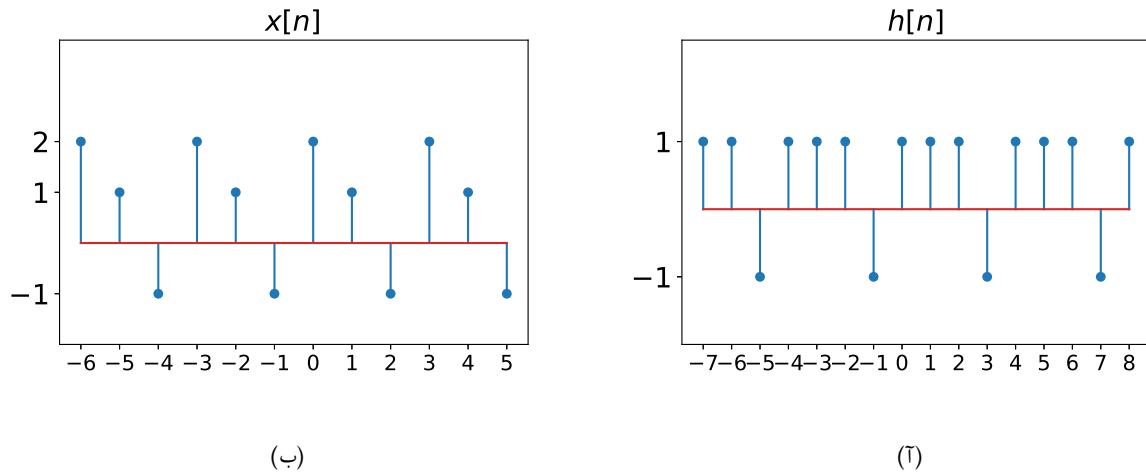


به نام زیبایی
تمرینات سری نهم سیگنال ها و سیستم ها

سوال (۱)

دو سیگنال متناوب زیر را در نظر بگیرید:

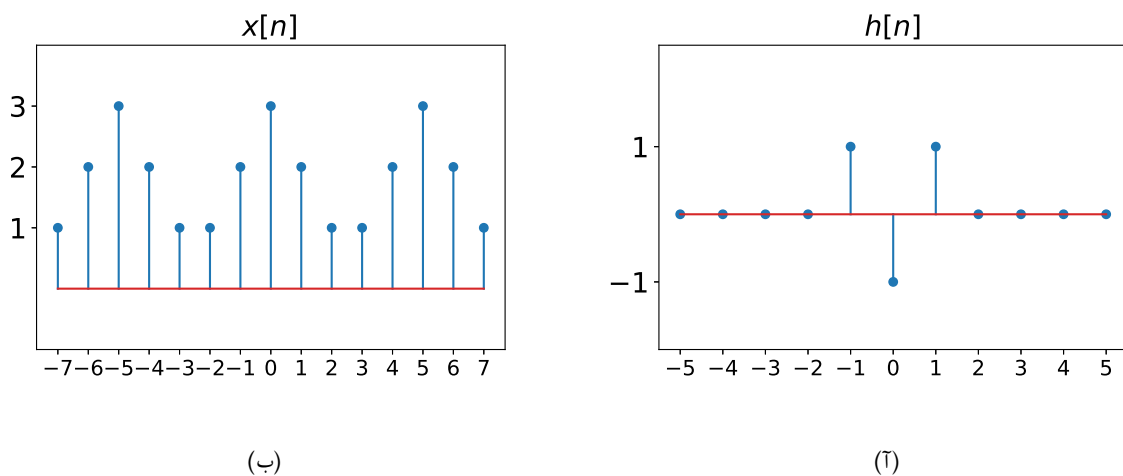


شکل ۱

برای این دو سیگنال، کانولوشن دایروی آنها را به کمک محاسبه ی کانولوشن هر تناوب از دو سیگنال به دست آورید.

سوال (۲)

فرض کنید ورودی متناوب $x[n]$ به سیستم LTI با پاسخ ضربه ی زمان محدود $h[n]$ داده شده است. خروجی این سیستم، $y[n]$ ، چیست؟



شکل ۲

سوال (۳)

الف) فرض کنید اطلاعات زیر در مورد سیگنال متناوب $x[n]$ با دوره‌ی اساسی ۸ و ضرایب فوریه‌ی a_k داده شده است:

$$a_k = -a_{k-4}$$

$$x[2n+1] = (-1)^n$$

در این صورت، یک تناوب از $x[n]$ را رسم کنید.

ب) فرض کنید سیگنال متناوب $x[n]$ با دوره‌ی اساسی ۸ و ضرایب فوریه‌ی a_k داده شده است به گونه‌ای که $a_k = -a_{k-4}$ و داریم

$$y[n] = \left(\frac{1 + (-1)^n}{2} \right) x[n-1]$$

اگر ضرایب فوریه‌ی $y[n]$ را با b_k نمایش دهیم، تابع گسسته‌ی $f[k]$ را به گونه‌ای بیابید که

$$b_k = f[k]a_k$$

سوال (۴)

اگر سیگنال $x[n]$ ، متناوب با دوره‌ی تناوب اساسی N و دارای ضرایب سری فوریه‌ی a_k باشد، در این صورت ضرایب سری فوریه‌ی سیگنال‌های زیر را به دست آورید.

الف) $x[n] - x[n - \frac{N}{4}]$ (فرض کنید N زوج است)
 ب) $x[n] + x[n + \frac{N}{4}]$ (فرض کنید N زوج است؛ دقت کنید که این سیگنال با دوره‌ی $\frac{N}{4}$ متناوب است)

پ) $(-1)^n x[n]$ (فرض کنید N زوج است)
 ت) $(-1)^n x[n]$ (فرض کنید N فرد است؛ دقت کنید که این سیگنال با دوره‌ی $2N$ متناوب است)

$$y[n] = \begin{cases} x[n] & , \text{ زوج } n \\ 0 & , \text{ فرد } n \end{cases}$$

سوال (۵)

(خواص سری فوریه‌ی گسسته)

فرض کنید ضرایب سری فوریه‌ی سیگنال‌های متناوب $x[n]$ و $y[n]$ با دوره تناوب N ، به ترتیب برابر a_k و b_k باشد؛ یعنی

$$x[n] \iff a_k$$

$$y[n] \iff b_k$$

در این صورت، نشان دهید

(الف)

$$\sum_{r=0}^{N-1} x[r]y[n-r] \iff Na_k b_k$$

(ب)

$$x[n]y[n] \iff \sum_{l=0}^{N-1} a_l b_{k-l}$$

(پ)

$$x[n] - x[n-1] \iff (1 - e^{-jk\frac{\pi}{n}}) a_k$$

(ت)

$$\sum_{k=-\infty}^n x[k] \iff \left(\frac{1}{1 - e^{-jk\frac{\pi}{n}}} \right) a_k$$

(ث) اگر $x[n]$ حقیقی باشد، آنگاه

$$a_k = a_{-k}^*$$

$$\Re\{a_k\} = \Re\{a_{-k}\}$$

$$\Im\{a_k\} = -\Im\{a_{-k}\}$$

$$|a_k| = |a_{-k}|$$

$$\angle a_k = -\angle a_{-k}$$

و نتیجه بگیرید اگر $x[n]$ حقیقی و زوج باشد، a_k حقیقی و زوج و اگر $x[n]$ حقیقی و فرد باشد، a_k موهومی محض و فرد خواهد بود.

(ج) اگر $x[n]$ حقیقی باشد، آنگاه

$$x_e[n] = \frac{x[n] + x[-n]}{2} \iff \Re\{a_k\}$$

$$x_o[n] = \frac{x[n] - x[-n]}{2} \iff j\Im\{a_k\}$$

(چ) (رابطه‌ی پارسوال)

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |a_k|^2$$