به نام او

پاسخ تمرینات سری یازدهم درس احتمال مهندسی

سوال ۱)

بنا به تعریف و خواص چگالی های احتمال:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dy \\ E\{X\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{XY}(x,y)dxdy \\ E\{XY\} &= \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{XY}(x,y)dxdy \end{aligned} \tag{۱}$$

الف)

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int \frac{۱}{\pi} e^{-x^۲-y^۲} dy \\ &= \int \frac{۱}{\pi} e^{-x^۲} e^{-y^۲} dy \\ &= \frac{۱}{\pi} e^{-x^۲} \int e^{-y^۲} dy \\ &= \frac{۱}{\sqrt{\pi}} e^{-x^۲} \frac{۱}{\sqrt{\pi}} \int e^{-y^۲} dy \\ &= \frac{۱}{\sqrt{\pi}} e^{-x^۲} \end{aligned} \tag{۲}$$

$$E\{X\} = \int \frac{x}{\sqrt{\pi}} e^{-x^۲} dx = ۰ \tag{۳}$$

زیرا $\frac{۱}{\sqrt{\pi}} e^{-x^۲}$ یک تابع فرد روی اعداد حقیقی است.

$$E\{XY\} = \iint xy\frac{۱}{\pi}e^{-x^۲-y^۲}dxdy$$
$$= \iint xy\frac{۱}{\pi}e^{-x^۲}e^{-y^۲}dxdy \quad (۴)$$
$$= \frac{۱}{\pi}\int xe^{-x^۲}dx\int ye^{-y^۲}dy = ۰$$

ب)

$$f_X(x) = \int_{|x-۱|+|y-۱|<۱}\frac{۳}{۲}(۱-|x-۱|-|y-۱|)dy \quad (۵)$$

با تغییر متغیر $y \to y+۱$ می توان نوشت:

$$f_X(x) = \int_{|x-۱|+|y|<۱}\frac{۳}{۲}(۱-|x-۱|-|y|)dy \quad (۶)$$

از آنجا که ناحیه $|x-۱|+|y|<۱$ و تابع $\frac{۳}{۲}(۱-|x-۱|-|y|)$ هر دو نسبت به y زوج هستند، می توان انتگرال را تنها برای $y>۰$ حساب نموده و مقدار آن را دو برابر کرد؛ به عبارت دیگر:

$$f_X(x) = ۲\int_{|x-۱|+|y|<۱,y>۰}\frac{۳}{۲}(۱-|x-۱|-y)dy$$
$$= ۳\int_{y=۰}^{۱-|x-۱|}۱-|x-۱|-ydy \quad (۷)$$
$$= ۳(۱-|x-۱|)y-۳\frac{y^۲}{۲}\Big|_{y=۰}^{۱-|x-۱|}$$
$$= \frac{۳}{۲}(۱-|x-۱|)^۲ \quad , \quad ۰<x<۲$$

بنابراین

$$f_X(x) = \begin{cases}\frac{۳}{۲}(۱-|x-۱|)^۲ & , \quad ۰<x<۲\\ ۰ & , \quad \text{سایر جاها}\end{cases}$$

دو روش برای محاسبه امید ریاضی X وجود دارد. روش اول، روش مستقیم انتگرال گیری است. روش دوم این است که توجه کنیم که چگالی احتمال X حول $x = ۱$ متقارن است. به سادگی می توان گفت که امید ریاضی X باید برابر ۱ باشد.

$$
\begin{aligned}
E\{XY\} &= \int_{|x-۱|+|y-۱|<۱} xy\frac{۳}{۲}(۱-|x-۱|-|y-۱|)dxdy \\
&= \int_{|u|+|w|<۱} (u+۱)(w+۱)\frac{۳}{۲}(۱-|u|-|w|)dudw \\
&= \int_{|u|+|w|<۱} uw\frac{۳}{۲}(۱-|u|-|w|)dudw \\
&+ \int_{|u|+|w|<۱} u\frac{۳}{۲}(۱-|u|-|w|)dudw \\
&+ \int_{|u|+|w|<۱} w\frac{۳}{۲}(۱-|u|-|w|)dudw \\
&+ \int_{|u|+|w|<۱} \frac{۳}{۲}(۱-|u|-|w|)dudw
\end{aligned}
\tag{۸}
$$

از ۴ انتگرال آخر، سه انتگرال اول برابر صفرند زیرا تابع تحت انتگرال نسبت به u و w فرد بوده و

بازه انتگرال گیری نیز متقارن است. در این صورت:

$$
\begin{aligned}
E\{XY\} &= \int_{|u|+|w|<1} \frac{3}{2}(1-|u|-|w|)dudw \\
&= 4\int_{|u|+|w|<1,u>0,w>0} \frac{3}{2}(1-|u|-|w|)dudw \\
&= 6\int_{u+w<1,u>0,w>0} (1-u-w)dudw \\
&= 6\int_0^1 \int_0^{1-w} (1-u-w)dudw \\
&= 6\int_0^1 (1-w)u - \frac{u^2}{2}\Big|_0^{1-w} dw \\
&= 3\int_0^1 (1-w)^2 dw = 1
\end{aligned} \tag{۹}
$$

پ)

$$
f_X(x) = \int_x^1 e^{1-x}dy = (1-x)e^{1-x} \tag{۱۰}
$$

بنابراین

$$
f_X(x) = \begin{cases} (1-x)e^{1-x} & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}
$$

برای محاسبه امید ریاضی:

$$
\begin{aligned}
E\{X\} &= \int_0^1 x(1-x)e^{1-x}dx \\
&= \int_0^1 u(1-u)e^u du \\
&= \int_0^1 (u-u^2)e^u du
\end{aligned} \tag{۱۱}
$$

برای محاسبه انتگرال فوق به روش جزء به جزء، ابتدا مشتقات متوالی $u-u^{۲}$ و سپس انتگرال های متوالی e^{u} را محاسبه کرده و با علامت های مثبت و منفی متناوبا در هم ضرب می کنیم؛ به عبارت دیگر: بنابراین

$$\begin{array}{ccc} u-u^2 & & e^u \\ & + & \\ 1-2u & & e^u \\ & - & \\ -2 & & e^u \\ & + & \\ 0 & & e^u \end{array}$$

$$\begin{aligned} E\{X\} &= \int_{۰}^{۱} (u-u^{۲})e^{u}du \\ &= (u-u^{۲})e^{u} - (۱-۲u)e^{u} + (-۲)e^{u}\Big|_{۰}^{۱} = ۳-e \end{aligned} \qquad (۱۲)$$

همچنین

$$\begin{aligned} E\{XY\} &= \int_{۰}^{۱}\int_{x}^{۱} xye^{۱-x}dydx \\ &= \int_{۰}^{۱} x(۱-\frac{x^{۲}}{۲})e^{۱-x}dx = ۶-۲e \end{aligned} \qquad (۱۳)$$

ت) X و Y، دو متغیر تصادفی گسسته (با مقادیر صحیح) اند و pmf آنها به صورت زیر است:

$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{۱}{۱۶} & , \quad x^{۲}+y^{۲} \leq ۱۰ \quad , \quad x \geq y \\ ۰ & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$ (در صورت سوال، مقدار $\frac{۱}{۱۶}$ باید به $\frac{۱}{۲۱}$ تغییر پیدا کند!)

جدول pmf به صورت زیر است ($p = ۲۱$):

					Y			
		-3	-2	-1	0	1	2	3
	-3							
	-2		p					
	-1	p	p	p				
X	0	p	p	p	p			
	1	p	p	p	p	p		
	2		p	p	p	p	p	
	3			p	p	p		

در این صورت:

$$\Pr\{X=x\}=\begin{cases} \frac{۱}{۲۱} & , \quad x=-۲ \\ \frac{۱}{۷} & , \quad x=-۱ \\ \frac{۴}{۲۱} & , \quad x=۰ \\ \frac{۵}{۲۱} & , \quad x=۱ \\ \frac{۵}{۲۱} & , \quad x=۲ \\ \frac{۱}{۷} & , \quad x=۳ \end{cases} \tag{۱۴}$$

همچنین

$$E\{X\}=\sum_x x\cdot\Pr\{X=x\}=\frac{۱۳}{۲۱} \tag{۱۵}$$

$$E\{XY\}=\sum_{x,y} xy\,\Pr\{X=x,Y=y\}=\frac{۵}{۲۱} \tag{۱۶}$$

سوال ۲) الف) به وضوح

$$\begin{aligned} \mu_X &= E\{X\}=p_۳+p_۴ \\ \mu_Y &= E\{Y\}=p_۲+p_۴ \end{aligned} \tag{۱۷}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,Y) &= E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\} \\ &= E\{XY\} - \mu_X\mu_Y \\ &= p_۴ - (p_۲+p_۴)(p_۳+p_۴)\end{aligned} \tag{۱۸}$$

در نتیجه برای صفر بودن کوواریانس باید داشته باشیم $p_۴ = (p_۲+p_۴)(p_۳+p_۴)$.

ب) شرط همبستگی که در قسمت قبلی به دست آمد. برای استقلال باید داشته باشیم:

$$\begin{aligned} p_۱ &= (p_۱+p_۳)(p_۱+p_۲) \\ p_۲ &= (p_۱+p_۲)(p_۲+p_۴) \\ p_۳ &= (p_۱+p_۳)(p_۳+p_۴) \\ p_۴ &= (p_۲+p_۴)(p_۳+p_۴) \end{aligned} \tag{۱۹}$$

نکته اینجاست که

۱. از معادله‌ی ۴، با کم کردن $p_۲+p_۴$ به معادله‌ی ۲ می رسیم.
۲. از معادله‌ی ۴، با کم کردن $p_۳+p_۴$ به معادله‌ی ۳ می رسیم.
۳. از جمع معادله‌های ۲، ۳ و ۴ به معادله‌ی ۱ می رسیم.

بنابراین در این سوال، **ناهمبستگی و استقلال معادلند.**

سوال ۳) الف) به سادگی و با انتگرال گیری می توان نتیجه گرفت:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \begin{cases} ۱ & , \quad ۰ < x < ۱ \\ ۰ & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases} \\ f_Y(y) &= \begin{cases} ۱ & , \quad ۰ < y < ۱ \\ ۰ & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases} \end{aligned} \tag{۲۰}$$

در نتیجه

$$E\{X\} = E\{Y\} = \frac{۱}{۲} \tag{۲۱}$$

هم چنین می دانیم

$$
\begin{aligned}
E\{XY\} &= \int_0^1 \int_0^1 xy + \alpha xy \sin[2\pi(x+y)]dxdy \\
&= \frac{1}{4} + \alpha \int_0^1 \int_0^1 xy \sin[2\pi(x+y)]dxdy \\
&= \frac{1}{4} + \alpha \int_0^1 y \int_0^1 x \sin[2\pi(x+y)]dxdy
\end{aligned} \tag{22}
$$

هم چنین

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 x\sin[2\pi(x+y)]dx &= \left[-\frac{x}{2\pi}\cos[2\pi(x+y)] + \frac{1}{4\pi^2}\sin[2\pi(x+y)]\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= -\frac{\cos 2\pi y}{2\pi}
\end{aligned} \tag{23}
$$

در نتیجه

$$
\begin{aligned}
E\{XY\} &= \frac{1}{4} - \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 y\cos 2\pi y dy \\
&= \frac{1}{4} - \frac{\alpha}{2\pi}\left[\frac{y\sin 2\pi y}{2\pi} + \frac{\cos 2\pi y}{4\pi^2}\right]_{y=0}^{y=1} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned} \tag{24}
$$

از آنجا که همواره $E\{XY\} = E\{X\}E\{Y\}$ ، در نتیجه همواره دو متغیر تصادفی X و Y ناهمبسته هستند.

ب) به سادگی دیده می شود که

$$
f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) \iff \alpha = 0
$$

سوال ۴) الف) با توجه به اینکه $\Pr\{XY > ۱\} = ۰$ ، برای $u < ۱$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\Pr\{XY < u\} &= \Pr\left\{X < \frac{u}{Y}\right\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Pr\left\{X < \frac{u}{y} | Y = y\right\} f_Y(y) dy \\
&= \int_{۰}^{۱} \Pr\left\{X < \frac{u}{y} | Y = y\right\} dy \\
&= \int_{۰}^{u} \Pr\left\{X < \frac{u}{y}\right\} dy \\
&+ \int_{u}^{۱} \Pr\left\{X < \frac{u}{y}\right\} dy \\
&= u + \int_{u}^{۱} \frac{u}{y} dy \\
&= u - u \ln u
\end{aligned}$$

بنابراین

$$f_{XY}(u) = \frac{d}{du} F_{XY}(u) = \begin{cases} -\ln u & , \quad ۰ \leq u < ۱ \\ ۰ & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

ب) ابتدا، می دانیم

$$\Pr\{X + Y < ۰\} = ۱ - \Pr\{X + Y < ۲\} = ۰$$

بنابراین با فرض $۰ < u < ۲$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\Pr\{X + Y < u\} &= \Pr\{X < u - Y\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Pr\{X < u - y | Y = y\} f_Y(y) dy \\
&= \int_{۰}^{۱} \Pr\{X < u - y | Y = y\} dy
\end{aligned}$$

به ازای $u < ۱$:

$$\int_{\circ}^{۱} \Pr\{X < u - y|Y = y\}\,dy$$
$$= \int_{\circ}^{u} \Pr\{X < u - y|Y = y\}\,dy$$
$$= \int_{\circ}^{u} u - ydy$$
$$= \frac{u^{۲}}{۲}$$

به ازای $u > ۱$:

$$\int_{\circ}^{۱} \Pr\{X < u - y|Y = y\}\,dy$$
$$= \int_{u-۱}^{۱} \Pr\{X < u - y|Y = y\}\,dy$$
$$+ \int_{\circ}^{u-۱} \Pr\{X < u - y|Y = y\}\,dy$$
$$= \int_{u-۱}^{۱} u - ydy$$
$$+ u - ۱$$
$$= u(۲ - u) - \frac{۱}{۲} + \frac{(u-۱)^{۲}}{۲} + u - ۱$$
$$= ۲u - \frac{u^{۲}}{۲}$$

بنابراین

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad \circ < x < ۱ \\ ۲ - x & , \quad ۱ \leq x < ۲ \\ \circ & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

پ) به ازای $u > ۰$

$$\Pr\left\{\frac{X}{Y} < u\right\} = \Pr\left\{X < uY\right\}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Pr\left\{X < uy | Y = y\right\} f_Y(y) dy$$
$$= \int_{۰}^{۱} \Pr\left\{X < uy | Y = y\right\} dy$$

به ازای $u < ۱$ با اندکی محاسبات

$$\Pr\left\{\frac{X}{Y} < u\right\} = \frac{u}{۲}$$

به ازای $u > ۱$ با اندکی محاسبات بیشتر

$$\Pr\left\{\frac{X}{Y} < u\right\} = ۱ - \frac{۱}{۲u}$$

بنابراین

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۲} & , \quad ۰ < x < ۱ \\ \frac{۱}{۲x^۲} & , \quad ۱ \leq x \\ ۰ & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

ت) با فرض $۰ < u < ۱$ خواهیم داشت:

$$\Pr\left\{\max\{X, Y\} < u\right\} = \Pr\left\{X < u, Y < u\right\}$$
$$= \Pr\left\{X < u\right\} \Pr\left\{Y < u\right\} = u^۲$$

بنابراین

$$f(x) = \begin{cases} ۲x & , \quad ۰ < x < ۱ \\ ۰ & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

ث) با فرض $۰ < u < ۱$ خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
&\Pr\{\min\{X,Y\} < u\} = ۱ - \Pr\{\min\{X,Y\} > u\} \\
&= ۱ - \Pr\{X > u, Y > u\} \\
&= ۱ - \Pr\{X > u\}\Pr\{Y > u\} = ۱ - (۱ - u)^{۲}
\end{aligned}
$$

بنابراین

$$
f(x) = \begin{cases} ۲ - ۲x & , \quad ۰ < x < ۱ \\ ۰ & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}
$$

اکنون اگر متغیرهای تصادفی X و Y، نمایی با پارامتر ۱ باشند، در این صورت با فرض $u > ۰$

ب)

$$
\begin{aligned}
&\Pr\{X + Y < u\} = \Pr\{X < u - Y\} \\
&= \int_{۰}^{\infty} e^{-y}\Pr\{X < u - y\}\,dy \\
&= \int_{۰}^{u} e^{-y}\Pr\{X < u - y\}\,dy \\
&= \int_{۰}^{u} e^{-y}(۱ - e^{y-u})dy \\
&= \int_{۰}^{u} e^{-y} - e^{-u}dy \\
&= ۱ - e^{-u} - ue^{-u}
\end{aligned}
$$

در نتیجه

$$
f(x) = xe^{-x} \quad , \quad x > ۰
$$

پ)

$$\Pr\left\{\frac{X}{Y} < u\right\} = \Pr\{X < uY\}$$
$$= \int_{۰}^{\infty} e^{-y}\Pr\{X < uy\}\,dy$$
$$= \int_{۰}^{\infty} e^{-y}(۱ - e^{-yu})dy$$
$$= \int_{۰}^{\infty} e^{-y} - e^{-(۱+u)y}dy$$
$$= ۱ - \frac{۱}{u+۱}$$

در نتیجه

$$f(u) = \frac{۱}{(u+۱)^{۲}} \quad , \quad u > ۰$$