

0.1 Úkol 1 - Příklad 9

Určete prvky matice lineární soustavy rovnic pro okrajovou úlohu řešenou metodou konečných prvků

$$-(\lambda(x)u')' + q(x)u = f(x) \text{ v } (a, b) \quad (1)$$

$$u|_{x=a} = 0, u|_{x=b} = 0 \quad (2)$$

kde $a = 2, b = 3, \lambda(x) = 1 + x, q(x) = 2$ a síť MKP je rovnoměrná a daná uzly:

$$x_j = a + jh, h = \frac{b-a}{m} \quad (3)$$

kde $m \in \mathbb{N}$ je počet prvků diskretizující interval (a, b) , který je obecným parametrem.

0.1.1 Vzorce použité z přednášky

V tomhle vzorci je chyba, přednášející se upsál, ale nechci to opravovat

$$\begin{aligned} a(\phi_j, \phi_j) = & \int_0^1 p((x_j - x_{j-1})y + x_{j-1}) \frac{dy}{x_j - x_{j-1}} + \\ & + \int_0^1 q((x_j - x_{j-1})y + x_{j-1}) y^2 (x_j - x_{j-1}) dy - \\ & - \int_0^1 p(-(x_{j+1} - x_j)y + x_{j+1}) \frac{dy}{x_{j+1} - x_j} - \\ & - \int_0^1 q(-(x_{j+1} - x_j)y + x_{j+1}) y^2 (x_{j+1} - x_j) dy \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(\phi_j, \phi_{j-1}) = & - \int_0^1 p((x_j - x_{j-1})y + x_{j-1}) \frac{dy}{x_j - x_{j-1}} - \\ & - \int_0^1 q((x_j - x_{j-1})y + x_{j-1}) y(1-y)(x_j - x_{j-1}) dy \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(\phi_j, \phi_{j+1}) = & - \int_0^1 p(-(x_{j+1} - x_j)y + x_{j+1}) \frac{dy}{x_{j+1} - x_j} - \\ & - \int_0^1 q(-(x_{j+1} - x_j)y + x_{j+1}) y(1-y)(x_{j+1} - x_j) dy \quad (6) \end{aligned}$$

0.1.2 Řešení

Ze zadání vidíme následující užitečné vztahy:

$$h = \frac{1}{m} \quad (7)$$

$$x_j - x_{j-1} = h = x_{j+1} - x_j \quad (8)$$

$$x_{j-1} - x_{j+1} = -2h \quad (9)$$

Dosazením zadání do (4) a použitím (8) dostaneme:

$$\begin{aligned} a(\phi_j, \phi_j) = & \int_0^1 (1 + hy + x_{j-1}) \frac{dy}{h} + \int_0^1 2y^2(h) dy - \\ & - \int_0^1 (1 - hy + x_{j+1}) \frac{dy}{h} - \int_0^1 2y^2(h) dy \end{aligned} \quad (10)$$

$$a(\phi_j, \phi_j) = \int_0^1 \frac{1}{h} (1 + hy + x_{j-1}) + 2hy^2 - \frac{1}{h} (1 - hy + x_{j+1}) - 2hy^2 dy \quad (11)$$

$$a(\phi_j, \phi_j) = \int_0^1 \frac{1 + x_{j-1}}{h} + y + 2hy^2 - \frac{1 + x_{j+1}}{h} + y - 2hy^2 dy \quad (12)$$

$$a(\phi_j, \phi_j) = \int_0^1 \frac{x_{j-1} - x_{j+1}}{h} + 2y + 0y^2 dy \quad (13)$$

Použijeme vztah (9)

$$a(\phi_j, \phi_j) = \int_0^1 \frac{-2h}{h} + 2y dy \quad (14)$$

$$a(\phi_j, \phi_j) = \int_0^1 -2 + 2y dy \quad (15)$$

$$a(\phi_j, \phi_j) = -2 + 1 = -1 \quad (16)$$

Stejným způsobem spočteme (5):

$$a(\phi_j, \phi_{j-1}) = - \int_0^1 (1 + hy + x_{j-1}) \frac{dy}{h} - \int_0^1 2y(1-y)(h) dy \quad (17)$$

$$a(\phi_j, \phi_{j-1}) = - \int_0^1 \frac{1 + x_{j-1}}{h} + y + 2hy(1-y) dy \quad (18)$$

$$a(\phi_j, \phi_{j-1}) = - \int_0^1 \frac{1 + x_{j-1}}{h} + (1 + 2h)y - 2hy^2 dy \quad (19)$$

$$a(\phi_j, \phi_{j-1}) = - \frac{1 + x_{j-1}}{h} - \frac{(1 + 2h)}{2} + \frac{2h}{3} \quad (20)$$

Dosaďme za $x_{j-1} = 2 + (j-1)h$:

$$a(\phi_j, \phi_{j-1}) = - \frac{3}{h} - (j-1) - \frac{(1 + 2h)}{2} + \frac{2h}{3} \quad (21)$$

$$a(\phi_j, \phi_{j-1}) = -j + \frac{1}{2} - \frac{3}{h} - \frac{h}{3} \quad (22)$$

Nakonec ještě použijeme (7):

$$a(\phi_j, \phi_{j-1}) = -j + \frac{1}{2} - 3m - \frac{1}{3m} \quad (23)$$

Pro (6) buď využijme toho že matice je symetrická nebo jednoduše spočtěme:

$$a(\phi_j, \phi_{j+1}) = - \int_0^1 (1 - hy + x_{j+1}) \frac{dy}{h} - \int_0^1 2hy(1 - y) dy \quad (24)$$

$$a(\phi_j, \phi_{j+1}) = - \int_0^1 \frac{(1 - hy + x_{j+1})}{h} + 2hy(1 - y) dy \quad (25)$$

$$a(\phi_j, \phi_{j+1}) = - \int_0^1 \frac{(1 + x_{j+1})}{h} + (2h - 1)y - 2hy^2 dy \quad (26)$$

Opět dosadíme za $x_{j+1} = 2 + (j + 1)h$:

$$a(\phi_j, \phi_{j+1}) = - \int_0^1 \frac{(3 + (j + 1)h)}{h} + (2h - 1)y - 2hy^2 dy \quad (27)$$

$$a(\phi_j, \phi_{j+1}) = - \left(\frac{(3 + (j + 1)h)}{h} + \frac{2h - 1}{2} - \frac{2h}{3} \right) \quad (28)$$

$$a(\phi_j, \phi_{j+1}) = - \frac{(3 + (j + 1)h)}{h} - \frac{1}{2} + \frac{2h}{6} \quad (29)$$

$$a(\phi_j, \phi_{j+1}) = -\frac{3}{h} - j - \frac{1}{2} + \frac{2h}{6} \quad (30)$$

A opět použijeme (7):

$$a(\phi_j, \phi_{j+1}) = -3m - j - \frac{1}{2} + \frac{1}{3m} \quad (31)$$

0.1.3 Výsledek

Nakonec tedy dostáváme:

$$a(\phi_j, \phi_j) = -1 \quad (32)$$

$$a(\phi_j, \phi_{j-1}) = -j + \frac{1}{2} - 3m - \frac{1}{3m} \quad (33)$$

$$a(\phi_j, \phi_{j+1}) = -3m - j - \frac{1}{2} + \frac{1}{3m} \quad (34)$$