به نام او

تمرینات سری دوازدهم درس احتمال مهندسی

سوال ۱)

$$
\begin{aligned}
F_X(x|X<1) &= \Pr\{X\le x|X<1\} \\
&= \frac{\Pr\{X\le x, x<1\}}{\Pr\{X<1\}} \\
&= \begin{cases} \frac{\Pr\{X\le x\}}{\Pr\{X<1\}} & , \quad 0<x<1 \\ \frac{\Pr\{X<1\}}{\Pr\{X<1\}} & , \quad x\ge 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} & , \quad 0<x<1 \\ 1 & , \quad x\ge 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} x & , \quad 0<x<1 \\ 1 & , \quad x\ge 1 \end{cases}
\end{aligned} \tag{1}
$$

همچنین

$$
\begin{aligned}
F_X(x|X>1) &= \Pr\{X\le x|X>1\} \\
&= \frac{\Pr\{X\le x, x>1\}}{\Pr\{X>1\}} \\
&= \begin{cases} 0 & , \quad 0<x<1 \\ \frac{\Pr\{1<X<x\}}{\Pr\{X>1\}} & , \quad x\ge 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & , \quad 0<x<1 \\ \frac{\frac{x-1}{2}}{\frac{1}{2}} & , \quad x\ge 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & , \quad 0<x<1 \\ x-1 & , \quad 1<x<2 \end{cases}
\end{aligned} \tag{2}
$$

بنابراین

$$
\begin{aligned}
f_X(x|X > ۱) &= \frac{d}{dx} F_X(x|X > ۱) \\
&= \begin{cases} ۱ & , \quad ۱ < x < ۲ \\ ۰ & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}
\end{aligned}
\tag{۳}
$$

بسادگی از محاسبات (و همچنین شهود) می توان نتیجه گرفت که چون X دارای توزیع یکنواخت بین ۰ و ۲ است، $X|۰/۵ < X < ۱/۵$ دارای توزیع یکنواخت بین ۰/۵ و ۱/۵ خواهد بود. بنابراین واضح است که مقدار متوسط این متغیر تصادفی برابر ۱ خواهد بود.

سوال ۲) توزیع $X|X > a$ عبارتست از

$$
\begin{aligned}
F(x|X > a) &= \Pr\{X \leq x|X > a\} \\
&= \frac{\Pr\{X \leq x, X > a\}}{\Pr\{X > a\}} \\
&= \begin{cases} \frac{\Pr\{X \leq x, X > a\}}{\Pr\{X > a\}} & , \quad x > a \\ ۰ & , \quad x < a \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{e^{-\lambda a} - e^{-\lambda x}}{e^{-\lambda a}} & , \quad x > a \\ ۰ & , \quad x < a \end{cases} \\
&= \begin{cases} ۱ - e^{-\lambda(x-a)} & , \quad x > a \\ ۰ & , \quad x < a \end{cases}
\end{aligned}
\tag{۴}
$$

بنابراین

$$
f(x|X > a) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-a)} & , \quad x > a \\ ۰ & , \quad x < a \end{cases}
\tag{۵}
$$

بنابراین

$$
\begin{aligned}
E\{X|X>a\} &= \int xf(X|X>a)dx \\
&= \int_a^\infty \lambda x e^{-\lambda(x-a)}dx \\
&= \int_a^\infty \lambda(x-a+a)e^{-\lambda(x-a)}dx \\
&= \int_۰^\infty \lambda(u+a)e^{-\lambda u}du \\
&= \int_۰^\infty (\lambda u+\lambda a)e^{-\lambda u}du \\
&= \int_۰^\infty \lambda u e^{-\lambda u}du + \int_۰^\infty \lambda a e^{-\lambda u}du \\
&= \frac{۱}{\lambda} + a
\end{aligned}
\tag{۶}
$$

همچنین

$$
\begin{aligned}
E\{X\} &= \int xf(x)dx \\
&= \int_۰^\infty \lambda x e^{-\lambda x}dx \\
&= \frac{۱}{\lambda}
\end{aligned}
\tag{۷}
$$

این نشان می دهد

$$E\{X|X>a\} = E\{X\} + a$$

که همان خاصیت بی حافظه بودن متغیرهای نمایی است؛ به این معنا که تفاوتی نمیکند این متغیر از چه لحظه ای به بعد مشاهده شود. از هر لحظه ای به بعد، معادل با مشاهده آن در لحظه صفر خواهد بود.

سوال ۳) الف) ابتدا توزیع $X|X \geq ۴$ را می یابیم. بدین منظور:

$$\begin{aligned} p(x|X \geq ۴) &= \Pr\{X = x|X \geq ۴\} \\ &= \frac{\Pr\{X = x, X \geq ۴\}}{\Pr\{X \geq ۴\}} \\ &= \begin{cases} \frac{\Pr\{X=x\}}{\Pr\{X \geq ۴\}} & , \quad x \geq ۴ \\ ۰ & , \quad x < ۴ \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{\Pr\{X=x\}}{(۱-p)^۴} & , \quad x \geq ۴ \\ ۰ & , \quad x < ۴ \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{(۱-p)^x p}{(۱-p)^۴} & , \quad x \geq ۴ \\ ۰ & , \quad x < ۴ \end{cases} \\ &= \begin{cases} (۱-p)^{x-۴} p & , \quad x \geq ۴ \\ ۰ & , \quad x < ۴ \end{cases} \end{aligned} \tag{۸}$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned} E\{X|X \geq ۴\} &= \sum_{x=۴}^{\infty} x(۱-p)^{x-۴} p \\ &= \sum_{u+۴=۴}^{\infty} (u+۴)(۱-p)^u p \\ &= ۴ + \sum_{u=۰}^{\infty} u(۱-p)^u p \\ &= \frac{۱}{p} + ۳ \end{aligned} \tag{۹}$$

و

$$
\begin{aligned}
E\{X^{۲}|X \geq ۴\} &= \sum_{x=۴}^{\infty} x^{۲}(۱-p)^{x-۴}p \\
&= \sum_{u+۴=۴}^{\infty} (u+۴)^{۲}(۱-p)^{u}p \\
&= \sum_{u=۰}^{\infty}(u^{۲}+۸u+۱۶)(۱-p)^{u}p \\
&= ۱۶+۸(\frac{۱}{p}-۱)+\frac{(۱-p)(۲-p)}{p^{۲}} \\
&= \frac{۱۶p^{۲}+۸p(۱-p)+(۱-p)(۲-p)}{p^{۲}} \\
&= \frac{۱۶p^{۲}+۸p-۸p^{۲}+p^{۲}-۳p+۲}{p^{۲}} \\
&= \frac{۹p^{۲}+۵p+۲}{p^{۲}}
\end{aligned} \qquad (۱۰)
$$

و می توان نوشت

$$
\begin{aligned}
\mathrm{var}(X|X \geq ۴) &= E\{X^{۲}|X \geq ۴\} - E^{۲}\{X|X \geq ۴\} \\
&= \frac{۹p^{۲}+۵p+۲}{p^{۲}} - \frac{۹p^{۲}+۶p+۱}{p^{۲}} \\
&= \frac{۱-p}{p^{۲}}
\end{aligned} \qquad (۱۱)
$$

ب)

$$
\begin{aligned}
\Pr\{X=x|\text{زوج است X}\} &= \frac{\Pr\{X=x, X=۰,۲,۴,\cdots\}}{\Pr\{X=۰,۲,۴,\cdots\}} \\
&= \begin{cases} \frac{\Pr\{X=x\}}{\Pr\{X=۰,۲,۴,\cdots\}} & , \quad \text{زوج x} \\ ۰ & , \quad \text{فرد x} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{(۱-p)^x p}{\sum_{u=۰}^{\infty}(۱-p)^{۲u} p} & , \quad \text{زوج x} \\ ۰ & , \quad \text{فرد x} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{(۱-p)^x}{\frac{۱}{۱-(۱-p)^۲}} & , \quad \text{زوج x} \\ ۰ & , \quad \text{فرد x} \end{cases} \\
&= \begin{cases} (۱-p)^x - (۱-p)^{x+۲} & , \quad \text{زوج x} \\ ۰ & , \quad \text{فرد x} \end{cases} \\
&= \begin{cases} p(۲-p)(۱-p)^x & , \quad \text{زوج x} \\ ۰ & , \quad \text{فرد x} \end{cases}
\end{aligned}
\tag{۱۲}
$$

سوال ۴) الف)

$$
\begin{aligned}
\Pr\{Y \geq ۳\} &= \int_{۳}^{\infty} f_Y(y)dy \\
&= \int_{۳}^{\infty} \sum_{x=۱}^{۶} f_{X,Y}(x,y)dy \\
&= \int_{۳}^{\infty} \sum_{x=۱}^{۶} f_x(x) f_{Y|X}(x,y)dy \\
&= \int_{۳}^{\infty} \sum_{x=۱}^{۶} \frac{۱}{۶} f_{Y|X}(x,y)dy \\
&= \frac{۱}{۶} \int_{۳}^{\infty} f_{Y|X}(۱,y)dy \\
&+ \frac{۱}{۶} \int_{۳}^{\infty} f_{Y|X}(۲,y)dy \\
&+ \frac{۱}{۶} \int_{۳}^{\infty} f_{Y|X}(۳,y)dy \\
&+ \frac{۱}{۶} \int_{۳}^{\infty} f_{Y|X}(۴,y)dy \\
&+ \frac{۱}{۶} \int_{۳}^{\infty} f_{Y|X}(۵,y)dy \\
&+ \frac{۱}{۶} \int_{۳}^{\infty} f_{Y|X}(۶,y)dy \\
&= \frac{۱}{۶}(\frac{۱}{۴} + \frac{۲}{۵} + \frac{۳}{۶}) \\
&= \frac{۲۳}{۱۲۰}
\end{aligned} \tag{۱۳}
$$

ب)

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \sum_x f_{X,Y}(x,y) \\
&= \sum_x f_x(x) f_{Y|X}(x,y) \\
&= \frac{۱}{۶} \sum_{x=۱}^{۶} f_{Y|X}(x,y) \\
&= \frac{۱}{۶} \times \begin{cases}
۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۶} & , \quad ۰ < y < ۱ \\
\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۶} & , \quad ۱ < y < ۲ \\
\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۶} & , \quad ۲ < y < ۳ \\
\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۶} & , \quad ۳ < y < ۴ \\
\frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۶} & , \quad ۴ < y < ۵ \\
\frac{۱}{۶} & , \quad ۵ < y < ۶
\end{cases} \\
&= \begin{cases}
\frac{۴۹}{۱۲۰} & , \quad ۰ < y < ۱ \\
\frac{۲۹}{۱۲۰} & , \quad ۱ < y < ۲ \\
\frac{۱۹}{۱۲۰} & , \quad ۲ < y < ۳ \\
\frac{۳۷}{۳۶۰} & , \quad ۳ < y < ۴ \\
\frac{۱۱}{۱۸۰} & , \quad ۴ < y < ۵ \\
\frac{۱}{۳۶} & , \quad ۵ < y < ۶
\end{cases}
\end{aligned} \qquad (۱۴)
$$

بنابراین

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\{Y\} &= \int_{۰}^{۶} y f_Y(y) dy \\
&= \cdots (!!!) \\
&= ۱/۷۵
\end{aligned} \qquad (۱۵)
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\{Y^۲\} &= \int_۰^۶ y^۲ f_Y(y) dy \\
&= \cdots (!!!) \\
&\approx ۵/۰۶
\end{aligned}
\tag{۱۶}
$$

بنابراین

$$\mathrm{var}(Y) \approx ۲$$