به نام او

پاسخ تمرینات سری دهم درس احتمال مهندسی

سوال ۱) طبق تعریف، واریانس برابر است با:

$$\sigma^۲ = \mathbb{E}\{X^۲\} - \mathbb{E}^۲\{X\}$$

بنابراین برای هر یک از متغیرهای تصادفی زیر، باید مقادیر $\mathbb{E}\{X\}$ و $\mathbb{E}\{X^۲\}$ را بیابیم.

الف) (صورت سوال تصحیح شده و به جای e^{-x} ، $e^{۱-x}$ قرار گرفته است.)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{X\} &= \int xf(x)dx = \int_۱^\infty xe^{۱-x}dx \\ &= e\int_۱^\infty xe^{-x}dx = e[-(x+۱)e^{-x}]|_۱^\infty = ۲\end{aligned} \tag{۱}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{X^۲\} &= \int x^۲f(x)dx = \int_۱^\infty x^۲e^{۱-x}dx \\ &= e\int_۱^\infty x^۲e^{-x}dx = e[-(x^۲+۲x+۲)e^{-x}]|_۱^\infty = ۵\end{aligned} \tag{۲}$$

در نتیجه

$$\sigma^۲ = ۱$$

ب)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{X\} &= \int xf(x)dx = \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} x\sin x dx \\ &= (\sin x - x\cos x)|_۰^{\frac{\pi}{۲}} = ۱\end{aligned} \tag{۳}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{X^۲\} &= \int x^۲f(x)dx = \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} x^۲\sin x dx \\ &= (۲x\sin x - (x^۲-۲)\cos x)|_۰^{\frac{\pi}{۲}} = \pi - ۲\end{aligned} \tag{۴}$$

در نتیجه

$$\sigma^{۲} = \pi - ۳$$

پ)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{X\} &= \int xf(x)dx = \int_{۱}^{\infty} x \times \frac{۲}{x^{۳}}dx \\ &= \int_{۱}^{\infty} \frac{۲}{x^{۲}}dx = -\frac{۲}{x}|_{۱}^{\infty} = ۲ \end{aligned} \tag{۵}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{X^{۲}\} &= \int x^{۲}f(x)dx = \int_{۱}^{\infty} x^{۲} \times \frac{۲}{x^{۳}}dx \\ &= ۲\ln|x|\Big|_{۱}^{\infty} = \infty \end{aligned} \tag{۶}$$

در نتیجه

$$\sigma^{۲} = \infty$$

ت)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{X\} &= \sum_{i=۱}^{\infty} i \cdot \Pr\{X=i\} = ۲\sum_{i=۱}^{\infty} i(\frac{۱}{۳})^{i} \\ \mathbb{E}\{X^{۲}\} &= \sum_{i=۱}^{\infty} i^{۲} \cdot \Pr\{X=i\} = ۲\sum_{i=۱}^{\infty} i^{۲}(\frac{۱}{۳})^{i} \end{aligned} \tag{۷}$$

برای محاسبه‌ی $\sum_{i=۱}^{\infty} iu^{i}$ و $\sum_{i=۱}^{\infty} i^{۲}u^{i}$ ، از تساوی $\sum_{i=۱}^{\infty} u^{i} = \frac{u}{۱-u}$ مشتق می گیریم؛ در این صورت

$$\frac{d}{du}\sum_{i=۱}^{\infty} u^{i} = \sum_{i=۱}^{\infty} iu^{i-۱} = \frac{۱}{(۱-u)^{۲}} \implies \sum_{i=۱}^{\infty} iu^{i} = \frac{u}{(۱-u)^{۲}} \tag{۸}$$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{du}\sum_{i=۱}^{\infty} iu^{i} = \sum_{i=۱}^{\infty} i^{۲}u^{i-۱} = -\frac{۱}{(۱-u)^{۲}} + \frac{۲}{(۱-u)^{۳}} \\ &\implies \sum_{i=۱}^{\infty} i^{۲}u^{i} = -\frac{u}{(۱-u)^{۲}} + \frac{۲u}{(۱-u)^{۳}} \end{aligned} \tag{۹}$$

بنابراین

$$\mathbb{E}\{X\} = \frac{۳}{۲} \quad , \quad \mathbb{E}\{X^{۲}\} = -\frac{۳}{۲} + \frac{۹}{۲} = ۳$$

و

$$\sigma^{۲} = \frac{۳}{۴}$$

سوال ۲) الف)

$$\begin{aligned} \phi_X(s) = \mathbb{E}\{e^{sX}\} &= \int e^{sx} f(x) dx = \int_{۱}^{\infty} e^{sx} e^{۱-x} dx \\ &= e \int_{۱}^{\infty} e^{(s-۱)x} dx = e \frac{e^{(s-۱)x}}{s-۱}\Big|_{۱}^{\infty} = \frac{e^s}{۱-s} \end{aligned} \tag{۱۰}$$

بنابراین

$$\mathbb{E}\{X\} = \phi'_X(۰) = \frac{e^s(۱-s)+e^s}{(۱-s)^{۲}}|_{s=۰} = ۲$$

و

$$\mathbb{E}\{X^{۲}\} = \phi''_X(۰) = \frac{e^s(۲-s)(۱-s)^{۲} - e^s(۱-s)^{۲} + ۲e^s(۲-s)(۱-s)}{(۱-s)^{۴}}|_{s=۰} = ۵$$

بنابراین

$$\sigma^{۲} = ۵ - ۲^{۲} = ۱$$

ت)

$$\phi_X(s) = \mathbb{E}\{e^{sX}\} = ۲\sum_{x=۱}^{\infty} e^{sx} (\frac{۱}{۳})^x = ۲\sum_{x=۱}^{\infty} (\frac{e^s}{۳})^x = ۲\frac{\frac{e^s}{۳}}{۱-\frac{e^s}{۳}} \tag{۱۱}$$

در نتیجه

$$\phi'_X(s) = \frac{۲}{(۱-\frac{e^s}{۳})^{۲}} \frac{e^s}{۳}$$

و

$$\phi''_X(s) = \frac{۲}{(۱-\frac{e^s}{۳})^{۲}} \frac{e^s}{۳} + \frac{۴}{(۱-\frac{e^s}{۳})^{۳}} \frac{e^{۲s}}{۹}$$

بنابراین

$$\mathbb{E}\{X\} = \frac{۳}{۲} \quad , \quad \mathbb{E}\{X^۲\} = ۳$$

و

$$\sigma^۲ = \frac{۳}{۴}$$

سوال ۳) الف)

$$\mathbb{E}\{e^{-X}\} = \int e^{-x} f(x)dx = \int_۱^\infty e^{-x}e^{۱-x}dx = -\frac{e^{۱-۲x}}{۲}|_۱^\infty = \frac{۱}{۲e} \qquad (۱۲)$$

ب)

$$\mathbb{E}\{e^{-X}\} = \int e^{-x} f(x)dx = \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} e^{-x}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{۲i}dx$$

$$= \frac{۱}{۲i}\frac{e^{x(i-۱)}}{i-۱}\Big|_۰^{\frac{\pi}{۲}} + \frac{۱}{۲i}\frac{e^{-x(i+۱)}}{i+۱}\Big|_۰^{\frac{\pi}{۲}} = \frac{۱}{۲i}\frac{e^{\frac{-\pi}{۲}}i}{i-۱} - \frac{۱}{۲i}\frac{e^{\frac{-\pi}{۲}}i}{i+۱} + \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}(۱ - e^{-\frac{\pi}{۲}}) \qquad (۱۳)$$

سوال ۴) الف)

$$\begin{aligned}
\int_D f(x,y)dxdy &= \int_۰^{\frac{\pi}{۶}}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} k\sin(x+۳y)dxdy \\
&= \int_۰^{\frac{\pi}{۶}} -k\cos(x+۳y)|_۰^{\frac{\pi}{۲}}dy \\
&= -k\int_۰^{\frac{\pi}{۶}} \cos(\frac{\pi}{۲}+۳y) - \cos(۳y)dy \\
&= -\frac{k}{۳}[\sin(\frac{\pi}{۲}+۳y) - \sin(۳y)]\Big|_۰^{\frac{\pi}{۶}} = \frac{۲k}{۳} = ۱ \implies k = \frac{۳}{۲}
\end{aligned} \qquad (۱۴)$$

$$
\begin{aligned}
\Pr\{X+۳Y\le \frac{۱}{۳}\} &= \frac{۳}{۲}\int_{۰}^{\frac{۱}{۹}}\int_{۰}^{\frac{۱}{۳}-۳y}\sin(x+۳y)dxdy \\
&= -\frac{۳}{۲}\int_{۰}^{\frac{۱}{۹}}\cos(x+۳y)|_{۰}^{\frac{۱}{۳}-۳y}dy \\
&= -\frac{۳}{۲}\int_{۰}^{\frac{۱}{۹}}\cos(\frac{۱}{۳})-\cos(۳y)dy \\
&= \frac{\sin\frac{۱}{۳}}{۲}-\frac{۱}{۶}\cos\frac{۱}{۳}
\end{aligned} \tag{۱۵}
$$

ب)

$$
\begin{aligned}
k &= ۱۲ \\
\Pr\{X+۳Y\le \frac{۱}{۳}\} &= ۱۲\int_{۰}^{\frac{۱}{۹}}\int_{۰}^{\frac{۱}{۳}-۳y}xy(۱-y)dxdy \\
&= ۶\int_{۰}^{\frac{۱}{۹}}(\frac{۱}{۳}-۳y)^۲y(۱-y)dy=\frac{۴۳}{۶۵۶۱۰}
\end{aligned} \tag{۱۶}
$$

سوال ۵) الف)

$$\Pr\{X=۰\}=\Pr\{X=۰,Y=۰\}+\Pr\{X=۰,Y=۱\}=\frac{۱}{۲}-\theta+\theta=\frac{۱}{۲}$$

$$\Pr\{X=۱\}=۱-\Pr\{X=۰\}=\frac{۱}{۲}$$

به طریق مشابه

$$\Pr\{Y=۰\}=\Pr\{Y=۱\}=\frac{۱}{۲}$$

ب)

$$P(X=Y)=P(X=Y=۰)+P(X=Y=۱)=۱-۲\theta=۱\implies\theta=۰$$

پ) باید به ازای هر $x\in\{۰,۱\}$ و هر $y\in\{۰,۱\}$ داشته باشیم

$$\Pr\{X=x,Y=y\}=\Pr\{X=x\}\Pr\{Y=y\}$$

که به چهار معادله زیر منجر می شود

$$
\begin{aligned}
\Pr\{X=۰, Y=۰\} &= \Pr\{X=۰\}\Pr\{Y=۰\} = \frac{۱}{۴}\\
\Pr\{X=۱, Y=۰\} &= \Pr\{X=۱\}\Pr\{Y=۰\} = \frac{۱}{۴}\\
\Pr\{X=۰, Y=۱\} &= \Pr\{X=۰\}\Pr\{Y=۱\} = \frac{۱}{۴}\\
\Pr\{X=۱, Y=۱\} &= \Pr\{X=۱\}\Pr\{Y=۱\} = \frac{۱}{۴}
\end{aligned}
\qquad (۱۷)
$$

از معادله اول داریم

$$\frac{۱}{۲} - \theta = \frac{۱}{۴}$$

که نتیجه می دهد

$$\theta = \frac{۱}{۴}$$

سایر معادلات نیز به پاسخ $\theta = \frac{۱}{۴}$ می رسند که نشان می دهد که به ازای این مقدار از θ ، متغیرهای تصادفی X و Y مستقل خواهند بود.