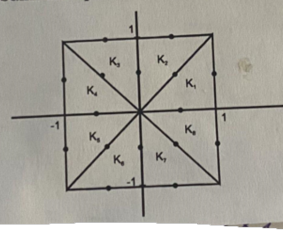
1 Úkol 3 - Příklad 11

1.1 Zadání

11. **příklad:** Pomocí uzlové báze prostoru polynomů nejvýše druhého stupně pro Lagrangeovy prvky, jejichž oblasti K_5 a K_6 jsou dány obrázkem a jejichž uzly jsou rozmístěny rovnoměrně na hranách a ve vrcholech, vyjádřete globální interpolant funkce $(x+y)^3$.



1.2 Řešení

Označme $f(x,y) = (x+y)^3$.

Nejprve najděme lokální interpolant pro K_6.

Začněme nalezením uzlové báze. Máme následující:

- $N_1(f) = f(0,0) = 0$
- $N_2(f) = f(0,-1/2) = -1/8$
- $N_3(f) = f(0,-1) = -1$
- $N_4(f) = f(-1/2,-1) = -27/8$
- $N_5(f) = f(-1,-1) = -8$
- $N_6(f) = f(-1/2,-1/2) = -1$

Hledáme bázi:

$$\Phi_j(x,y) = a_j + b_j x + c_j x + d_j x^2 + e_j y^2 + f_j xy \tag{1}$$

a vyžadujeme podmínku $N_j(I_l) = \delta_{jl}$

Z toho dostáváme následující soustavy rovnic $\forall j \in \hat{6}$

$$
\begin{aligned}
a_j &= \delta_{1j} \\
a_j - \frac{1}{2}c_j + \frac{1}{4}e_j &= \delta_{2j} \\
a_j - c_j + e_j &= \delta_{3j} \\
a_j - \frac{1}{2}b_j - c_j + \frac{1}{4}d_j + e_j + \frac{1}{2} &= \delta_{4j} \\
a_j - b_j - c_j + d_j + e_j + f_j &= \delta_{5j} \\
a_j - \frac{1}{2}b_j - \frac{1}{2}c_j + \frac{1}{4}d_j + \frac{1}{4}e_j + \frac{1}{4}f_j &= \delta_{6j}
\end{aligned}
$$

Tuto soustavu můžeme úsporněji napsat jako:

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\
1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{2} \\
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -\frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\
b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\
c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \\
d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 \\
e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\
f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

Po vyřešení dostaneme:

$$
\begin{pmatrix}
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\
b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\
c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \\
d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 \\
e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\
f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 4 & -1 & 0 & 1 & -4 \\
3 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & -4 & 2 & 0 \\
2 & -4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 4 & -4 & 4 & 0 & -4
\end{pmatrix}
$$

Tedy dostaneme následující uzlové funkce:

- $\Phi_1(x, y) = 1 + 3y + 2y^2$
- $\Phi_2(x, y) = 4x - 4y - 4y^2 + 4xy$
- $\Phi_3(x, y) = -x + y + 2x^2 + 2y^2 - 4xy$
- $\Phi_4(x, y) = -4x^2 + 4xy$
- $\Phi_5(x, y) = x + 2x^2$
- $\Phi_6(x, y) = -4x - 4xy$

Nakonec nalezneme interpolant:

$$\mathcal{I}_{K_6}(x,y) = \sum_{j=1}^{6} N_j(f)\Phi_j(x,y) = -\frac{7}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{9}{2}x^2 - \frac{3}{2}y^2 - 6xy \tag{2}$$

Naprosto stejně můžeme postupovat pro K_5, hledáním báze pro:

- $N_1(f) = f(0,0) = 0$
- $N_2(f) = f(-1/2,0) = -1/8$
- $N_3(f) = f(-1,0) = -1$
- $N_4(f) = f(-1,-1/2) = -27/8$
- $N_5(f) = f(-1,-1) = -8$
- $N_6(f) = f(-1/2,-1/2) = -1$

A pak bychom řešili $\forall j \in \hat{6}$

$$\begin{aligned} a_j &= \delta_{1j} \\ a_j - \frac{1}{2}b_j + \frac{1}{4}d_j &= \delta_{2j} \\ a_j - b_j + d_j &= \delta_{3j} \\ a_j - b_j - \frac{1}{2}c_j + d_j + \frac{1}{4}e_j + \frac{1}{2} &= \delta_{4j} \\ a_j - b_j - c_j + d_j + e_j + f_j &= \delta_{5j} \\ a_j - \frac{1}{2}b_j - \frac{1}{2}c_j + \frac{1}{4}d_j + \frac{1}{4}e_j + \frac{1}{4}f_j &= \delta_{6j} \end{aligned}$$

Nebo si všimneme symetrie úlohy a uvědomíme si, že máme stejnou soustavu rovnic jako pro K_6, pokud bychom v (1) zaměnili x a y.

Z toho plyne, že jako interpolant dostaneme:

$$\mathcal{I}_{K_5}(x,y) = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}y - \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}y^2 - 6xy \tag{3}$$

Jako globální interpolant tedy dostáváme:

$$\mathcal{I}_{K_5 \cap K_6} = \begin{cases} -\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}y - \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}y^2 - 6xy & \text{, na } K_5 \\ -\frac{7}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{9}{2}x^2 - \frac{3}{2}y^2 - 6xy & \text{, na } K_6 \end{cases} \tag{4}$$