به نام زیبایی

پاسخ تمرینات سری هفتم سیگنال ها و سیستم ها

سوال ۱)

الف)

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\alpha t}\cos\omega_{\circ} t u(t) \\ &= \frac{۱}{۲}(e^{(\alpha+j\omega_{\circ})t} + e^{(\alpha-j\omega_{\circ})t})u(t) \end{aligned}$$

از طرفی

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\alpha+j\omega)t}e^{-j\omega t}u(t)dt &= \int_{\circ}^{\infty} e^{(\alpha+j\omega_{\circ}-j\omega)t}dt \\ &= \frac{۱}{\alpha+j\omega_{\circ}-j\omega}e^{(\alpha+j\omega_{\circ}-j\omega)t}\Big|_{\circ}^{\infty} \\ &= \frac{-۱}{\alpha+j\omega_{\circ}-j\omega} \end{aligned}$$

بنابراین، تبدیل فوریه برابر است با

$$X(j\omega) = \frac{-\frac{۱}{۲}}{\alpha+j\omega_{\circ}-j\omega} + \frac{-\frac{۱}{۲}}{\alpha-j\omega_{\circ}-j\omega}$$

ب) ضرب در t در حوزه‌ی زمان، معادل با مشتق در حوزه‌ی فرکانس است؛ بنابراین کافی است از تبدیل فوریه ی بالا مشتق گرفته و در j ضرب کنیم. با این کار:

$$X(j\omega) = \frac{\frac{۱}{۲}}{(\alpha+j\omega_{\circ}-j\omega)^{۲}} + \frac{\frac{۱}{۲}}{(\alpha-j\omega_{\circ}-j\omega)^{۲}}$$

پ) $\mathrm{sinc}(t)$ دارای تبدیل فوریه ی $\Pi(\frac{\omega}{۲\pi})$ و $\mathrm{sinc}(t)$ دارای تبدیل فوریه‌ی $\Pi(\frac{\omega}{۲\pi})e^{-j\omega}$ است. از طرفی ضرب دو سیگنال در زمان، معادل با کانولوشن تبدیل های فوریه‌ی آنها در فرکانس است؛ بنابراین

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \frac{۱}{۲\pi}\Pi(\frac{\omega}{۲\pi}) * \Pi(\frac{\omega}{۲\pi})e^{-j\omega} \\ &= \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Pi(\frac{\omega-u}{۲\pi})\Pi(\frac{u}{۲\pi})e^{-ju}du \\ &= \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Pi(\frac{\omega-u}{۲\pi})e^{-ju}du \end{aligned}$$

تابع $\Pi(\frac{\omega-u}{2\pi})$ در بازه ای که $\omega-\pi < u < \omega+\pi$ مقدار ثابت ۱ دارد و در غیر این صورت برابر ۰ است. به ازای $0 \le \omega \le \pi$

$$\begin{aligned}
X(j\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Pi(\frac{\omega-u}{2\pi})e^{-ju}du \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\omega-\pi}^{\pi}e^{-ju}du \\
&= \frac{j}{2\pi}e^{-ju}\Big|_{\omega-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{j}{2\pi}[e^{-j\omega}-1]
\end{aligned}$$

و به ازای $-\pi \le \omega \le 0$

$$\begin{aligned}
X(j\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Pi(\frac{\omega-u}{2\pi})e^{-ju}du \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\omega+\pi}e^{-ju}du \\
&= \frac{j}{2\pi}e^{-ju}\Big|_{-\pi}^{\omega+\pi} \\
&= \frac{j}{2\pi}[1+e^{-j(\pi+\omega)}] \\
&= \frac{j}{2\pi}[1-e^{-j\omega}]
\end{aligned}$$

بنابراین

$$X(j\omega) = \begin{cases} \frac{j}{2\pi}[e^{-j\omega}-1] & , \quad 0 \le \omega \le \pi \\ \frac{j}{2\pi}[1-e^{-j\omega}] & , \quad -\pi \le \omega \le 0 \end{cases}$$

ت) این سیگنال عبارت است از خروجی سیستمی با پاسخ ضربه‌ی $e^{-|t|}$ و پاسخ فرکانسی $H(j\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$ که ورودی متناوب $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-2k)$ به آن اعمال شده است. ضرایب سری فوریه‌ی ورودی بسادگی برابر $a_k = \frac{1}{2}$ است. پس از آنجا که خروجی نیز متناوب می شود، ضرایب سری فوریهی آن عبارتست از (اثبات در سوال ۸):

$$b_k = a_k H(jk\omega_0) = \frac{1}{2}H(jk\pi) = \frac{1}{1+k^2\pi^2}$$

در نتیجه تبدیل فوریه‌ی خروجی و در نتیجه سیگنال مورد نظر ما عبارتست از:

$$Y(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2\pi}{1+k^2\pi^2}\delta(\omega-k\pi)$$

ث) سیگنال $x(t)$ فرد است؛ در نتیجه:

$$\begin{aligned}
X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \\
&= \int_{-۲}^{۲} x(t)e^{-j\omega t}dt \\
&= \int_{-۲}^{۲} x(t)[\cos\omega t - j\sin\omega t]dt \\
&= -j\int_{-۲}^{۲} x(t)\sin\omega t dt \\
&= -۲j\int_{۰}^{۲} x(t)\sin\omega t dt \\
&= -۲j\int_{۰}^{۱} x(t)\sin\omega t dt \\
&- ۲j\int_{۱}^{۲} x(t)\sin\omega t dt \\
&= -۲j\int_{۰}^{۱} t\sin\omega t dt \\
&- ۲j\int_{۱}^{۲} \sin\omega t dt \\
&= -۲j\frac{\sin\omega - \omega\cos ۲\omega}{\omega^۲}
\end{aligned}$$

سوال ۲)

الف)

$$\cos(۴\omega + \frac{\pi}{۳}) = \frac{۱}{۲}(e^{j۴\omega + \frac{j\pi}{۳}} + e^{-j۴\omega - \frac{j\pi}{۳}}) \iff$$
$$\frac{۱}{۲}[e^{j\frac{\pi}{۳}}\delta(t+۴) + e^{-j\frac{\pi}{۳}}\delta(t-۴)]$$

ب)

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{۱}{\pi}(e^{jt} - e^{-jt}) + \frac{۳}{۲\pi}(e^{j۲\pi t} + e^{-j۲\pi t}) \\
&= \frac{۲j}{\pi}\sin t + \frac{۳}{\pi}\cos ۲\pi t
\end{aligned}$$

پ) می خواهیم عکس تبدیل فوریه‌ی $(۶\mathrm{sinc}(\frac{۳}{\pi}(\omega - ۲\pi))$ را پیدا کنیم. برای حل این سوال، از مجموعه ای از خواص تبدیل فوریه استفاده می کنیم. از آنجا که

$$\Pi(t) \iff \mathrm{sinc}(\frac{\omega}{۲\pi})$$

بنابراین

$$
\begin{aligned}
\frac{۱}{۶}\Pi(\frac{t}{۶}) &\iff \operatorname{sinc}(\frac{۳\omega}{\pi}) \\
\Pi(\frac{t}{۶}) &\iff ۶\operatorname{sinc}(\frac{۳\omega}{\pi}) \\
\Pi(\frac{t}{۶})e^{j۲\pi t} &\iff ۶\operatorname{sinc}(\frac{۳(\omega-۲\pi)}{\pi})
\end{aligned}
$$

پس سیگنال مورد نظر ما، $\Pi(\frac{t}{۶})e^{j۲\pi t}$ است.

ت) مشابه قسمت ث سوال پیش، $X(j\omega)$ فرد است؛ در نتیجه:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \\
&= \frac{۱}{۲\pi}\int_{-۳}^{۳} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \\
&= \frac{۱}{۲\pi}\int_{-۳}^{۳} X(j\omega)[\cos\omega t + j\sin\omega t]d\omega \\
&= \frac{j}{۲\pi}\int_{-۳}^{۳} X(j\omega)\sin\omega t d\omega \\
&= \frac{j}{\pi}\int_{۰}^{۳} X(j\omega)\sin\omega t d\omega \\
&= \frac{j}{\pi}\int_{۱}^{۲} X(j\omega)\sin\omega t d\omega \\
&+ \frac{j}{\pi}\int_{۲}^{۳} X(j\omega)\sin\omega t d\omega \\
&= \frac{j}{\pi}\int_{۱}^{۲} (\omega-۱)\sin\omega t d\omega \\
&+ \frac{j}{\pi}\int_{۲}^{۳} \sin\omega t d\omega \\
&= \frac{\sin ۲t - \sin t - t\cos ۳t}{t^۲}
\end{aligned}
$$

سوال ۳)

الف) سیگنال $x(t)$، شیفت یافته‌ی یک سیگنال زوج به اندازه ی ۱ واحد به راست است. از آنجا که تبدیل فوریه ی سیگنال حقیقی و زوج، خود حقیقی و زوج است، بنابراین دارای فاز صفر بوده و با شیفت ۱ واحد به راست، تبدیل فوریه در عبارت $e^{-j\omega}$ ضرب می شود که باعث می شود فاز خالص $-\omega$ داشته باشیم.

ب)

$$
X(j۰) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = ۷
$$

پ)

$$x(۰) = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)d\omega = ۲ \implies \int_{-\infty}^{\infty} x(j\omega)d\omega = ۴\pi$$

ت) عکس تبدیل فوریه‌ی $۲\frac{\sin\omega}{\omega}e^{۲j\omega}$ برابر $y(t) = \Pi\left(\frac{t}{۲}+۱\right)$ است. طبق تساوی

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(-t)dt = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)Y(j\omega)d\omega$$

خواهیم داشت

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)Y(j\omega)d\omega = ۷\pi$$

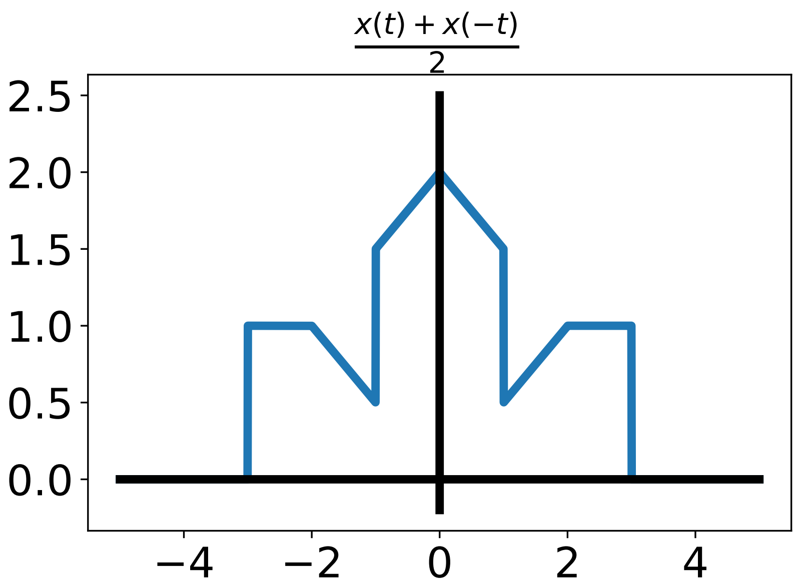
ث) طبق اتحاد پارسوال:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^۲ d\omega = ۲\pi\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^۲ dt = \frac{۷۶\pi}{۳}$$

ج)
از آنجا که سیگنال حقیقی است، $\Re\{X(j\omega)\}$ برابر تبدیل فوریه ی قسمت زوج سیگنال است؛ یعنی

$$\Re\{X(j\omega)\} \iff x_e(t) = \frac{x(t)+x(-t)}{۲}$$

این سیگنال دارای شکل زیر است:



سوال ۴)

پاسخ فرکانسی این سه سیستم برابر است با

$$H_{۱}(j\omega) = \frac{۱}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$
$$H_{۲}(j\omega) = -۲ + \frac{۵}{۲ + j\omega}$$
$$H_{۳}(j\omega) = \frac{۲}{(۱ + j\omega)^{۲}}$$

از آنجا که سیستم LTI فرکانس جدیدی به سیستم اضافه نمی کند، پاسخ به یک سیگنال کسینوسی معادل با سیگنال کسینوسی ای با همان فرکانس است؛ پس با قرار دادن $\omega = ۱$ در تمام پاسخ فرکانسی ها بالا، به مقدار یکسان

$$H_{۱}(j۱) = H_{۲}(j۱) = H_{۳}(j۱) = -j$$

می رسیم که معادل با پاسخ $\cos(t - \frac{\pi}{۲})$ است .

ب) سیستمی با پاسخ فرکانسی $H(j\omega) = -j\frac{a^{۲}+۱}{a^{۲}+\omega^{۲}}\omega$ نیز به ازای $a \neq ۰$ دارای چنین خاصیتی است؛ زیرا:

$$H(j۱) = -j$$

سوال ۵)

برای این سیستم:

$$[(j\omega)^{۲} + ۶j\omega + ۸]Y(j\omega) = ۲X(j\omega)$$

بنابراین

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{۲}{(j\omega)^{۲} + (j\omega)^{۲} + ۸} = \frac{۲}{(j\omega + ۲)(j\omega + ۴)} = \frac{۱}{j\omega + ۲} - \frac{۱}{j\omega + ۴}$$

که معادل با

$$h(t) = (e^{-۲t} - e^{-۴t})u(t)$$

ب) تبدیل فوریه‌ی ورودی عبارت است از:

$$X(j\omega) = j\frac{d}{d\omega}\frac{۱}{۲ + j\omega} = \frac{۱}{(۲ + j\omega)^{۲}}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= X(j\omega)H(j\omega) \\ &= \frac{۱}{(۲ + j\omega)^{۳}} - \frac{۱}{(۲ + j\omega)^{۲}(۴ + j\omega)} \\ &= \frac{۱}{(۲ + j\omega)^{۳}} + \frac{۱/۴}{۴ + j\omega} - \frac{۱/۴}{۲ + j\omega} + \frac{۱/۸}{(۲ + j\omega)^{۲}} \end{aligned}$$

و در نتیجه

$$y(t) = \left[\frac{۱}{۲}t^{۲}e^{-۲t} - \frac{۱}{۴}e^{-۲t} + \frac{۱}{۸}te^{-۲t} + \frac{۱}{۴}e^{-۴t}\right]u(t)$$

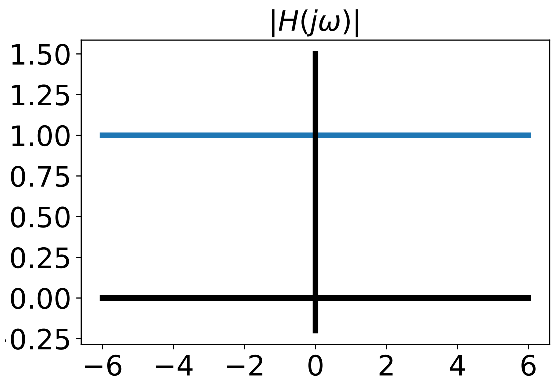
سوال ۶)

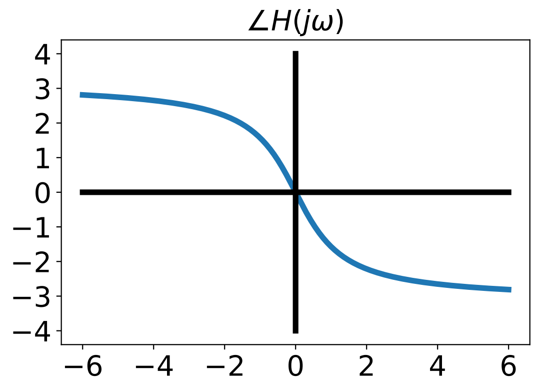
بسادگی دیده می شود:

$$|H(j\omega)| = \frac{\sqrt{a^{۲}+\omega^{۲}}}{\sqrt{a^{۲}+\omega^{۲}}} = ۱$$

و

$$\angle H(j\omega) = \tan^{-۱} -\frac{\omega}{a} - \tan^{-۱}\frac{\omega}{a} = -۲\tan^{-۱}\frac{\omega}{a}$$

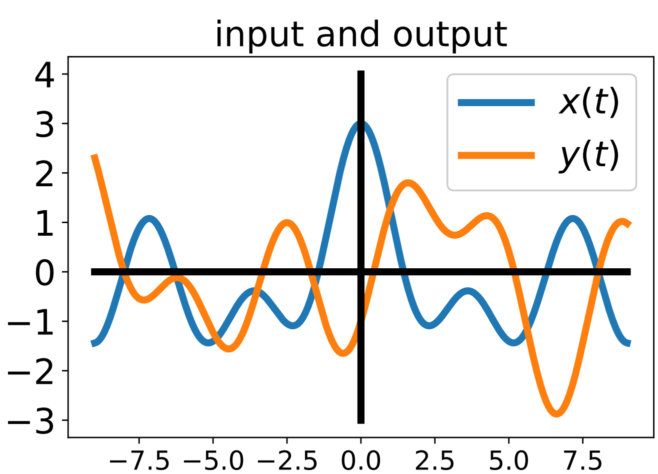




به ازای $\omega = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$ ، $\omega = ۱$ و $\omega = \sqrt{۳}$ ، فاز این سیستم برابر خواهد بود با $-\frac{\pi}{۳}$ ، $-\frac{\pi}{۲}$ و $-\frac{۲\pi}{۳}$. در نتیجه

$$y(t) = \cos(\frac{t}{\sqrt{۳}} - \frac{\pi}{۳}) + \cos(t - \frac{\pi}{۲}) + \cos(t\sqrt{۳} - \frac{۲\pi}{۳})$$

شکل ورودی و خروجی به صورت زیر است:

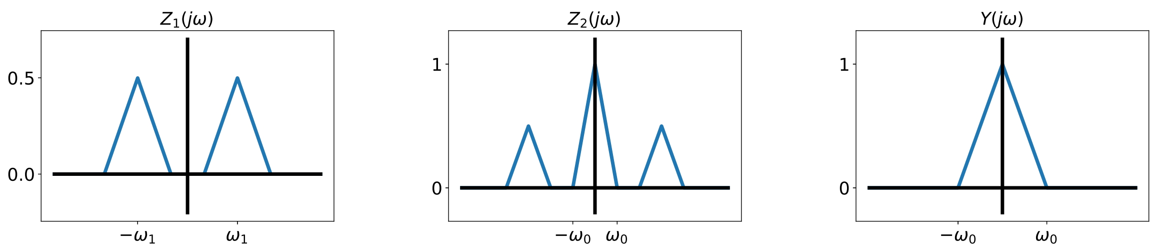


سوال ۷) الف)

$$z_{۱}(t) = x(t)\cos\omega_{۱}t \implies Z_{۱}(j\omega) = \frac{X(j(\omega-\omega_{۱})) + X(j(\omega+\omega_{۱}))}{۲}$$

$$\begin{aligned} & z_{۲}(t) = ۲z_{۱}(t)\cos\omega_{۱}t \implies \\ & Z_{۲}(j\omega) = Z_{۱}(j(\omega-\omega_{۱})) + Z_{۱}(j(\omega+\omega_{۱})) \\ & = X(j\omega) + \frac{X(j(\omega-۲\omega_{۱})) + X(j(\omega+۲\omega_{۱}))}{۲} \end{aligned}$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega)$$



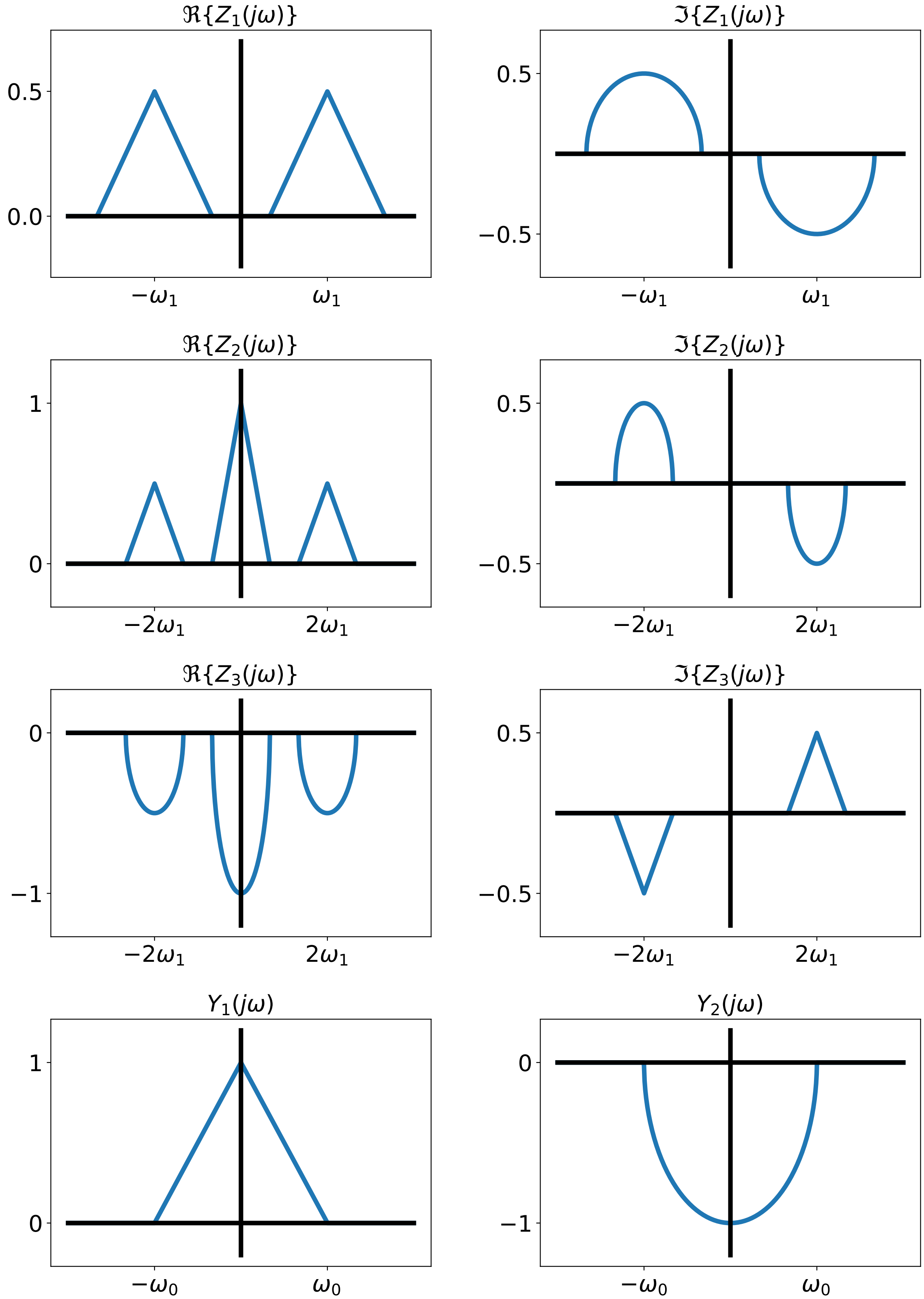
ب)

$$\begin{aligned} Z_{۱}(j\omega) = & \frac{۱}{۲}[X_{۱}(j(\omega-\omega_{۱})) + X_{۱}(j(\omega+\omega_{۱}))] \\ & + \frac{۱}{۲j}[X_{۲}(j(\omega-\omega_{۱})) - X_{۲}(j(\omega+\omega_{۱}))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{۲}(j\omega) &= Z_{۱}(j(\omega-\omega_{۱})) + Z_{۱}(j(\omega+\omega_{۱})) \\ &= \frac{۱}{۲}X_{۱}(j(\omega-۲\omega_{۱})) + X_{۱}(j\omega) + \frac{۱}{۲}X_{۱}(j(\omega+۲\omega_{۱})) \\ &+ \frac{۱}{۲j}[X_{۲}(j(\omega-۲\omega_{۱})) - X_{۲}(j(\omega+۲\omega_{۱}))] \\ Z_{۳}(j\omega) &= -\frac{۱}{j}[Z_{۱}(j(\omega-\omega_{۱})) - Z_{۱}(j(\omega+\omega_{۱}))] \\ &= -\frac{۱}{۲j}X_{۱}(j(\omega-۲\omega_{۱})) - \frac{۱}{۲j}X_{۱}(j(\omega+۲\omega_{۱})) \\ &- \frac{۱}{۲}X_{۲}(j(\omega-۲\omega_{۱})) - X_{۲}(j\omega) - \frac{۱}{۲}X_{۲}(j(\omega+۲\omega_{۱})) \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} Y_{۱}(j\omega) &= X_{۱}(j\omega) \\ Y_{۲}(j\omega) &= X_{۲}(j\omega) \end{aligned}$$



سوال ۸)

الف) چون

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

و

$$y(t+T) = x(t+T) * h(t)$$

در نتیجه اگر دوره‌ی تناوب $x(t)$ برابر T باشد، خواهیم داشت:

$$x(t+T) = x(t) \implies y(t+T) = y(t)$$

ب)

$$y(t) = x(t) * h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_\circ t} * h(t)$$

$$\iff ۲\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_\circ) H(j\omega)$$

$$= ۲\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(jk\omega_\circ) \delta(\omega - k\omega_\circ)$$

از آنجا که تبدیل فوریه ی $y(t)$ شامل ضربه هایی با اندازه‌ی $a_k H(jk\omega_\circ)$ است، پس ضرایب سری فوریه‌ی $y(t)$ برابر $a_k H(jk\omega_\circ)$ بوده و اثبات کامل است.

سوال ۹)

الف)

$$h(t) = \frac{۱}{\pi t}$$

ب) از آنجا که

$$u(t) \iff \frac{۱}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

طبق دوگانی

$$\frac{۱}{jt} + \pi\delta(t) \iff ۲\pi u(-\omega)$$

بنابراین

$$\frac{۱}{jt} \iff ۲\pi u(-\omega) - \pi$$

$$\frac{۱}{\pi t} \iff ۲ju(-\omega) - j$$

که با شکستن آن روی مقادیر منفی و مثبت ω می توان به نتیجه دلخواه رسید.

پ)

$$\cos ۳t \iff \pi[\delta(\omega - ۳) + \delta(\omega + ۳)]$$

بنابراین تبدیل هیلبرت آن در حوزه‌ی فرکانس برابر است با

$$\pi[-j\delta(\omega - ۳) + j\delta(\omega + ۳)] = \frac{\pi}{j}\pi[\delta(\omega - ۳) - \delta(\omega + ۳)]$$

که معادل با سیگنال $\sin ۳t$ است.

ت)

$$h(t) * h(t) \iff H(j\omega) \times H(j\omega) = H^۲(j\omega) = -۱$$

سوال ۱۰)

تعریف کنید $z(t) = x(t)y^*(t)$. در این صورت طبق خاصیت ضرب دو سیگنال در حوزه‌ی زمان

$$x(t)y^*(t) \iff \frac{۱}{۲\pi}X(j\omega) * Y^*(-j\omega)$$

از آنجا که

$$Z(j۰) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t)dt$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} z(t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt \\ &= \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(ju)Y^*(j[u-\omega])du\Big|_{\omega=۰} \\ &= \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(ju)Y^*(ju)du \\ &= ۰\end{aligned}$$

در نتیجه $\int_{-\infty}^{\infty} X(ju)Y^*(ju)du = ۰$ و اثبات کامل است.

سوال ۱۱)

الف) به ازای $a > ۰$

$$\begin{aligned}X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}u(t)dt \\ &= \int_{۰}^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt \\ &= \frac{۱}{a + j\omega}\end{aligned}$$

ب) با n بار ضرب کردن سیگنال حوزه‌ی زمان فوق در t خواهیم داشت:

$$t^n e^{-at}u(t) \iff j^n\frac{d^n}{d\omega^n}\frac{۱}{a+j\omega} = \frac{j^n \times j^n \times (-۱)^n(n-۱)!}{(a+j\omega)^n} = \frac{(n-۱)!}{(a+j\omega)^n}$$

در نتیجه طبق دوگانی

$$(n-۱)!\frac{۱}{(a+jt)^n} \iff ۲\pi(-\omega)^n e^{a\omega}u(-\omega)$$

و خواهیم داشت

$$\frac{۱}{(a+jt)^n} \iff \frac{۲\pi(-۱)^n}{(n-۱)!}\omega^n e^{a\omega}u(-\omega)$$