

پاسخ سوال ۱) از اصل سوم احتمال، برای هر دو مجموعه‌ی ناسازگار A و B داریم

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

از آنجا که A و A' طبق تعریف ناسازگارند، بنابراین

$$P(A \cup A') = P(A) + P(A').$$

از طرفی طبق تعریف،

$$A \cup A' = S$$

که S فضای نمونه است. در نتیجه

$$P(A) + P(A') = 1.$$

بر اساس اصل اول احتمال، احتمال هر مجموعه مقداری نامنفی است؛ در نتیجه

$$P(A) = 1 - P(A') \leq 1$$

و اثبات کامل است ■

پاسخ سوال ۲) طبق اصل ضرب، تعداد تمام اعداد سه رقمی متمایزی که می‌توان به این روش ساخت، برابر است با $9^3 = 729$. تعداد ارقام فرد از بین اعداد ۱ تا ۹، برابر ۵ است (ارقام ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹). در نتیجه، تعداد اعداد سه رقمی ای که تمام ارقام آن فرد هستند را می‌توان دوباره طبق اصل ضرب به $5^3 = 125$ طریق ممکن ساخت. بنابراین احتمال مطلوب عبارتست از

$$p = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{125}{729}$$

پاسخ سوال ۳) تعداد حالات برداشتن ۲۰ توپ، برابر $\binom{100}{20}$ بوده و تعداد حالات مطلوب،

برابر $\binom{60}{15} \binom{40}{5}$ است؛ لذا احتمال مطلوب برابر $\frac{\binom{60}{15} \binom{40}{5}}{\binom{100}{20}}$ خواهد بود.

پاسخ:

اصولاً در پرسشهای احتمالاتی، باید فضای نمونه و پیشامدها را در ابتدا به درستی تعریف کرد. اینجا نیز چنین قاعده‌ای را پی می‌گیریم.

از آنجا که یک فرد خاص می‌تواند زن یا مرد باشد یا چشم آبی باشد یا نباشد، چهار پیشامد ممکن وجود دارد:

M = پیشامد مرد بودن

F = پیشامد زن بودن

B = پیشامد چشم آبی بودن

N = پیشامد چشم آبی نبودن

S_1 = پیشامد اهل استان ۱ بودن

S_2 = پیشامد اهل استان ۲ بودن

صورت سوال، اطلاعات احتمالاتی زیر را به ما می‌دهد:

$$P(S_1) = \frac{100}{1100}$$

$$P(S_2) = \frac{1000}{1100}$$

$$P(B|S_1) = \frac{20}{100}$$

$$P(B|S_2) = \frac{50}{1000}$$

$$P(M|S_1) = \frac{60}{100}$$

$$P(M|S_2) = \frac{350}{1000}$$

الف) احتمال مطلوب ما، $P(S_1|B)$ است که به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} P(S_1|B) &= \frac{P(S_1 \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(S_1)P(B|S_1)}{\underbrace{P(B)}_{\text{قاعده‌ی بیز}}} \\ &= \frac{P(S_1)P(B|S_1)}{P(S_1)P(B|S_1) + P(S_2)P(B|S_2)} \\ &= \frac{\frac{100}{1100} \times \frac{20}{100}}{\frac{100}{1100} \times \frac{20}{100} + \frac{1000}{1100} \times \frac{50}{1000}} = \frac{2}{7} \end{aligned}$$

ب) برای این بخش داریم:

$$P(S_2 \cap N|F) = \frac{P(S_2 \cap N \cap F)}{P(F)}$$

پیشامد $S_2 \cap N \cap F$ ، پیشامد حالتی است که فرد انتخاب شده، زن بوده، از استان ۲ انتخاب شود و چشم‌آبی نباشد. از آنجا که از جامعه‌ی ۱۱۰۰ نفری، ۶۳۰ نفر چپ‌چشم و بقیه‌ی آن‌ها چپ‌چشم نیستند، نتیجه:

$$P(S_2 \cap N \cap F) = \frac{630}{1100}$$

و می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} P(S_2 \cap N | F) &= \frac{P(S_2 \cap N \cap F)}{P(F)} \\ &= \frac{P(S_2 \cap N \cap F)}{P(S_1)P(F|S_1) + P(S_2)P(F|S_2)} \\ &= \frac{P(S_2 \cap N \cap F)}{\frac{100}{1100} \times \frac{40}{100} + \frac{1000}{1100} \times \frac{650}{1000}} \\ &= \frac{\frac{630}{1100}}{\frac{100}{1100} \times \frac{40}{100} + \frac{1000}{1100} \times \frac{650}{1000}} \\ &= \frac{21}{23} \end{aligned}$$

//
//
//
//
//
//
//
//
//
//

پاسخ سوال ۴)

سوال ۱) الف) فضای نمونه، مجموعه‌ی تمام وقایع ساده‌ی ممکن است که عبارتست از:
 $S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$

ب) از آنجا که واقعه طبق تعریف یک زیر مجموعه از فضای نمونه است و فضای نمونه ۸ عضوی است، این مسئله دارای $2^8 = 256$ واقعه متمم است که اگر تهی را نامتمم بگیریم، ۲۵۵ واقعه‌ی متمم خواهیم داشت.

پ) طبق تعریف کلاسیک احتمال، احتمال زیرمجموعه‌ی A از مجموعه‌ی S عبارتست از

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

از طرفی واقعه‌ی اینکه در پرتاب اول و دوم سکه نتیجه یکسان باشد (در پرتاب سوم نتیجه دلخواه است)، دارای چهار عضو HHH, HHT, THT, TTH است که نتیجه می‌دهد:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

سوال ۲) الف و ب و پ)

$$A \cap B = \{4\}$$

$$A - B = \{1, 5\}$$

$$A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (5, 2), (5, 3), (5, 4)\}$$

ت) برای مناسبه‌ی $(A \cup B) \cap C$ داریم:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

بنابراین

$$(A \cup B) \cap C = \{2, 5\}$$

همچنین برای مناسبه‌ی $(A \cap C) \cup (B \cap C)$:

$$A \cap C = \{5\} \quad , \quad B \cap C = \{2\}$$

پس خواهیم داشت

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) = \{2, 5\}$$

که نتیجه می دهد:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

سوال ۳) از اصل ۳ کولموگوروف می توان دریافت که اگر دو مجموعه S و T ناسازگار باشند، خواهیم داشت:

$$P(S \cup T) = P(S) + P(T)$$

در این مسئله با تعریف

$$S = A - B$$

$$T = A \cap B$$

می دانیم که مجموعه $A - B$ شامل عناصر B نیست؛ در حالی که عناصر مجموعه $A \cap B$ در B وجود دارند؛ پس نتیجه گیری زیر به دست می آید:

$$[A - B] \cap [A \cap B] = \emptyset \implies P(A) = P([A - B] \cup [A \cap B]) = P(A - B) + P(A \cap B)$$

سوال ۱) الف) از آنجا که سکه دارای ۲ حالت و تاس دارای ۶ حالت است، طبق اصل ضرب ۱۲ حالت مختلف برای پیشامدهای ساده خواهیم داشت؛ یعنی فضای شدنی مسئله Ω ۱۲ حالتی است. از این ۱۲ حالت فقط حالاتی که سکه رو بیاید و تاس یکی از اعداد ۱-۳-۵ شود مدنظر است که تعداد این حالات فاص ۳ تا است. در نتیجه احتمال مطلوب $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$ خواهد بود.

ب) پیشامد اینکه سکه به رو بیفتد را با A و اینکه تاس فرد شود را با B نمایش می دهیم. هدف ما سببه $P(A \cup B)$ که می دانیم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

از طرفی

$$P(A) = \frac{1}{2} \quad , \quad P(B) = \frac{1}{2} \quad , \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

بنابراین

$$P(A \cup B) = \frac{3}{4}$$

سوال ۲) الف)

$$S = \{3, 6, \text{پشت}, \text{رو}\}$$

ب) سکه زمانی رو می آید که تاس مضرب ۳ نشود و خود سکه هم به رو بیفتد. احتمال اینکه تاس مضرب ۳ نشود برابر $\frac{2}{3}$ و احتمال اینکه سکه در صورت پرتاب شدن به رو بیفتد برابر $\frac{1}{2}$ است؛ پس احتمال مطلوب برابر حاصلضرب دو احتمال قبلی یعنی $\frac{1}{3}$ خواهد بود.

پ) اگر پیشامد آمدن تاس را با A و پشت آمدن سکه را با B نمایش دهیم، در این صورت مطلوبست

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

از طرفی

$$P(A) = \frac{1}{6} \quad , \quad P(B) = \frac{1}{3}$$

تاس با احتمال $\frac{1}{6}$ ، ۱ می آید که در این صورت منجر به پرتاب سکه خواهد شد و سکه هم با احتمال 0.5 به پشت می افتد؛ پس $P(A \cap B)$ برابر $\frac{1}{12} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2}$ و $P(A \cup B)$ برابر $\frac{5}{12}$ خواهد بود.

سوال ۳) هنگامی که از اشکال دوبعدی بهره می گیریم، جهت استفاده از مفهوم اندازه‌ی پیشامدها، باید مساحت آن‌ها را در نظر بگیریم.

الف) نقطه‌ای از داخل مربع به مساحت ۴ انتخاب شده است. چون پیشامد مطلوب، انتخاب نقطه از داخل دایره است و دایره به طور کامل درون مربع قرار دارد، احتمال مطلوب عبارت است از:

$$P(A) = \frac{\text{مساحت دایره}}{\text{مساحت مربع}} = \frac{\pi}{4}$$

ب) از آنجا که قطر ضفا متی ندارد (مساحت آن برابر صفر است؛ برای درک این موضوع،

به جای قطر یک نوار نازک در نظر بگیرید و ضخامت آن را به سمت صفر میل دهید) احتمال مطلوب برابر خواهد بود.

پ) مکمل این پیشامد عبارتست از اینکه فاصله ی نقطه از دست کم یکی از رأس های مربع کمتر از 0.5 باشد. به ازای هر راس مربع، مکان هندسی نقاطی از داخل مربع که فاصله ی آنها از راس مورد نظر کمتر از 0.5 باشد، یک ربع دایره به مرکز آن راس و شعاع 0.5 داخل مربع خواهد بود. ۴ راس در مربع داریم؛ پس ۴ تا از این ربع دایره ها خواهیم داشت که همپوشانی ندارند؛ پس مساحت مکمل پیشامد مورد نظر عبارتست از:

$$A' = \text{مساحت هر ربع دایره} \times 4 = \text{مساحت پیشامد } A'$$

و برای احتمال مطلوب داریم:

$$P(A) = \frac{\text{مساحت پیشامد } A}{\text{مساحت مربع}} = \frac{16 - \pi}{16} = 1 - \frac{\pi}{16}$$

سوال ۴) الف) یک عدد زمانی به ۳ بخش پذیر است که جمع ارقام آن به ۳ بخش پذیر باشد. مجموعه ی این اعداد عبارتست از:

$$S = \{111, 222, 210, 201, 120, 102\} \implies |S| = 6$$

ب) تمام اعداد ۳ رقمی ای که با این ارقام ساخته می شوند، یا دارای صدگان ۱ یا ۲ هستند. تعداد اعداد سه رقمی و سه رقمی زوج که دارای صدگان ۱ یا ۲ باشند، به ترتیب برابر ۹ و ۶ خواهد بود. بنابراین احتمال مطلوب عبارتست از:

$$P(A) = \frac{6 + 6}{9 + 9} = \frac{2}{3}$$