag{4}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}|_{\Gamma_1} = g_1 \quad \text{na } \Gamma_1 \quad \text{(Neumannova část)} \tag{5}$$



2.1 Výchozí vlastnosti

- $f, g \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$
- $a_{ij} \in \mathcal{C}^{(1)}(\bar{\Omega})$

- $g_{0,1} \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$

2.2 Silně eliptický operátor

$(\exists C_0 > 0)(\forall \xi \in \mathbb{R}^n)(\forall x \in \Omega)(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi^i\xi^j \geq c_0 \sum_{i=1}^{n} |\xi^i|^2)$

Klasické řešení 2 je funkce $u \in \mathcal{C}^{(2)}(\bar{\Omega})$ splňující 2 bodově.

2.3 Slabá formulace

Vezmeme 3 a +- ji přenásobíme testovací funkcí

Nechť $i \in \mathcal{C}^{(2)}(\bar{\Omega}), v \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\bar{\Omega}), v|_{\Gamma_0 = 0}$

$$-\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) dx + \int_\Omega q(x) * u * v \ dx = \int_\Omega f * v \ dx \tag{6}$$

Na první člen použijeme Greenovu identitu

$$-\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} N_i v \ dS + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i} \ dx + \int_\Omega q(x) * u * v \ dx = \\ = \int_\Omega f * v \ dx \tag{7}$$

První člen díky (4) a (5) upravíme na $-\int_{\Gamma_1} g_1 v \ dS$ a pak ho přesuneme na druhou stranu.

Dostaneme:

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i} \ dx + \int_\Omega q(x) * u * v \ dx = \int_\Omega f * v \ dx + \int_{\Gamma_1} g_1 v \ dS \tag{8}$$

První část označme $a(u,v)$ a druhou $\tilde{F}(v)$