به نام زیبایی

پاسخ تمرینات سری دهم سیگنال ها و سیستم ها

سوال ۱)

الف)

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (u[n]-u[n-۵])e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=\circ}^{۴} e^{-j\omega n} \\ &= \begin{cases} \frac{۱-e^{-۵j\omega}}{۱-e^{-j\omega}} & , \quad \omega \neq ۲k\pi \\ ۵ & , \quad \omega = ۲k\pi \end{cases} \end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (۱/۳)^n u[n] e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=\circ}^{\infty} (۱/۳e^{-j\omega})^n \\ &= \frac{۱}{۱-۱/۳e^{-j\omega}} \end{aligned}$$

زیرا $|۱/۳e^{-j\omega}| < ۱$.

پ)

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} -(۱/۳)^n u[-n-۱] e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-۱} -(۱/۳e^{-j\omega})^n \\ &\notin \mathbb{R} \end{aligned}$$

که وجود ندارد زیرا $|۱/۳e^{-j\omega}| < ۱$ (دقت کنید که اندیس n در این جمع منفی است)

ت) طبق خاصیت

$$\sin\omega_\circ n \overset{F.T.}{\Longleftrightarrow} \frac{\pi}{j}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\left[\delta(\omega-۲\pi l-\omega_\circ)-\delta(\omega-۲\pi l+\omega_\circ)\right]$$

$$\cos\omega_\circ n \overset{F.T.}{\Longleftrightarrow} \pi\sum_{l=-\infty}^{\infty}\left[\delta(\omega-۲\pi l-\omega_\circ)+\delta(\omega-۲\pi l+\omega_\circ)\right]$$

بنابراین

$$X(e^{j\omega}) = \frac{\pi}{j}\sum_{l=-\infty}^{\infty}[\delta(\omega - ۲\pi l - \frac{\pi}{۲}) - \delta(\omega - ۲\pi l + \frac{\pi}{۲})]$$
$$+ \pi\sum_{l=-\infty}^{\infty}[\delta(\omega - ۲\pi l - ۱) + \delta(\omega - ۲\pi l + ۱)]$$

ث) طبق جدول خواص:

$$nx[n] \iff j\frac{d}{d\omega}X(e^{j\omega})$$

بنابراین با کمک قسمت ب:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{۱/۳e^{-j\omega}}{(۱ - ۱/۳e^{-j\omega})^۲}$$

سوال ۲)

الف)

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-۱)^k\delta(\omega - \frac{\pi}{۲}k)$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - \pi - ۲\pi k)$$
$$- \sum_{k=-\infty}^{\infty}[\delta(\omega - \frac{\pi}{۲} - ۲\pi k) + \delta(\omega + \frac{\pi}{۲} - ۲\pi k)]$$
$$+ \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - ۲\pi k)$$

بنابراین

$$x[n] = \frac{۱}{۲\pi}[۱ + (-۱)^n - ۲\cos\frac{\pi}{۲}n]$$

ب) با تعریف $u = e^{-j\omega}$ خواهیم داشت:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{۱ - \frac{۱}{۳}u}{۱ - \frac{۱}{۴}u - \frac{۱}{۸}u^۲}$$
$$= \frac{۸}{۳}\frac{u - ۳}{u^۲ + ۲u - ۸}$$
$$= \frac{۸}{۳}\frac{u - ۳}{(u - ۲)(u + ۴)}$$
$$= \frac{-\frac{۴}{۹}}{u - ۲} + \frac{\frac{۲۸}{۹}}{u + ۴}$$
$$= \frac{\frac{۲}{۹}}{۱ - \frac{۱}{۲}u} + \frac{\frac{۷}{۹}}{۱ + \frac{۱}{۴}u}$$
$$= \frac{\frac{۲}{۹}}{۱ - \frac{۱}{۲}e^{-j\omega}} + \frac{\frac{۷}{۹}}{۱ + \frac{۱}{۴}e^{-j\omega}}$$

در نتیجه

$$x[n] = \frac{۲}{۹}(\frac{۱}{۲})^n u[n] + \frac{۷}{۹}(-\frac{۱}{۴})^n u[n]$$

پ) با تعریف $u = e^{-j\omega}$ خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
X(e^{j\omega}) &= \frac{۱}{۱-u^۴} \\
&= \frac{A}{u-۱} + \frac{B}{u+۱} + \frac{C}{u-j} + \frac{D}{u+j} \\
&= \frac{-\frac{۱}{۴}}{u-۱} + \frac{\frac{۱}{۴}}{u+۱} + \frac{-\frac{j}{۴}}{u-j} + \frac{\frac{j}{۴}}{u+j} \\
&= \frac{\frac{۱}{۴}}{۱-u} + \frac{\frac{۱}{۴}}{۱+u} + \frac{\frac{۱}{۴}}{۱+ju} + \frac{\frac{۱}{۴}}{۱-ju}
\end{aligned}
$$

از طرفی چون:

$$u[n] \iff \frac{۱}{۱-e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - ۲\pi k)$$

بنابراین طبق خواص:

$$e^{j\omega_۰ n}u[n] \iff \frac{۱}{۱-e^{-j\omega}e^{j\omega_۰}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_۰ - ۲\pi k)$$

در نتیجه:

$$
\begin{aligned}
X(e^{j\omega}) = {} & \frac{\frac{۱}{۴}}{۱-e^{-j\omega}} + \frac{\frac{۱}{۴}}{۱+e^{-j\omega}} + \frac{\frac{۱}{۴}}{۱+je^{-j\omega}} + \frac{\frac{۱}{۴}}{۱-je^{-j\omega}} \\
& + \frac{\pi}{۴} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - ۲\pi k) + \frac{\pi}{۴} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \pi - ۲\pi k) \\
& + \frac{\pi}{۴} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{\pi}{۲} - ۲\pi k) + \frac{\pi}{۴} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + \frac{\pi}{۲} - ۲\pi k) \\
& - \frac{\pi}{۴} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - ۲\pi k) - \frac{\pi}{۴} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \pi - ۲\pi k) \\
& - \frac{\pi}{۴} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{\pi}{۲} - ۲\pi k) - \frac{\pi}{۴} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + \frac{\pi}{۲} - ۲\pi k)
\end{aligned}
$$

و برای سیگنال حوزه زمان خواهیم داشت:

$$x[n] = \frac{۱}{۴}\{۱ + (-۱)^n + j^n + (-j)^n\}\left\{u[n] - \frac{۱}{۲}\right\}$$

سوال ۳)

الف)

$$X(e^{j۰}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = ۵$$

ب) سیگنال $x[n+۱]$ یک سیگنال زوج با فاز تبدیل فوریه‌ی صفر است؛ بنابراین فاز تبدیل فوریه‌ی $x[n]$ برابر $-j\omega$ خواهد بود.

پ)

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})d\omega = ۲\pi x[۰] = ۴\pi$$

ت)

$$X(e^{j\pi}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-۱)^n x[n] = -۴$$

ث)

$$\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^۲ d\omega = ۲\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^۲ = ۷۴\pi$$

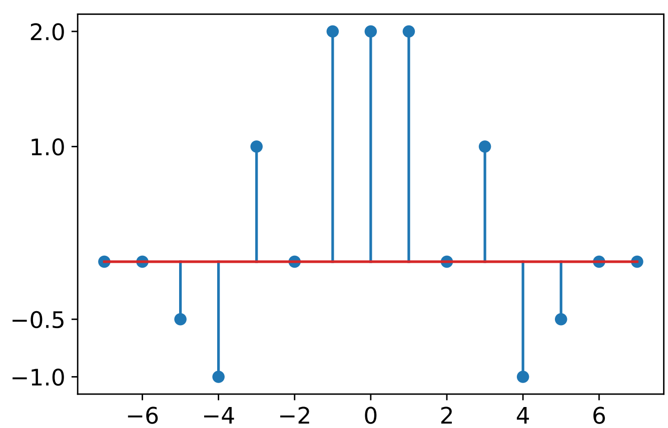
ج)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}\right|^۲ d\omega = ۲\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |nx[n]|^۲ = ۵۲۶\pi$$

چ) چون $x[n]$ حقیقی است، داریم:

$$x_e[n] \iff \Re\{X(e^{j\omega})\}$$

(شکل در صفحه ی بعد موجود است)



شکل ۱: شکل مربوط به سوال ۳ قسمت چ)

سوال ۴)

الف)

$$x[-n] \iff X(e^{-j\omega})$$

در نتبجه

$$y[n] = x[-n]\Big|_{n\to n-۱} + x[-n]\Big|_{n\to n+۱} \iff Y(e^{j\omega}) = ۲X(e^{-j\omega})\cos\omega$$

ب)

$$Y(e^{j\omega}) = \Re\{X(e^{j\omega})\}$$

پ)

$$
\begin{aligned}
&X(e^{j\omega}) = \sum x[n]e^{-j\omega n} \implies \\
&X(e^{j\omega})e^{j\omega} = \sum x[n]e^{-j\omega(n-۱)} \implies \\
&\frac{d^۲}{d\omega^۲}X(e^{j\omega})e^{j\omega} = \sum -(n-۱)^۲x[n]e^{-j\omega(n-۱)} \implies \\
&[X''(e^{j\omega}) - X(e^{j\omega}) + ۲jX'(e^{j\omega})]e^{j\omega} \\
&= \sum -(n-۱)^۲x[n]e^{-j\omega(n-۱)} \implies \\
&(n-۱)^۲x[n] \iff X(e^{j\omega}) - X''(e^{j\omega}) - ۲jX'(e^{j\omega})
\end{aligned}
$$

سوال ۵)

از شرط اول نتیجه می شود:

$$H(e^{j\omega})\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۴}e^{-j\omega}} = a + be^{-j\omega}$$

یا به طور معادل

$$H(e^{j\omega}) = (a + be^{-j\omega})(۱ - \frac{۱}{۴}e^{-j\omega})$$

همچنین چون طبق شرط سوم پاسخ فرکانسی با دوره‌ی π متناوب است، باید ضریب $e^{-j\omega}$ صفر باشد؛ پس

$$b = \frac{۱}{۴}a \implies H(e^{j\omega}) = a(۱ + \frac{۱}{۴}e^{-j\omega})(۱ - \frac{۱}{۴}e^{-j\omega}) = a(۱ - \frac{۱}{۱۶}e^{-۲j\omega})$$

و در نهایت از شرط دوم خواهیم داشت:

$$a(۱ - \frac{۱}{۱۶}e^{-۲j\frac{\pi}{۲}}) = ۱ \implies a = \frac{۱۶}{۱۷}$$

در نهایت

$$h[n] = \frac{۱}{۱۷}(۱۶ - \delta[n-۲])$$

سوال ۶)

الف)

$$
\begin{aligned}
H(e^{j\omega}) &= \frac{۲ - e^{-j\omega}}{(۱ + \frac{۱}{۲}e^{-j\omega})(۱ - \frac{۱}{۲}e^{-j\omega} + \frac{۱}{۴}e^{-۲j\omega})} \\
&= \frac{۲ - e^{-j\omega}}{۱ + \frac{۱}{۸}e^{-۳j\omega}}
\end{aligned}
$$

در نتیجه رابطه ورودی خروجی به صورت زیر است:

$$y[n] + \frac{۱}{۸}y[n-۳] = ۲x[n] - x[n-۱]$$

ب) با تعریف $u = e^{-j\omega}$:

$$\begin{aligned}
H(e^{j\omega}) &= \frac{۲ - u}{۱ + \frac{۱}{۸}u^{۳}} = -۸\frac{u - ۲}{u^{۳} + ۸} \\
&= \frac{A}{u + ۲} + \frac{B}{u + ۲e^{j\frac{\pi}{۳}}} + \frac{C}{u + ۲e^{-j\frac{\pi}{۳}}} \\
&= \frac{\frac{۸}{۳}}{u + ۲} + \frac{-\frac{۴}{۳}}{u + ۲e^{j\frac{\pi}{۳}}} + \frac{-\frac{۴}{۳}}{u + ۲e^{-j\frac{\pi}{۳}}} \\
&= \frac{\frac{۴}{۳}}{۱ + \frac{۱}{۲}u} + \frac{-\frac{۲}{۳}e^{-j\frac{\pi}{۳}}}{۱ + \frac{۱}{۲}e^{-j\frac{\pi}{۳}}u} + \frac{-\frac{۲}{۳}e^{j\frac{\pi}{۳}}}{۱ + \frac{۱}{۲}e^{j\frac{\pi}{۳}}u}
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$h[n] = \frac{۴}{۳}u[n]\left\{(-\frac{۱}{۲})^{n} - (-\frac{۱}{۲}e^{j\frac{\pi}{۳}})^{n+۱} - (-\frac{۱}{۲}e^{-j\frac{\pi}{۳}})^{n+۱}\right\}$$

سوال ۷)

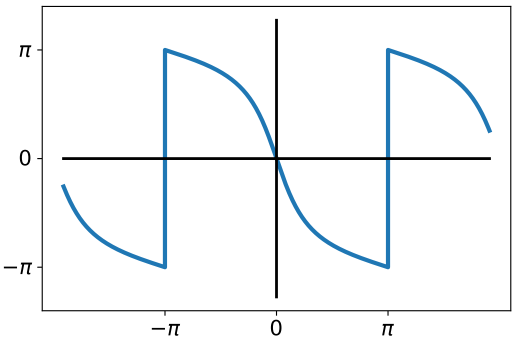
$$H(e^{j\omega}) = \frac{b + e^{-j\omega}}{۱ - ae^{-j\omega}}$$

در نتیجه

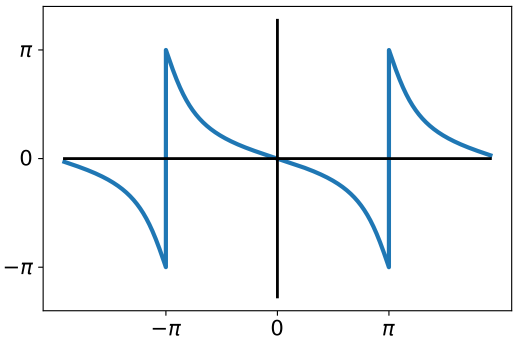
$$|H(e^{j\omega})|^{۲} = \frac{۱ + b^{۲} + ۲b\cos\omega}{۱ + a^{۲} - ۲a\cos\omega}$$

بنابراین $b = -a$.

ب و پ)



(آ) $a = \frac{۱}{۲}$



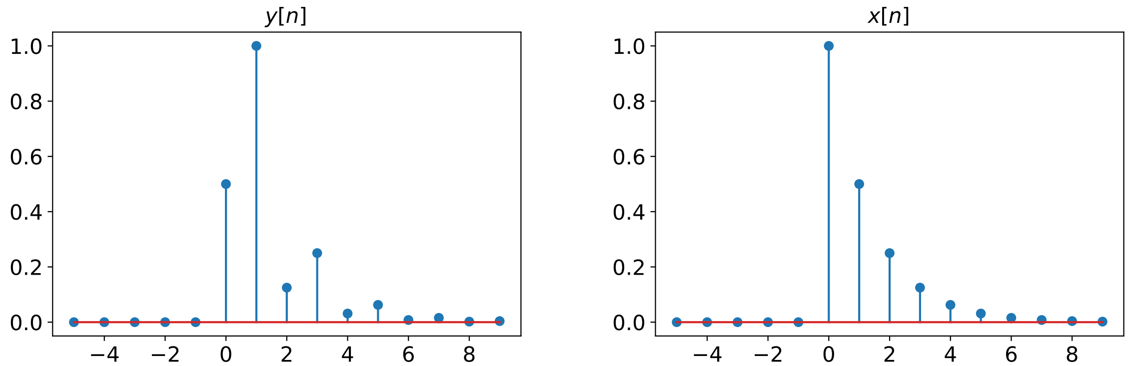
(ب) $a = -\frac{۱}{۲}$

ت)

$$\begin{aligned}
Y(e^{j\omega}) &= \frac{\frac{۱}{۲} + e^{-j\omega}}{۱ + \frac{۱}{۲}e^{-j\omega}} \cdot \frac{۱}{۱ - \frac{۱}{۲}e^{-j\omega}} \\
&= \frac{-\frac{۳}{۴}}{۱ + \frac{۱}{۲}e^{-j\omega}} + \frac{\frac{۵}{۴}}{۱ - \frac{۱}{۲}e^{-j\omega}}
\end{aligned}$$

بنابراین

$$x[n] = u[n]\left\{\frac{۵}{۴}(\frac{۱}{۲})^{n} - \frac{۳}{۴}(-\frac{۱}{۲})^{n}\right\}$$



سوال ۸)

الف) به ازای $\omega \geq 0$ ، پاسخ فرکانسی دارای اندازه‌ی ω و فاز ۰ و به ازای $\omega < 0$ ، پاسخ فرکانسی دارای اندازه‌ی $-\omega$ و فاز π است؛ بنابراین

$$H(e^{j\omega}) = \omega, -\pi < \omega \leq \pi$$

ب)

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \omega e^{j\omega n} d\omega = \begin{cases} \frac{2\pi}{jn}(-1)^n & , \quad n \neq 0 \\ 0 & , \quad n = 0 \end{cases}$$

سوال ۹)

الف)

$$X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-1)}) \implies x[n] = x[n]e^{jn}$$

از آنجا که جز در $n = 0$ مقدار e^{jn} هیچگاه ۱ نمی شود، در نتیجه داریم:

$$x[n] = 0 \quad , \quad n \neq 0$$

و این گزاره درست است.

ب)

$$X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\pi)}) \implies x[n] = x[n]e^{j\pi n} = x[n](-1)^n$$

از آنجا که در $n = 2k$ مقدار $(-1)^n$ برابر ۱ می شود، در نتیجه این گزاره نادرست است.

پ) از این تساوی نتیجه می شود که چون $X(e^{j\omega})$ به دوره‌ی 2π متناوب است، در نتیجه $X(e^{j\frac{\omega}{2}})$ نیز با دوره‌ی 2π متناوب بوده و داریم:

$$X(e^{j\frac{\omega+2\pi}{2}}) = X(e^{j(\frac{\omega}{2}+\pi)}) = X(e^{j\frac{\omega}{2}}) = X(e^{j\omega})$$

بنابراین

$$\frac{1}{2}X(e^{j(\frac{\omega}{2})}) + \frac{1}{2}X(e^{j(\frac{\omega}{2}+\pi)}) = X(e^{j\omega})$$

از طرفی می دانیم

$$x[2n] \iff \frac{1}{2}X(e^{j(\frac{\omega}{2})}) + \frac{1}{2}X(e^{j(\frac{\omega}{2}+\pi)})$$

$$x[2n+1] \iff \frac{1}{2}e^{-j\omega}(X(e^{j(\frac{\omega}{2})}) - X(e^{j(\frac{\omega}{2}+\pi)}))$$

بنابراین

$$x[n] = x[۲n]$$
$$x[۲n+۱] = ۰$$

که نتیجه می دهد

$$x[n] = ۰ \quad , \quad n \neq ۰$$

و این گزاره درست است.

ت) می دانیم

$$\begin{cases} x[n/۲] & , \quad n \text{ زوج} \\ ۰ & , \quad n \text{ فرد} \end{cases} \Longleftrightarrow X(e^{۲j\omega})$$

بنابراین

$$x[n] = \begin{cases} x[n/۲] & , \quad n \text{ زوج} \\ ۰ & , \quad n \text{ فرد} \end{cases}$$

که مشابه همان قسمت قبل است؛ یعنی نمونه های فرد سیگنال صفر هستند و برای نمونه های زوج

$$x[n] = x[۲n]$$

و به همین دلیل این گزاره نیز درست است.

سوال ۱۰)

الف-۱) این سیستم خطی است زیرا عملیات های $e^{-j\omega}X(e^{j\omega})$ و $\frac{d}{d\omega}X(e^{j\omega})$ به ترتیب معادل با $x[n-۱]$ و $-jnx[n]$ هستند که هر دو خطی اند؛ ولی چون عملیات $-jnx[n]$ تغییر پذیر با زمان است، در نتیجه کل سیستم خطی و تغییرپذیر با زمان می شود.

الف-۲) به وضوح $X(e^{j\omega}) = ۱$ بنابراین

$$Y(e^{j\omega}) = ۲ + e^{-j\omega}$$

و

$$y[n] = ۲ + \delta[n-۱]$$

ب) می توان نوشت:

$$Y(e^{j\omega}) = \int_{\omega-\frac{\pi}{۴}}^{\omega+\frac{\pi}{۴}} X(e^{j\omega})d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})H(e^{j(\omega-\theta)})d\theta =$$

که در آن:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} ۱ & , \quad |\omega| < \frac{\pi}{۴} \\ ۰ & , \quad \frac{\pi}{۴} \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

بنابراین طبق خواص:

$$y[n] = ۲x[n]\frac{\sin\frac{\pi}{۴}n}{n}$$

سوال ۱۱)

الف)

$$
\begin{aligned}
&X(e^{j\omega}) = \sum_n x[n]e^{-j\omega n} \implies \\
&\frac{d}{d\omega}X(e^{j\omega}) = \sum_n -jnx[n]e^{-j\omega n} \implies \\
&-jnx[n] \iff \frac{d}{d\omega}X(e^{j\omega}) \\
&nx[n] \iff j\frac{d}{d\omega}X(e^{j\omega})
\end{aligned}
$$

ب) سیگنال $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ خروجی سیستمی با پاسخ ضربه‌ی $u[n]$ و ورودی $x[n]$ است؛ از طرفی:

$$
u[n] \iff \frac{۱}{۱-e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - ۲k\pi)
$$

بنابراین

$$
\begin{aligned}
Y(e^{j\omega}) &= \frac{X(e^{j\omega})}{۱-e^{-j\omega}} + \pi X(e^{j\omega}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - ۲k\pi) \\
&= \frac{X(e^{j\omega})}{۱-e^{-j\omega}} + \pi X(e^{j۰}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - ۲k\pi)
\end{aligned}
$$

پ)

$$
\begin{aligned}
&x[n] \iff X(e^{j\omega}) \implies \\
&X(e^{j\omega}) = \sum_n x[n]e^{-j\omega n} \implies \\
&X^*(e^{j\omega}) = \sum_n x^*[n]e^{j\omega n} \implies \\
&X^*(e^{-j\omega}) = \sum_n x^*[n]e^{-j\omega n} \implies \\
&x^*[n] \iff X^*(e^{-j\omega})
\end{aligned}
$$

از آنجا که به دلیل حقیق بودن سیگنال داریم $x[n] = x^*[n]$ در نتیجه $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$.

اگر سیگنال حقیقی باشد؛ در این صورت:

$$
\begin{aligned}
x_e[n] &= \frac{x[n]+x[-n]}{۲} = \frac{x[n]+x^*[-n]}{۲} \iff \frac{X(e^{j\omega})+X^*(e^{j\omega})}{۲} = \Re\{X(e^{j\omega})\} \\
x_o[n] &= \frac{x[n]-x[-n]}{۲} = \frac{x[n]-x^*[-n]}{۲} \iff \frac{X(e^{j\omega})-X^*(e^{j\omega})}{۲} = j\Im\{X(e^{j\omega})\}
\end{aligned}
$$

ت)

$$\begin{aligned}
\sum_n |x[n]|^۲ &= \frac{۱}{۴\pi^۲} \sum_n \int_{۲\pi} \int_{۲\pi} X(e^{j\theta_۱}) X^*(e^{j\theta_۲}) e^{jn\theta_۱} e^{-jn\theta_۲} d\theta_۱ d\theta_۲ \\
&= \frac{۱}{۴\pi^۲} \sum_n \int_{۲\pi} \int_{۲\pi} X(e^{j\theta_۱}) X^*(e^{j\theta_۲}) e^{jn\theta_۱} e^{-jn\theta_۲} d\theta_۱ d\theta_۲ \\
&= \frac{۱}{۴\pi^۲} \int_{۲\pi} \int_{۲\pi} X(e^{j\theta_۱}) X^*(e^{j\theta_۲}) \sum_n e^{jn(\theta_۱-\theta_۲)} d\theta_۱ d\theta_۲ \\
&= \frac{۱}{۴\pi^۲} \int_{۲\pi} \int_{۲\pi} X(e^{j\theta_۱}) X^*(e^{j\theta_۲}) ۲\pi\delta(\theta_۱-\theta_۲) d\theta_۱ d\theta_۲ \\
&= \frac{۱}{۲\pi} \int_{۲\pi} \int_{۲\pi} X(e^{j\theta_۱}) X^*(e^{j\theta_۱}) \delta(\theta_۱-\theta_۲) d\theta_۱ d\theta_۲ \\
&= \frac{۱}{۲\pi} \int_{۲\pi} \int_{۲\pi} |X(e^{j\theta_۱})|^۲ \delta(\theta_۱-\theta_۲) d\theta_۱ d\theta_۲ \\
&= \frac{۱}{۲\pi} \int_{۲\pi} |X(e^{j\theta_۱})|^۲ d\theta_۱
\end{aligned}$$

ث) اگر ضرایب سری فوریه‌ی $y(t)$ را با a_k نشان دهیم، در این صورت:

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{۱}{۲\pi} \int_{۲\pi} y(t) e^{-j\omega_۰ kt} dt \\
&= \frac{۱}{۲\pi} \int_{۲\pi} X(e^{jt}) e^{-jkt} dt \\
&= \frac{۱}{۲\pi} \int_{۲\pi} X(e^{j\omega}) e^{-jk\omega} d\omega \\
&= x[-k]
\end{aligned}$$