

فهرست مطالب

۲	۱ مبانی احتمال و جبر مجموعه ها
۴۶	۲ آزمایش های تکراری
۵۹	۳ متغیرهای تصادفی
۸۸	۴ متغیرهای تصادفی توأم
۱۱۳	۵ احتمال شرطی در متغیرهای تصادفی
۱۳۹	۶ دنباله ی متغیرهای تصادفی

فصل ۱

مبانی احتمال و جبر مجموعه ها

پاسخ سوال ۱)

برای اثبات گزاره‌ی این سوال، باید از اصول کولموگوروف برای احتمال بهره ببریم. این اصول عبارتند از:

۱. احتمال هر زیرمجموعه از فضای نمونه نامنفی است.

۲. احتمال رخداد فضای نمونه، برابر ۱ است (به عبارت دیگر، هر پیشامد ممتل احتمالاتی، شامل حداقل یکی از اعضای فضای نمونه است).

۳. اگر دو مجموعه‌ی A و B ناسازگار باشند (یعنی اشتراک این دو مجموعه تهی باشد)، در این صورت $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

الکون، زیر مجموعه‌ی A از فضای نمونه‌ی S را در نظر می‌گیریم. تعریف می‌کنیم $B = S - A$. در این صورت، مجموعه‌های A و B ناسازگارند و می‌توان با استفاده از اصول اول و سوم احتمال نوشت

$$1 = P(S) = P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

در نتیجه، طبق اصل دوم، هر دو احتمال $P(A)$ و $P(B)$ نامنفی اند. در نتیجه

$$P(A) = 1 - P(B) \leq 1$$

و اثبات کامل است ■

پاسخ سوال ۲) طبق اصل ضرب، تعداد تمام اعداد سه رقمی متمایزی که می‌توان به این روش ساخت، برابر است با $9^3 = 729$. تعداد ارقام فرد از بین اعداد ۱ تا ۹، برابر ۵ است (ارقام ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹). در نتیجه،

تعداد اعداد سه رقمی ای که تمام ارقام آن فرد هستند را می توان دوباره طبق اصل ضرب به $5^3 = 125$ طریق ممکن ساخت. بنابراین احتمال مطلوب عبارتست از

$$p = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{125}{729}$$

پاسخ سوال ۳) تعداد حالات برداشتن ۲۰ توپ، برابر $\binom{100}{20}$ بوده و تعداد حالات مطلوب، برابر $\binom{40}{5} \binom{60}{15}$ است؛ لذا احتمال مطلوب برابر $\frac{\binom{40}{5} \binom{60}{15}}{\binom{100}{20}}$ خواهد بود.

پاسخ سوال ۴)

ابتدا پیشامدهای زیر را تعریف می کنیم:

B = پیشامد آبی بودن توپ

R = پیشامد قرمز بودن توپ

Y = پیشامد زرد بودن توپ

U_1 = پیشامد انتخاب کیسه ی ۱

U_2 = پیشامد انتخاب کیسه ی ۲.

در این صورت،

(الف)

$$P(R \cap A_5) = P(R|A_5)P(A_5) = \frac{20}{50} \times \frac{1}{2} = 20\%.$$

(ب)

$$P(B|U_1) = \frac{30}{50} = 60\%.$$

(پ)

$$\begin{aligned} P(R|Y') &= \frac{P(R \cap Y')}{P(Y')} = \frac{P(R)}{1 - P(Y)} \\ &= \frac{P(R|U_1)P(U_1) + P(R|U_2)P(U_2)}{1 - P(Y|U_1)P(U_1) - P(Y|U_2)P(U_2)} \\ &= \frac{\frac{20}{50} \times \frac{1}{2} + \frac{50}{100} \times \frac{1}{2}}{1 - 0 \times \frac{1}{2} - \frac{20}{100} \times \frac{1}{2}} = 50\%. \end{aligned}$$

(ت)

$$\begin{aligned} P(U_2|B') &= \frac{P(U_2 \cap B')}{P(B')} = \frac{P(B'|U_2)P(U_2)}{P(B'|U_1)P(U_1) + P(B'|U_2)P(U_2)} \\ &= \frac{\frac{70}{100} \times \frac{1}{2}}{\frac{20}{50} \times \frac{1}{2} + \frac{70}{100} \times \frac{1}{2}} \approx 63.64\%. \end{aligned}$$

(ث)

$$\begin{aligned} P(U_2|R' \cap Y') &= \frac{P(U_2 \cap R' \cap Y')}{P(R' \cap Y')} \\ &= \frac{P(R' \cap Y'|U_2)P(U_2)}{P(R' \cap Y'|U_1)P(U_1) + P(R' \cap Y'|U_2)P(U_2)} \\ &= \frac{\frac{30}{50} \times \frac{1}{2}}{\frac{30}{100} \times \frac{1}{2} + \frac{30}{50} \times \frac{1}{2}} \approx 66.67\%. \end{aligned}$$

پاسخ سوال (۵)

مجموعه‌ی X_i را پیشامد انتخاب معبه‌ی i -ام به ازای $i \in \{1, 2, 3\}$ در نظر می‌گیریم. همچنین، مجموعه‌های B ، R و Y را به ترتیب پیشامدهای انتخاب توپ آبی، قرمز و زرد تعریف می‌کنیم. در این صورت، احتمالات زیر از صورت سوال استخراج می‌شوند:

$$\begin{aligned} P(X_1) &= P(X_2) = P(X_3) = \frac{1}{3}, \\ P(B|X_1) &= \frac{7}{10}, \quad P(R|X_1) = \frac{3}{10}, \quad P(Y|X_1) = 0, \\ P(B|X_2) &= \frac{1}{10}, \quad P(R|X_2) = \frac{3}{10}, \quad P(Y|X_2) = \frac{6}{10}, \\ P(B|X_3) &= \frac{7}{10}, \quad P(R|X_3) = 0, \quad P(Y|X_3) = \frac{3}{10}. \end{aligned}$$

اکنون، با کمک پیشامدهای تعریف شده در ابتدای پاسخ، احتمال مطلوب عبارتست از

$$\begin{aligned}
 P(R \cap [X_1 \cup X_2] | B') &= \frac{P(R \cap [X_1 \cup X_2] \cap B')}{P(B')} \\
 &= \frac{P(R \cap [X_1 \cup X_2])}{P(B'|X_1)P(X_1) + P(B'|X_2)P(X_2) + P(B'|X_3)P(X_3)} \\
 &= \frac{P([R \cap X_1] \cup [R \cap X_2])}{P(B'|X_1)P(X_1) + P(B'|X_2)P(X_2) + P(B'|X_3)P(X_3)} \\
 &= \frac{P(R \cap X_1) + P(R \cap X_2)}{P(B'|X_1)P(X_1) + P(B'|X_2)P(X_2) + P(B'|X_3)P(X_3)} \\
 &= \frac{P(R|X_1)P(X_1) + P(R|X_2)P(X_2)}{P(B'|X_1)P(X_1) + P(B'|X_2)P(X_2) + P(B'|X_3)P(X_3)} \\
 &= \frac{\frac{3}{10} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{10} \times \frac{1}{3}}{\frac{3}{10} \times \frac{1}{3} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{10} \times \frac{1}{3}} = \frac{2}{5} = 40\%.
 \end{aligned}$$

پاسخ سوال ۶)

تعداد اعداد دو رقمی ای که به این ترتیب ساخته می شوند برابر است با $9^2 = 81$. از سوی دیگر، اعداد طبیعی مضرب ۹، به فرم $9k$ هستند که k عدد طبیعی است. از بین این اعداد، اعداد دو رقمی مضرب ۹ تنها به ازای $2 \leq k \leq 11$ ساخته می شوند. همچنین، عدد ۹۰ در شمارش محسوب نمی شود؛ زیرا رقم یکان آن صفر است. بنابراین، تعداد کل اعداد مطلوب برابر ۹ و احتمال مطلوب برابر $\frac{9}{81}$ است.

پاسخ سوال ۷)

مجموعه‌ی X_i را پیشامد انتقال جعبه‌ی i -ام به ازای $i \in \{1, 2, 3\}$ در نظر می گیریم. همچنین، مجموعه‌های B ، R و W را به ترتیب پیشامدهای انتقال توپ آبی، قرمز و سفید تعریف می کنیم. در این صورت، احتمالات زیر از صورت سوال استخراج می شوند:

$$\begin{aligned}
 P(X_1) &= P(X_2) = P(X_3) = \frac{1}{3}, \\
 P(B|X_1) &= \frac{3}{10}, \quad P(R|X_1) = \frac{7}{10}, \quad P(W|X_1) = 0, \\
 P(B|X_2) &= \frac{5}{8}, \quad P(R|X_2) = 0, \quad P(W|X_2) = \frac{3}{8}, \\
 P(B|X_3) &= 0, \quad P(R|X_3) = \frac{1}{10}, \quad P(W|X_3) = \frac{9}{10},
 \end{aligned}$$

اکنون، با کمک پیشامدهای تعریف شده در ابتدای پاسخ، احتمال مطلوب عبارتست از

$$\begin{aligned}
 P(X'_2|W) &= \frac{P(X'_2 \cap W)}{P(W)} \\
 &= \frac{P([X_1 \cup X_3] \cap W)}{P(W|X_1)P(X_1) + P(W|X_2)P(X_2) + P(W|X_3)P(X_3)} \\
 &= \frac{P([X_1 \cap W] \cup [X_3 \cap W])}{P(W|X_1)P(X_1) + P(W|X_2)P(X_2) + P(W|X_3)P(X_3)} \\
 &= \frac{P(X_1 \cap W) + P(X_3 \cap W)}{P(W|X_1)P(X_1) + P(W|X_2)P(X_2) + P(W|X_3)P(X_3)} \\
 &= \frac{P(W|X_1)P(X_1) + P(W|X_3)P(X_3)}{P(W|X_1)P(X_1) + P(W|X_2)P(X_2) + P(W|X_3)P(X_3)} \\
 &= \frac{0 \times \frac{1}{3} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{3}}{0 \times \frac{1}{3} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{3} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{3}} = \frac{12}{17}.
 \end{aligned}$$

پاسخ سوال ۸)

پاسخ سوال ۹)

پاسخ سوال ۱۰)

پاسخ سوال ۱۱)

پاسخ سوال ۱۲)

پاسخ سوال ۱۳)

اصولاً در پرسشهای احتمالاتی، باید فضای نمونه و پیشامدها را در ابتدا به درستی تعریف کرد. اینجا نیز چنین قاعده‌ای را پی می‌گیریم.

از آنجا که یک فرد خاص می‌تواند زن یا مرد باشد یا چشم آبی باشد یا نباشد، چهار پیشامد ممکن وجود دارد:

M = پیشامد مرد بودن

F = پیشامد زن بودن

B = پیشامد چشم آبی بودن

N = پیشامد چشم آبی نبودن

S_1 = پیشامد اهل استان ۱ بودن

S_2 = پیشامد اهل استان ۲ بودن

صورت سوال، اطلاعات احتمالاتی زیر را به ما می‌دهد:

$$P(S_1) = \frac{100}{1100}$$

$$P(S_2) = \frac{1000}{1100}$$

$$P(B|S_1) = \frac{20}{100}$$

$$P(B|S_2) = \frac{50}{1000}$$

$$P(M|S_1) = \frac{60}{100}$$

$$P(M|S_2) = \frac{350}{1000}$$

الف) احتمال مطلوب ما، $P(S_1|B)$ است که به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} P(S_1|B) &= \frac{P(S_1 \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(S_1)P(B|S_1)}{\underbrace{P(B)}_{\text{قاعده‌ی بیز}}} \\ &= \frac{P(S_1)P(B|S_1)}{P(S_1)P(B|S_1) + P(S_2)P(B|S_2)} \\ &= \frac{\frac{100}{1100} \times \frac{20}{100}}{\frac{100}{1100} \times \frac{20}{100} + \frac{1000}{1100} \times \frac{50}{1000}} = \frac{2}{7} \end{aligned}$$

ب) برای این بخش داریم:

$$P(S_2 \cap N | F) = \frac{P(S_2 \cap N \cap F)}{P(F)}$$

پیشامد $S_2 \cap N \cap F$ ، پیشامد حالتی است که فرد انتقاب شده، زن بوده، از استان ۲ انتقاب شود و چشم آبی نباشد. از آنجا که از جامعه‌ی ۱۱۰۰ نفری، ۶۳۰ نفر چنین ویژگی‌ای دارند در نتیجه:

$$P(S_2 \cap N \cap F) = \frac{630}{1100}$$

و می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} P(S_2 \cap N | F) &= \frac{P(S_2 \cap N \cap F)}{P(F)} \\ &= \frac{P(S_2 \cap N \cap F)}{P(S_1)P(F|S_1) + P(S_2)P(F|S_2)} \\ &= \frac{P(S_2 \cap N \cap F)}{\frac{100}{1100} \times \frac{40}{100} + \frac{1000}{1100} \times \frac{650}{1000}} \\ &= \frac{\frac{630}{1100}}{\frac{100}{1100} \times \frac{40}{100} + \frac{1000}{1100} \times \frac{650}{1000}} \\ &= \frac{21}{23} \end{aligned}$$

پ) احتمال مطلوب، به صورت زیر به دست می‌آید

$$P(B|M) = \frac{P(B \cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{40}{1100}}{\frac{410}{1100}} = \frac{4}{41}.$$

پاسخ:

//
 //
 //
 //
 //

//////////////////////////////////////
 //////////////////////////////////////
 //////////////////////////////////////
 //////////////////////////////////////
 //////////////////////////////////////
 //////////////////////////////////////
 //////////////////////////////////////
 //////////////////////////////////////
 //////////////////////////////////////

پاسخ سوال ۱۴)

سوال ۱) الف) فضای نمونه، مجموعه‌ی تمام وقایع ساده‌ی ممکن است که عبارتست از:

$$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

ب) از آنجا که واقعه طبق تعریف یک زیر مجموعه از فضای نمونه است و فضای نمونه ۸ عضو است، این مسئله دارای $2^8 = 256$ واقعه ممکن است که اگر تهی را ناممکن بگیریم، ۲۵۵ واقعه‌ی ممکن خواهیم داشت.

پ) طبق تعریف کلاسیک احتمال، احتمال زیرمجموعه‌ی A از مجموعه‌ی S عبارتست از:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

از طرفی واقعه‌ی اینکه در پرتاب اول و دوم سکه نتیجه یکسان باشد (در پرتاب سوم نتیجه دلخواه است)، دارای چهار عضو HHH, HHT, TTT, TTH است که نتیجه می‌دهد:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

سوال ۲) الف و ب و پ)

$$A \cap B = \{4\}$$

$$A - B = \{1, 5\}$$

$$A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (5, 2), (5, 3), (5, 4)\}$$

ت) برای مناسبه‌ی $(A \cup B) \cap C$ داریم:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

بنابراین

$$(A \cup B) \cap C = \{2, 5\}$$

همچنین برای مناسبه‌ی $(A \cap C) \cup (B \cap C)$:

$$A \cap C = \{5\} \quad , \quad B \cap C = \{2\}$$

پس خواهیم داشت

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) = \{2, 5\}$$

که نتیجه می‌دهد:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

سوال ۳) از اصل ۳ کو لموگروف می‌توان دریافت که اگر دو مجموعه‌ی S و T ناسازگار باشند، خواهیم داشت:

$$P(S \cup T) = P(S) + P(T)$$

در این مسئله با تعریف

$$S = A - B$$

$$T = A \cap B$$

می‌دانیم که مجموعه‌ی $A - B$ شامل عناصر B نیست؛ در حالی که عناصر مجموعه‌ی $A \cap B$ در B وجود دارند؛ پس نتیجه‌گیری زیر به دست می‌آید:

$$[A - B] \cap [A \cap B] = \emptyset \implies P(A) = P([A - B] \cup [A \cap B]) = P(A - B) + P(A \cap B)$$

سوال ۱) الف) از آنجا که سکه دارای ۲ حالت و تاس دارای ۶ حالت است، طبق اصل ضرب ۱۲ حالت مختلف برای پیشامدهای ساده خواهیم داشت؛ یعنی فضای شمرنی مسئله‌ی ما ۱۲ حالتی است. از این ۱۲ حالت فقط ۵ حالتی که سکه رو بیاید و تاس یکی از اعداد ۱-۳-۵ شود مدنظر است که تعداد این حالات فاص ۳ تاست. در نتیجه احتمال مطلوب $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ خواهد بود.

ب) پیشامد اینکه سکه به رو بیفتد را با A و اینکه تاس فرد شود را با B نمایش می‌دهیم. هدف مناسبه‌ی $P(A \cup B)$ که می‌دانیم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

از طرفی

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

بنابراین

$$P(A \cup B) = \frac{3}{4}$$

سوال ۲) الف)

$$S = \{3, 6, \text{پشت}, \text{رو}\}$$

ب) سکه زمانی رو می آید که تاس مضرب ۳ نشود و خود سکه هم به رو بیفتد. احتمال اینکه تاس مضرب ۳ نشود برابر $\frac{2}{3}$ و احتمال اینکه سکه در صورت پرتاب شدن به رو بیفتد برابر $\frac{1}{2}$ است؛ پس احتمال مطلوب برابر حاصلضرب دو احتمال قبلی یعنی $\frac{1}{3}$ خواهد بود.

پ) اگر پیشامد آمدن تاس را با A و پشت آمدن سکه را با B نمایش دهیم، در این صورت مطلوبست

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

از طرفی

$$P(A) = \frac{1}{6}, \quad P(B) = \frac{1}{3}$$

تاس با احتمال $\frac{1}{6}$ ، می آید که در این صورت منجر به پرتاب سکه خواهد شد و سکه هم با احتمال 0.5 به پشت می افتد؛ پس $P(A \cap B)$ برابر $\frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$ و $P(A \cup B)$ برابر $\frac{5}{12}$ خواهد بود.

سوال ۳) هنگامی که از اشکال دوبعدی بهره می گیریم، جهت استفاده از مفهوم اندازه‌ی پیشامدها، باید مساحت آن‌ها را در نظر بگیریم.

الف) نقطه‌ای از داخل مربع به مساحت ۴ انتخاب شده است. چون پیشامد مطلوب، انتخاب نقطه از داخل دایره است و دایره به طور کامل درون مربع قرار دارد، احتمال مطلوب عبارت است از:

$$P(A) = \frac{\text{مساحت دایره}}{\text{مساحت مربع}} = \frac{\pi}{4}$$

ب) از آنجا که قطر ضامتی ندارد (مساحت آن برابر صفر است؛ برای درک این موضوع، به جای قطر یک نوار نازک در نظر بگیرید و ضامت آن را به سمت صفر میل دهید) احتمال مطلوب برابر ۰ خواهد بود.

پ) مکمل این پیشامد عبارتست از اینکه فاصله ی نقطه از دست کم یکی از رأس های مربع کمتر از 0.5 باشد. به ازای هر رأس مربع، مکان هندسی نقاطی از داخل مربع که فاصله ی آنها از رأس مورد نظر کمتر از 0.5 باشد، ربع دایره به مرکز آن رأس و شعاع 0.5 داخل مربع خواهد بود. ۴ رأس در مربع داریم؛ پس ۴ تا از این ربع دایره ها خواهیم داشت که همپوشانی ندارند؛ پس مساحت مکمل پیشامد مورد نظر عبارتست از:

$$A^c = \frac{\pi}{4} \times 4 = \pi$$

و برای احتمال مطلوب داریم:

$$P(A) = \frac{\text{مساحت پیشامد}}{\text{مساحت مربع}} = \frac{16 - \pi}{16} = 1 - \frac{\pi}{16}$$

سوال ۴) الف) یک عدد زمانی به ۳ بخش پذیر است که جمع ارقام آن به ۳ بخش پذیر باشد. مجموعه ی این اعداد عبارتست از:

$$S = \{111, 222, 210, 201, 120, 102\} \Rightarrow |S| = 6$$

ب) تمام اعداد ۳ رقمی ای که با این ارقام ساخته می شوند، یا دارای صدگان ۱ یا ۲ هستند. تعداد اعداد سه رقمی و سه رقمی زوج که دارای صدگان ۱ یا ۲ باشند، به ترتیب برابر ۹ و ۶ خواهد بود. بنابراین احتمال مطلوب عبارتست از:

$$P(A) = \frac{6 + 6}{9 + 9} = \frac{2}{3}$$

سوال ۱) الف) فضای نمونه، مجموعه ی تمام وقایع ساده ی ممکن است که عبارتست از:

$$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

ب) از آنجا که واقعه طبق تعریف یک زیر مجموعه از فضای نمونه است و فضای نمونه ۸ عضوی است، این مسئله دارای $2^8 = 256$ واقعه ممکن است که اگر تهی را ناممکن بگیریم، ۲۵۵ واقعه ی ممکن خواهیم داشت.

پ) طبق تعریف کلاسیک احتمال، احتمال زیر مجموعه ی A از مجموعه ی S عبارتست از:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

از طرفی واقعه‌ی اینکه در پرتاب اول و دوم سکه نتیجه یکسان باشد (در پرتاب سوم نتیجه دلخواه است)، دارای چهار عضو HHH, HHT, TTH, TTT است که نتیجه می‌دهد:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

سوال ۲) الف و ب و پ)

$$A \cap B = \{4\}$$

$$A - B = \{1, 5\}$$

$$A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (5, 2), (5, 3), (5, 4)\}$$

ت) برای مناسبه‌ی $(A \cup B) \cap C$ داریم:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

بنابراین

$$(A \cup B) \cap C = \{2, 5\}$$

همچنین برای مناسبه‌ی $(A \cap C) \cup (B \cap C)$:

$$A \cap C = \{5\}, \quad B \cap C = \{2\}$$

پس خواهیم داشت

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) = \{2, 5\}$$

که نتیجه می‌دهد:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

سوال ۳) از اصل ۳ کو لموگروف می‌توان دریافت که اگر دو مجموعه‌ی S و T ناسازگار باشند، خواهیم داشت:

$$P(S \cup T) = P(S) + P(T)$$

در این مسئله با تعریف

$$S = A - B$$

$$T = A \cap B$$

می‌دانیم که مجموعه‌ی $A - B$ شامل عناصر B نیست؛ در حالی که عناصر مجموعه‌ی $A \cap B$ در B وجود دارند؛ پس نتیجه‌گیری زیر به دست می‌آید:

$$[A - B] \cap [A \cap B] = \emptyset \implies P(A) = P([A - B] \cup [A \cap B]) = P(A - B) + P(A \cap B)$$

سوال ۱) الف) از آنجا که سکه دارای ۲ حالت و تاس دارای ۶ حالت است، طبق اصل ضرب ۱۲ حالت مختلف برای پیشامدهای ساده خواهیم داشت؛ یعنی فضای ششگانه ۱۲ حالتی است. از این ۱۲ حالت فقط حالتی که سکه رو بیاید و تاس یکی از اعداد ۱-۲-۳-۴-۵ شود مدنظر است که تعداد این حالات خاص ۳ است. در نتیجه احتمال مطلوب $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ خواهد بود.

ب) پیشامد اینکه سکه به رو بیفتد را با A و اینکه تاس فرد شود را با B نمایش می دهیم. هدف مناسبی $P(A \cup B)$ که می دانیم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

از طرفی

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

بنابراین

$$P(A \cup B) = \frac{3}{4}$$

سوال ۲) الف)

$$S = \{3, 6, \text{پشت}, \text{رو}\}$$

ب) سکه زمانی رو می آید که تاس مضرب ۳ نشود و خود سکه هم به رو بیفتد. احتمال اینکه تاس مضرب ۳ نشود برابر $\frac{2}{3}$ و احتمال اینکه سکه در صورت پرتاب شدن به رو بیفتد برابر $\frac{1}{2}$ است؛ پس احتمال مطلوب برابر حاصلضرب دو احتمال قبلی یعنی $\frac{1}{3}$ خواهد بود.

پ) اگر پیشامد آمدن تاس را با A و پشت آمدن سکه را با B نمایش دهیم، در این صورت مطلوبست

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

از طرفی

$$P(A) = \frac{1}{6}, \quad P(B) = \frac{1}{3}$$

تاس با احتمال $\frac{1}{6}$ ، می آید که در این صورت منجر به پرتاب سکه خواهد شد و سکه هم با احتمال ۰.۵ به پشت می افتد؛ پس $P(A \cap B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$ و $P(A \cup B)$ برابر $\frac{5}{12}$ خواهد بود.

سوال ۳) هنگامی که از اشکال دوبعدی بهره می گیریم، جهت استفاده از مفهوم اندازه‌ی پیشامدها، باید مساحت آن‌ها را در نظر بگیریم.

الف) نقطه ای از داخل مربع به مساحت ۴ انتساب شده است. چون پیشامد مطلوب، انتساب نقطه از داخل دایره است و دایره به طور کامل درون مربع قرار دارد، احتمال مطلوب عبارت است از:

$$P(A) = \frac{\text{مساحت دایره}}{\text{مساحت مربع}} = \frac{\pi}{4}$$

ب) از آنجا که قطر ضامتی ندارد (مساحت آن برابر صفر است؛ برای درک این موضوع، به جای قطر یک نوار نازک در نظر بگیرید و ضامتی آن را به سمت صفر میل دهید) احتمال مطلوب برابر خواهد بود.

پ) مکمل این پیشامد عبارتست از اینکه فاصله ی نقطه از دست کم یکی از رأس های مربع کمتر از 0.5 باشد. به ازای هر رأس مربع، مکان هندسی نقاطی از داخل مربع که فاصله ی آنها از رأس مورد نظر کمتر از 0.5 باشد، ربع دایره به مرکز آن رأس و شعاع 0.5 داخل مربع خواهد بود. ۴ رأس در مربع داریم؛ پس ۴ تا از این ربع دایره ها خواهیم داشت که همپوشانی ندارند؛ پس مساحت مکمل پیشامد مورد نظر عبارتست از:

$$A' = \text{مساحت هر ربع دایره} \times 4 = \text{مساحت پیشامد } A'$$

و برای احتمال مطلوب داریم:

$$P(A) = \frac{\text{مساحت پیشامد } A}{\text{مساحت مربع}} = \frac{16 - \pi}{16} = 1 - \frac{\pi}{16}$$

سوال ۴) الف) یک عدد زمانی به ۳ بخش پذیر است که جمع ارقام آن به ۳ بخش پذیر باشد. مجموعه ی این اعداد عبارتست از:

$$S = \{111, 222, 210, 201, 120, 102\} \implies |S| = 6$$

ب) تمام اعداد ۳ رقمی ای که با این ارقام ساخته می شوند، یا دارای صدگان ۱ یا ۲ هستند. تعداد اعداد سه رقمی و سه رقمی زوج که دارای صدگان ۱ یا ۲ باشند، به ترتیب برابر ۹ و ۶ خواهد بود. بنابراین احتمال مطلوب عبارتست از:

$$P(A) = \frac{6 + 6}{9 + 9} = \frac{2}{3}$$

سوالات ۱۳، ۲۲، ۲۴ و ۲۵ از کتاب غیرمربع (کتاب Probability, Random Variables and Stochastic Processes از پاپولیس)

سوالات ۱۳ و ۲۵ از کتاب غیرمربع، به دلیل کاربرد متغیرهای تصادفی سوالات امتیازی محسوب می شوند.

سوال ۱۳) تعریف کنید

$$f(t_0) \triangleq P\{t \geq t_0\}$$

در اینصورت باید نشان دهیم

$$P([t_0 \leq t \leq t_0 + t_1] \cap [t \geq t_0]) = f(t_0)[1 - f(t_1)]$$

یا به عبارت دیگر

$$P(t \geq t_0) - P(t \geq t_0 + t_1) = f(t_0) - f(t_0)f(t_1)$$

طبق تعریف

$$f(t_0) - f(t_0 + t_1) = f(t_0) - f(t_0)f(t_1)$$

یا معادلا

$$f(t_0 + t_1) = f(t_0)f(t_1)$$

می توان ثابت کرد تنها تابع پیوسته ای که شرط بالا را برآورده می کند، تابع نمایی است بنابراین $f(t_0) = e^{-ct_0}$ که $c > 0$ و اثبات کامل است ■

سوال ۲۲) می دانیم که برای استقلال رخدادهای A_1, A_2, \dots, A_n باید هر ترکیب چندتایی از این رخدادها مستقل باشند؛ یعنی هر دو تایی از آنها، هر سه تایی از آنها، ... و همه ی n تا از آنها. چون دقیقاً $\binom{n}{k}$ ترکیب k تایی از این مجموعه ها وجود دارد، در اینصورت باید دقیقاً

$$\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} = 2^n - n - 1$$

معادله داشته باشیم.

سوال ۲۴) (در این مسئله بهتر است خرابی هر دو لامپ را یک پیشامد در نظر بگیریم؛ زیرا تنها این پیشامد به همراه پیشامد انتخاب جعبه مورد سوال است. هر چند مسئله را می توان از طریق تعریف یک پیشامد برای هر لامپ نیز حل کرد. این هنر فرد است که پیشامدها و رخدادها را به صورت کاملاً درست و واضح و البته تا حد امکان حداقلی تعریف کند تا دقیقاً همان مسئله ای را حل کند که از او خواسته شده و البته همان مسئله را هم به صورت فاصله و حداقلی حل نماید. تناقض برتراند، نمونه ی بسیار خوبی از حل مسئله ی احتمالی به چند روش ممکن فقط بر اساس تفصیص احتمال های مختلف به رخدادهاست.)

(الف)

$$A = \{\text{پیشامد خرابی هر دو لامپ}\}$$

$$B = \{\text{پیشامد انتخاب جعبه ی ۱}\}$$

در این سوال داریم

$$P(A|B) = \frac{\binom{100}{2}}{\binom{1000}{2}} \approx 0.01$$

$$P(A|B^c) = \frac{\binom{100}{2}}{\binom{2000}{2}} \approx 0.0025$$

$$P(B) = \frac{1}{2}$$

و مطلوب ما $P(A)$ است؛ در اینصورت طبق قاعده‌ی احتمال کل

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B)P(A|B) + P(B^c)P(A|B^c) \\ &= \frac{1}{2}(0.01 + 0.0025) \\ &= 0.0063 \end{aligned}$$

ب) مطلوب ما $P(B|A)$ است. در اینصورت

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(AB)}{P(A)} \\ &= \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)} \\ &= \frac{0.5 \times 0.01}{0.0063} \\ &= 0.7937 \end{aligned}$$

این احتمال، احتمال قابل توجهی است زیرا درصد تعداد لامپ‌های خراب در پیچیده‌ی ا بیشتر است.

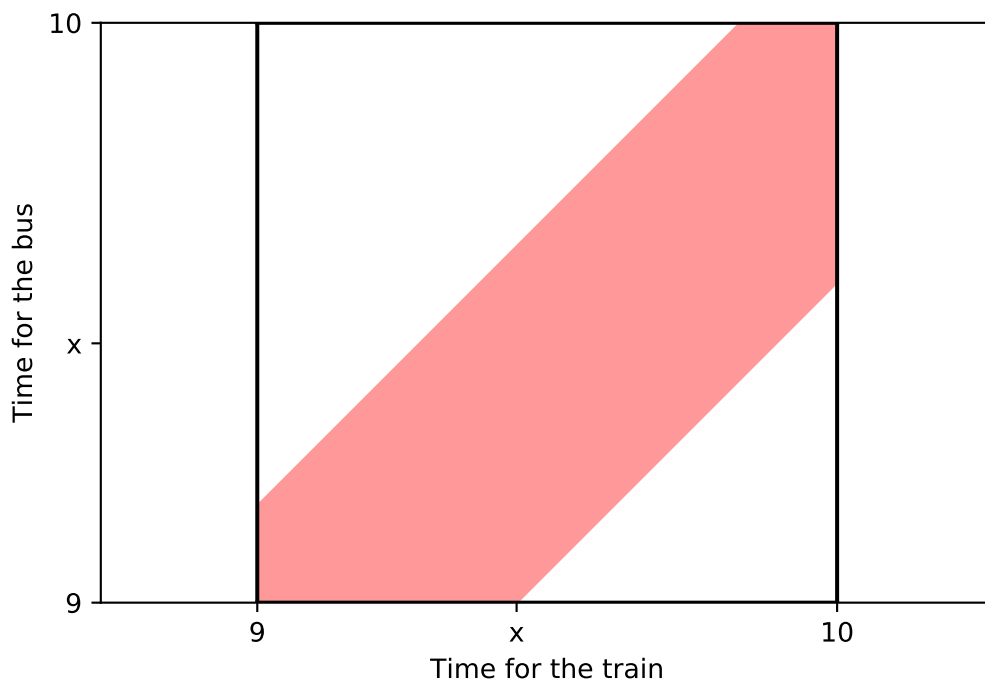
سوال ۲۵) اگر X و Y را به ترتیب متغیرهای تصادفی ورود قطار و اتوبوس به ایستگاه بدانیم، این متغیرها دارای توزیع یکنواخت بین ساعت‌های ۹ و ۱۰ و مستقل هستند. در اینصورت قطار بازه‌ی زمانی $(X, X + \frac{1}{6})$ و اتوبوس بازه‌ی زمانی $(Y, Y + x)$ را اشغال می‌کند. مکمل این پیشامد، حالتی است که اتوبوس و قطار یکدیگر را ملاقات نکنند؛ یعنی

$$Y > X + \frac{1}{6} \quad \text{یا} \quad Y + x < X$$

در اینصورت پیشامد مطلوب ما خواهد بود:

$$X - x < Y < X + \frac{1}{6}$$

که مساحت نامیه‌ی زیر است:



مساحت ناحیه‌ی هاشورنخورده برابر است با

$$\frac{25}{72} + \frac{(1-x)^2}{2}$$

این مساحت باید برابر $\frac{1}{2}$ باشد که در این صورت مقدار x برابر ۲۷ دقیقه $\approx 0.4472h \approx 1 - \frac{\sqrt{11}}{6}$ مناسبه می شود.

سوالات ۱۳، ۲۲ و ۲۴ از کتاب مربع (کتاب Probability and Statistics از پاپولیس)

سوال ۱۳) این مسئله به کمک قانون احتمال کل و استفاده از تعریف احتمال شرطی به راحتی قابل حل است

سوال ۲۲) مشابه سوال ۲۲ از کتاب غیر مربع.

سوال ۲۴) رشته‌ی لامپ زمانی کار می‌کند که تمام لامپ‌های آن سالم باشند (تقسیم و لتاژ و خاصیت سری بودن؛ در حالت موازی، کافی است حداقل یکی از لامپ‌ها کار کند به دلیل تقسیم جریان) در این صورت فواید

داشت:

$$p = (1 - 0.01)^{50} \approx 0.61$$

سوال ۱)

$$P(F) = 0.37$$

$$P(M) = 0.43$$

$$P(D|M) = 0.15$$

$$P(D|F) = 0.25$$

مطلوب است $P(D|M \cup F)$. در این صورت داریم

$$\begin{aligned} P(D|M \cup F) &= \frac{P(D \cap [M \cup F])}{P(M \cup F)} \\ &= \frac{P([D \cap M] \cup [D \cap F])}{P(M) + P(F)} \\ &= \frac{P(D \cap M) + P(D \cap F)}{P(M) + P(F)} \\ &= \frac{P(M)P(D|M) + P(F)P(D|F)}{P(M) + P(F)} \\ &= \frac{0.37 \times 0.25 + 0.43 \times 0.15}{0.8} \\ &\approx 0.20 \end{aligned}$$

این مسئله را به گونه‌ی دیگری نیز می‌توان حل کرد. از آنجا که به طور کل کودکان در سوال مطرح نمی‌شوند نسبت جمعیت زنان و مردان بزرگسال را به کل بزرگسالان مناسبه می‌کنیم. به طور کل، 53.75% جمعیت بزرگسالان را مردان و 46.25% را زنان تشکیل می‌دهند. بنابراین می‌توان نوشت

$$P(M) = 0.5375$$

$$P(F) = 0.4625$$

و مطلوب $P(D)$ خواهد بود؛ در این صورت

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D \cap M) + P(D \cap F) \\ &= P(D|M)P(M) + P(D|F)P(F) \\ &= 0.5375 \times 0.15 + 0.4625 \times 0.25 \\ &\approx 0.20 \end{aligned}$$

سوال ۲)

$$P(A|B \cap C) = \frac{P([A \cap B] \cap [A \cap C])}{P(B)P(C)}$$

برای آنکه تساوی ارضا شود، یک شرط کافی مستقل بودن $A \cap B$ و $A \cap C$ است.

سوال ۳) کران بالا به وضوح بنا به رابطه‌ی احتمال اجتماع برقرار است. این کران بسیار موع، کران اجتماع^۱ نامیده می شود.

برای اثبات کران پایین، ابتدا به دلیل تقارن فرض می کنیم $P(A) \leq P(B)$. اکنون کافی است مد نظر قرار دهیم که نامساوی های زیر معادلند:

$$\begin{aligned} P(A) + P(B) - \frac{1}{4 - 4P(A)} &\leq P(A \cup B) \\ \iff \frac{1}{4 - 4P(A)} &\geq P(A \cap B) \\ \iff P(A \cap B)(1 - P(A)) &\leq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

از آنجایی که $P(A \cap B) \leq P(A)$ و بیشینه مقدار $u - u^2$ به ازای $0 < u < 1$ در $u = \frac{1}{2}$ رخ می دهد، اثبات کامل است

پاسخ سوال ۱۵)

سوال ۱)

الف) اگر جایگزاری داشته باشیم، پس از برداشتن گلوله‌ی اول به ۸ حالت، گلوله‌ی دوم را نیز می توانیم به ۸ حالت برداریم. در این صورت از آنجا که ترتیب برداشتن فرقی نمی کند، برداشتن دو گلوله مجموعاً به $\frac{8 \times 8}{2}$ طریق ممکن است. همچنین اینکه یکی از گلوله ها سفید و دیگری آبی باشد، به 5×3 راه ممکن است؛ پس احتمال مطلوب برابر است با

$$P = \frac{15}{32}$$

نکته موع!! ممکن است این گونه برداشت شود که پاسخ اصلی در یک ضریب ۲ با پاسخ بالا تفاوت می کند؛ به طور مثال یک راه حل (که البته نادرست است!) به صورت زیر است:

^۱ Union Bound

پیشامد اینکه گلوله‌ی اول سفید و دومی آبی باشد، ۱۵ حالت متفاوت دارد. چون هر گلوله را به ۸ حالت مستقل از دیگری بر می داریم، پاسخ $\frac{3 \times 5}{8 \times 8}$ می شود.

ایراد استدلال بالا این است که رنگ گلوله ها در ترتیب برداشته شدن گلوله ها اثرگذار بوده است. برای اینکه مشکل این استدلال رفع شود، باید پیشامد عکس هم در نظر گرفته شود؛ یعنی حالتی که گلوله‌ی اول آبی و دومی سفید باشد تا محور زمان دیره نشود.

نوع دیگر استدلال (درست) چنین است: هنگامی که جایگذاری داشته باشیم، برداشتن گلوله های اول و دوم کاملاً از هم مستقل می شود. پس مسئله معادل است با اینکه:

دو کیسه داریم که هر یک شامل ۵ سفید و ۳ آبی است. از هر یک، یک گلوله بر می داریم. با چه احتمالی یکی سفید و دیگری آبی می شود؟

مسئله ی فوق، بعد زمان را به فضا تبدیل کرده است؛ یعنی به جای دو بار برداشتن گلوله ها از یک کیسه در زمانهای مختلف، دو تا را از دو کیسه همزمان برداشته ایم. در اینصورت پیشامد اینکه یکی آبی و دیگری سفید باشد، اجتماع دو پیشامد هم احتمال است که هر یک با احتمال $\frac{15}{64}$ رخ می دهد؛ پس پاسخ درست $\frac{15}{32}$ است.

ب) اگر جایگذاری مجاز نباشد، دو گلوله را به $\binom{8}{2} = 28$ طریق ممکن می توان برداشت که فقط حالاتی که یکی سفید و دیگری آبی باشد مطلوب است. این حالات مجموعاً به $\binom{3}{1} \binom{5}{1} = 15$ طریق ممکن امکان پذیرند؛ پس احتمال مطلوب برابر است با

$$P = \frac{15}{28}$$

سوال ۲) الف) مکمل این پیشامد، حالتی است که حداکثر یک بار رو ظاهر شود که برابر است با حالاتی که در ۱۰ پرتاب دقیقاً ۱ رو یا دقیقاً صفر رو ظاهر شود (همگی به پشت ظاهر شوند). مجموع احتمالات برابر است با

$$p' = 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^9 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{11}{1024}$$

بنابراین احتمال مطلوب برابر است با

$$p = 1 - p' = \frac{1013}{1024}$$

ب) مشابه قسمت بالا، از آنجا که پرتاب های سکه از هم مستقل هستند، داریم:

$$p = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}$$

پ) احتمال اینکه در پرتاب های زوج نتیجه رو باشد با اینکه پشت باشد، به دلیل تقارن مسئله یکسان است. از طرفی برای مناسبی احتمال اینکه در پرتاب های زوج نتیجه رو باشد داریم:

$$p' = \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

بنابراین احتمال مطلوب برابر است با

$$p = 2p' = \frac{1}{16}$$

سوال ۳) این دسته کل را به $\binom{20}{5} = 15504$ راه ممکن می توان برگزید.

الف) اگر دسته کل بفواهد شامل ۲ نسترن و ۲ بنفشه باشد، باید کل باقیمانده را از بین لاله ها و اقاقیاها به ۱۲ طریق ممکن برداریم. این کار به $\binom{12}{1} \binom{5}{2} \binom{3}{2} = 180$ حالت ممکن امکان پذیر است؛ بنابراین احتمال مطلوب برابر است با

$$p = \frac{180}{15504} \approx 0.01$$

(اگر فرض کرده اید دسته کل شامل حداقل ۲ نسترن یا ۲ بنفشه است نیز راه حل مورد قبول است!)

ب) فقط می توان از بین ۷ کل بنفشه و اقاقیا انتخاب کرد که این به $\binom{7}{5} = 21$ حالت ممکن است؛ پس:

$$p = \frac{21}{15504} \approx 0.0014$$

پ) احتمال مطلوب عبارتست از

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{1}{15504} \binom{10}{2} \binom{5}{1} \binom{3}{1} \binom{2}{1} \\
 &+ \frac{1}{15504} \binom{10}{1} \binom{5}{2} \binom{3}{1} \binom{2}{1} \\
 &+ \frac{1}{15504} \binom{10}{1} \binom{5}{1} \binom{3}{2} \binom{2}{1} \\
 &+ \frac{1}{15504} \binom{10}{1} \binom{5}{1} \binom{3}{1} \binom{2}{2} \\
 &= \frac{50}{323} \approx 0.15
 \end{aligned}$$

سوال ۴) الف) هر مجموعه n عضوی شامل 2^n زیر مجموعه‌ی متمایز است که $\binom{n}{k}$ تا از آنها k عضوی اند. پس احتمال مطلوب برابر است با

$$p = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

ب) از آنجا که مجموع تمام احتمالات فوق برابر است، داریم:

$$\sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{2^n} = 1$$

که معادل گزاره‌ای است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

سوال ۲)

الف)

$$\binom{n}{m} \left(\frac{M}{N}\right)^m \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-m}$$

ب)

$$\frac{\binom{M}{m} \binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}$$

ج) در این حالت باید داشته باشیم $n = M + 2$ در غیر این صورت احتمال برابر صفر است. با این فرض،

پس از تمام شدن گلوله های سفید، حتماً دو گلوله ی سیاه برداشته خواهند شد و این احتمال برابر یک است.

$$\begin{aligned} P &= \Pr[\text{برداشتن تمام سفیدها} | \text{برداشتن دو سیاه}] \\ &= \frac{\Pr[\text{برداشتن تمام سفیدها} \cap \text{برداشتن دو سیاه}]}{\Pr[\text{برداشتن تمام سفیدها}]} \\ &= 1 \end{aligned}$$

سوال ۳) این حالت زمانی رخ می دهد که تعداد قدم زدن های به سمت چپ فرد با تعداد قدم زدن های به سمت راست فرد برابر باشد؛ پس اولین شرط زوج بودن k است در غیر این صورت احتمال برابر صفر خواهد بود. با فرض زوج بودن k داریم:

$$p = \binom{k}{\frac{k}{2}} [p(1-p)]^{\frac{k}{2}}$$

سوال ۴) ابتدا، زیرمجموعه ها را با A و B و سپس پیشامد آن را که عدد i در A و B باشد، به ترتیب با X_i و Y_i نمایش می دهیم. در این صورت احتمال زیر مطلوب است:

$$\begin{aligned} &\Pr\{\text{پیشامد قرار نداشتن عدد ۱ در هر دو مجموعه} \\ &\quad \cap \text{پیشامد قرار نداشتن عدد ۲ در هر دو مجموعه} \\ &\quad \cap \text{پیشامد قرار نداشتن عدد ۳ در هر دو مجموعه} \\ &\quad \cap \dots \\ &\quad \cap \text{پیشامد قرار نداشتن عدد } n \text{ در هر دو مجموعه}\} \end{aligned}$$

به زبان ریاضی:

$$\Pr \left\{ \bigcap_{i=1}^n [X_i \cap Y_i]^c \right\}$$

به دلیل استقلال می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \Pr \left\{ \bigcap_{i=1}^n [X_i \cap Y_i]^c \right\} &= \prod_{i=1}^n \Pr \{ [X_i \cap Y_i]^c \} \\ &= \prod_{i=1}^n 1 - \Pr \{ X_i \cap Y_i \} \\ &= \prod_{i=1}^n 1 - \Pr \{ X_i \} \Pr \{ Y_i \} \\ &= (1 - p^2)^n \end{aligned}$$

سوال ۶) احتمال مطلوب عبارتست از:

$$\Pr\{\text{یکسان بودن پاسخ تمام دانشجویان} \mid \text{درست بودن پاسخ تمام دانشجویان}\} \\ = \frac{\Pr\{\text{یکسان بودن پاسخ تمام دانشجویان} \cap \text{درست بودن پاسخ تمام دانشجویان}\}}{\Pr\{\text{یکسان بودن پاسخ تمام دانشجویان}\}}$$

پیشامد آن که تمام دانشجویان مستقل از هم به پاسخ درست برسند، حالت خاصی از کوشش مکرر و احتمال آن برابر p^n است. احتمال آن که دانشجویان به پاسخ یکسانی برسند طبق قاعده‌ی احتمال کل برابر احتمال پاسخ یکسان در دو حالت پاسخ درست یا نادرست است. احتمال آن که تمام دانشجویان به پاسخ نادرست رسیده باشند برابر $(1-p)^n$ و در نتیجه احتمال مطلوب برابر

$$\frac{p^n}{p^n + (1-p)^n} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{p} - 1\right)^n}$$

فواهد بود. نسبت $1 - \frac{1}{p}$ را می‌توان معیاری از سفتی سوال ارزیابی کرد. در حقیقت هر چه سوال به تعبیر ریاضی آن “سفت‌تر” باشد، احتمال درست پاسخ دادن تمام دانشجویانی که به پاسخ یکسان رسیده اند کمتر است. به علاوه هر چه تعداد دانشجویان بیشتری پس از امتحان به یک پاسخ رسیده باشند، احتمال آن که همه‌ی آنها اشتباه کنند بیشتر می‌شود. این وضعیت را می‌توان در نمودار زیر مشاهده کرد:

پاسخ سوال ۱۶)

سوال ۱)

$$\Pr\{\text{ماسک زدن} \mid \text{ابتلا به کرونا}\} = 0.15$$

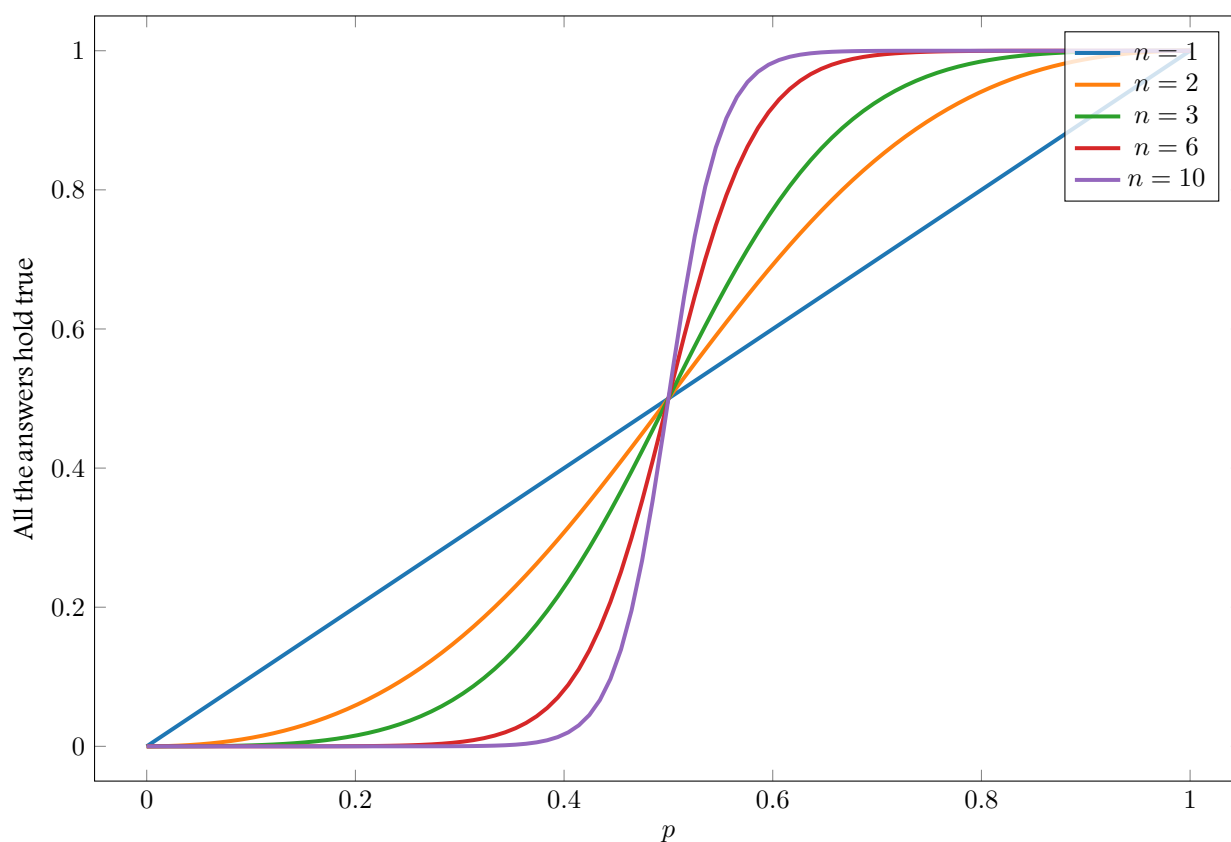
$$\Pr\{\text{ماسک نزدن} \mid \text{ابتلا به کرونا}\} = 0.7$$

$$\Pr\{\text{ماسک زدن}\} = 0.05$$

$$\Pr\{\text{ابتلا به کرونا}\} = \Pr\{\text{ماسک زدن} \mid \text{ابتلا به کرونا}\} \Pr\{\text{ماسک زدن}\} \\ + \Pr\{\text{ماسک نزدن} \mid \text{ابتلا به کرونا}\} \Pr\{\text{ماسک نزدن}\} \\ = 0.7 \times 0.95 + 0.15 \times 0.05 = 67.25\%$$

سوال ۲)

$$\Pr\{\text{هر دو زوج}\} = \Pr\{\text{زوج}\} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \implies \Pr\{\text{جمع زوج}\} = \frac{1}{2} = 0.5$$



(ب)

$$\Pr\{\text{جمع زوج} | \text{جمع بیشتر از ۸}\} = \frac{\Pr\{\text{جمع زوج} \cap \text{جمع بیشتر از ۸}\}}{\Pr\{\text{جمع زوج}\}} = \frac{\frac{4}{36}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{9} \approx 0.22$$

سوال ۳

راه ۱

اگر عناصر ۱ و ۲ را که در هر دو زیر مجموعه هستند کنار بگذاریم، سایر اعضا را به 3^{n-2} طریق ممکن می توان بین دو زیر مجموعه پخش کرد. از طرفی برای آنکه اشتراک دو زیر مجموعه برابر $\{1, 2\}$ باشد و اعضای ۳، ۴، ۵ داخل یکی از زیر مجموعه ها بیفتند، باید در هنگام انتخاب سایر اعضای زیر مجموعه ها از بین اعضای $\{5, \dots, n\}$ ابتدا هر عضو مجموعه ی بالا را در نظر بگیریم. هر عضو سه حالت دارد: یا فقط داخل زیر مجموعه ی ۱ است؛ یا فقط داخل زیر مجموعه ی ۲ است و یا در هیچ یک از زیر مجموعه ها نیست. بنابراین این کار به 3^{n-5} طریق ممکن

امکان پذیر می شود و احتمال مطلوب برابر است با

$$\frac{3^{n-5}}{3^{n-2}} = \frac{1}{27}$$

راه ۲

از آنجا که ۱ و ۲ در هر دو زیرمجموعه هستند، می توان آنها را نادیده گرفت و سایر اعضای هر دو زیرمجموعه را از اعضای $\{3, 4, \dots, n\}$ برگزید. با این شرط، تعداد کل حالاتی که می توان دو زیرمجموعه را برگزید عبارتست از اینکه ابتدا k عضو برداریم و سپس این k عضو را بین دو زیرمجموعه پخش کنیم؛ یعنی

$$\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} 2^k = 3^{n-2}$$

تعداد حالاتی که یکی از زیرمجموعه های شامل عناصر $\{3, 4, 5\}$ باشد، این است که عناصر معلوم الحال را (یعنی $\{1, 2, 3, 4, 5\}$) در نظر بگیریم و سپس سایر اعضا را از بین $\{6, \dots, n\}$ برگزینیم. این کار به طریق مشابه به

$$\sum_{k=0}^{n-5} \binom{n-5}{k} 2^{k-1} = 3^{n-5}$$

امکان پذیر است؛ پس احتمال مطلوب می شود:

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-5} \binom{n-5}{k} 2^{k-1}}{\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} 2^{k-1}} = \frac{1}{27}$$

سوال ۴) پیشامد معیوب بودن لامپ را با C و انتخاب جعبه ی i ام را با B_i نشان می دهیم. در این صورت:

(الف)

$$P(C) = \sum_{i=1}^3 P(C|B_i)P(B_i) = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{1000} + \frac{3}{10} + \frac{0}{3000} \right) = 0.101$$

(ب)

$$P(B_2|C) = \frac{P(B_2 \cap C)}{P(C)} = \frac{P(C|B_2)P(B_2)}{P(C)} = \frac{\frac{3}{10} \times \frac{1}{3}}{\frac{101}{1000}} = \frac{100}{101} \approx 0.99$$

(ب)

$$\begin{aligned}
 P(B_1 \cup B_2 | C') &= \frac{P([B_1 \cup B_2] \cap C')}{P(C')} \\
 &= \frac{P([B_1 \cap C'] \cup [B_2 \cap C'])}{P(C')} \\
 &= \frac{P(B_1 \cap C') + P(B_2 \cap C')}{P(C')} \\
 &= \frac{P(C' | B_1)P(B_1) + P(C' | B_2)P(B_2)}{P(C')} \\
 &= \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{997}{1000} + \frac{7}{10} \right)}{1 - 0.101} \approx 0.63
 \end{aligned}$$

سوال ۵)

$$P(P_1 | B) = \frac{P(P_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B | P_1)P(P_1)}{P(B)} = \frac{\frac{20}{100} \times \frac{100}{100+1000}}{\frac{70}{1100}} = \frac{2}{7} \approx 0.29$$

$$P(P_2 \cap B' | F) = \frac{P(P_2 \cap B' \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{630}{1100}}{\frac{690}{1100}} = \frac{21}{23} \approx 0.91$$

$$P(B | M) = \frac{P(B \cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{40}{1100}}{\frac{410}{1100}} = \frac{4}{41} \approx 0.10$$

پاسخ سوال ۱۷)

سوال ۱)

الف) از آنجا که برای $n < a$ و $n > b$ به ترتیب داریم $F(n) = 0$ و $F(n) = 1$ ، نتیجه می توان نوشت:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{1}{b-a+1} & , \quad a \leq n \leq b \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

بنا بر این

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=-\infty}^{\infty} n f(n) &= \sum_{n=a}^b \frac{n}{b-a+1} \\
 &= \sum_{n=1}^b \frac{n}{b-a+1} - \sum_{n=1}^{a-1} \frac{n}{b-a+1} \\
 &= \frac{b^2 + b - a^2 + a}{2(b-a+1)} \\
 &= \frac{(b+a)(b-a+1)}{2(b-a+1)} \\
 &= \frac{b+a}{2}
 \end{aligned}$$

(ب)

$$f(n) = A^n - A^{n+1} = A^n(1-A) \quad , \quad n \geq 0$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=-\infty}^{\infty} n f(n) &= \sum_{n=0}^{\infty} n A^n (1-A) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} n A^n (1-A) \\
 &= A(1-A) \sum_{n=1}^{\infty} n A^{n-1} \\
 &= A(1-A) \frac{d}{dA} \sum_{n=1}^{\infty} A^n \\
 &= A(1-A) \frac{d}{dA} \frac{A}{1-A} \\
 &= \frac{A}{1-A}
 \end{aligned}$$

سوال ۲)

(الف)

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda} x} \quad , \quad x > 0$$

نتیجه

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) d x &= \int_0^{\infty} \frac{x}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda} x} d x \\&= -x e^{-\frac{1}{\lambda} x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{\lambda} x} d x \\&= \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{\lambda} x} d x \\&= -\lambda e^{-\frac{1}{\lambda} x} \Big|_0^{\infty} \\&= \lambda\end{aligned}$$

(ب)

$$f(x)=\frac{1}{b-a} \quad , \quad a < x < b$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) d x &= \int_a^b \frac{x}{b-a} d x \\&= \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} \\&= \frac{b+a}{2}\end{aligned}$$

(پ)

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \Big|_{t=x} - \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \Big|_{t=-\infty} \\&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\end{aligned}$$

μ_*

بنابراین

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \exp\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu + \mu) \cdot \exp\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \\ &= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu) \cdot \exp\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx}_{\triangleq I_1} \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \mu \cdot \exp\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx}_{\triangleq I_2}\end{aligned}$$

انتگرال I_1 برابر است با $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} w \cdot \exp\left(\frac{w^2}{2\sigma^2}\right) dw$ که همگرا و برابر صفر است؛ زیرا این انتگرال، انتگرال یک تابع فرد را روی بازه‌ی مقارنی نشان می‌دهد به علاوه جمله‌ی نمایی میرا شونده باعث کاهش سریع تابع تحت انتگرال می‌گردد. برای انتگرال I_2 نیز با توجه به تابع $F(x)$ تعریف شده در صورت سوال می‌توان نوشت:

$$I_2 = \mu \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \mu F(\infty) = \mu$$

در مجموع خواهیم داشت:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \mu$$

سوال ۳

متغیر تصادفی برنولی، یک متغیر تصادفی دو مقداره است که تنها مقادیر صفر و یک را می‌پذیرد. به طور مثال برای متغیر تصادفی برنولی X داریم

$$\Pr\{X = 1\} = p$$

از آنجا که عملگر این قسمت یک xor (یا جمع به پیمانه‌ی ۲) است، متغیر تصادفی Z نیز دو مقداره و دارای

توزیع برنولی خواهد بود.

$$\begin{aligned}
 \Pr\{Z = 1\} &= \Pr\{X \oplus Y \bmod 2 = 1\} \\
 &= \Pr\{X \text{ xor } Y = 1\} \\
 &= \Pr\{X = 1, Y = 0\} + \Pr\{X = 0, Y = 1\} \\
 &= \Pr\{X = 1, Y = 0\} + \Pr\{X = 1, Y = 0\} \\
 &= \Pr\{X = 1\} \Pr\{Y = 0\} + \Pr\{X = 0\} \Pr\{Y = 1\} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot (1 - p) + \frac{1}{2} \cdot p \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

سوال ۴)

با توضیحاتی مشابه سوال قبل، به سادگی دیده می شود که متغیر تصادفی Z دو مقدار و دارای توزیع برنولی خواهد بود.

$$\begin{aligned}
 \Pr\{Z = 1\} &= \Pr\{XY = 1\} \\
 &= \Pr\{X = 1, Y = 1\} \\
 &= \Pr\{X = 1\} \Pr\{Y = 1\} \\
 &= \frac{1}{2} p
 \end{aligned}$$

سوال ۵)

متغیر تصادفی X حاصل n_1 کوشش برنولی مستقل با پارامتر احتمالاتی p و متغیر تصادفی Y حاصل n_2 کوشش برنولی مستقل با پارامتر احتمالاتی p است؛ در نتیجه می توان متغیرهای تصادفی X و Y را به مانند تعداد شیرهای رو آمده در پرتاب به ترتیب n_1 و n_2 بار سکه‌ی ناسالم تعبیر نمود. با این تعبیر، متغیر تصادفی $X + Y$ تعداد شیرها را در $n_1 + n_2$ بار پرتاب همان سکه‌ی ناسالم نشان می دهد؛ به عبارت دیگر فرقی نمی کند که ابتدا سکه را n_1 بار پرتاب کرده و تعداد شیرها را یادداشت کنیم، سپس با تعداد شیرها در n_2 بار پرتاب جمع بزنیم یا از ابتدا سکه را $n_1 + n_2$ بار پرتاب کنیم و سپس تعداد شیرها را یادداشت کنیم. این عدم تفاوت، به دلیل مستقل بودن پرتاب هاست و در صورت مستقل نبودن پرتاب ها، استدلال های فوق معتبر نخواهند بود.

الف) فضای نمونه عبارتست از مجموعه‌ی تمام برآمدها (رفرادها)ی که می توانند در یک مسئله‌ی احتمالاتی رخ دهند. به طور مثال، فضای نمونه‌ی پرتاب تاس، $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ است.

ب) به هر زیرمجموعه از فضای نمونه، یک پیشامد یا واقعه گفته می شود. در پرتاب تاس، واقعه‌ی رو آمدن عدد زوج معادل مجموعه‌ی $\{2, 4, 6\}$ است.

پ) به هر زیرمجموعه‌ی تک عضوی از فضای نمونه، یک پیشامد ساده یا برآمد گفته می‌شود. در پرتاب تاس، ۶ برآمد وجود دارد.

پاسخ سوال ۱۸)

در صورتی که فضای نمونه متناهی باشد، پاسخ مثبت است؛ زیرا هر برآمد دارای احتمال مثبت است و در نتیجه، احتمال رخداد هر زیرمجموعه کمتر از ۱ خواهد بود. در حالتی که فضای نمونه نامتناهی باشد، حذف یک برآمد با احتمال رخداد صفر از فضای نمونه، تغییر در احتمال آن ایجاد نمی‌کند. به طور مثال، فرض کنید بخواهیم عددی حقیقی را به تصادف کامل از بازه‌ی $[0, 1]$ برگزینیم. در این صورت، احتمال اینکه این عدد برابر 0.5 نباشد برابر ۱ است.

پاسخ سوال ۱۹)

الف)

$$A \times B = \{(H, 1), (H, 2), (H, 3), (H, 4), (H, 5), (H, 6), \\ (T, 1), (T, 2), (T, 3), (T, 4), (T, 5), (T, 6)\}$$

این مجموعه، فضای نمونه‌ی آزمایش پرتاب توأم تاس و سکه است ("یک سکه و یک تاس را به طور همزمان پرتاب میکنیم...").

ب) به طور مثال

$$S_1 = \{(T, 2), (H, 5), (T, 6)\}$$

$$S_2 = \{(H, 2), (T, 5), (H, 6)\}$$

نمی‌توان همین کار را برای زیرمجموعه‌های ۷ عضوی تکرار کرد؛ چرا که طبق اصل لانه‌ی کبوتری، حداقل دو عضو تکراری در این دو زیرمجموعه وجود خواهد داشت.

پاسخ سوال ۲۰)

می‌دانیم

$$P\{A \cap (B \cup C)\} = P\{[A \cap B] \cup [A \cap C]\}$$

از طرفی

$$[A \cap B] \cap [A \cap C] = A \cap B \cap C = A \cap [B \cap C] = A \cap \emptyset = \emptyset$$

بنابر این طبق اصل سوم کولموگروف،

$$\begin{aligned} P\{A \cap (B \cup C)\} &= P\{[A \cap B] \cup [A \cap C]\} \\ &= P\{A \cap B\} + P\{A \cap C\}. \end{aligned}$$

اگر پیشامدهای ابتدا به کرونا و آنفلوآنزا را به ترتیب با A و B نشان دهیم، طبق فرض مسئله داریم

$$\begin{aligned} P(A) &= 0.07, \\ P(B) &= 0.19, \\ P(A \cup B) &= 0.2. \end{aligned}$$

در این صورت

(الف) خواسته‌ی مسئله، $P(A \cap B)$ است که برابر است با

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.07 + 0.19 - 0.2 = 0.06$$

(ب) مطلوب‌ست $P(A - B)$. در این صورت

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0.07 - 0.06 = 0.01.$$

پاسخ سوال (۲)

(الف)

$$P(A) = P(2) + P(3) + P(5) + P(7) = 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 = 0.4$$

(ب)

$$\begin{aligned} A - B &= \{2\} \\ A \cap B &= \{3, 5, 7\} \\ \implies \\ P(A - B) &= 0.1 \\ P(A \cap B) &= 0.3 \end{aligned}$$

(پ) داریم

$$\begin{aligned} P(A - B) &= 0.1 \\ P(A) &= 0.4 \\ P(A \cap B) &= 0.3 \end{aligned}$$

بنابر این درستی رابطه‌ی زیر مشاهده می‌شود:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$$

علت درستی این رابطه آن است که دو مجموعه‌ی $A - B$ و $A \cap B$ ناسازگارند؛ در نتیجه طبق اصل سوم کولموگروف

$$P(A \cap B) + P(A - B) = P([A \cap B] \cup [A - B]) = P(A).$$

پاسخ سوال ۲۲) نامساوی سمت راست به سادگی از

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

و $0 \leq P(A \cap B)$ نتیجه می‌شود. برای نامساوی سمت چپ باید اثبات کنیم

$$P(A \cap B) \leq \frac{1}{4 \max\{1 - P(A), 1 - P(B)\}}$$

به دلیل تقارن مسئله، فرض می‌کنیم $P(A) \geq P(B)$. در نتیجه

$$P(A \cap B) \leq \frac{1}{4[1 - P(B)]}.$$

از طرفی

$$\left(\frac{1}{2} - P(B)\right)^2 \geq 0 \implies$$

$$4P^2(B) - 4P(B) + 1 \geq 0 \implies$$

$$1 \geq 4P(B) - 4P^2(B) \implies$$

$$1 \geq 4P(B)[1 - P(B)] \implies$$

$$P(B) \leq \frac{1}{4[1 - P(B)]}.$$

همچنین می‌دانیم $A \cap B \subseteq B$. در نتیجه

$$P(A \cap B) \leq P(B) \leq \frac{1}{4[1 - P(B)]}$$

و اثبات کامل می‌شود ■

اگر کتابهای هم نوع متمایز باشند، اینکه مثلاً دو کتاب، همان نسبت به هم در چه موقعیتی قرار میگیرند مهم است. با این فرض، تمام کتابها متمایزند و مجموع حالات مطلوب، $9! = (3 + 2 + 4)!$ خواهد بود.

اگر تمام کتابهای هم نوع نامتمایز باشند، در این صورت دو حالت که دو کتاب رمان در دو موقعیت متفاوت نسبت به هم باشند (مثلا رمان بینوایان سمت چپ یا راست رمان گوشپشت نتردام باشد!)، یکبار شمرده می شوند. ترتیب کتابهای فیزیک و روانشناسی نیز به 3! و 4! حالت مختلف تعیین می شود. در این صورت، تعداد کل حالات مطلوب برابر $\frac{9!}{3! \times 2! \times 4!}$ خواهد بود.

پاسخ سوال ۲۳)

این دسته کل می تواند شامل حالات زیر باشد:

- ۳ بنفشه
- ۲ بنفشه و ۱ رز
- ۲ بنفشه و ۱ اقاقیا
- ۱ بنفشه و ۲ رز
- ۱ بنفشه و ۲ اقاقیا
- ۱ بنفشه، ۱ رز و ۱ اقاقیا
- ۳ رز
- ۲ رز و ۱ اقاقیا
- ۱ رز و ۲ اقاقیا

در نتیجه، مجموع کل حالات مطلوب عبارتست از:

$$\begin{aligned} & \binom{3}{3} + \binom{3}{2} \binom{4}{1} + \binom{3}{2} \binom{2}{1} + \binom{3}{1} \binom{4}{2} + \binom{3}{1} \binom{2}{2} + \\ & \binom{3}{1} \binom{2}{1} \binom{4}{1} + \binom{4}{3} + \binom{4}{2} \binom{2}{1} + \binom{4}{1} \binom{2}{2} = \\ & 1 + 12 + 6 + 18 + 3 + 24 + 4 + 12 + 4 = 84. \end{aligned}$$

پاسخ سوال ۲۴)

در حل مسائلی که با افراد سروکار دارند، اگر مسئله از نوع کلان نباشد (مانند شیوع افسردگی در یک جامعه که به طور نسبی، به تعداد افراد مربوط است نه به تک تک آنها)، باید افراد را متمایز دانست. مسئله‌ی پیش رو چنین حالتی دارد. به دلیل اینکه نشست در یک میزگرد اتفاق می افتد، ابتدا یک نفر (مثلا مدیرعامل) را در یک صندلی

می‌نشانیم و سپس حالات نشستن سایر افراد را بررسی می‌کنیم (چرا؟).

الف) اگر هر دو منشی کنار هم باشند، ابتدا هر دو نفر را یک نفر (به نام دو-منشی) به حساب می‌آوریم و تعداد حالات حاصله را می‌شماریم. سپس تعداد حالات را در تعداد ترتیبات نشستن دو منشی نسبت به هم ضرب می‌کنیم. با این رویکرد، دو-منشی دو صندلی کنار هم اختیار می‌کند که معادل این است که یک صندلی به او اختصاص داده و از تمام صندلی‌ها واحد کم کنیم. در این صورت، دو-منشی و سایر اعضا (به غیر از مدیر عامل)، باید ۷ صندلی از ۹ صندلی باقیمانده را تصاحب کنند. این کار، به دلیل تمایز اعضا، به $7! \times \binom{9}{7}$ طریق ممکن امکان پذیر است. چون دو-منشی شامل دو حالت ترتیب نشستن منشی‌ها نسبت به هم است، تعداد کل حالات ممکن برابر $362880 = 2 \times 7! \times \binom{9}{7}$ خواهد بود.

ب) در این حالت باید تمام اعضای هیئت مدیره، ۵ صندلی از ۸ صندلی باقیمانده (غیرمجاور با مدیر عامل و خود مدیر عامل) را به $5! \times \binom{8}{5} = 6720$ طریق تصاحب کنند. سپس منشی‌ها و مسابدار می‌توانند ۳ صندلی از ۵ صندلی باقیمانده را به $3! \times \binom{5}{3} = 60$ راه انتخاب کنند. تعداد کل حالات طبق اصل ضرب برابر 403200 خواهد بود.

پ) مسابدار به دو حالت کنار مدیر عامل می‌نشیند و تمام اعضای هیئت مدیره (به جز مدیر عامل) را که کنار هم می‌نشینند، یک نفر به نام پنج-مدیر در نظر می‌گیریم. پنج-مدیر، ۵ صندلی کنار هم انتخاب می‌کند که در این صورت، معادلاً با ۳ نفر روبرو هستیم که باید بر روی ۵ صندلی بنشینند. مشابه بخش الف و به دلیل تمایز منشی‌ها و اعضای هیئت مدیره، تعداد کل حالات مطلوب برابر است با $14400 = 2 \times 5! \times 3! \times \binom{5}{3}$.

پاسخ سوال (۲۵)

الف) طبق اصل ضرب، این کار به $70 = 7 \times 10$ طریق ممکن (بدون احتساب ترتیب) و 140 طریق ممکن (با احتساب ترتیب) امکان پذیر است.

ب) تعداد کل حالات ممکن برای برداشتن ۲ توپ، برابر $136 = \binom{17}{2}$ است و در نتیجه، احتمال مطلوب برابر $\frac{70}{136}$ خواهد بود.

پ) از آنجا که فقط یک توپ آبی مشخص و یک توپ قرمز مشخص مد نظر ماست، تنها به یک حالت می‌توانیم این دو توپ را برداریم (دقت کنید چه ترتیب انتخاب را محسوب کنیم چه نکنیم، تعداد حالات را عوض می‌کند ولی در مقدار احتمال تأثیری ندارد). در نتیجه احتمال مطلوب برابر $\frac{1}{136}$ خواهد بود.

ت) خیر؛ چرا که متمایز کردن توپ‌ها (به کمک شماره گذاری آنها)، جزو مطلوبات مسئله نبوده است.

پاسخ سوال ۲۶)

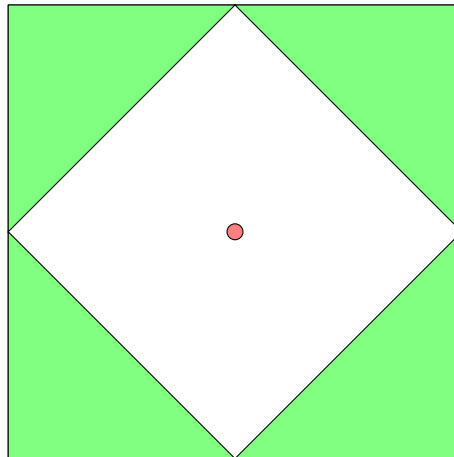
ب) برداشتن دو توپ با جایگزاری، مانند این است که دو توپ از دو کیسه‌ی کاملاً مشابه (یک توپ از هر کیسه) برداریم. از آنجا که ترتیب انتقاب نباید مهم باشد، حالتی که توپ کیسه‌ی اول قرمز و توپ کیسه‌ی دوم آبی است، هم ارزند و باید هر دو شمرده شوند. در این صورت، تعداد حالات برداشتن دو توپ به این روش که یکی آبی و دیگری قرمز باشد، 140 تا است و همچنین، این دو توپ به $17 \times 17 = 289$ حالت ممکن برداشته می‌شوند (اگر ترتیب انتقاب مهم نباشد). در نتیجه، احتمال مطلوب برابر $\frac{140}{289}$ خواهد بود.

پ) به طریق مشابه قبل، دو حالت امکان پذیر است که توپ‌های شماره دار خاصی از هر رنگ برداشته شوند. در نتیجه، احتمال مطلوب برابر $\frac{2}{289}$ خواهد بود.

ت) خیر. دلیل مشابه است؛ زیرا متمایز بودن توپها جزو مطلوبات مسئله نبوده است.

پاسخ سوال ۲۷)

مربع زیر را در نظر بگیرید:



اگر نقطه‌ی تصادفی مسئله، در یکی از نواحی سبز بیفتد، فاصله‌ی آن تا مرکز مربع از فاصله‌ی آن تا حداقل یکی از رئوس مربع بیشتر است. از آنجا که نواحی سبز، نصف مساحت مربع را اشغال می‌کنند در نتیجه احتمال مطلوب برابر $\frac{1}{2}$ خواهد بود.

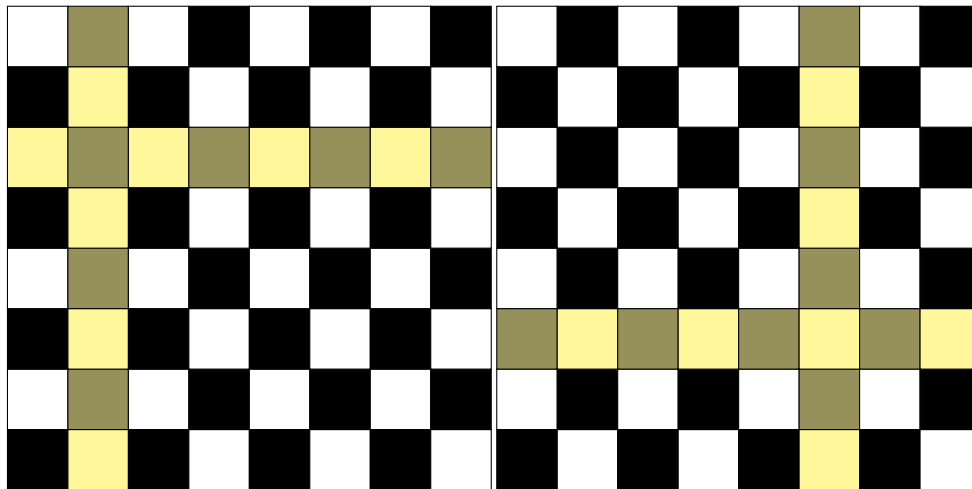
پاسخ سوال ۲۸)

الف) با قرار دادن رخ سفید، دقیقاً $14 = 8 - 2 \times 2$ خانه در معرض حمله‌ی رخ سفید قرار می‌گیرند (این

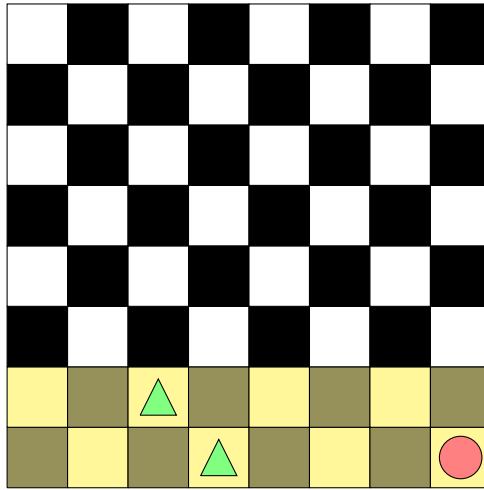
موضوع، مستقل از مکان قرارگیری رخ سفید است). در نتیجه پیشامد مطلوب آن است که رخ سیاه، در یکی از این خانه‌ها قرار گیرد که این امر، با احتمال $\frac{14}{63} = \frac{2}{9}$ رخ می‌دهد.

ب) برای مات شدن شاه سفید، متما باید حداقل یکی از رخ‌های سیاه، گوشه‌ای را که شاه سفید در آن قرار دارد تهدید کند. در نتیجه یکی از رخ‌ها باید در یکی از ۱۴ خانه‌ی ممکن قرار داشته باشد. به دلیل تقارن مسئله، فرض می‌کنیم یک رخ سیاه، در پایینی‌ترین ردیف قرار دارد.

هنگامی که یک رخ، ردیف یا ستونی که شامل شاه است را تهدید می‌کند، برای مات کردن شاه، رخ دیگر باید ردیف یا ستون دیگری را که شاه می‌تواند حرکت کند، به طور کامل تهدید کند (شکل ۲؛ دایره‌ی قرمز و مثل سبز به ترتیب نشان دهنده‌ی شاه سفید و رخ سیاه هستند). از طرفی، یکی از رخ‌ها نمی‌تواند خانه‌ی سیاه بالای شاه را اشغال کند؛ زیرا شاه با زدن آن مهره، از کیش و مات فرار میکند. همچنین اگر یکی از رخ‌ها در خانه‌ی مجاور شاه باشد، رخ دیگر نیز باید دقیقاً بالای آن قرار بگیرد و بالعکس؛ در غیر این صورت، شاه با زدن رخ کنار خود یا رخ‌ی که در خانه‌ی همسایه‌ی قطری شاه قرار دارد، از کیش فرار می‌کند. در نتیجه، آرایش ۲ تایی رخ‌ها به $6 \times 6 + 1 = 37$ طریق ممکن امکان پذیر است. به دلیل تقارن، مات شدن می‌تواند به صورت ستونی نیز رخ دهد؛ در نتیجه تعداد کل حالات مطلوب برابر $2 \times 37 = 74$ و احتمال مطلوب برابر $\frac{74}{1953} = \frac{74}{\binom{63}{2}}$ خواهد بود.



شکل ۱.۱: دو نمودار مربوط به سوال ۲ قسمت الف



شکل ۲.۱: مثالی از مات شدن شاه سفید

پاسخ سوال ۲۹)

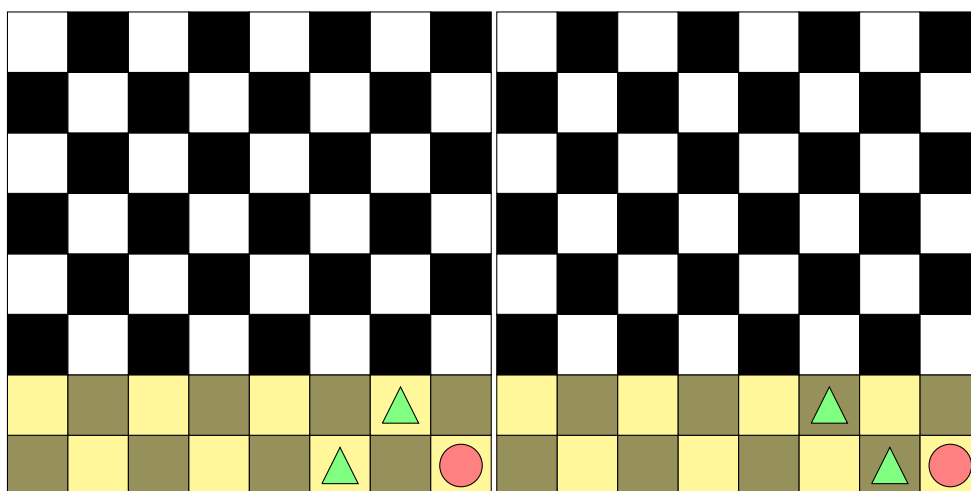
هر مجموعه‌ی n عضوی، 2^n زیرمجموعه دارد. ابتدا یکی از زیرمجموعه‌های k عضوی را به تصادف برمی‌داریم. این کار به $\binom{n}{k}$ طریق امکان دارد. برای آن که زیرمجموعه‌ی دیگر، با زیرمجموعه‌ی انتخاب شده ناسازگار باشد، باید اعضای آن از بین $n - k$ عضو باقیمانده به 2^{n-k} طریق ممکن انتخاب شوند. در نتیجه تعداد حالات مطلوب (برای هر زیرمجموعه با هر تعداد عضو)، طبق اصل ضرب برابر $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k}$ خواهد بود. با این حال، باید دقت شود که تعدادی از حالات تکراری اند. به طور مثال، امکان دارد زیرمجموعه‌ی $\{1, 3, n\}$ ، در دفعه‌ی اول و زیرمجموعه‌ی $\{2, 4, n - 1\}$ در دفعه‌ی دوم از بین اعضای باقیمانده انتخاب شود؛ یا بالعکس. همچنین، حالتی که هر دو زیرمجموعه تهی باشند، شمرده شده است که با وجود ناسازگاری، متمایز نیستند. پس باید از تعداد کل حالات مطلوب کنارگذاشته شوند. در نتیجه، حالات مطلوب برداشتن دو زیرمجموعه‌ی ناسازگار متمایز، برابر $\frac{[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k}] - 1}{2}$ و احتمال مطلوب، برابر $\frac{[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k}] - 1}{2^{n+1}}$ خواهد بود.

(با ساده سازی، می‌توان احتمال را به صورت زیر نیز نوشت

$$\frac{3^n - 1}{2^n(2^n - 1)}$$

(

پاسخ سوال ۳۰)



شکل ۱.۳: حالت هایی که به مات شدن منجر نمی شوند.

از آنجا که هر فرد ادسکه (پشت یا رو) معادل با پرتاب یک یا دو تاس است، پیشامد های زیر را تعریف می کنیم:

A = پیشامد رو آمدن سکه (پرتاب ۱ تاس)

B = پیشامد پشت آمدن سکه (پرتاب ۲ تاس)

C_n = پیشامد رو آمدن عدد n

می دانیم

$$P(A) = P(B) = 0.5.$$

از طرفی

$$P(C_n|A) = \begin{cases} \frac{1}{6} & , \quad n = 1, 2, \dots, 6 \\ 0 & , \quad n = 7, 8, \dots, 12 \end{cases}$$

9

$$P(C_n|B) = \begin{cases} 0 & , \quad n = 1 \\ \frac{6-|n-7|}{36} & , \quad n = 2, \dots, 12 \end{cases}$$

مطلوبست $P(C_n)$. در نتیجه طبق قاعده‌ی احتمال کل

$$\begin{aligned} P(C_n) &= P(A)P(C_n|A) + P(B)P(C_n|B) \\ &= \frac{1}{2}P(C_n|A) + \frac{1}{2}P(C_n|B) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{12} & , \quad n = 1, 2, \dots, 6 \\ 0 & , \quad n = 7, 8, \dots, 12 \end{cases} \\ &+ \begin{cases} 0 & , \quad n = 1 \\ \frac{6-|n-7|}{72} & , \quad n = 2, \dots, 12 \end{cases} \end{aligned}$$

با ساده سازی فوایدیم داشت

$$P(C_n) = \begin{cases} \frac{1}{12} & , \quad n = 1 \\ \frac{5+n}{72} & , \quad n = 2, \dots, 6 \\ \frac{13-n}{72} & , \quad n = 7, \dots, 12 \end{cases}$$

پاسخ سوال (۳۱)

راه اول

پیشامدهای زیر را تعریف می‌کنیم:

A_n = پیشامد سیاه بودن n توپ از ۳ توپ بیرون آمده در بار اول

B = پیشامد سفید بودن توپ انتخابی از ۳ توپ بیرون آمده در بار اول

در نتیجه

$$P(A_n) = \frac{\binom{10}{3-n} \binom{7}{n}}{\binom{17}{3}}$$

همچنین

$$P(B|A_n) = \frac{3-n}{3}$$

مطلوبست $P(B|A_1 \cup A_2 \cup A_3)$. در نتیجه

$$\begin{aligned} P(B|A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= \frac{P(B \cap [A_1 \cup A_2 \cup A_3])}{P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)} \\ &= \frac{P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3)}{P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)} \\ &= \frac{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)}{1 - P(A_0)} \\ &= \frac{\frac{2}{3} \times \frac{\binom{10}{2}\binom{7}{1}}{\binom{17}{3}} + \frac{1}{3} \times \frac{\binom{10}{1}\binom{7}{2}}{\binom{17}{3}} + 0 \times P(A_3)}{1 - \frac{\binom{10}{3}}{\binom{17}{3}}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

راه دوم)

پیشامدهای زیر را تعریف می‌کنیم:

A = پیشامد سیاه بودن دست کم یک توپ از ۳ توپ بیرون آمده در بار اول

B = پیشامد سفید بودن توپ انتخابی از ۳ توپ بیرون آمده در بار اول

در نتیجه

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(A') = P(\text{پیشامد سیاه بودن هیچ توپ از ۳ توپ بیرون آمده در بار اول}) \\ &= P(\text{پیشامد سفید بودن هر سه توپ بیرون آمده در بار اول}) \\ &= 1 - \frac{\binom{10}{3}}{\binom{17}{3}} = 1 - \frac{10 \times 9 \times 8}{17 \times 16 \times 15} = \frac{14}{17} \end{aligned}$$

مطلوبست $P(B|A)$. در نتیجه

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B \cap A) + P(B \cap A') - P(B \cap A')}{P(A)} \\ &= \frac{P(B) - P(B|A')P(A')}{P(A)} = \frac{P(B) - P(A')}{P(A)} \end{aligned}$$

از طرفی، پیشامد B معادل با این است که توپی از کیسه برداریم و سفید باشد (به عبارت دیگر، از ۳ توپ برداشته شده‌ی مرحله‌ی قبل، به طور مثال با بستن چشم بی‌خبر باشیم). در نتیجه

$$P(B) = \frac{10}{17}$$

و با جایگذاری خواهیم داشت

$$P(B|A) = \frac{P(B) - P(A')}{P(A)} = \frac{\frac{10}{17} - \frac{3}{17}}{\frac{14}{17}} = \frac{1}{2}.$$

پاسخ سوال (۳۲)

پیشامدهای زیر را تعریف می‌کنیم:

$A =$ پیشامد انتخاب کیسه‌ی ۱

$B =$ پیشامد انتخاب کیسه‌ی ۲

$C =$ پیشامد سفید نبودن توپ انتخابی

در نتیجه خواهیم داشت

$$P(A) = P(B) = 0.5$$

9

$$P(C|A) = \frac{7}{17}, \quad P(C|B) = \frac{7}{9}$$

مطلوب است $P(B|C)$. در نتیجه طبق قاعده‌ی احتمال بیز

$$\begin{aligned} P(B|C) &= \frac{P(C|B)P(B)}{P(C|A)P(A) + P(C|B)P(B)} \\ &= \frac{\frac{7}{9} \times \frac{1}{2}}{\frac{7}{9} \times \frac{1}{2} + \frac{7}{17} \times \frac{1}{2}} = \frac{17}{26} \end{aligned}$$

مکمل پیشامد مطلوب آن است که خانواده، دارای هیچ فرزند پسر یا هیچ فرزند دختری نباشد. احتمال پیشامد افیر برابر است با

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

در نتیجه، احتمال مطلوب برابر است با

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

که باید بیشتر از یک مساوی با 0.95 باشد. در نتیجه

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \geq 0.95$$

$$\implies \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq 0.05$$

$$\implies 2^{n-1} \geq 20$$

$$\implies n - 1 \geq \log_2 20$$

$$\implies n \geq 6$$

فصل ۲

آزمایش های تکراری

پاسخ سوال ۳۳)

الف) پیشامد مطلوب، عبارتست از آنکه دقیقاً ۲ بار عدد زوج یا دقیقاً ۳ بار عدد زوج بیاید. احتمال عدد زوج آمدن برابر 0.5 است. در نتیجه احتمال مطلوب برابر است با

$$\binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}.$$

ب) مجموع اعداد رو آمده در این ۳ پرتاب، در حالات زیر برابر ۵ می شود:

- دو بار ۱ و یکبار ۳ بیاید.

- دو بار ۲ و یکبار ۱ بیاید.

هر یک از حالات فوق، دارای احتمال

$$\binom{3}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{72}$$

هستند؛ در نتیجه احتمال مطلوب، برابر $\frac{1}{36} = \frac{1}{72} + \frac{1}{72}$ خواهد بود.

پ) برای رو آمدن مضرب ۳، باید اعداد ۳ و ۶ ظاهر شوند. احتمال این موضوع برابر $\frac{1}{3}$ است و چون نتیجه‌ی سایر پرتاب ها مهم نیست، احتمال مطلوب نیز $\frac{1}{3}$ خواهد بود.

سوال ۵) الف) این حالت زمانی ممکن است که تیم A پس از ۶ دست، در حداقل ۵ دست پیروز شده باشد

که این احتمال برابر با احتمال پیروزی در دقیقاً ۵ دست یا دقیقاً ۶ دست از ۶ دست اول است؛ بنابراین

$$p = \binom{6}{5} p^5 (1-p) + \binom{6}{6} p^6 = p^5 (6-5p)$$

(ب)

$$\begin{aligned} & \Pr\{B \text{ تیم } A \text{ باخت در حداقل یک دست به تیم } B\} \\ &= \frac{\Pr\{B \text{ تیم } A \text{ باخت در حداقل یک دست به تیم } B\}}{\Pr\{A \text{ تیم } A\}} \end{aligned}$$

احتمال آن که تیم A بازی را ببرد و هیچ دستی را به تیم B نبازد برابر p^9 است. هم چنین احتمال برد تیم A نیز برابر $\sum_{k=5}^9 \binom{9}{k} p^k (1-p)^{9-k}$ خواهد بود. در نتیجه احتمال مطلوب به شکل زیر محاسبه می شود:

$$1 - \frac{p^9}{\sum_{k=5}^9 \binom{9}{k} p^k (1-p)^{9-k}}$$

(ج) تیم A در صورتی بازی را می برد که حداقل ۴ دست از ۸ دست باقی مانده را ببرد. این احتمال برابر است با:

$$\frac{\sum_{k=4}^8 \binom{8}{k}}{2^8} \approx 0.6367$$

(سوال ۵)

(الف) در رشته متوالی لامپ ها، لامپ ها به صورت پشت سر هم به یکدیگر وصل شده اند؛ پس رشته زمانی روشن است که تمام لامپ ها سالم باشند. احتمال این امر برابر $(1-p)^n$ است.

(ب) در رشته ی موازی لامپ ها، یکی از سرهای همه ی لامپ ها به یک نقطه و سر دیگر تمام لامپ ها به نقطه ی دیگر وصل شده اند؛ پس رشته زمانی خراب می شود که همه ی لامپ های آن خراب باشند. بنابراین احتمال روشن شدن رشته برابر $1-p^n$ است.

پاسخ سوال ۳۴)

سوال ۱) قضیه ی دو موآو - لاپلاس از عان می کند:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)}}$$

هنگامی که k نزدیک به np باشد. در اینجا می خواهیم شهودی از میزان این نزدیکی پیدا کنیم. به ازای k های مختلف داریم:

$$\begin{cases} k = 1 & , \quad \text{خطای نسبی} \sim 10^{80} \\ k = 300 & , \quad \text{خطای نسبی} \approx 7.99 \\ k = 490 & , \quad \text{خطای نسبی} \approx 6.34 \times 10^{-5} \end{cases}$$

شایان گفتن است که در دو حالت اول، مقدارهای دقیق و تقریبی احتمال تقریباً برابر صفر هستند.

سوال ۱ الف) به دلیل استقلال پرتاب ها، می توان تنها دو پرتاب اول و آخر را در نظر گرفت. بنابراین احتمال اینکه در هر دو پرتاب سکه رو یا پشت بیاید برابر 0.5 است.

ب)

$$\begin{aligned} \{ \text{پیشامد ۲ رو و ۵ پشت} \} &= \{ \text{پیشامد حداقل ۲ رو و ۳ پشت} \} \\ &\cup \{ \text{پیشامد ۳ رو و ۴ پشت} \} \\ &\cup \{ \text{پیشامد ۴ رو و ۳ پشت} \} \\ &= \binom{7}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \binom{7}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \binom{7}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^7 \\ &= \frac{91}{128} \approx 0.71 \end{aligned}$$

پ) تعریف می کنیم:

$$\begin{aligned} A &= \text{پیشامد رو آمدن در سه پرتاب اول} \\ B &= \text{پیشامد پشت آمدن در سه پرتاب اول} \\ C &= \text{دقیقاً ۴ بار رو آمدن سکه در ۷ پرتاب} \end{aligned}$$

با تعاریف فوق مطلوب است:

$$\Pr(C|A \cup B)$$

بنابر این

$$\begin{aligned}
 \Pr(C|A \cup B) &= \frac{p(C \cap [A \cup B])}{p(A \cup B)} \\
 &= \frac{p(C \cap A) + p(C \cap B)}{p(A) + p(B)} \\
 &= \frac{p(C|A)p(A) + \left(\frac{1}{2}\right)^7}{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}} \\
 &= \frac{\binom{4}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{2}\right)^7}{\frac{1}{4}} \\
 &= \frac{5}{32} \approx 0.16
 \end{aligned}$$

سوال ۲) الف) پیشامد مطلوب برابر است با:

$$\begin{aligned}
 V &= \text{یک بار، رو آمدن عدد ۳ و چهار بار، رو آمدن عدد ۱} \\
 &\cup \text{دو بار، رو آمدن عدد ۲ و سه بار، رو آمدن عدد ۱} \\
 &= \binom{5}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{1}{6}\right)^4 \\
 &+ \binom{5}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \\
 &= \frac{5}{2592} \approx 0.002
 \end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned}
 &\text{رو آمدن ۴، در پرتاب آفر و ۱، در چهار پرتاب اول} \\
 &\cup \text{رو آمدن ۵، در پرتاب آفر، سه تا ۱ و یک ۲، در چهار پرتاب اول} \\
 &\cup \text{رو آمدن ۶، در پرتاب آفر و سه تا ۱ و یک ۳، در چهار پرتاب اول} \\
 &\cup \text{رو آمدن ۶، در پرتاب آفر و دو تا ۲ و دو تا ۱، در چهار پرتاب اول} \\
 &= \left(\frac{1}{6}\right)^5 + \binom{4}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^4 \times \frac{1}{6} + \binom{4}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^4 \times \frac{1}{6} + \binom{4}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^4 \times \frac{1}{6} \\
 &= \frac{5}{2592} \approx 0.002
 \end{aligned}$$

سوال ۳) الف) این اتفاق تنها زمان می افتد که حداکثر ۸ ماشین وارد بزرگراه شوند. مکمل این پیشامد حالتی است که هر ۹ ماشین همزمان وارد بزرگراه شوند که این رخداد دارای احتمال p^9 است. پس احتمال مطلوب، $1 - p^9$ خواهد بود.

ب) p بقدر باشد تا احتمال قسمت الف بیشتر از 0.99 باشد؟

$$1 - p^9 > 0.99 \iff p^9 < 0.01 \iff p < 0.6$$

سوال ۴) الف) زمانی تیم A پس از ۶ دست موفق به بردن بازی می شود که در دست ششم، برد پنجم خود را کسب کند. در این صورت باید در ۴ دست از ۵ دست پیش پیروز شده باشد. این رخداد با احتمال

$$\binom{5}{4} p^4 (1-p) \times p = 5p^5 (1-p)$$

رخ می دهد.

ب) با توجه به رابطه ی $P(A|B) + P(A|B) = 1$ داریم:

$$\begin{aligned} & \Pr\{B \text{ تیم } A \text{ بافت در حداقل یک دست به تیم } B\} \\ &= 1 - \Pr\{B \text{ تیم } A \text{ بافت در هیچ دستی به تیم } B\} \\ &= 1 - \frac{\Pr\{B \text{ تیم } A \text{ بافت در هیچ دستی به تیم } B\}}{\Pr\{A \text{ تیم } B\}} \end{aligned}$$

احتمال آن که تیم A بازی را ببرد و هیچ دستی را به تیم B نبازد برابر p^9 است. هم چنین احتمال برد تیم A نیز برابر $\sum_{k=5}^9 \binom{9}{k} p^k (1-p)^{9-k}$ خواهد بود. در نتیجه احتمال مطلوب به شکل زیر مناسبه می شود:

$$1 - \frac{p^9}{\sum_{k=5}^9 \binom{9}{k} p^k (1-p)^{9-k}}$$

ج) تیم A در صورتی بازی را می برد که حداقل ۴ دست از ۸ دست باقی مانده را ببرد. این احتمال برابرست با:

$$\frac{\sum_{k=4}^8 \binom{8}{k}}{2^8} \approx 0.6367$$

سوال ۵) قضیه ی دو موآو-لاپلاس بیان می دارد:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx G\left(\frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

زمانی که k بسیار به n نزدیک و n بسیار بزرگ باشد. از جمله نتایجی که می توان از این قضیه گرفت، عبارتست از:

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx G\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - G\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

در این سوال:

$$p = \frac{1}{2}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \Pr\left\{0.49 \leq \frac{k}{n} \leq 0.51\right\} &= \sum_{0.49n}^{0.51n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &\approx G\left(\frac{0.01n}{\sqrt{\frac{n}{4}}}\right) - G\left(\frac{-0.01n}{\sqrt{\frac{n}{4}}}\right) \\ &= 2G(0.02\sqrt{n}) - 1 > 0.95 \end{aligned}$$

در نتیجه

$$G(0.02\sqrt{n}) > 0.975$$

$$G(0.02\sqrt{n}) > 0.975 \iff 0.02\sqrt{n} > G^{-1}(0.975) \iff n \geq 9604$$

سوال (الف)

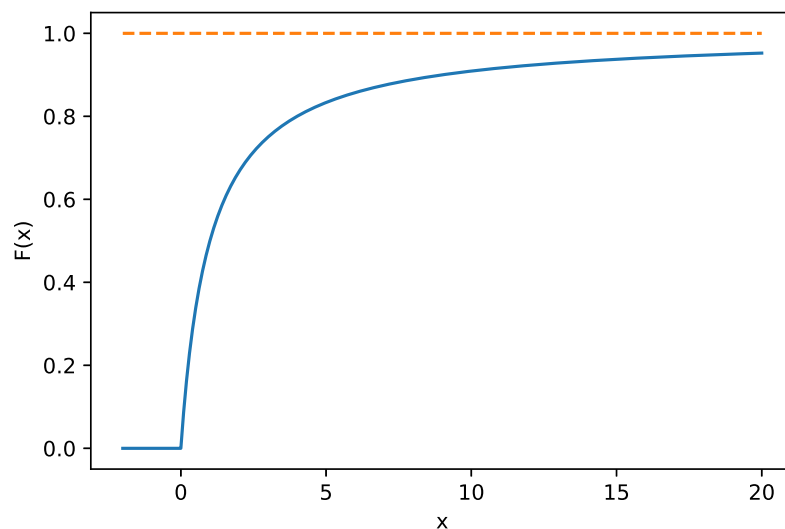
$$\begin{aligned} \Pr\{\text{ظاهر شدن عدد } \mu\} &= \Pr\{\text{ظاهر شدن عدد } \mu \mid \text{دو تاس}\} \Pr\{\text{دو تاس}\} \\ &+ \Pr\{\text{ظاهر شدن عدد } \mu \mid \text{یک تاس}\} \Pr\{\text{یک تاس}\} \\ &= \frac{2}{36} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned} \Pr\{\text{ظاهر شدن عدد } \lambda\} &= \Pr\{\text{ظاهر شدن عدد } \lambda \mid \text{دو تاس}\} \Pr\{\text{دو تاس}\} \\ &+ \Pr\{\text{ظاهر شدن عدد } \lambda \mid \text{یک تاس}\} \Pr\{\text{یک تاس}\} \\ &= \frac{5}{36} \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{5}{72} \end{aligned}$$

سوال ۲)

الف) تابع CDF باید در بینهایت به سمت یک میل کند. بنابراین $k = 1$. شکل CDF به صورت زیر است:



ب) تابع CDF باید از راست پیوسته باشد؛ در نتیجه $k = 1$ و در این صورت تابع مورد نظر، به فرم توزیع تجمعی درمی آید.

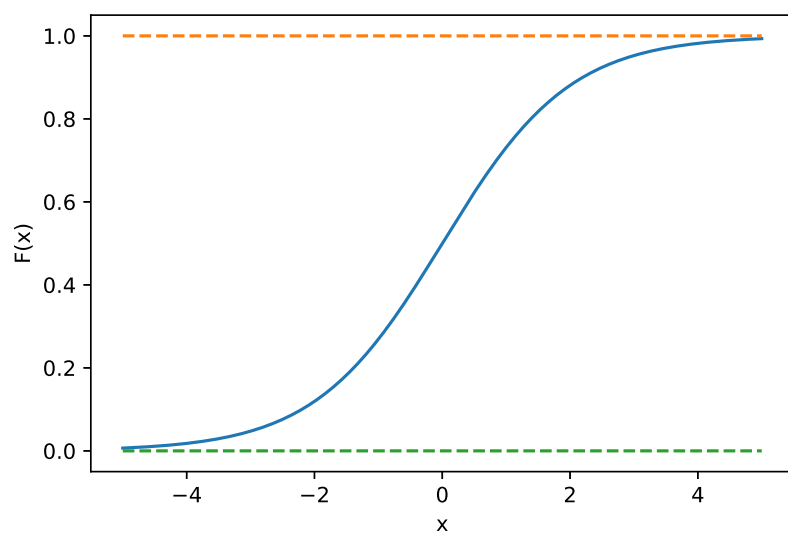
پ) برای تابع توزیع تجمعی F باید داشته باشیم:

$$F(-\infty) = 0, \quad F(\infty) = 1$$

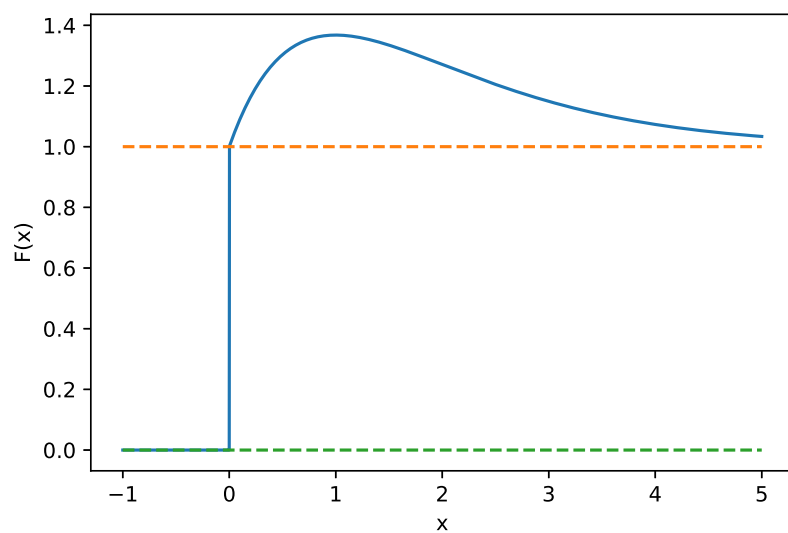
برای تابع $\frac{e^x + k}{e^x + 1}$ داریم:

$$F(-\infty) = k, \quad F(\infty) = 1$$

در نتیجه $k = 0$. بنابراین تابع CDF به صورت زیر است:



ت) یا استرلائی مشابه قسمت قبل و با میل دادن x به $+\infty$ خواهیم داشت $k = 1$. در این صورت شکل تابع، به صورت زیر است:



مشاهده می شود که تابع به ازای مقادیر مثبت، مقادیر بیشتر از یک را اختیار می کند. در نتیجه تابع نمی تواند

CDF باشد.

سوال ۳) طبق تعریف، میانه صدک ۵۰ محسوب می شود و برای پیدا کردن آن، نیازمند حل معادله ی زیر هستیم:

$$F(x) = \frac{1}{2}$$

که مقدار $x = \ln 2$ را برای میانه به دست می دهد.

سوال ۴) طبق تعریف

$$\Pr\{X = x\} = F(x) - F(x^-)$$

(الف)

$$F(1) = \frac{3}{4}$$

$$F(1^-) = \frac{1}{2}$$

\implies

$$\Pr\{X = 1\} = F(1) - F(1^-) = \frac{1}{4}$$

(ب)

$$F(1) = \frac{1}{2} \quad , \quad F(1^-) = \frac{1}{2} \implies \Pr\{X = 1\} = F(1) - F(1^-) = 0$$

سوال ۵) CDF را با $G(x)$ و PDF را با $g(x)$ نشان می دهیم.

(الف)

$$G(x) = \Pr\{X + 1 \leq x\} = \Pr\{X \leq x - 1\} = F(x - 1)$$

در نتیجه

$$g(x) = f(x - 1)$$

(ب)

$$G(x) = \Pr\{2X \leq x\} = \Pr\left\{X \leq \frac{x}{2}\right\} = F\left(\frac{x}{2}\right)$$

در نتیجه

$$g(x) = \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)$$

(پ)

$$\begin{aligned} G(x) &= \Pr\{-X \leq x\} = \Pr\{X \geq -x\} = 1 - \Pr\{X < -x\} \\ &= 1 - \Pr\{X \leq -x\} + \Pr\{X = -x\} = 1 - F(-x) + \Pr\{X = -x\} \end{aligned}$$

بنابراین

$$g(x) = f(-x) + \frac{d}{dx} \Pr \{X = -x\}$$

جمله ی $\frac{d}{dx} \Pr \{X = -x\}$ شامل مشتق تابع توزیع تجمعی در ناپیوستگی هاست.

(ت)

$$\begin{aligned} G(x) &= \Pr \{X^2 \leq x\} \\ &= \Pr \{-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}\} \\ &= \Pr \{X \leq \sqrt{x}\} - \Pr \{X < -\sqrt{x}\} \\ &= \Pr \{X \leq \sqrt{x}\} - \Pr \{X \leq -\sqrt{x}\} \\ &\quad + \Pr \{X = -\sqrt{x}\} \\ &= F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x}) + \Pr \{X = -\sqrt{x}\} \end{aligned}$$

که از روی آن می توان PDF را به صورت زیر به دست آورد:

$$g(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} [f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})] + \frac{d}{dx} \Pr \{X = -\sqrt{x}\}$$

سوال ۶)

الف) خودروها زمانی بدون مشکل از بزرگراه رد می شوند که هر ۹ تای آنها بنفوانند رد شوند. این احتمال برابر p^9 است؛ لذا احتمال مطلوب برابر $1 - p^9$ خواهد بود.

ب)

$$1 - p^9 < 0.002 \implies p \gtrapprox 0.9998$$

سوال ۷) قضیه ی دو موآو-لاپلاس بیان می دارد:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx G\left(\frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

زمانی که k بسیار به n نزدیک و n بسیار بزرگ باشد. از جمله نتایجی که می توان از این قضیه گرفت، عبارتست از:

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx G\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - G\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

در این سوال:

$$p = \frac{1}{2}$$

بنابر این

$$\begin{aligned}\Pr\left\{0.49 \leq \frac{k}{n} \leq 0.51\right\} &= \sum_{0.49n}^{0.51n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx G\left(\frac{0.01n}{\sqrt{\frac{n}{4}}}\right) - G\left(\frac{-0.01n}{\sqrt{\frac{n}{4}}}\right) \\ &= 2G(0.02\sqrt{n}) - 1 > 0.95\end{aligned}$$

در نتیجه

$$G(0.02\sqrt{n}) > 0.975$$

پاسخ سوال ۳۵

دو حالت در نظر می گیریم:

حالت ۱) لینک DZ خراب باشد. در این صورت، احتمال وجود مسیر بین A و Z برابر است با

$$p[1 - (1-p)(1-p^2)^2] = p - p(1-p)(1-p^2)^2$$

حالت ۲) لینک DZ سالم باشد. در این صورت، می توان نودهای D و Z را یکی در نظر گرفت (چرا که رسیدن به D، رسیدن به Z را نتیجه می دهد). در این صورت، احتمال وجود مسیر بین A و Z برابر است با

$$\begin{aligned}&1 - (1-p) \{1 - [1 - (1-p)^2] [1 - (1-p)(1-p^2)]\} \\ &= 1 - (1-p) \{1 - (2p - p^2)(p + p^2 - p^3)\} \\ &= p + p^2(1-p)(2-p)(1+p-p^2)\end{aligned}$$

در نتیجه، احتمال وجود داشتن مسیر از A تا Z برابر است با

$$\begin{aligned}&(1-p)[p + p^2(1-p)(2-p)(1+p-p^2)] + p^2 + p^3(1-p)(2-p)^2 \\ &= p + p^2(1-p)^2(2-p)(1+p-p^2) + p^3(1-p)(2-p)^2\end{aligned}$$

پاسخ سوال ۳۶

(الف)

$$\binom{10}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{120}{1024}$$

(ب) مکمل پیشامد مطلوب، آن است که دقیقاً یا صفر بار خط بیاید. در نتیجه احتمال مطلوب برابر است با

$$1 - \binom{10}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} - \binom{10}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^9 = 1 - \frac{1}{1024} - \frac{10}{1024} = \frac{1013}{1024}$$

پ) اگر بدانیم در ۵ پرتاب اول خط آمده است، احتمال مطلوب، معادل با احتمال رو آمدن دقیقاً دو خط در ۵ پرتاب باقیمانده است. در نتیجه احتمال مطلوب برابر است با

$$\binom{5}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{10}{32}.$$

از روش احتمال شرطی نیز به همین پاسخ می‌رسیم.

پاسخ سوال ۳۷)

الف) جمع این ۶ پرتاب زمانی ۸ می‌شود که یا دقیقاً دو بار ۲ و ۴ بار ۱ یا دقیقاً یک بار ۳ و ۵ بار ۱ داشته باشیم. در این صورت، احتمال مطلوب برابر است با

$$\binom{6}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^4 + \binom{6}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{1}{6}\right)^5 = \frac{21}{46656}$$

ب)

$$\frac{6!}{6^6} = \frac{5!}{6^5} = \frac{5}{324}$$

پاسخ سوال ۳۸)

احتمال آبی بودن توپ در هر آزمایش، برابر ۰.۷ است. چون توپ در هر مرحله به کیسه باز می‌گردد، آزمایش‌ها مستقلند و در نتیجه، احتمال مطلوب برابر است با

$$\binom{11}{7} (0.7)^7 (0.3)^4$$

پاسخ سوال ۳۹)

چنانچه حداکثر ۱۰ کاربر بخواهند به طور همزمان از کانال استفاده کنند، کمبود پهنای باند نخواهیم داشت. بنابراین احتمال مطلوب برابر است با

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{10} \binom{12}{k} (0.6)^k (0.4)^{12-k} &= 1 - \sum_{k=11}^{12} \binom{12}{k} (0.6)^k (0.4)^{12-k} \\ &= 1 - 12(0.6)^{11}(0.4) - (0.6)^{12} \approx 0.9804 \end{aligned}$$

پاسخ سوال ۴۰)

مطلوب آن است که مقدار $P\left\{\frac{97}{300} < \frac{k}{n} < \frac{103}{300}\right\}$ ، حداقل 99% باشد. با تقریب دموآور لاپلاس خواهیم داشت:

$$2G\left(\epsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right) - 1 \geq 0.99$$

که در آن $\epsilon = 0.01$ و $p = \frac{1}{3}$. نتیجه

$$G\left(0.01\sqrt{\frac{n}{\frac{2}{9}}}\right) \geq 0.995 \implies 0.01\sqrt{\frac{n}{\frac{2}{9}}} \geq G^{-1}(0.995)$$

$$\implies 0.01\sqrt{\frac{n}{\frac{2}{9}}} \gtrsim 2.5758 \implies n \geq 14745$$

فصل ۳

متغیرهای تصادفی

سوال ۱ الف)

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 0.2668 \quad , \quad e^{-np} \frac{(np)^k}{k!} = 0.1490 \quad , \quad \text{خطای نسبی} = 44.16\%$$

ب)

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 0.1573 \quad , \quad e^{-np} \frac{(np)^k}{k!} = 0.1318 \quad , \quad \text{خطای نسبی} = 16.23\%$$

پ)

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 0.3716 \quad , \quad e^{-np} \frac{(np)^k}{k!} = 0.3679 \quad , \quad \text{خطای نسبی} = 1\%$$

مشاهده می شود که در حالت سوم، خطای تقریب از همه کم تر است؛ زیرا شرایطی که باعث افزایش دقت تقریب می شوند ($n \gg 1$ و $k \approx np$)، در این حالت به خوبی مراعات شده اند.

سوال ۲) در پرتاب دو تاس سالم، اگر متغیر تصادفی X را برابر تعداد اعداد زوج رو آمده در هر دو تاس در نظر بگیریم:

الف)

$$\Omega = \{0, 1, 2\}$$

ب) با توجه به فضای شمرنی X ، داریم:

$$\Pr\{X \leq 1.5\} = \Pr\{X = 0 \text{ یا } X = 1\} = \Pr\{X = 0\} + \Pr\{X = 1\}$$

9

$$\Pr\{X \leq 0.5\} = \Pr\{X = 0\}$$

بنابراین

$$\Pr\{X \leq 1.5\} - \Pr\{X \leq 0.5\} = \Pr\{X = 1\} = \binom{2}{1} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

پ)

$$p_X(x) = \Pr\{X = x\} = \begin{cases} \frac{1}{4} & , \quad x = 0, 2 \\ \frac{1}{2} & , \quad x = 1 \end{cases}$$

سوال ۳) فرض کنید یک سکه سالم را n بار پرتاب کرده ایم. در این صورت pmf متغیر تصادفی X را در حالت های زیر بیابید.

الف) متغیر تصادفی X برابر تعداد روها در پرتاب های زوج است.

$$\Pr\{X = x\} = \binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

ب) متغیر تصادفی X فقط ۵ مقدار $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ را با احتمال غیر صفر اختیار می کند؛ بنابراین

$$p_X(x) = \Pr\{X = x\} = \binom{4}{x} \frac{1}{16}$$

پ) اگر n فرد باشد، تعداد روها و پشت ها هرگز برابر نمی شوند؛ پس

$$\Pr\{X = x\} = \begin{cases} 1 & , \quad x = 0 \\ 0 & , \quad x = 1 \end{cases}$$

و برای n زوج

$$\Pr\{X = x\} = \begin{cases} 1 - \binom{n}{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n & , \quad x = 0 \\ \binom{n}{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n & , \quad x = 1 \end{cases}$$

سوال ۱ الف)

$$E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{1}{b-a} \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{b+a}{2}$$

هم چنین

$$\sigma_X^2 = E\{X^2\} - E^2\{X\}$$

9

$$E\{X^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx = \frac{1}{b-a} \frac{b^3 - a^3}{3} = \frac{b^2 + a^2 + ab}{3}$$

نتیجه

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= \frac{b^2 + a^2 + ab}{3} - \frac{b^2 + a^2 + 2ab}{4} \\ &= \frac{1}{12}(4a^2 + 4b^2 + 4ab - 3a^2 - 3b^2 - 6ab) = \frac{(b-a)^2}{12}\end{aligned}$$

ب)

$$E\{X\} = \int_0^{\infty} \frac{x}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} dx = \lambda \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = \lambda \left[-x e^{-x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x} dx \right] = \lambda$$

همچنین به کمک انتگرال جزء به جزء

$$\begin{aligned}E\{X^2\} &= \int_0^{\infty} \frac{x^2}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} dx \\ &= \lambda^2 \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx \\ &= \lambda^2 \left[-x^2 e^{-x} \Big|_0^{\infty} + 2 \int_0^{\infty} x e^{-x} dx \right] \\ &= 2\lambda^2\end{aligned}$$

بنابراین

$$\sigma_X^2 = \lambda^2$$

پ)

$$E\{X\} = \sum n f(n) = p \times 0 + (1-p) \times 1 = 1-p$$

هم چنین

$$E\{X^2\} = \sum n^2 f(n) = p \times 0^2 + (1-p) \times 1^2 = 1-p$$

بنابراین

$$\sigma_X^2 = p(1-p)$$

ت) ابتدا می دانیم

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = 1$$

بنابراین

$$\begin{aligned} E\{X\} &= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n+1}}{n!} = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = \lambda \end{aligned}$$

هم چنین

$$\begin{aligned} E\{X^2\} &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (n-1+1) \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} + \lambda = \sum_{n=2}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{(n-2)!} + \lambda \\ &= \lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} + \lambda = \lambda + \lambda^2 \end{aligned}$$

بنابراین

$$\sigma_X^2 = \mu_X = \lambda$$

سوال ۲) فرض کنیم متغیر تصادفی X ، تعداد پرتاب ها تا رخداد k امین موفقیت باشد. بنابراین پیشامد $X = n$ معادل است با اینکه بگوییم در n امین پرتاب، به k امین موفقیت می رسید. همچنین می توان

گفت که در $n - 1$ پرتاب قبلی، دقیقاً به $k - 1$ موفقیت دست یافته ایم که این، طبق توزیع دو جمله ای با احتمال $\binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k}$ رخ می دهد. چون احتمال موفقیت در پرتاب n ام نیز برابر p است، داریم

$$\Pr\{X = n\} = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}, \quad n \geq k$$

الکون متوسط تعداد پرتاب ها را حساب می کنیم.

الف) $k = 1$

$$\Pr\{X = n\} = p(1-p)^{n-1}, \quad n \geq 1$$

از یک اتحاد ساده استفاده می کنیم (که به کمک مشتق می توان آن را نشان داد. در اینجا آن را بدون اثبات رها می کنیم)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot u^{n-1} = \frac{1}{(1-u)^2}$$

بنابراین

$$E\{X\} = \sum_{n=1}^{\infty} np(1-p)^{n-1} = \frac{1}{p}$$

ب) $k = 2$

$$\Pr\{X = n\} = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}, \quad n \geq 2$$

این بار به کمک اتحاد زیر (با مشتق گیری از اتحاد قبلی!):

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \cdot u^{n-2} = \frac{2}{(1-u)^3}$$

فواهییم داشت

$$E\{X\} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)p^2(1-p)^{n-2} = \frac{2}{p}$$

سوال ۳) هنگامی که به طور متوسط از معیارهای کمی برای ارزیابی یک جامعه ی بزرگ استفاده می شود، می توان گفت که میانگین، مهم ترین معیار کمی ارزیابی است؛ به عبارت دیگر اگر به هر یک از افراد یک جامعه،

نمره‌ی مفروضی داده شود، ارزیابی کلی جامعه مستلزم مناسبه‌کرد میانگین نمرات تکی افراد است. البته که میانگین، تنها کمیت ارزیابی مهم نیست و به طور مثال واریانس نیز معیار بسیار مهم دیگری به شمار می‌رود. به طور شهودی میانگین، میزان برتری نسبی یک جامعه را به دیگری نشان می‌دهد. واریانس، نشان‌دهنده‌ی میزان یکنواختی افراد جامعه است. طبق این توضیحات، افراد جامعه‌ای با متوسط نمرات ۷۳ به لحاظ سطح علمی بالاترند؛ اما جامعه‌ای با میانگین ۵۹ و واریانس ۹، دارای افراد هم سطح‌تری است.

سوال ۴) الف) مسلماً دامنه‌ی تعریف چنین چگالی احتمالی متقارن است و داریم

$$\forall x \in D, \quad f(-x) = -f(x)$$

چون تابع چگالی احتمال نامنفی است، در نتیجه باید الزاماً داشته باشیم

$$\forall x \in D, \quad f(x) = 0$$

می‌توان گفت چنین توزیعی وجود ندارد؛ اما در بسیاری از متون ریاضی، از آن به عنوان توزیع کوسی با واریانس بینهایت نام می‌برند.

ب)

$$E\{X^n\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx = \int_a^b \frac{x^n}{b-a} dx = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{nb - na}$$

سوال ۵) الف) بررسی درستی این موضوع کار ساده‌ای است؛ زیرا پیشامدهای $X \geq a$ و $e^{sX} \geq e^{sa}$ معادلند؛ به عبارت دیگر از هر یک می‌توان دیگری را نتیجه گرفت.

ب) طبق فرایند مارکوف برای یک متغیر تصادفی مثبت Y و $b > 0$

$$\Pr\{Y \geq b\} \leq \frac{E\{Y\}}{b}$$

بنابراین با تعریف $Y = e^{sX}$ و $b = e^{sa}$ خواهیم داشت:

$$\Pr\{X \geq a\} = \Pr\{e^{sX} \geq e^{sa}\} \leq \frac{E\{e^{sX}\}}{e^{sa}}$$

به کمک تعریف تابع مولد گشتاور به صورت $\phi_X(s) \triangleq E\{e^{sX}\}$ ، نتیجه‌ی مورد نظر فوراً حاصل می‌شود.

سوال ۱) هر CDF باید سه خاصیت داشته باشد:

$$F(-\infty) = 0$$

$$F(\infty) = 1$$

$$F(x) \text{ صعودی}$$

الف) شرط $F(\infty) = 1$ هنگامی برآورده می شود که

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 1 - e^{-kx^2} = 1 \implies k > 0$$

از طرفی به ازای هر $k > 0$ ، تابع $1 - e^{-kx^2}$ روی مقادیر $x > 0$ صعودی است؛ پس محدوده‌ی مناسب k ، $(0, \infty)$ خواهد بود.

ب) صعودی بودن $F(x)$ الزام می دارد که $k \geq 0$. از طرفی، نباید مقدار CDF هیچ کجا از بازه‌ی $[0, 1]$ تجاوز کند. در این صورت $k \leq 1$. همپنان یک شرط دیگر باید برآورده شود و آن پیوستگی از راست CDF در تمام نقاط است. این نوع پیوستگی در $x = 1$ تنها زمانی رخ می دهد که $k = 1$. پس بازه‌ی مناسب k برابر $\{1\}$ است.

پ) از آنجا که $F(\infty) = 1$ ، باید داشته باشیم $k = 1$ ؛ ولی صعودی بودن $F(x)$ نقض می شود؛ زیرا

$$0 < x < \frac{1}{2} \implies x - x^2 \text{ اکید} \implies e^{x-x^2} \text{ صعودی اکید} \implies 1 - e^{x-x^2} \text{ نزولی اکید}$$

پس در این مورد، k هیچ مقداری را نمی تواند داشته باشد.

ت) شرایط $F(-\infty) = 0$ و $F(\infty) = 1$ به ازای $k \neq 0$ برآورده می شوند. صعودی بودن نیز به ازای $k \geq 0$ رخ می دهد؛ پس بازه‌ی مناسب برابر است با $(0, \infty)$.

ث) با توجه به اینکه $F(-\infty) = \cos \frac{\pi}{k} = 0$ باید داشته باشیم

$$\frac{\pi}{k} = l\pi + \frac{\pi}{2} \implies k = \frac{2}{2l+1}, \quad l \in \mathbb{Z}$$

از طرفی چون به ازای $k < 0$ ، تابع $\frac{\pi}{e^{x+k}}$ دارای میناب عمودی خواهد بود، بنابراین باید داشته باشیم

$$k = \frac{2}{2l+1}, \quad l \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$$

سوال ۲) الف) $F(x^2)$ در $-\infty$ دارای مقدار را (بیای ۰) می شود؛ پس نمی تواند CDF باشد.

ب، پ، ت و ث) این توابع تمام شرایط CDF را برآورده می کنند.

سوال ۳) با توجه به جبر مجموعه ها، با تعریف

$$A = (-\infty, 2] \quad , \quad B = (-\infty, 1]$$

فواheim داشت

$$\Pr\{1 < x \leq 2\} = \Pr\{A - B\} = \Pr\{A\} - \Pr\{B\} = F(2) - F(1)$$

الف)

$$\Pr\{1 < x \leq 2\} = e^{-k} - e^{-4k}$$

ب)

$$\Pr\{1 < x \leq 2\} = 0$$

پ) (!!)

ت)

$$\Pr\{1 < x \leq 2\} = \frac{e^2}{e^2 + k} - \frac{e}{e + k}$$

ث)

$$\Pr\{1 < x \leq 2\} = \cos \frac{\pi}{e^2 + k} - \cos \frac{\pi}{e + k}$$

نکته مهم:

$$\int_a^b \delta(x - c) dx = \begin{cases} 1 & , \quad a < c < b \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

سوال ۱) الف) به وضوح باید k مثبت باشد در غیر این صورت این تابع همواره سطح زیر نامرود خواهد داشت. از طرفی

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^k} dx = \begin{cases} \infty & , \quad 0 < k \leq 1 \\ \frac{1}{k-1} & , \quad k > 1 \end{cases}$$

پس $k = 2$.

ب) این تابع نیز تمام شرایط pdf را برآورده می کند؛ به شرط آن که سطح زیر آن واحد باشد. در این صورت:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} kxe^{-x} dx = -k(x+1)e^{-x}|_0^{\infty} = k = 1$$

پس k فقط باید برابر باشد.

پ) به ازای $k > \pi$ pdf مقادیر منفی را نیز اختیار می کند؛ پس $k \leq \pi$. از طرفی

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^k \sin x dx = 1 - \cos k = 1$$

پس $k = \frac{\pi}{2}$.

$$f(x) = \begin{cases} k\delta(x-1) & , \quad x=1 \\ x & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases} \quad \text{ت) (به عبارت دیگر، تابع در نقطه‌ی } x=1 \text{ دارای ضربه‌ای به}$$

مساحت k است) ابتدا باید k مثبت باشد تا مقدار چگالی احتمال همواره نامنفی باشد. همچنین

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{1^-}^{1^+} k\delta(x-1)dx + \int_0^1 xdx = k + 0.5 = 1$$

پس مقدار k باید برابر 0.5 باشد.

ث) سطح زیر این چگالی همواره برابر 1 است و فقط هنگامی نامنفی می شود که $0 \leq k \leq 1$.

سوال ۲) مکمل این حالت زمانی رخ می دهد که بیش از ۶۵ قطعه خراب شوند. احتمال خرابی هر قطعه در بازه‌ی $(0, \frac{T}{4})$ برابر است با:

$$p = \int_{-\infty}^{\frac{T}{4}} f(x)dx = \int_0^{\frac{T}{4}} \frac{1}{T} e^{-\frac{x}{T}} dx = \int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x} dx = 1 - e^{-0.25}$$

بنابراین احتمال پیشامد مطلوب برابر است با:

$$\begin{aligned} P &= 1 - \left[\binom{70}{66} p^{66} (1-p)^4 \right. \\ &\quad + \binom{70}{67} p^{67} (1-p)^3 + \binom{70}{68} p^{68} (1-p)^2 \\ &\quad \left. + \binom{70}{69} p^{69} (1-p) + \binom{70}{70} p^{70} \right] \end{aligned}$$

سوال ۳) اگر تابع توزیع تجمعی را با $F(x)$ نشان دهیم در این صورت:

$$\Pr\{X = 1\} = F(1) - F(1^-)$$

$$\begin{aligned} \Pr\{X < \frac{1}{2}\} &= \Pr\{X \leq \frac{1}{2}\} - \Pr\{X = \frac{1}{2}\} \\ &= F(0.5) - [F(0.5) - F(0.5^-)] = F(0.5^-) \end{aligned}$$

(الف)

$$\Pr\left\{X < \frac{1}{2}\right\} = 0 \quad , \quad \Pr\{X = 1\} = 0$$

(ب)

$$\Pr\left\{X < \frac{1}{2}\right\} = 1 - \frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}} \quad , \quad \Pr\{X = 1\} = 0$$

(پ)

$$\Pr\left\{X < \frac{1}{2}\right\} = 1 - \cos \frac{1}{2} \quad , \quad \Pr\{X = 1\} = 0$$

(ت)

$$\Pr\left\{X < \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{8} \quad , \quad \Pr\{X = 1\} = \frac{1}{2}$$

(ث)

$$\Pr\left\{X < \frac{1}{2}\right\} = 1 - k \quad , \quad \Pr\{X = 1\} = k$$

سوال ۴) طبق تعریف، برای صدک-u داریم:

$$x_u = \inf\{x \mid F(x) = u\}$$

که $F(x)$ تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی است. به طور ساده تر، باید معادله $F(x_u) = u$ را حل کنیم.
بنابراین:

(الف)

$$F(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ x & , \quad x > 1 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

و نتیجه $x_u = u$.

(ب)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1 - e^{-2x} & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

پس $x_u = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{1-u}$

نکته مهم:

$$\int_a^b \delta(x - c) dx = \begin{cases} 1 & , \quad a < c < b \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

سوال ۱ الف)

$$P = \int_0^{2\lambda} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} dx = \int_0^2 e^{-x} dx = 1 - e^{-2} \approx 0.86$$

ب)

$$P = \int_{3\lambda}^{3.5\lambda} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} dx = \int_3^{3.5} e^{-x} dx = e^{-3} - e^{-3.5} \approx 0.02$$

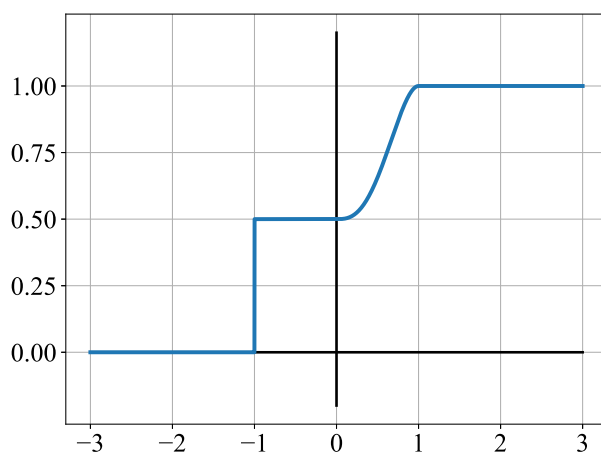
سوال ۲ الف)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \int_0^1 6x^2(1-x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} k\delta(x+1) dx = \frac{1}{2} + k = 1$$

پس $k = \frac{1}{2}$.

ب)

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du = \begin{cases} 0 & , \quad x < -1 \\ \frac{1}{2} & , \quad -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{2} + 2x^3 - \frac{3}{2}x^4 & , \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & , \quad 1 \leq x \end{cases}$$



ب)

$$\Pr\{-2 < X \leq \frac{1}{2}\} = F(0.5) - F(-2) = \frac{21}{32} \approx 0.66$$

9

$$\Pr\{0 < X \leq \frac{1}{2}\} = F(0.5) - F(0) = \frac{5}{32} \approx 0.16$$

سوال ۳ الف) اگر $y < 0$ ، در این صورت مقدار $\Pr\{Y \leq y\}$ همواره برابر صفر است؛ زیرا $Y = X^2$ نمی تواند منفی باشد. به ازای $y \geq 0$:

$$\begin{aligned}\Pr\{Y \leq y\} &= \Pr\{X^2 \leq y\} = \Pr\{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\} \\ &= \Pr\{0 \leq X \leq \sqrt{y}\} = \begin{cases} \sqrt{y} & , \quad y < 1 \\ 1 & , \quad y \geq 1 \end{cases}\end{aligned}$$

در نتیجه

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , \quad y < 0 \\ \sqrt{y} & , \quad 0 \leq y < 1 \\ 1 & , \quad y \geq 1 \end{cases}$$

9

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} & , \quad 0 < y < 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

ب)

$$\begin{aligned}\Pr\{Y \leq y\} &= \Pr\{-\ln(1-X) \leq y\} = \Pr\{\ln(1-X) \geq -y\} \\ &= \Pr\{1-X \geq e^{-y}\} = \Pr\{X \leq 1-e^{-y}\} = \begin{cases} 0 & , \quad 1-e^{-y} \leq 0 \\ 1-e^{-y} & , \quad 0 < 1-e^{-y} < 1 \\ 1 & , \quad 1-e^{-y} \geq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & , \quad y \leq 0 \\ 1-e^{-y} & , \quad 0 < y \\ 1 & , \quad e^{-y} \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & , \quad y \leq 0 \\ 1-e^{-y} & , \quad 0 < y \end{cases} \quad (\text{هرگز رخ نمی دهد})\end{aligned}$$

عبارت فوق، رابطه‌ی CDF بوده و PDF از مشتق CDF به صورت زیر به دست می آید:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & , \quad y \leq 0 \\ e^{-y} & , \quad 0 < y \end{cases}$$

(ب)

$$\begin{aligned}
 \Pr\{Y \leq y\} &= \Pr\{\tan \pi(X - \frac{1}{2}) \leq y\} = \Pr\{\pi(X - 0.5) \leq \tan^{-1} y\} \\
 &= \Pr\{X - 0.5 \leq \frac{1}{\pi} \tan^{-1} y\} = \Pr\{X \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \tan^{-1} y\} \\
 &= \begin{cases} 0 & , \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \tan^{-1} y \leq 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \tan^{-1} y & , \quad 0 < \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \tan^{-1} y < 1 \\ 1 & , \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \tan^{-1} y \geq 1 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 0 & , \quad y \leq -\infty \text{ (هرگز رخ نمی دهد)} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \tan^{-1} y & , \quad -\infty < y < \infty \\ 1 & , \quad y \geq \infty \text{ (هرگز رخ نمی دهد)} \end{cases}
 \end{aligned}$$

پس

$$F_y(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \tan^{-1} y \quad , \quad f_Y(y) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + y^2}$$

سوال ۴)

$$\Pr\{X < \frac{2}{3}\} = F_X(\frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$$

9

$$\Pr\{Y < \frac{1}{\sqrt{3}}\} = F_X(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \times \frac{\pi}{6} = \frac{2}{3}$$

دو مقدار احتمال با هم برابرند؛ زیرا تابعی که بین دو متغیر تصادفی برقرار است $(Y = \tan \pi(X - \frac{1}{2}))$ مقدار $\frac{2}{3}$ را به $\frac{1}{\sqrt{3}}$ نگاشت می دهد. از دیدگاه دیگر، ما دو برداشت متفاوت از یک احتمال را مناسبه کرده ایم.

سوال ۵) الف)

$$\begin{aligned}
 \Pr\{Y \leq y\} &= \Pr\{|X| \leq y\} \\
 &= \begin{cases} 0 & , \quad y < 0 \\ \Pr\{-y \leq X \leq y\} & , \quad y \geq 0 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 0 & , \quad y < 0 \\ \Pr\{X \leq y\} - \Pr\{X < -y\} & , \quad y \geq 0 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 0 & , \quad y < 0 \\ F(y) - F(-y^-) & , \quad y \geq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

(ب)

$$\Pr\{Y = 0\} = 1 - \Pr\{Y = 1\} = \Pr\{X \leq 0\} = F(0)$$

بنابراین

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , \quad y < 0 \\ F(0) & , \quad 0 \leq y < 1 \\ 1 & , \quad y \geq 1 \end{cases}$$

(پ)

$$\begin{aligned} \Pr\{Y \leq y\} &= \Pr\{X^2 - 2X \leq y\} \\ &= \Pr\{X^2 - 2X + 1 \leq y + 1\} \\ &= \Pr\{(X - 1)^2 \leq y + 1\} \\ &= \begin{cases} 0 & , \quad y + 1 < 0 \\ \Pr\{|X - 1| \leq \sqrt{y + 1}\} & , \quad y + 1 \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & , \quad y < -1 \\ \Pr\{1 - \sqrt{y + 1} \leq X \leq 1 + \sqrt{y + 1}\} & , \quad y \geq -1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & , \quad y < -1 \\ \Pr\{X \leq 1 + \sqrt{y + 1}\} - \Pr\{X < 1 - \sqrt{y + 1}\} & , \quad y \geq -1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & , \quad y < -1 \\ F(1 + \sqrt{y + 1}) - F(1 - \sqrt{y + 1}) & , \quad y \geq -1 \end{cases} \end{aligned}$$

سوال ۱) طبق تعریف، واریانس برابر است با:

$$\sigma^2 = \mathbb{E}\{X^2\} - \mathbb{E}^2\{X\}$$

بنابراین برای هر یک از متغیرهای تصادفی زیر، باید مقادیر $\mathbb{E}\{X\}$ و $\mathbb{E}\{X^2\}$ را بیابیم.

الف) (صورت سوال تصحیح شده و به جای e^{-x} ، e^{1-x} قرار گرفته است.)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{X\} &= \int x f(x) dx = \int_1^\infty x e^{1-x} dx \\ &= e \int_1^\infty x e^{-x} dx = e[-(x + 1)e^{-x}]_1^\infty = 2 \end{aligned} \quad (۱.۳)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{X^2\} &= \int x^2 f(x) dx = \int_1^{\infty} x^2 e^{1-x} dx \\ &= e \int_1^{\infty} x^2 e^{-x} dx = e[-(x^2 + 2x + 2)e^{-x}]|_1^{\infty} = 5\end{aligned}\tag{۲.۳}$$

$$\sigma^2 = 1$$

$$(\zeta$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{X\} &= \int x f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx \\ &= (\sin x - x \cos x)|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1\end{aligned}\tag{۳.۳}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{X^2\} &= \int x^2 f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx \\ &= (2x \sin x - (x^2 - 2) \cos x)|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2\end{aligned}\tag{۴.۳}$$

$$\sigma^2 = \pi - 3$$

$$(\wp$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{X\} &= \int x f(x) dx = \int_1^{\infty} x \times \frac{2}{x^3} dx \\ &= \int_1^{\infty} \frac{2}{x^2} dx = -\frac{2}{x}|_1^{\infty} = 2\end{aligned}\tag{۵.۳}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{X^2\} &= \int x^2 f(x) dx = \int_1^{\infty} x^2 \times \frac{2}{x^3} dx \\ &= 2 \ln |x| \Big|_1^{\infty} = \infty\end{aligned}\tag{۶.۳}$$

$$\sigma^2 = \infty$$

$$(\tau$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{X\} &= \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \Pr\{X = i\} = 2 \sum_{i=1}^{\infty} i (\frac{1}{3})^i \\ \mathbb{E}\{X^2\} &= \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \cdot \Pr\{X = i\} = 2 \sum_{i=1}^{\infty} i^2 (\frac{1}{3})^i\end{aligned}\tag{۷.۳}$$

$$\vee \mu$$

برای مناسبه‌ی $\sum_{i=1}^{\infty} iu^i$ و $\sum_{i=1}^{\infty} i^2u^i$ ، از تساوی $\sum_{i=1}^{\infty} u^i = \frac{u}{1-u}$ مشتق می‌گیریم؛ در این صورت

$$\frac{d}{du} \sum_{i=1}^{\infty} u^i = \sum_{i=1}^{\infty} iu^{i-1} = \frac{1}{(1-u)^2} \implies \sum_{i=1}^{\infty} iu^i = \frac{u}{(1-u)^2} \quad (۸.۳)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \sum_{i=1}^{\infty} iu^i &= \sum_{i=1}^{\infty} i^2u^{i-1} = -\frac{1}{(1-u)^2} + \frac{2}{(1-u)^3} \\ \implies \sum_{i=1}^{\infty} i^2u^i &= -\frac{u}{(1-u)^2} + \frac{2u}{(1-u)^3} \end{aligned} \quad (۹.۳)$$

بنابراین

$$\mathbb{E}\{X\} = \frac{3}{2} \quad , \quad \mathbb{E}\{X^2\} = -\frac{3}{2} + \frac{9}{2} = 3$$

9

$$\sigma^2 = \frac{3}{4}$$

سوال ۲ الف)

$$\begin{aligned} \phi_X(s) &= \mathbb{E}\{e^{sX}\} = \int e^{sx} f(x) dx = \int_1^{\infty} e^{sx} e^{1-x} dx \\ &= e \int_1^{\infty} e^{(s-1)x} dx = e \frac{e^{(s-1)x}}{s-1} \Big|_1^{\infty} = \frac{e^s}{1-s} \end{aligned} \quad (۱۰.۳)$$

بنابراین

$$\mathbb{E}\{X\} = \phi'_X(0) = \frac{e^s(1-s) + e^s}{(1-s)^2} \Big|_{s=0} = 2$$

9

$$\mathbb{E}\{X^2\} = \phi''_X(0) = \frac{e^s(2-s)(1-s)^2 - e^s(1-s)^2 + 2e^s(2-s)(1-s)}{(1-s)^4} \Big|_{s=0} = 5$$

بنابراین

$$\sigma^2 = 5 - 2^2 = 1$$

ت)

$$\phi_X(s) = \mathbb{E}\{e^{sX}\} = 2 \sum_{x=1}^{\infty} e^{sx} \left(\frac{1}{3}\right)^x = 2 \sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{e^s}{3}\right)^x = 2 \frac{\frac{e^s}{3}}{1 - \frac{e^s}{3}} \quad (۱۱.۳)$$

۷۴

نتیجه

$$\phi'_X(s) = \frac{2}{(1 - \frac{e^s}{3})^2} \frac{e^s}{3}$$

9

$$\phi''_X(s) = \frac{2}{(1 - \frac{e^s}{3})^2} \frac{e^s}{3} + \frac{4}{(1 - \frac{e^s}{3})^3} \frac{e^{2s}}{9}$$

بنابر این

$$\mathbb{E}\{X\} = \frac{3}{2} \quad , \quad \mathbb{E}\{X^2\} = 3$$

9

$$\sigma^2 = \frac{3}{4}$$

سوال ۱۳ الف)

$$\mathbb{E}\{e^{-X}\} = \int e^{-x} f(x) dx = \int_1^\infty e^{-x} e^{1-x} dx = -\frac{e^{1-2x}}{2} \Big|_1^\infty = \frac{1}{2e} \quad (12.13)$$

ب)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{e^{-X}\} &= \int e^{-x} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} dx \\ &= \frac{1}{2i} \frac{e^{x(i-1)}}{i-1} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2i} \frac{e^{-x(i+1)}}{i+1} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2i} \frac{e^{-\frac{\pi}{2}} i}{i-1} - \frac{1}{2i} \frac{e^{-\frac{\pi}{2}} i}{i+1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (1 - e^{-\frac{\pi}{2}}) \end{aligned} \quad (13.13)$$

سوال ۱۴ الف)

$$\begin{aligned} \int_D f(x, y) dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} k \sin(x + 3y) dx dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} -k \cos(x + 3y) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dy \\ &= -k \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3y\right) - \cos(3y) dy \\ &= -\frac{k}{3} [\sin(\frac{\pi}{2} + 3y) - \sin(3y)] \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{2k}{3} = 1 \implies k = \frac{3}{2} \end{aligned} \quad (14.13)$$

$$\begin{aligned}
\Pr\{X + 3Y \leq \frac{1}{3}\} &= \frac{3}{2} \int_0^{\frac{1}{9}} \int_0^{\frac{1}{3}-3y} \sin(x + 3y) dx dy \\
&= -\frac{3}{2} \int_0^{\frac{1}{9}} \cos(x + 3y) \Big|_0^{\frac{1}{3}-3y} dy \\
&= -\frac{3}{2} \int_0^{\frac{1}{9}} \cos(\frac{1}{3}) - \cos(3y) dy \\
&= \frac{\sin \frac{1}{3}}{2} - \frac{1}{6} \cos \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

(۱۵.۳)

(ب)

$$\begin{aligned}
k &= 12 \\
\Pr\{X + 3Y \leq \frac{1}{3}\} &= 12 \int_0^{\frac{1}{9}} \int_0^{\frac{1}{3}-3y} xy(1-y) dx dy \\
&= 6 \int_0^{\frac{1}{9}} (\frac{1}{3} - 3y)^2 y(1-y) dy = \frac{43}{65610}
\end{aligned}$$

(۱۶.۳)

سوال ۵ الف)

$$\Pr\{X = 0\} = \Pr\{X = 0, Y = 0\} + \Pr\{X = 0, Y = 1\} = \frac{1}{2} - \theta + \theta = \frac{1}{2}$$

$$\Pr\{X = 1\} = 1 - \Pr\{X = 0\} = \frac{1}{2}$$

به طریق مشابه

$$\Pr\{Y = 0\} = \Pr\{Y = 1\} = \frac{1}{2}$$

(ب)

$$P(X = Y) = P(X = Y = 0) + P(X = Y = 1) = 1 - 2\theta = 1 \implies \theta = 0$$

پ) باید به ازای هر $x \in \{0, 1\}$ و هر $y \in \{0, 1\}$ داشته باشیم

$$\Pr\{X = x, Y = y\} = \Pr\{X = x\} \Pr\{Y = y\}$$

که به چهار معادله زیر منجر می شود

$$\begin{aligned}\Pr\{X = 0, Y = 0\} &= \Pr\{X = 0\} \Pr\{Y = 0\} = \frac{1}{4} \\ \Pr\{X = 1, Y = 0\} &= \Pr\{X = 1\} \Pr\{Y = 0\} = \frac{1}{4} \\ \Pr\{X = 0, Y = 1\} &= \Pr\{X = 0\} \Pr\{Y = 1\} = \frac{1}{4} \\ \Pr\{X = 1, Y = 1\} &= \Pr\{X = 1\} \Pr\{Y = 1\} = \frac{1}{4}\end{aligned}\quad (۱۷.۳)$$

از معادله اول داریم

$$\frac{1}{2} - \theta = \frac{1}{4}$$

که نتیجه می دهد

$$\theta = \frac{1}{4}$$

سایر معادلات نیز به پاسخ $\theta = \frac{1}{4}$ می رسند که نشان می دهد که به ازای این مقدار θ ، متغیرهای تصادفی X و Y مستقل خواهند بود.

پاسخ سوال (۴۱)

(الف)

Exact = 0.2252

Approx. = 0.2240

Error Rel. = 0.53%

(ب)

Exact = 0.1795

Approx = 0.0812

Error Rel. = 54.76%

از مقایسه ی خطاهای نسبی نتیجه می شود که در حالتی که شرایط قضیه ی تقریب پواسون برقرار است، خطای تقریب بسیار کوچک می شود.

پاسخ سوال (۴۲)

تابع توزیع انباشته باید صعودی، در $-\infty$ برابر صفر و در ∞ برابر یک باشد. در این صورت:

الف) $\frac{dF(x)}{dx} = \frac{ke^{-kx}}{(e^{-kx}+1)^2}$ برای نامنفی بودن مشتق باید داشته باشیم $k \geq 0$. از طرفی، به ازای $k = 0$ خواهیم داشت $F(x) = 1$ که نمی تواند یک توزیع انباشته باشد. در نتیجه $k > 0$ و

$$f(x) = \frac{ke^{-kx}}{(e^{-kx} + 1)^2}.$$

ب)

$$f_X(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ (1 + k \cos x)e^{-x-k \sin x} & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

در نتیجه باید به ازای هر x داشته باشیم $1 + k \cos x \geq 0$ که معادل است با $-1 \leq k \leq 1$. از طرفی، به ازای این مقادیر از k ، داریم $F(-\infty) = 0$ و $F(\infty) = 1$ ؛ در نتیجه $-1 \leq k \leq 1$.

پ) داریم $1 < F(1) = 1 + e^{-k}$ ؛ پس این تابع هرگز نمی تواند یک توزیع انباشته باشد.

ت) از $F(\infty) = 1$ نتیجه می شود که $k > 0$. از طرفی به ازای هر مقدار مثبت از k ، تابع زیر نامنفی است:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \begin{cases} \frac{1}{2}\delta(x) & , \quad x = 0 \\ \frac{1}{2}ke^{k-kx} & , \quad x \geq 1 \end{cases} ;$$

پس محدوده مقادیر مجاز k ، مقادیر مثبت خواهند بود.

پاسخ سوال ۴۳)

میان، صدک ۵۰ام است.

$$\text{صدک } a \text{ ام} = \sup\{x : F(x) \leq a\}$$

الف)

: صدک a ام

$$F(x) = \frac{a}{100} \implies \frac{1}{1 + \exp(-kx)} = \frac{a}{100} \implies \exp(-kx) = \frac{100}{a} - 1$$

$$\implies x = -\frac{1}{k} \ln\left(\frac{100}{a} - 1\right) \implies$$

$$x_{25} = -\frac{1}{k} \ln 3 \quad , \quad x_{50} = 0 \quad , \quad x_{75} = \frac{1}{k} \ln 3 = -x_{25}$$

$$\Pr\{X = 0\} = F(0) - \lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Pr\{0 < X \leq 2\} = F(2) - F(0) = \frac{1}{1 + e^{-2k}} - \frac{1}{2} = \frac{\tanh k}{2}$$

(ت)

مورد a :

$$F(x) \leq \frac{a}{100} \implies \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \frac{1}{2} & , \quad 0 \leq x < 1 \leq \frac{a}{100} \\ 1 - \frac{1}{2}e^{k-kx} & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x < 0 & , \quad a = 0 \\ x \leq 0 & , \quad 0 < a < 50 \\ x \leq 1 & , \quad a = 50 \\ x = 1 - \frac{1}{k} \ln(2 - \frac{a}{50}) & , \quad 50 < a < 100 \end{cases}$$

$$\implies x_{25} = 0 \quad , \quad x_{50} = 1 \quad , \quad x_{75} = 1 + \frac{1}{k} \ln 2$$

$$\Pr\{X = 0\} = F(0) - \lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

$$\Pr\{0 < X \leq 2\} = F(2) - F(0) = 1 - \frac{1}{2}e^{-k} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1 - e^{-k})$$

پاسخ سوال ۱۴۴

برای این متغیر تصادفی داریم

$$\begin{aligned} \Pr\{X = 2\} &= \Pr\{X = 2 | \text{آمدن تاس}\} \Pr\{\text{آمدن تاس}\} \\ &\quad + \Pr\{X = 2 | \text{نیامدن تاس}\} \Pr\{\text{نیامدن تاس}\} \\ &= 1 \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{5}{6} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

به طریق مشابه $\Pr\{X = 4\} = \Pr\{X = 6\} = \frac{1}{6}$. اکنون، توزیع انباشته‌ی X را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}\Pr\{X \leq x\} &= \Pr\{X \leq x | \text{زوج آمدن تاس}\} \Pr\{\text{زوج آمدن تاس}\} \\ &\quad + \Pr\{X \leq x | \text{زوج نیامدن تاس}\} \Pr\{\text{زوج نیامدن تاس}\} \\ &= \frac{1}{2} \Pr\{X \leq x | \text{زوج آمدن تاس}\} + \frac{1}{2} \Pr\{X \leq x | \text{زوج نیامدن تاس}\} \\ &\quad \text{به ازای } x < 2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr\{X \leq x\} &= \frac{1}{2} \Pr\{\emptyset | \text{زوج آمدن تاس}\} + \frac{1}{2} \Pr\{1 \leq X \leq x | \text{زوج نیامدن تاس}\} \\ &= \frac{x-1}{10}.\end{aligned}$$

به ازای $2 \leq x < 4$ ،

$$\begin{aligned}\Pr\{X \leq x\} &= \frac{1}{2} \Pr\{X = 2 | \text{زوج آمدن تاس}\} + \frac{1}{2} \Pr\{1 \leq X \leq x | \text{زوج نیامدن تاس}\} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{x-1}{10}.\end{aligned}$$

به ازای $4 \leq x < 6$ ،

$$\begin{aligned}\Pr\{X \leq x\} &= \frac{1}{2} \Pr\{X = 2 \text{ و } X = 4 | \text{زوج آمدن تاس}\} + \frac{1}{2} \Pr\{1 \leq X \leq x | \text{زوج نیامدن تاس}\} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{x-1}{10}.\end{aligned}$$

به ازای $x = 6$ ،

$$\Pr\{X \leq x\} = 1$$

در نتیجه

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 1 \\ \frac{x-1}{10} & , \quad 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{6} + \frac{x-1}{10} & , \quad 2 \leq x < 4 \\ \frac{1}{3} + \frac{x-1}{10} & , \quad 4 \leq x < 6 \\ 1 & , \quad x \geq 6 \end{cases}$$

و متعاقباً

$$f_X(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \begin{cases} \frac{1}{10} & , \quad 1 < x < 6 \\ \frac{1}{6}\delta(x-2) & , \quad x = 2 \\ \frac{1}{6}\delta(x-4) & , \quad x = 4 \\ \frac{1}{6}\delta(x-6) & , \quad x = 6 \end{cases} ,$$

در نتیجه

$$\Pr\{1 \leq X \leq 3\} = \Pr\{X \leq 3\} - \Pr\{X < 1\} = F(3) - \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \frac{1}{6} + \frac{1}{5} = \frac{11}{30}$$

پاسخ سوال ۱۴۵

الف) $Y = e^X$ به ازای $y > 1$

$$\Pr\{Y \leq y\} = \Pr\{e^X \leq y\} = \Pr\{X \leq \ln y\} = 1 - e^{-\ln y} = 1 - \frac{1}{y}$$

و به ازای $y \leq 1$

$$\Pr\{Y \leq y\} = \Pr\{e^X \leq y\} = 0$$

در این صورت

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2} & , \quad y > 1 \\ 0 & , \quad y \leq 1 \end{cases}$$

ب) به ازای $y > 0$

$$\Pr\{Y \leq y\} = \Pr\{X^\alpha \leq y\} = \Pr\{X \leq \sqrt[\alpha]{y}\} = 1 - e^{-\sqrt[\alpha]{y}}$$

و به ازای $y \leq 0$

$$\Pr\{Y \leq y\} = 0$$

در این صورت

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} y^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-\sqrt[\alpha]{y}} & , \quad y > 0 \\ 0 & , \quad y \leq 0 \end{cases}$$

البته به ازای $\alpha = 0$ داریم $\Pr\{Y = 1\} = 1$

پ) به ازای $y > 0$

$$\Pr\{Y \leq y\} = \Pr\{\lfloor X \rfloor \leq y\} = \Pr\{\lfloor X \rfloor \leq \lfloor y \rfloor\} = \Pr\{X < \lfloor y \rfloor + 1\} = 1 - e^{-\lfloor y \rfloor - 1}$$

و به ازای $y \leq 0$

$$\Pr\{Y \leq y\} = 0$$

در نتیجه، توزیع تجمعی Y دارای پخشهایی در نقاط صحیح نامنفی Y بوده و چگالی احتمال آن عبارتست از

$$f_Y(y) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k}(1 - e^{-1})\delta(y - k)$$

پاسخ سوال ۱۴۶

(الف)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx &= 1 \implies \\ \int_0^1 kx dx + \int_{1^-}^{1^+} \frac{1}{2}\delta(x-1)dx &= 1 \implies \\ \frac{k}{2} + \frac{1}{2} &= 1 \implies k = 1 \end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{X\} &= \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx \\ &= \int_0^1 x^2 dx + \int_{1^-}^{1^+} \frac{1}{2}x\delta(x-1)dx \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

(پ)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{e^{aX}\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ax} f_X(x)dx \\ &= \int_0^1 xe^{ax} dx + \int_{1^-}^{1^+} \frac{1}{2}e^{ax}\delta(x-1)dx \\ &= \left(x - \frac{1}{a}\right)e^{ax} \Big|_0^1 + \int_{1^-}^{1^+} \frac{1}{2}e^a\delta(x-1)dx \\ &= \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{a}\right)e^a + \frac{1}{a} \end{aligned}$$

پاسخ سوال ۱۴۷

الف) به ازای $y > 0$

$$\begin{aligned}\Pr\{Y \leq y\} &= \Pr\{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\} = \Pr\{X \leq \sqrt{y}\} \\ &= \int_0^{\sqrt{y}} 2x \exp(-x^2) dx = 1 - \exp(-y)\end{aligned}$$

در نتیجه

$$f_Y(y) = \exp(-y) \quad , \quad y > 0$$

ب)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{X\} &= \int_0^\infty 2x^2 \exp(-x^2) dx = -x \exp(-x^2) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \exp(-x^2) dx \\ &= \int_0^\infty \exp(-x^2) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \exp(-x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty \exp(-x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\end{aligned}$$

پ)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{X^2\} &= \int_0^\infty 2x^3 \exp(-x^2) dx = \int_0^\infty u \exp(-u) du = 1 \\ \mathbb{E}\{Y\} &= \int_0^\infty y \exp(-y) dy = 1 \implies \mathbb{E}\{X^2\} = \mathbb{E}\{Y\}\end{aligned}$$

همانگونه که انتظار می‌رفت، $Y = X^2$ و تساوی $\mathbb{E}\{X^2\} = \mathbb{E}\{Y\}$ ، نتیجه می‌دهد.

ت)

$$\begin{aligned}\Pr\{X < \frac{1}{2}\} &= \int_0^{\frac{1}{2}} 2x \exp(-x^2) dx \\ &= -\exp(-x^2) \Big|_0^{\frac{1}{2}} = 1 - \exp(-\frac{1}{4})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr\{Y < \frac{1}{4}\} &= \int_0^{\frac{1}{4}} \exp(-y) dy \\ &= -\exp(-y) \Big|_0^{\frac{1}{4}} = 1 - \exp(-\frac{1}{4})\end{aligned}$$

همانگونه که انتظار می‌رفت، $Y = X^2$ به نتیجه‌ی زیر منجر می‌شود:

$$\{X \leq \frac{1}{2}\} \equiv \{X^2 \leq \frac{1}{4}\} \equiv \{Y \leq \frac{1}{4}\}.$$

پاسخ سوال ۱۸۴

(الف)

$$\Pr\{X \geq \alpha\} = \int_{\alpha}^{\infty} \exp(-x) dx = \exp(-\alpha)$$

$$\text{Markov's Bound} = \frac{\mathbb{E}\{X\}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$$

(ب)

$$\Pr\{X \geq \alpha\} = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{1}{\ln 2} \frac{1}{1 + e^x} dx = \log_2(1 + e^{-\alpha})$$

$$\text{Markov's Bound} = \frac{\mathbb{E}\{X\}}{\alpha} \approx \frac{1.1866}{\alpha}$$

(ب)

$$\Pr\{X \geq \alpha\} = \int_{\alpha}^{\infty} x \exp(-x) dx = (\alpha + 1) \exp(-\alpha)$$

$$\text{Markov's Bound} = \frac{\mathbb{E}\{X\}}{\alpha} = \frac{2}{\alpha}$$

پاسخ سوال ۱۸۹

(الف)

$$\mathbb{E}\{X\} = \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = -(x + 1)e^{-x}|_0^{\infty} = 1$$

$$\mathbb{E}\{X^2\} = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x}|_0^{\infty} = 2$$

$$\implies \sigma_X^2 = 1$$

(ب)

$$\mathbb{E}\{X\} = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x}|_0^{\infty} = 2$$

$$\mathbb{E}\{X^2\} = \int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx = -(x^3 + 3x^2 + 6x + 6)e^{-x}|_0^{\infty} = 6$$

$$\implies \sigma_X^2 = 2$$

پاسخ سوال ۵۰

(الف)

$$\begin{aligned}\phi_X(s) &= \mathbb{E}\{e^{sX}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} f_X(x) dx = \int_0^1 (1-x)e^{sx} dx + \int_{1^-}^{1^+} \frac{1}{2} \delta(x-1) e^{sx} dx \\ &= e^{sx} \left(\frac{1-x}{s} + \frac{1}{s^2} \right) \Big|_0^1 + \frac{e^s}{2} = \frac{e^s - s - 1}{s^2} + \frac{e^s}{2} = \frac{e^s}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{(n+2)!} \implies \\ \mathbb{E}\{X^2\} &= \frac{d^2 \phi(s)}{ds^2} \Big|_{s=0} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}\end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned}\phi_X(s) &= \mathbb{E}\{e^{sX}\} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{sx} \cos x dx = \frac{e^{\frac{\pi}{2}s}}{s^2 + 1} \implies \\ \mathbb{E}\{X^2\} &= \frac{d^2 \phi(s)}{ds^2} \Big|_{s=0} = \frac{\pi^2}{4} - 2\end{aligned}$$

(ج)

$$\begin{aligned}\phi_X(s) &= \sum_x e^{sx} P(X=x) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{x}{2} \left(\frac{e^s}{2}\right)^x = \frac{e^s}{(e^s - 2)^2} \implies \\ \frac{d\phi(s)}{ds} &= -e^s \frac{e^s + 2}{(e^s - 2)^3} \implies \frac{d^2 \phi(s)}{ds^2} = \frac{e^{3s} + 8e^{2s} + 4e^s}{(e^s - 2)^4} \implies \\ \mathbb{E}\{X^2\} &= 13\end{aligned}$$

ت) ابتدا مقادیر تابع جرم احتمال X را می نویسیم؛

$$\Pr\{X = 1\} = \frac{1}{36}$$

$$\Pr\{X = 2\} = \frac{2}{36}$$

$$\Pr\{X = 3\} = \frac{2}{36}$$

$$\Pr\{X = 4\} = \frac{3}{36}$$

$$\Pr\{X = 5\} = \frac{2}{36}$$

$$\Pr\{X = 6\} = \frac{4}{36}$$

$$\Pr\{X = 8\} = \frac{2}{36}$$

$$\Pr\{X = 9\} = \frac{1}{36}$$

$$\Pr\{X = 10\} = \frac{2}{36}$$

$$\Pr\{X = 12\} = \frac{4}{36}$$

$$\Pr\{X = 15\} = \frac{2}{36}$$

$$\Pr\{X = 16\} = \frac{1}{36}$$

$$\Pr\{X = 18\} = \frac{2}{36}$$

$$\Pr\{X = 20\} = \frac{2}{36}$$

$$\Pr\{X = 24\} = \frac{2}{36}$$

$$\Pr\{X = 25\} = \frac{1}{36}$$

$$\Pr\{X = 30\} = \frac{2}{36}$$

$$\Pr\{X = 36\} = \frac{1}{36}$$

بنابر این

$$\begin{aligned}\phi_X(s) = \frac{1}{36} [& e^s + 2e^{2s} + 2e^{3s} + 3e^{4s} + 2e^{5s} + 4e^{6s} + 2e^{8s} + e^{9s} + 2e^{10s} \\ & + 4e^{12s} + 2e^{15s} + e^{16s} + 2e^{18s} + 2e^{20s} + 2e^{24s} + e^{25s} + 2e^{30s} + e^{36s}]\end{aligned}$$

بنابر این

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{X^2\} = \frac{1}{36} [& 1 + 8 + 18 + 48 + 50 + 144 + 128 + 81 + 200 + 576 \\ & + 450 + 256 + 648 + 800 + 1152 + 625 + 1800 + 1296] = \frac{8281}{36}\end{aligned}$$

فصل ۴

متغیرهای تصادفی توأم

سوال ۱ الف)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{1+x^2+y^2} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{k}{1+r^2} r dr d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} k \ln 1+r^2 \Big|_0^{\infty} d\phi \\ &= \infty \times k\end{aligned}$$

واضح است که مقدار فوق هرگز نمی تواند برابر باشد؛ در نتیجه تابع این سوال هرگز یک PDF نیست.

ب) به وضوح مقدار k باید منفی باشد؛ زیرا در غیر این صورت انتگرال توزیع احتمال ناممرد خواهد شد.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{k(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r e^{kr^2} dr d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{2k} e^{kr^2} \Big|_0^{\infty} d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} -\frac{1}{2k} d\phi \\ &= -\frac{\pi}{k}\end{aligned}$$

بنابراین بوضوح $k = -\pi$.

پ) تابع توزیع این بفش، یک استوانه با مساحت قاعده‌ی π و ارتفاع k را نشان می‌دهد. از آنجا که حجم این استوانه (یا همان انتگرال توزیع احتمال) برابر $k\pi$ است، باید داشته باشیم $k = \frac{1}{\pi}$.

ت) تابع توزیع این بفش، یک مخروط با مساحت قاعده‌ی π و ارتفاع k را نشان می‌دهد. از آنجا که حجم این مخروط برابر $\frac{k\pi}{3}$ است، باید داشته باشیم $k = \frac{3}{\pi}$.

ث)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy &= \int_0^k \int_0^k xy dx dy \\ &= \int_0^k x dx \cdot \int_0^k y dy \\ &= \frac{k^4}{4} = 1 \end{aligned}$$

بنابراین $k = \sqrt{2}$.

ج) تابع توزیع احتمال این بفش، یک منشور قائم با قاعده‌ی مثلثی (به صورت قائم الزاویه و با مساحت $\frac{k^2}{2}$) و ارتفاع k را نشان می‌دهد. از آنجا که حجم این مخروط برابر $\frac{k^2}{2}$ است، باید داشته باشیم $k = \sqrt{2}$.

سوال ۲) (سوال ۱ بفش‌های ب، پ و ت) با توجه به راهنمایی سوال و با توجه به اینکه PDF داده شده، یک تابع دایروی-متقارن است، بنابراین نسبت به هر دو محور $X = 0$ و $X + Y = 0$ تقارن خطی داشته و لذا احتمال نواحی مزبور، برابر $\frac{1}{2}$ است.

(سوال ۱ بفش ث و ج) برای این دو بفش، مقدار $X + Y$ همواره با احتمال مثبت است و در نتیجه مقدار این دو احتمال، همواره برابر یک خواهد بود.

سوال ۳) (سوال ۲ قسمت ث)

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_0^{\sqrt{2}} xy dy \\ &= x \end{aligned}$$

در نتیجه

$$f_X(x) = \begin{cases} x & , \quad 0 < x < \sqrt{2} \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

(سوال ۲ قسمت ج)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_0^{\sqrt{2}-x} dy$$

$$= \sqrt{2} - x$$

در نتیجه

$$f_X(x) = \begin{cases} \sqrt{2} - x & , \quad 0 < x < \sqrt{2} \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

(سوال ۴ الف)

$$\Pr\{X = Y\} = \Pr\{X = Y = 0\} + \Pr\{X = Y = 1\} = 2\theta = 0$$

در نتیجه $\theta = 0$

ب) با جمع سطری و ستونی نتیجه می شود:

$$\Pr\{X = x\} = \frac{1}{2}$$

$$\Pr\{Y = y\} = \frac{1}{2}$$

$$x, y \in \{0, 1\}$$

در نتیجه:

$$\theta = \frac{1}{4}, \quad x \neq y$$

$$\frac{1}{2} - \theta = \frac{1}{4}, \quad x = y$$

از هر دو حالت فوایدیم داشت $\theta = \frac{1}{4}$.

سوال ۱ الف) از آنجا که مجموع اعداد دو تاس هرگز نمی تواند ا شود، در نتیجه احتمال مورد نظر برابر صفر است.

اگر $\Pr\{X = 7, Y = 1\}$ مورد نظر بود، مقدار این احتمال برابر با

$$\Pr\{X = 7\} = \frac{1}{18}$$

است.

ب) ابتدا احتمالات غیر صفر را برای حالاتی که $X, Y \neq 0$ به دست می آوریم:

$$\Pr\{X = 12, Y = 2\} = \frac{1}{36}$$

$$\Pr\{X = x, Y = 1\} = \frac{1}{18} \quad , \quad x \in \{7, 8, 9, 10, 11\}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} E\{XY\} &= \sum_{x=7}^{11} \sum_{y=1} xy \Pr\{X = x, Y = 1\} \\ &+ 12 \times 2 \times \Pr\{X = 12, Y = 2\} \\ &= \frac{45}{18} + \frac{24}{36} \\ &= \frac{5}{2} + \frac{2}{3} \\ &= \frac{19}{6} \end{aligned}$$

پ) مشاهده می کنیم که

$$\Pr\{X = x\} = \Pr\{X = 14 - x\} \quad , \quad x \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

بنابراین چون توزیع X حول $x = 7$ متقارن است، خواهیم داشت

$$E\{X\} = 7$$

به علاوه

$$\Pr\{Y = 2\} = \frac{1}{36}$$

$$\Pr\{Y = 1\} = \frac{11}{36}$$

در نتیجه

$$E\{Y\} = \frac{13}{36}$$

به وضوح X و Y ناهمبسته نیستند؛ زیرا

$$E\{XY\} \neq E\{X\}E\{Y\}$$

سوال ۲) الف) به وضوح

$$\mu_X = E\{X\} = p_3 + p_4$$

$$\mu_Y = E\{Y\} = p_2 + p_4$$

در نتیجه

$$\text{cov}(X, Y) = E\{(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\}$$

$$= E\{XY\} - \mu_X \mu_Y$$

$$= p_4 - (p_2 + p_4)(p_3 + p_4)$$

در نتیجه برای صفر بودن کوواریانس باید داشته باشیم $p_4 = (p_2 + p_4)(p_3 + p_4)$.

ب) شرط همبستگی که در قسمت قبلی به دست آمد. برای استقلال باید داشته باشیم:

$$p_1 = (p_1 + p_3)(p_1 + p_2)$$

$$p_2 = (p_1 + p_2)(p_2 + p_4)$$

$$p_3 = (p_1 + p_3)(p_3 + p_4)$$

$$p_4 = (p_2 + p_4)(p_3 + p_4)$$

نکته اینجاست که

۱. از معادله ۴، با کم کردن $p_2 + p_4$ به معادله ۲ می‌رسیم.

۲. از معادله ۴، با کم کردن $p_3 + p_4$ به معادله ۳ می‌رسیم.

۳. از جمع معادله‌های ۲، ۳ و ۴ به معادله ۱ می‌رسیم.

بنابراین در این سوال، ناهمبستگی و استقلال معادلند.

سوال ۳) الف) به سادگی و با انتگرال گیری می‌توان نتیجه گرفت:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < y < 1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در نتیجه

$$E\{X\} = E\{Y\} = \frac{1}{2}$$

هم چنین می دانیم

$$\begin{aligned} E\{XY\} &= \int_0^1 \int_0^1 xy + \alpha xy \sin[2\pi(x+y)] dx dy \\ &= \frac{1}{4} + \alpha \int_0^1 \int_0^1 xy \sin[2\pi(x+y)] dx dy \\ &= \frac{1}{4} + \alpha \int_0^1 y \int_0^1 x \sin[2\pi(x+y)] dx dy \end{aligned}$$

هم چنین

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \sin[2\pi(x+y)] dx &= \left[-\frac{x}{2\pi} \cos[2\pi(x+y)] + \frac{1}{4\pi^2} \sin[2\pi(x+y)] \right]_{x=0}^{x=1} \\ &= -\frac{\cos 2\pi y}{2\pi} \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} E\{XY\} &= \frac{1}{4} - \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 y \cos 2\pi y dy \\ &= \frac{1}{4} - \frac{\alpha}{2\pi} \left[\frac{y \sin 2\pi y}{2\pi} + \frac{\cos 2\pi y}{4\pi^2} \right]_{y=0}^{y=1} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

از آنجا که همواره $E\{XY\} = E\{X\}E\{Y\}$ ، در نتیجه همواره دو متغیر تصادفی X و Y ناهمبسته هستند.

ب) به سادگی دیده می شود که

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) \iff \alpha = 0$$

سوال ۴ الف)

$$\begin{aligned}
 f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \\
 &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\rho^2} (x^2 + y^2 - 2\rho xy) \right] dy \\
 &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\rho^2} (\rho^2 x^2 + y^2 - 2\rho xy + (1-\rho^2)x^2) \right] dy \\
 &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\rho^2} ([\rho x - y]^2 + (1-\rho^2)x^2) \right] dy \\
 &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[-\frac{1}{2} x^2 \right] \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\rho^2} [\rho x - y]^2 \right] dy \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} x^2 \right] \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\rho^2} y^2 \right] dy}_1 \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} x^2 \right]
 \end{aligned}$$

ب) با $\rho = 0$ فوایدیم داشت:

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \exp \left[-\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} y^2 \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} x^2 \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} y^2 \right] \\
 &= f_X(x) f_Y(y)
 \end{aligned}$$

پ) باید داشته باشیم

$$\begin{aligned}
 f(x) f(y) &= \frac{1}{2\pi} \exp \left[-\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} y^2 \right] \\
 &= f(x, y) \\
 &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\rho^2} (x^2 + y^2 - 2\rho xy) \right]
 \end{aligned}$$

به طور مثال به ازای $x = y = 0$ نتیجه می شود $\rho = 0$ که پاسخ درستی است و اثبات را کامل می کند.

ت) (!)

سوال ۱) الف) با توجه به اینکه $\Pr\{XY > 1\} = 0$ ، برای $u < 1$ فوایدیم داشت:

$$\begin{aligned}\Pr\{XY < u\} &= \Pr\left\{X < \frac{u}{Y}\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Pr\left\{X < \frac{u}{y} \mid Y = y\right\} f_Y(y) dy \\ &= \int_0^1 \Pr\left\{X < \frac{u}{y} \mid Y = y\right\} dy \\ &= \int_0^u \Pr\left\{X < \frac{u}{y}\right\} dy \\ &\quad + \int_u^1 \Pr\left\{X < \frac{u}{y}\right\} dy \\ &= u + \int_u^1 \frac{u}{y} dy \\ &= u - u \ln u\end{aligned}$$

بنابراین

$$f_{XY}(u) = \frac{d}{du} F_{XY}(u) = \begin{cases} -\ln u & , \quad 0 \leq u < 1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

ب) ابتدا، می‌دانیم

$$\Pr\{X + Y < 0\} = 1 - \Pr\{X + Y < 2\} = 0$$

بنابراین با فرض $0 < u < 2$ فوایدیم داشت:

$$\begin{aligned}\Pr\{X + Y < u\} &= \Pr\{X < u - Y\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Pr\{X < u - y \mid Y = y\} f_Y(y) dy \\ &= \int_0^1 \Pr\{X < u - y \mid Y = y\} dy\end{aligned}$$

به ازای $u < 1$:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \Pr \{X < u - y | Y = y\} dy \\ &= \int_0^u \Pr \{X < u - y | Y = y\} dy \\ &= \int_0^u u - y dy \\ &= \frac{u^2}{2} \end{aligned}$$

به ازای $u > 1$:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \Pr \{X < u - y | Y = y\} dy \\ &= \int_{u-1}^1 \Pr \{X < u - y | Y = y\} dy \\ &+ \int_0^{u-1} \Pr \{X < u - y | Y = y\} dy \\ &= \int_{u-1}^1 u - y dy \\ &+ u - 1 \\ &= u(2 - u) - \frac{1}{2} + \frac{(u - 1)^2}{2} + u - 1 \\ &= 2u - \frac{u^2}{2} \end{aligned}$$

بنابراین

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad 0 < x < 1 \\ 2 - x & , \quad 1 \leq x < 2 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

پ) به ازای $u > 0$

$$\begin{aligned}\Pr\left\{\frac{X}{Y} < u\right\} &= \Pr\{X < uY\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Pr\{X < uy|Y = y\} f_Y(y) dy \\ &= \int_0^1 \Pr\{X < uy|Y = y\} dy\end{aligned}$$

به ازای $u < 1$ با اندکی محاسبات

$$\Pr\left\{\frac{X}{Y} < u\right\} = \frac{u}{2}$$

به ازای $u > 1$ با اندکی محاسبات بیشتر

$$\Pr\left\{\frac{X}{Y} < u\right\} = 1 - \frac{1}{2u}$$

بنابراین

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \quad 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2x^2} & , \quad 1 \leq x \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

ت) با فرض $0 < u < 1$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\Pr\{\max\{X, Y\} < u\} &= \Pr\{X < u, Y < u\} \\ &= \Pr\{X < u\} \Pr\{Y < u\} = u^2\end{aligned}$$

بنابراین

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

ث) با فرض $0 < u < 1$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\Pr\{\min\{X, Y\} < u\} &= 1 - \Pr\{\min\{X, Y\} > u\} \\ &= 1 - \Pr\{X > u, Y > u\} \\ &= 1 - \Pr\{X > u\} \Pr\{Y > u\} = 1 - (1 - u)^2\end{aligned}$$

بنابراین

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 2x & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

اکنون اگر متغیرهای تصادفی X و Y ، نمایی با پارامتر ۱ باشند، در این صورت با فرض $u > 0$

(ب)

$$\begin{aligned} \Pr \{X + Y < u\} &= \Pr \{X < u - Y\} \\ &= \int_0^\infty e^{-y} \Pr \{X < u - y\} dy \\ &= \int_0^u e^{-y} \Pr \{X < u - y\} dy \\ &= \int_0^u e^{-y} (1 - e^{y-u}) dy \\ &= \int_0^u e^{-y} - e^{-u} dy \\ &= 1 - e^{-u} - ue^{-u} \end{aligned}$$

در نتیجه

$$f(x) = xe^{-x} \quad , \quad x > 0$$

(پ)

$$\begin{aligned} \Pr \left\{ \frac{X}{Y} < u \right\} &= \Pr \{X < uY\} \\ &= \int_0^\infty e^{-y} \Pr \{X < uy\} dy \\ &= \int_0^\infty e^{-y} (1 - e^{-uy}) dy \\ &= \int_0^\infty e^{-y} - e^{-(1+u)y} dy \\ &= 1 - \frac{1}{u+1} \end{aligned}$$

در نتیجه

$$f(u) = \frac{1}{(u+1)^2} \quad , \quad u > 0$$

سوال ۲) در سوال ۴ سری پیشین، ثابت شد هر دو X و Y دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس ۱ هستند. همچنین به ازای هر y ، $Y = y$ ، توزیع X دارای میانگین ρy و واریانس $1 - \rho^2$ است؛ بنابراین:

$$\begin{aligned}\Pr\{X + Y < u\} &= \Pr\{X < u - Y\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{y^2}{2}\right] F_X(u - y) dy\end{aligned}$$

که در آن $F_X(x)$ توزیع تجمعی متغیر تصادفی X به ازای هر y است. با مشتق گیری خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\frac{d}{du} \Pr\{X + Y < u\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{y^2}{2}\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi(1 - \rho^2)}} \exp\left[-\frac{(u - y - \rho y)^2}{2(1 - \rho^2)}\right] dy \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - \rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(u - y - \rho y)^2 + (1 - \rho^2)y^2}{2(1 - \rho^2)}\right] dy \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - \rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{u^2 - 2(1 + \rho)uy + y^2(2 + 2\rho)}{2(1 - \rho^2)}\right] dy \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - \rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{\frac{1 - \rho}{2}u^2 + (2 + 2\rho)\left(y - \frac{u}{2}\right)^2}{2(1 - \rho^2)}\right] dy \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - \rho^2}} \exp\left[-\frac{u^2}{4(1 + \rho)}\right] \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{\left(y - \frac{u}{2}\right)^2}{1 - \rho}\right] dy \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi(1 + \rho)}} \exp\left[-\frac{u^2}{4(1 + \rho)}\right]\end{aligned}$$

بنابراین $X + Y$ ، یک توزیع گوسی با میانگین صفر و واریانس $2 + 2\rho$ است.

این واریانس زمانی بیشینه است که $\rho = 1$ ؛ به عبارت دیگر حالتی که تساوی $X = Y$ با احتمال ۱ برقرار باشد. علت شهودی آن جالب است؛ زیرا زمانی که تساوی اخیر با احتمال ۱ رخ دهد، تغییرات X و Y هم جهت یکدیگر است (به عبارت دیگر، هر دو همزمان و به یک اندازه کم و زیاد می شوند).

سوال ۱) الف) می دانیم این چگالی توزیع، روی یک مربع دوران یافته با طول قطر ۲، مقدار ثابت k دارد و سایر جاها صفر است؛ بنابراین چون مساحت مربع برابر ۲ است، خواهیم داشت $k = \frac{1}{2}$.

ب)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{X\} &= \int_{-1}^1 \int_{|y|-1}^{1-|y|} xf(x, y) dx dy \\ &= \int_{-1}^1 \int_{|y|-1}^{1-|y|} kx dx dy \\ &= 0\end{aligned}$$

به طریق مشابه

$$\mathbb{E}\{Y\} = 0$$

می دانیم

$$\begin{aligned}\text{cov}(X, Y) &= \mathbb{E}\{(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\} \\ &= \mathbb{E}\{XY\} = \int_{-1}^1 \int_{|y|-1}^{1-|y|} xyf(x, y) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{|y|-1}^{1-|y|} xy dx dy = 0\end{aligned}$$

بنابراین کوواریانس و ضریب همبستگی هر دو برابر صفرند.

پ) دو متغیر تصادفی $X + Y$ و $X - Y$ از چرخش 45° درجه‌ی متغیرهای تصادفی X و Y و سپس مقیاس کردن (تجانس) به اندازه‌ی $\sqrt{2}$ حاصل می شوند. بنابراین تابع توزیع توأم آنها نیز دچار چنین تبدیلی خواهد شد و خواهیم داشت

$$f_{X+Y, X-Y}(u, v) = \begin{cases} \frac{1}{4} & , \quad -1 < u, v < 1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در این صورت، براحتی دیده می شود که این دو متغیر تصادفی مستقلند و هر یک دارای توزیع یکنواخت بین -1 و 1 هستند.

ت) برای $|x| > 1$ داریم $f(x) = 0$ و برای $|x| < 1$

$$\begin{aligned}f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{|x|-1}^{1-|x|} dy \\ &= 1 - |x|\end{aligned}$$

که میانگین آن صفر است و برای واریانس

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= \mathbb{E}\{X^2\} \\ &= \int_{-1}^1 x^2 - x^2|x|dx \\ &= 2 \int_0^1 x^2 - x^3 dx \\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

سوال ۲)

$$\begin{aligned}\Phi_X(s) &= \mathbb{E}\{e^{sX}\} \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)e^{sx}dx \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{sx}dx \\ &= \frac{1}{s}(e^{\frac{s}{2}} - e^{-\frac{s}{2}}) \\ &= \frac{2 \sinh \frac{s}{2}}{s}\end{aligned}$$

سری تیلور $\sinh x$ برابر است با

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

بنابراین

$$\frac{\sinh x}{x} = 1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \dots$$

9

$$\frac{\sinh \frac{s}{2}}{\frac{s}{2}} = 1 + \frac{s^2}{4 \times 3!} + \frac{s^4}{16 \times 5!} + \dots$$

و در نتیجه

$$\left. \frac{d^4}{ds^4} \Phi_X(s) \right|_{s=0} = \frac{1}{80}$$

سوال ۳) برای هر $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned}\Pr\left\{\tan^{-1}\frac{Y}{X} < u\right\} &= \Pr\left\{\frac{Y}{X} < \tan u\right\} \\ &= \Pr\left\{\frac{Y}{X} < \tan u, X > 0\right\} + \Pr\left\{\frac{Y}{X} < \tan u, X \leq 0\right\} \\ &= \Pr\{Y < X \tan u, X > 0\} + \Pr\{Y > X \tan u, X < 0\}\end{aligned}$$

می دانیم

$$\Pr\{Y < X \tan u, X > 0\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{x \tan u} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dy dx$$

با تغییر متغیر $x \rightarrow -x$ و $y \rightarrow -y$ ، دیده می شود

$$\Pr\{Y < X \tan u, X > 0\} = \Pr\{Y > X \tan u, X < 0\}$$

بنابراین

$$\Pr\left\{\tan^{-1}\frac{Y}{X} < u\right\} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{x \tan u} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dy dx$$

و با مشتق گیری خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\frac{d}{du} \Pr\left\{\tan^{-1}\frac{Y}{X} < u\right\} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty x(1 + \tan^2 u) \exp\left(-\frac{x^2 \tan^2 u}{2}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \exp\left(-\frac{x^2(1 + \tan^2 u)}{2}\right) \Big|_{x=\infty}^{x=0} \\ &= \frac{1}{\pi}\end{aligned}$$

که نشان می دهد چگالی احتمال، مقدار یکنواخت $\frac{1}{\pi}$ را در بازه ی $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ اختیار می کند.

سوال ۴) می دانیم برای هر $y > 0$

$$\begin{aligned}f(y) &= \int_0^\infty f(x, y) dx \\ &= \int_0^\infty e^{-x(1+y)^2} dx \\ &= \frac{1}{(1+y)^2} e^{-x(1+y)^2} \Big|_\infty^0 \\ &= \frac{1}{(1+y)^2}\end{aligned}$$

همچنین

$$f(x|y)f(y) = f(x, y)$$

بنابراین

$$f(x|y) = (1+y)^2 e^{-x(1+y)^2}, \quad x, y > 0$$

سوال ۵) الف) ثابت می‌کنیم همگرایی، از نوع در احتمال است.

$$\begin{aligned} \Pr\{|X_n - X| < \epsilon\} &= \Pr\left\{\frac{1}{n} < \epsilon\right\} \\ &= \begin{cases} 1 & , \quad n > \frac{1}{\epsilon} \\ 0 & , \quad n \leq \frac{1}{\epsilon} \end{cases} \end{aligned}$$

که نشان می‌دهد برای هر $\epsilon > 0$ ، می‌توان n را چنان بزرگ انتخاب کرد که احتمال فوق برابر شود.

ب) همگرایی از نوع در توزیع است؛ زیرا

$$F_{X_n}(u) = 1 - e^{-\frac{n+1}{n}u}, \quad u > 0$$

و در نتیجه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(u) = F_X(u), \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

پ) طبق قضیه‌ی حد مرکزی، اگر X_i ها، یکنواخت بین $-\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$ باشند، دنباله‌ی $\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}$ ، در احتمال به یک متغیر کوسی با میانگین صفر و واریانس $\frac{1}{12}$ میل می‌کند. چون در اینجا به دنبال همگرایی $\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}$ هستیم، نتیجه می‌شود که دنباله‌ی فوق، در احتمال به یک توزیع کوسی با میانگین $\frac{1}{2}$ و واریانس صفر میل می‌کند (یعنی توزیعی که فقط مقدار $\frac{1}{2}$ را با احتمال ۱ می‌پذیرد).

پاسخ سوال ۵)

الف)

$$از 1؛ \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = 1 \text{ نتیجه می شود:}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 xy + kx + ky dx dy &= 1 \implies \\ \int_0^1 \frac{1}{2}y + k\frac{1}{2} + ky dy &= 1 \implies \\ \frac{1}{4} + k\frac{1}{2} + k\frac{1}{2} &= 1 \implies \\ k &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

همچنین به ازای این مقدار k داریم $f(x, y) \geq 0$. برای مناسبه‌ی توزیع تجمعی توأم، توجه داریم که اگر $x < 0$ یا $y < 0$ یا هر دو، در این صورت $F(x, y) = 0$. بنابراین $x > 0, y > 0$ در نتیجه

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_0^{\min(x, 1)} \int_0^{\min(y, 1)} uv + \frac{3u}{4} + \frac{3v}{4} dudv \\ &= \frac{\min(x, 1) \cdot \min(y, 1)}{4} + \frac{3 \min(x, 1)}{8} + \frac{3 \min(y, 1)}{8} \\ &= \begin{cases} \frac{xy}{4} + \frac{3x+3y}{8} & , \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ \frac{x}{4} + \frac{3x+3}{8} & , \quad 0 \leq x \leq 1, y \geq 1 \\ \frac{y}{4} + \frac{3y+3}{8} & , \quad x \geq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & , \quad x \geq 1, y \geq 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases} \end{aligned}$$

(ب)

$$از 1؛ \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = 1 \text{ نتیجه می شود:}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} k \sin(x + 3y) dx dy &= 1 \implies \\ \int_0^{\frac{\pi}{6}} k \cos(3y) + k \sin(3y) dy &= 1 \implies \\ k \frac{1}{3} \sin(3y) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} - k \frac{1}{3} \cos(3y) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} &= 1 \implies \\ k &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

همچنین به ازای این مقدار k داریم $f(x, y) \geq 0$. برای مناسبه‌ی توزیع تجمعی توأم، توجه داریم که اگر $x < 0$

یا $y < 0$ یا هر دو، $x > 0, y > 0$. بنابراین $F(x, y) = 0$ است و نتیجه

$$\begin{aligned}
 F(x, y) &= \int_0^{\min(y, \frac{\pi}{6})} \int_0^{\min(x, \frac{\pi}{2})} \frac{3}{2} \sin(u + 3v) du dv \\
 &= \int_0^{\min(y, \frac{\pi}{6})} \frac{3}{2} \cos(u + 3v) \Big|_{\min(x, \frac{\pi}{2})}^0 dv \\
 &= \int_0^{\min(y, \frac{\pi}{6})} \frac{3}{2} \cos(3v) - \frac{3}{2} \cos \left[\min(x, \frac{\pi}{2}) + 3v \right] dv \\
 &= \frac{1}{2} \sin(3v) \Big|_0^{\min(y, \frac{\pi}{6})} - \frac{1}{2} \sin \left[\min(x, \frac{\pi}{2}) + 3v \right] \Big|_0^{\min(y, \frac{\pi}{6})} \\
 &= \frac{1}{2} \sin(\min(3y, \frac{\pi}{2})) - \frac{1}{2} \sin \left[\min(x, \frac{\pi}{2}) + \min(3y, \frac{\pi}{2}) \right] + \frac{1}{2} \sin \left[\min(x, \frac{\pi}{2}) \right] \\
 &\begin{cases} \frac{1}{2} \sin(x) + \frac{1}{2} \sin(3y) - \frac{1}{2} \sin(x + 3y) & , \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{6} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(x) + \frac{1}{2} \sin(x) & , \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, y \geq \frac{\pi}{6} \\ \frac{1}{2} \sin(3y) - \frac{1}{2} \cos(3y) + \frac{1}{2} & , \quad x \geq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{6} \\ 1 & , \quad x \geq \frac{\pi}{2}, y \geq \frac{\pi}{6} \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}
 \end{aligned}$$

پاسخ سوال (۵۲)

(الف)

$$\Pr\{X \leq 4, Y \leq -2\} = 0$$

$$\begin{aligned}
\Pr\{X + Y \leq 2\} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\min(\frac{\pi}{2}, 2-y)} \frac{1}{2} \sin(x+y) dx dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos(x+y) \Big|_{\min(\frac{\pi}{2}, 2-y)}^0 dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos(y) - \frac{1}{2} \cos \left[\min\left(\frac{\pi}{2}, 2-y\right) + y \right] dy \\
&= \int_0^{2-\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos(y) - \frac{1}{2} \cos \left[\min\left(\frac{\pi}{2}, 2-y\right) + y \right] dy \\
&\quad + \int_{2-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos(y) - \frac{1}{2} \cos \left[\min\left(\frac{\pi}{2}, 2-y\right) + y \right] dy \\
&= \int_0^{2-\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos(y) - \frac{1}{2} \cos \left[\frac{\pi}{2} + y \right] dy \\
&\quad + \int_{2-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos(y) - \frac{1}{2} \cos [2-y+y] dy \\
&= \int_0^{2-\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos(y) + \frac{1}{2} \sin(y) dy \\
&\quad + \int_{2-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos(y) - \frac{1}{2} \cos(2) dy \\
&= \frac{1}{2} + \int_0^{2-\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin(y) dy \\
&\quad + \int_{2-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{2} \cos(2) dy \\
&= 1 - \frac{1}{2} \sin 2 - \frac{\pi-2}{2} \cos 2 \\
\Pr\{X = 4Y\} &= 0
\end{aligned}$$

احتمال اخیر صفر است؛ زیرا دو متغیر تصادفی، پیوسته بوده و چگالی احتمالی توأم آنها، شامل هیچ ضربه ای روی خط $X = 4Y$ نیست.
(ب)

$$\Pr\{X \leq 4, Y \leq -2\} = 0$$

$$\Pr\{X + Y \leq 2\} = 1$$

$$\begin{aligned}\Pr\{X = 4Y\} &= \Pr\{X = 4Y = -4\} \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2} \delta\left(\sqrt{(x+4)^2 + (y+1)^2}\right) dx dy = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

پاسخ سوال ۵۳)

$$\begin{aligned}E\{X^n\} &= \int_1^\infty \int_1^\infty x^n(xy-1) \exp(1-xy) dx dy \\ &= \int_1^\infty x^n \int_1^\infty (xy-1) \exp(1-xy) dy dx \\ &= \int_1^\infty x^n (-y) \exp(1-xy) \Big|_{y=1}^{y=\infty} dx \\ &= \int_1^\infty x^n \exp(1-x) dx\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}E\{X\} &= \int_1^\infty x \exp(1-x) dx = 2 \\ E\{X^2\} &= \int_1^\infty x^2 \exp(1-x) dx = 5 \\ \implies \sigma_X^2 &= E\{X^2\} - E^2\{X\} = 1\end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned}\Phi_X(s) &= E\{\exp(sX)\} = \int_1^\infty \int_1^\infty \exp(sx)(xy-1) \exp(xy-1) dx dy \\ &= \int_1^\infty \exp(sx) \int_1^\infty (xy-1) \exp(xy-1) dy dx \\ &= \int_1^\infty \exp(sx)(-y) \exp(1-xy) \Big|_{y=1}^{y=\infty} dx \\ &= \int_1^\infty \exp(sx) \exp(1-x) dx \\ &= \int_1^\infty \exp(1+(s-1)x) dx \\ &= \frac{1}{s-1} \exp(1+(s-1)x) \Big|_1^\infty \\ &= \frac{1}{1-s} \exp(s) \quad , \quad \Re\{s\} < 1\end{aligned}$$

و به دلیل تقارن

$$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \quad , \quad \Phi_X(s) = \Phi_Y(s).$$

$$\Pr\{XY \leq a\} = \begin{cases} \int_1^a \int_1^{\frac{a}{y}} (xy - 1) \exp(1 - xy) dx dy & , \quad a \geq 1 \\ 0 & , \quad a \leq 1 \end{cases}$$

بنابراین برای $a \geq 1$ داریم:

$$\begin{aligned} \Pr\{XY \leq a\} &= \int_1^a \int_1^{\frac{a}{y}} (xy - 1) \exp(1 - xy) dx dy \\ &= \int_1^a (-x) \exp(1 - xy) \Big|_{x=1}^{x=\frac{a}{y}} dy \\ &= \int_1^a \exp(1 - y) - \frac{a}{y} \exp(1 - a) dy \\ &= \int_1^a \exp(1 - y) - \frac{a}{y} \exp(1 - a) dy \\ &= 1 - \exp(1 - a) - a \exp(1 - a) \ln a \end{aligned}$$

در نتیجه برای $a \geq 1$:

$$f_{XY}(a) = \begin{cases} (a - 1)e^{1-a} \ln a & , \quad a \geq 1 \\ 0 & , \quad a \leq 1 \end{cases}.$$

$$\Pr\{\max\{X, Y\} \leq a\} = \Pr\{X \leq a, Y \leq a\}.$$

برای $a \leq 1$ احتمال فوق برابر صفر است و برای $a \geq 1$ داریم:

$$\begin{aligned} \Pr\{X \leq a, Y \leq a\} &= \int_1^a \int_1^a (xy - 1) \exp(1 - xy) dx dy \\ &= \int_1^a (-x) \exp(1 - xy) \Big|_1^a dy \\ &= \int_1^a \exp(1 - y) - a \exp(1 - ay) dy \\ &= 1 - 2 \exp(1 - a) + \exp(1 - a^2) \end{aligned}$$

در نتیجه

$$f_{\max\{X,Y\}}(a) = \begin{cases} 2\exp(1-a) - 2a\exp(1-a^2) & , \quad a \geq 1 \\ 0 & , \quad a \leq 1 \end{cases}.$$

پاسخ سوال ۵۴

الف) محتمل زیر چگالی احتمال باید باشد؛ پس:

$$\begin{aligned} \int_{x^2+y^2 \leq 1} \alpha + 2\left(\frac{1}{\pi} - \alpha\right)(x^2 + y^2) dx dy &= 1 \implies \\ \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[\alpha + 2\left(\frac{1}{\pi} - \alpha\right)r^2 \right] r dr d\phi &= 1 \implies \\ \int_0^{2\pi} \frac{\alpha}{2} + 2\left(\frac{1}{\pi} - \alpha\right)\frac{1}{4} d\phi &= 1 \implies \\ 1 &= 1. \end{aligned}$$

در نتیجه، به ازای هر مقدار از α محتمل زیر، واحد خواهد بود. از طرفی، باید چگالی احتمال همواره نامنفی باشد؛ پس:

$$\begin{aligned} \forall x, y \quad , \quad f(x, y) \geq 0 &\iff \min_{x,y} f(x, y) \geq 0 \\ \implies \begin{cases} \alpha + 2\left(\frac{1}{\pi} - \alpha\right) \geq 0 & , \quad \frac{1}{\pi} - \alpha \leq 0 \\ \alpha \geq 0 & , \quad \frac{1}{\pi} - \alpha \geq 0 \end{cases} \\ \implies \begin{cases} \frac{2}{\pi} - \alpha \geq 0 & , \quad \frac{1}{\pi} - \alpha \leq 0 \\ \alpha \geq 0 & , \quad \frac{1}{\pi} - \alpha \geq 0 \end{cases} \\ \implies \begin{cases} \frac{1}{\pi} \leq \alpha \leq \frac{2}{\pi} \\ 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{\pi} \end{cases} \end{aligned}$$

در نتیجه، محدوده‌ی مقادیر مجاز α برابر $[0, \frac{2}{\pi}]$ خواهد بود.

ب) دو متغیر تصادفی X و Y مستقل اند؛ اگر و تنها اگر

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y).$$

از طرفی،

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \alpha + 2\left(\frac{1}{\pi} - \alpha\right)(x^2 + y^2) dy \\ &= \sqrt{1-x^2} \left[\frac{8}{3} \left(\frac{1}{\pi} - \alpha \right) x^2 + \frac{4}{3\pi} + \frac{2}{3}\alpha \right] \quad , \quad |x| \leq 1. \end{aligned}$$

به دلیل تقارن،

$$f_Y(y) = \sqrt{1-y^2} \left[\frac{8}{3} \left(\frac{1}{\pi} - \alpha \right) y^2 + \frac{4}{3\pi} + \frac{2}{3}\alpha \right] \quad , \quad |y| \leq 1$$

در نتیجه به ازای هر مقدار α داریم $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$.

برای تمییز ناهمبستگی، به دلیل تقارن مرکزی،

$$E\{X\} = E\{Y\} = 0.$$

از طرفی

$$E\{XY\} = \int_{x^2+y^2 \leq 1} xy[\alpha + 2(\frac{1}{\pi} - \alpha)(x^2 + y^2)] dx dy = 0$$

پس این دو متغیر تصادفی همواره ناهمبسته اند.

پ) اگر $a = b = 0$ ، در این صورت $\Pr\{aX + bY \geq 0\} = 1$. در غیر این صورت، به دلیل تقارن دایروی یکالی احتمال خواهیم داشت:

$$\Pr\{aX + bY \geq 0\} = \Pr\{X \geq 0\} = \frac{1}{2}$$

همچنین

$$\begin{aligned} \Pr\{XY \geq 0\} &= \Pr\{X \geq 0, Y \geq 0 \text{ or } X \leq 0, Y \leq 0\} \\ &= \Pr\{X \geq 0, Y \geq 0\} + \Pr\{X \leq 0, Y \leq 0\} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

تعریف ضریب همبستگی چنین است:

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

که در این سوال، با توجه به $Y = X^2$ خواهیم داشت:

$$\text{cov}(X, Y) = E(X^3) - E(X)E(X^2).$$

از طرفی

$$\begin{aligned} E(X^n) &= \sum_x x^n p(X=x) \\ &= (-1)^n \times 0.3 + (0)^n \times 0.4 + (1)^n \times 0.3 \\ &= 0.3[1 + (-1)^n] \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} E(X^3) &= E(X) = 0 \\ E(X^2) &= 0.6 \end{aligned}$$

پس خواهیم داشت

$$\text{cov}(X, Y) = 0.$$

از طرفی، برای محاسبه σ_X^2 و σ_Y^2 داریم:

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= E(X^2) - E^2(X) \\ &= 0.6 - 0^2 = 0.6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_Y^2 &= E(Y^2) - E^2(Y) \\ &= E(X^4) - E^2(X^2) \\ &= 0.6 - (0.6)^2 = 0.24 \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\rho_{X,Y} = \frac{0}{\sqrt{0.6 \times 0.24}} = 0.$$

کوئیز ۱۸)

از آنجا که pmf نرمالیزه است، باید داشته باشیم

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} p(a_n) + p(b_n) &= 1 \implies \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2k}{(n+2)(n+3)} &= 1 \implies \\ 2k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} &= 1 \implies k = 1\end{aligned}$$

گزینه ا

کوئیز ۹

pdf به طور خودکار نرمالیزه شده است. پس

$$\begin{aligned}E\{X\} &= \int_0^{\frac{1}{c}} 2c^2 x^2 dx = \frac{2}{3c} \\ E\{X^2\} &= \int_0^{\frac{1}{c}} 2c^2 x^3 dx = \frac{1}{2c^2} \\ \sigma_X^2 &= E\{X^2\} - E^2\{X\} = \frac{1}{18c^2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

در نتیجه $c = \frac{1}{3}$.

سوال امتیازی

$$\Pr\{|X| > 3\} = \Pr\{X^2 > 9\} < \frac{\mathbb{E}\{X^2\}}{9} = \frac{4}{9}$$

کوئیز ۱۰ X می تواند مقدار ۰ و ۱ و Y می تواند مقدار ۰، ۲، ۴ و ۶ را اختیار کند. در نتیجه

$$\begin{aligned}\Pr\{X = 2Y\} &= \Pr\{X = 2Y = 0\} + \Pr\{X = 2Y = 1\} \\ &= \Pr\{X = 0, Y = 0\} + \Pr\{X = 1, Y = \frac{1}{2}\} \\ &= \Pr\{i < 4, i \in \{1, 3, 5\}\} + 0 \\ &= \Pr\{i \in \{1, 3\}\} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

فصل ۵

احتمال شرطی در متغیرهای تصادفی

سوال ۱) پیشامد های A و B را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$A =$ پیشامد رو آمدن دو خط در سه پرتاب اول (و شیر یا خط آمدن پرتاب دیگر)

$B =$ پیشامد رو آمدن سه خط در سه پرتاب اول

الف) اگر متغیر تصادفی مورد نظر X باشد، مطلوب است

$$p(X = x|B) = \frac{p(X = x, B)}{p(B)}$$

می دانیم

$$p(B) = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

هم چنین

$$\begin{aligned} p(X = x, B) &= \Pr\{x \text{ شیر در } 10 \text{ پرتاب و سه خط در سه پرتاب اول}\} \\ &= \binom{7}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{10}, \quad 0 \leq x \leq 7 \end{aligned}$$

بنابراین

$$p(X = x|B) = \binom{7}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^7, \quad 0 \leq x \leq 7$$

ب) مشابه قسمت قبل، مطلوب است

$$\begin{aligned} p(X = x|A \cup B) &= \frac{p([X = x] \cap [A \cup B])}{p(A \cup B)} \\ &= \frac{p(\{[X = x] \cap A\} \cup \{[X = x] \cap B\})}{p(A) + p(B)} \\ &= \frac{p([X = x] \cap A) + p([X = x] \cap B)}{p(A) + p(B)} \end{aligned}$$

با توجه به بخش قبل

$$p(X = x, B) = \binom{7}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{10}, \quad 0 \leq x \leq 7$$

همچنین

$$p(A) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

9

$$\begin{aligned} p(X = x, A) &= \Pr\{\text{رو آمدن دو خط و یک شیر در سه پرتاب اول و رو آمدن } x - 1 \text{ شیر در } V \text{ پرتاب بعدی}\} \\ &= \binom{3}{1} \binom{7}{x-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{10}, \quad 1 \leq x \leq 8 \end{aligned}$$

بنابراین

$$p(X = x|A \cup B) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^9, & x = 0 \\ \left\{ \binom{7}{x} + \binom{3}{1} \binom{7}{x-1} \right\} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9, & 1 \leq x \leq 7 \\ 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9, & x = 8 \end{cases}$$

سوال ۲) الف) می دانیم

$$p(X = x, Y = y) = p(X = x)p(Y = y|X = x)$$

چون احتمالاتی از جنس $p(Y = y|X = x)$ را می توان از روی کانال استخراج کرد، در نتیجه خواهیم داشت

$$p(X = 0, Y = 0) = q(1 - p)$$

$$p(X = 0, Y = 1) = qp$$

$$p(X = 1, Y = 0) = (1 - q)p$$

$$p(X = 1, Y = 1) = (1 - q)(1 - p)$$

(ب)

$$p(X \neq Y) = p(X = 0, Y = 1) + p(X = 1, Y = 0) = p$$

بنابر این احتمال خطا بر حسب توزیع ورودی، مقدار ثابتی است و این امر شعور را به علت تقارن خطای کانال است. به این کانال در تئوری اطلاعات، کانال باینری متقارن (Binary Symmetric Channel) گفته می شود.

سوال ۳ به سادگی می توان به کمک انتگرال گیری جزء به جزء نتیجه گرفت

$$E\{X\} = \int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

همچنین به ازای $x > a$

$$\begin{aligned} \Pr\{X|X > a\} &= \Pr\{X < x|X > a\} \\ &= \frac{\Pr\{a < X < x\}}{\Pr\{X > a\}} \\ &= \frac{e^{-\lambda a} - e^{-\lambda x}}{e^{-\lambda a}} \\ &= 1 - e^{\lambda a - \lambda x} \end{aligned}$$

بنابر این

$$p(X|X > a) = \lambda e^{-\lambda(x-a)}$$

(با ترسیم،) دیده می شود که این توزیع، انتقال یافته ی توزیع نمایی به اندازه ی a به راست است؛ در نتیجه مقدار میانگین آن هم به همین اندازه افزایش خواهد داشت و اثبات کامل است (می توان مشابها از روی انتگرال جزء به جزء نیز به این نتیجه رسید).

سوال ۴ طبق تعریف

$$\Pr\{X = 0\} = F(0) - F(0^-) = \frac{1}{2}$$

$$\Pr\{X = 1\} = F(1) - F(1^-) = \frac{1}{4}$$

تابع توزیع داده شده در سوال، دارای دو ضربه در ۰ و ۱ و یک مقدار یکنواخت $\frac{1}{4}$ در بازه ی $(0, 1)$ خواهد بود؛ در نتیجه با حذف این دو ضربه، توزیع شرطی، یکنواخت بین ۰ و ۱ خواهد بود.

سوال ۱)

بنا به تعریف و خواص چگالی های احتمال:

$$\begin{aligned}f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy \\E\{X\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{XY}(x, y) dx dy \\E\{XY\} &= \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{XY}(x, y) dx dy\end{aligned}$$

(الف)

$$\begin{aligned}f_X(x) &= \int \frac{1}{\pi} e^{-x^2 - y^2} dy \\&= \int \frac{1}{\pi} e^{-x^2} e^{-y^2} dy \\&= \frac{1}{\pi} e^{-x^2} \int e^{-y^2} dy \\&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int e^{-y^2} dy \\&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}\end{aligned}$$

$$E\{X\} = \int \frac{x}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx = 0$$

زیرا $\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ یک تابع فرد، روی اعداد حقیقی است.

$$\begin{aligned}E\{XY\} &= \iint xy \frac{1}{\pi} e^{-x^2 - y^2} dx dy \\&= \iint xy \frac{1}{\pi} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy \\&= \frac{1}{\pi} \int x e^{-x^2} dx \int y e^{-y^2} dy = 0\end{aligned}$$

(ب)

$$f_X(x) = \int_{|x-1|+|y-1|<1} \frac{3}{2} (1 - |x-1| - |y-1|) dy$$

با تغییر متغیر $y \rightarrow y + 1$ می توان نوشت:

$$f_X(x) = \int_{|x-1|+|y|<1} \frac{3}{2}(1-|x-1|-|y|)dy$$

از آنجا که ناحیه $|x-1|+|y|<1$ و تابع $\frac{3}{2}(1-|x-1|-|y|)$ هر دو نسبت به y زوج هستند، می توان انتگرال را تنها برای $y > 0$ حساب نموده و مقدار آن را دو برابر کرد؛ به عبارت دیگر:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= 2 \int_{|x-1|+|y|<1, y>0} \frac{3}{2}(1-|x-1|-y)dy \\ &= 3 \int_{y=0}^{1-|x-1|} 1-|x-1|-y dy \\ &= 3(1-|x-1|)y - 3\frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{1-|x-1|} \\ &= \frac{3}{2}(1-|x-1|)^2 \quad , \quad 0 < x < 2 \end{aligned}$$

بنابراین

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1-|x-1|)^2 & , \quad 0 < x < 2 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

دو روش برای مناسبه امید ریاضی X وجود دارد. روش اول، روش مستقیم انتگرال گیری است. روش دوم این است که توجه کنیم که چگالی احتمال X حول $x = 1$ متقارن است. به سادگی می توان گفت که امید ریاضی X باید برابر ۱ باشد.

$$\begin{aligned} E\{XY\} &= \int_{|x-1|+|y-1|<1} xy \frac{3}{2}(1-|x-1|-|y-1|)dxdy \\ &= \int_{|u|+|w|<1} (u+1)(w+1) \frac{3}{2}(1-|u|-|w|)dudw \\ &= \int_{|u|+|w|<1} uw \frac{3}{2}(1-|u|-|w|)dudw \\ &\quad + \int_{|u|+|w|<1} u \frac{3}{2}(1-|u|-|w|)dudw \\ &\quad + \int_{|u|+|w|<1} w \frac{3}{2}(1-|u|-|w|)dudw \\ &\quad + \int_{|u|+|w|<1} \frac{3}{2}(1-|u|-|w|)dudw \end{aligned}$$

از ۴ انتگرال آخر، سه انتگرال اول برابر صفرند زیرا تابع تحت انتگرال نسبت به u و w فرد بوده و بازه انتگرال گیری نیز متقارن است. در این صورت:

$$\begin{aligned} E\{XY\} &= \int_{|u|+|w|<1} \frac{3}{2}(1-|u|-|w|)dudw \\ &= 4 \int_{|u|+|w|<1, u>0, w>0} \frac{3}{2}(1-|u|-|w|)dudw \\ &= 6 \int_{u+w<1, u>0, w>0} (1-u-w)dudw \\ &= 6 \int_0^1 \int_0^{1-w} (1-u-w)dudw \\ &= 6 \int_0^1 (1-w)u - \frac{u^2}{2} \Big|_0^{1-w} dw \\ &= 3 \int_0^1 (1-w)^2 dw = 1 \end{aligned}$$

(ب)

$$f_X(x) = \int_x^1 e^{1-x} dy = (1-x)e^{1-x}$$

بنابراین

$$f_X(x) = \begin{cases} (1-x)e^{1-x} & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

برای محاسبه امید ریاضی:

$$\begin{aligned} E\{X\} &= \int_0^1 x(1-x)e^{1-x} dx \\ &= \int_0^1 u(1-u)e^u du \\ &= \int_0^1 (u-u^2)e^u du \end{aligned}$$

برای محاسبه انتگرال فوق به روش جزء به جزء، ابتدا مشتقات متوالی $u-u^2$ و سپس انتگرال های متوالی e^u را محاسبه کرده و با علامت های مثبت و منفی متناوباً در هم ضرب می کنیم؛ به عبارت دیگر: بنابراین

$$\begin{array}{rcl}
 u - u^2 & \xrightarrow{+} & e^u \\
 1 - 2u & \xrightarrow{-} & e^u \\
 -2 & \xrightarrow{+} & e^u \\
 0 & \xrightarrow{+} & e^u
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 E\{X\} &= \int_0^1 (u - u^2) e^u du \\
 &= (u - u^2)e^u - (1 - 2u)e^u + (-2)e^u \Big|_0^1 = 3 - e
 \end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned}
 E\{XY\} &= \int_0^1 \int_x^1 xye^{1-x} dy dx \\
 &= \int_0^1 x(1 - \frac{x^2}{2})e^{1-x} dx = 6 - 2e
 \end{aligned}$$

ت) X و Y دو متغیر تصادفی گسسته (با مقادیر صحیح) اند و pmf آنها به صورت زیر است:

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{16} & , \quad x^2 + y^2 \leq 10, \quad x \geq y \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

جدول pmf به صورت زیر است ($p = 21$):

		Y						
		-3	-2	-1	0	1	2	3
X	-3							
	-2		p					
	-1	p	p	p				
	0	p	p	p	p			
	1	p	p	p	p	p		
	2		p	p	p	p	p	
	3			p	p	p		

در این صورت:

$$\Pr\{X = x\} = \begin{cases} \frac{1}{21} & , \quad x = -2 \\ \frac{1}{7} & , \quad x = -1 \\ \frac{4}{21} & , \quad x = 0 \\ \frac{5}{21} & , \quad x = 1 \\ \frac{5}{21} & , \quad x = 2 \\ \frac{1}{7} & , \quad x = 3 \end{cases}$$

همچنین

$$E\{X\} = \sum_x x \cdot \Pr\{X = x\} = \frac{13}{21}$$

$$E\{XY\} = \sum_{x,y} xy \Pr\{X = x, Y = y\} = \frac{5}{21}$$

سوال ۲ الف) به وضوح

$$\mu_X = E\{X\} = p_3 + p_4$$

$$\mu_Y = E\{Y\} = p_2 + p_4$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= E\{(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\} \\ &= E\{XY\} - \mu_X \mu_Y \\ &= p_4 - (p_2 + p_4)(p_3 + p_4) \end{aligned}$$

در نتیجه برای صفر بودن کوواریانس باید داشته باشیم $p_4 = (p_2 + p_4)(p_3 + p_4)$.

ب) شرط همبستگی که در قسمت قبلی به دست آمد. برای استقلال باید داشته باشیم:

$$p_1 = (p_1 + p_3)(p_1 + p_2)$$

$$p_2 = (p_1 + p_2)(p_2 + p_4)$$

$$p_3 = (p_1 + p_3)(p_3 + p_4)$$

$$p_4 = (p_2 + p_4)(p_3 + p_4)$$

نکته ایناست که

۱. از معادله ی ۴، با کم کردن $p_2 + p_4$ به معادله ی ۲ می رسیم.

۲. از معادله ی ۴، با کم کردن $p_3 + p_4$ به معادله ی ۳ می رسیم.

۳. از جمع معادله های ۲، ۳ و ۴ به معادله ی ۱ می رسیم.

بنابراین در این سوال، ناهمبستگی و استقلال معادله ها.

سوال ۳ الف) به سادگی و با انتگرال گیری می توان نتیجه گرفت:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < y < 1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در نتیجه

$$E\{X\} = E\{Y\} = \frac{1}{2}$$

هم چنین می دانیم

$$\begin{aligned} E\{XY\} &= \int_0^1 \int_0^1 xy + \alpha xy \sin[2\pi(x+y)] dx dy \\ &= \frac{1}{4} + \alpha \int_0^1 \int_0^1 xy \sin[2\pi(x+y)] dx dy \\ &= \frac{1}{4} + \alpha \int_0^1 y \int_0^1 x \sin[2\pi(x+y)] dx dy \end{aligned}$$

هم چنین

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \sin[2\pi(x+y)] dx &= \left[-\frac{x}{2\pi} \cos[2\pi(x+y)] + \frac{1}{4\pi^2} \sin[2\pi(x+y)] \right]_{x=0}^{x=1} \\ &= -\frac{\cos 2\pi y}{2\pi} \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} E\{XY\} &= \frac{1}{4} - \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 y \cos 2\pi y dy \\ &= \frac{1}{4} - \frac{\alpha}{2\pi} \left[\frac{y \sin 2\pi y}{2\pi} + \frac{\cos 2\pi y}{4\pi^2} \right]_{y=0}^{y=1} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

از آنجا که همواره $E\{XY\} = E\{X\}E\{Y\}$ ، در نتیجه همواره دو متغیر تصادفی X و Y ناهمبسته هستند.

ب) به سادگی دیده می شود که

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \iff \alpha = 0$$

سوال ۴ الف) با توجه به اینکه $\Pr\{XY > 1\} = 0$ ، برای $u < 1$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \Pr\{XY < u\} &= \Pr\left\{X < \frac{u}{Y}\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Pr\left\{X < \frac{u}{y} | Y = y\right\} f_Y(y) dy \\ &= \int_0^1 \Pr\left\{X < \frac{u}{y} | Y = y\right\} dy \\ &= \int_0^u \Pr\left\{X < \frac{u}{y}\right\} dy \\ &\quad + \int_u^1 \Pr\left\{X < \frac{u}{y}\right\} dy \\ &= u + \int_u^1 \frac{u}{y} dy \\ &= u - u \ln u \end{aligned}$$

بنابراین

$$f_{XY}(u) = \frac{d}{du} F_{XY}(u) = \begin{cases} -\ln u & , \quad 0 \leq u < 1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

ب) ابتدا، می دانیم

$$\Pr\{X + Y < 0\} = 1 - \Pr\{X + Y < 2\} = 0$$

بنابر این با فرض $0 < u < 2$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\Pr\{X + Y < u\} &= \Pr\{X < u - Y\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Pr\{X < u - y | Y = y\} f_Y(y) dy \\ &= \int_0^1 \Pr\{X < u - y | Y = y\} dy\end{aligned}$$

به ازای $u < 1$:

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \Pr\{X < u - y | Y = y\} dy \\ &= \int_0^u \Pr\{X < u - y | Y = y\} dy \\ &= \int_0^u u - y dy \\ &= \frac{u^2}{2}\end{aligned}$$

به ازای $u > 1$:

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \Pr\{X < u - y | Y = y\} dy \\ &= \int_{u-1}^1 \Pr\{X < u - y | Y = y\} dy \\ &+ \int_0^{u-1} \Pr\{X < u - y | Y = y\} dy \\ &= \int_{u-1}^1 u - y dy \\ &+ u - 1 \\ &= u(2 - u) - \frac{1}{2} + \frac{(u - 1)^2}{2} + u - 1 \\ &= 2u - \frac{u^2}{2}\end{aligned}$$

بنابر این

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad 0 < x < 1 \\ 2 - x & , \quad 1 \leq x < 2 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

پ) به ازای $u > 0$

$$\begin{aligned}\Pr\left\{\frac{X}{Y} < u\right\} &= \Pr\{X < uY\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Pr\{X < uy|Y = y\} f_Y(y) dy \\ &= \int_0^1 \Pr\{X < uy|Y = y\} dy\end{aligned}$$

به ازای $u < 1$ با اندکی محاسبات

$$\Pr\left\{\frac{X}{Y} < u\right\} = \frac{u}{2}$$

به ازای $u > 1$ با اندکی محاسبات بیشتر

$$\Pr\left\{\frac{X}{Y} < u\right\} = 1 - \frac{1}{2u}$$

بنابراین

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \quad 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2x^2} & , \quad 1 \leq x \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

ت) با فرض $0 < u < 1$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\Pr\{\max\{X, Y\} < u\} &= \Pr\{X < u, Y < u\} \\ &= \Pr\{X < u\} \Pr\{Y < u\} = u^2\end{aligned}$$

بنابراین

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

ث) با فرض $0 < u < 1$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\Pr\{\min\{X, Y\} < u\} &= 1 - \Pr\{\min\{X, Y\} > u\} \\ &= 1 - \Pr\{X > u, Y > u\} \\ &= 1 - \Pr\{X > u\} \Pr\{Y > u\} = 1 - (1 - u)^2\end{aligned}$$

بنابراین

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 2x & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

اکنون اگر متغیرهای تصادفی X و Y ، نمایی با پارامتر ۱ باشند، در این صورت با فرض $u > 0$

(ب)

$$\begin{aligned} \Pr \{X + Y < u\} &= \Pr \{X < u - Y\} \\ &= \int_0^\infty e^{-y} \Pr \{X < u - y\} dy \\ &= \int_0^u e^{-y} \Pr \{X < u - y\} dy \\ &= \int_0^u e^{-y} (1 - e^{y-u}) dy \\ &= \int_0^u e^{-y} - e^{-u} dy \\ &= 1 - e^{-u} - ue^{-u} \end{aligned}$$

در نتیجه

$$f(x) = xe^{-x} \quad , \quad x > 0$$

(پ)

$$\begin{aligned} \Pr \left\{ \frac{X}{Y} < u \right\} &= \Pr \{X < uY\} \\ &= \int_0^\infty e^{-y} \Pr \{X < uy\} dy \\ &= \int_0^\infty e^{-y} (1 - e^{-uy}) dy \\ &= \int_0^\infty e^{-y} - e^{-(1+u)y} dy \\ &= 1 - \frac{1}{u+1} \end{aligned}$$

در نتیجه

$$f(u) = \frac{1}{(u+1)^2} \quad , \quad u > 0$$

سوال ۱)

$$\begin{aligned}
 F_X(x|X < 1) &= \Pr\{X \leq x|X < 1\} \\
 &= \frac{\Pr\{X \leq x, x < 1\}}{\Pr\{X < 1\}} \\
 &= \begin{cases} \frac{\Pr\{X \leq x\}}{\Pr\{X < 1\}} & , \quad 0 < x < 1 \\ \frac{\Pr\{X < 1\}}{\Pr\{X < 1\}} & , \quad x \geq 1 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} & , \quad 0 < x < 1 \\ 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} x & , \quad 0 < x < 1 \\ 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned}
 F_X(x|X > 1) &= \Pr\{X \leq x|X > 1\} \\
 &= \frac{\Pr\{X \leq x, x > 1\}}{\Pr\{X > 1\}} \\
 &= \begin{cases} 0 & , \quad 0 < x < 1 \\ \frac{\Pr\{1 < X \leq x\}}{\Pr\{X > 1\}} & , \quad x \geq 1 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 0 & , \quad 0 < x < 1 \\ \frac{\frac{x-1}{2}}{\frac{1}{2}} & , \quad x \geq 1 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 0 & , \quad 0 < x < 1 \\ x - 1 & , \quad 1 < x < 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
 f_X(x|X > 1) &= \frac{d}{dx} F_X(x|X > 1) \\
 &= \begin{cases} 1 & , \quad 1 < x < 2 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}
 \end{aligned}$$

بسادگی از محاسبات (و همچنین شعور) می توان نتیجه گرفت که چون X دارای توزیع یکنواخت بین ۰ و ۲ است، $X|0.5 < X < 1.5$ دارای توزیع یکنواخت بین ۰.۵ و ۱.۵ خواهد بود. بنابراین واضح است که مقدار متوسط این متغیر تصادفی برابر خواهد بود.

سوال ۲) توزیع $X|X > a$ عبا، تست از

$$\begin{aligned}
 F(x|X > a) &= \Pr\{X \leq x|X > a\} \\
 &= \frac{\Pr\{X \leq x, X > a\}}{\Pr\{X > a\}} \\
 &= \begin{cases} \frac{\Pr\{X \leq x, X > a\}}{\Pr\{X > a\}} & , \quad x > a \\ 0 & , \quad x < a \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{e^{-\lambda a} - e^{-\lambda x}}{e^{-\lambda a}} & , \quad x > a \\ 0 & , \quad x < a \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 1 - e^{-\lambda(x-a)} & , \quad x > a \\ 0 & , \quad x < a \end{cases}
 \end{aligned}$$

بنابر این

$$f(x|X > a) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-a)} & , \quad x > a \\ 0 & , \quad x < a \end{cases}$$

بنابر این

$$\begin{aligned}
 E\{X|X > a\} &= \int x f(X|X > a) dx \\
 &= \int_a^\infty \lambda x e^{-\lambda(x-a)} dx \\
 &= \int_a^\infty \lambda(x - a + a) e^{-\lambda(x-a)} dx \\
 &= \int_0^\infty \lambda(u + a) e^{-\lambda u} du \\
 &= \int_0^\infty (\lambda u + \lambda a) e^{-\lambda u} du \\
 &= \int_0^\infty \lambda u e^{-\lambda u} du + \int_0^\infty \lambda a e^{-\lambda u} du \\
 &= \frac{1}{\lambda} + a
 \end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned} E\{X\} &= \int x f(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

این نشان می دهد

$$E\{X|X > a\} = E\{X\} + a$$

که همان خاصیت بی حافظه بودن متغیرهای نمایی است؛ به این معنا که تفاوتی نمیکنند این متغیر از چه لحظه ای به بعد مشاهده شود. از هر لحظه ای به بعد، معادل با مشاهده آن در لحظه صفر خواهد بود.

سوال ۳) الف) ابتدا توزیع $X|X \geq 4$ را می یابیم. بدین منظور؛

$$\begin{aligned} p(x|X \geq 4) &= \frac{\Pr\{X = x, X \geq 4\}}{\Pr\{X \geq 4\}} \\ &= \begin{cases} \frac{\Pr\{X=x\}}{\Pr\{X \geq 4\}} & , \quad x \geq 4 \\ 0 & , \quad x < 4 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{\Pr\{X=x\}}{(1-p)^4} & , \quad x \geq 4 \\ 0 & , \quad x < 4 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{(1-p)^x p}{(1-p)^4} & , \quad x \geq 4 \\ 0 & , \quad x < 4 \end{cases} \\ &= \begin{cases} (1-p)^{x-4} p & , \quad x \geq 4 \\ 0 & , \quad x < 4 \end{cases} \end{aligned}$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned}
E\{X|X \geq 4\} &= \sum_{x=4}^{\infty} x(1-p)^{x-4}p \\
&= \sum_{u+4=4}^{\infty} (u+4)(1-p)^u p \\
&= 4 + \sum_{u=0}^{\infty} u(1-p)^u p \\
&= \frac{1}{p} + 3
\end{aligned}$$

9

$$\begin{aligned}
E\{X^2|X \geq 4\} &= \sum_{x=4}^{\infty} x^2(1-p)^{x-4}p \\
&= \sum_{u+4=4}^{\infty} (u+4)^2(1-p)^u p \\
&= \sum_{u=0}^{\infty} (u^2 + 8u + 16)(1-p)^u p \\
&= 16 + 8\left(\frac{1}{p} - 1\right) + \frac{(1-p)(2-p)}{p^2} \\
&= \frac{16p^2 + 8p(1-p) + (1-p)(2-p)}{p^2} \\
&= \frac{16p^2 + 8p - 8p^2 + p^2 - 3p + 2}{p^2} \\
&= \frac{9p^2 + 5p + 2}{p^2}
\end{aligned}$$

و می توان نوشت

$$\begin{aligned}\text{var}(X|X \geq 4) &= E\{X^2|X \geq 4\} - E^2\{X|X \geq 4\} \\ &= \frac{9p^2 + 5p + 2}{p^2} - \frac{9p^2 + 6p + 1}{p^2} \\ &= \frac{1 - p}{p^2}\end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned}\Pr\{X = x|\text{ } \omega \text{ } \mathcal{J} \text{ } \mathbf{X}\} &= \frac{\Pr\{X = x, X = 0, 2, 4, \dots\}}{\Pr\{X = 0, 2, 4, \dots\}} \\ &= \begin{cases} \frac{\Pr\{X=x\}}{\Pr\{X=0,2,4,\dots\}} & , \quad \mathcal{J} \text{ } \mathbf{X} \\ 0 & , \quad \text{ } \mathbf{X} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{(1-p)^x p}{\sum_{u=0}^{\infty} (1-p)^{2u} p} & , \quad \mathcal{J} \text{ } \mathbf{X} \\ 0 & , \quad \text{ } \mathbf{X} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{(1-p)^x}{\frac{1}{1-(1-p)^2}} & , \quad \mathcal{J} \text{ } \mathbf{X} \\ 0 & , \quad \text{ } \mathbf{X} \end{cases} \\ &= \begin{cases} (1-p)^x - (1-p)^{x+2} & , \quad \mathcal{J} \text{ } \mathbf{X} \\ 0 & , \quad \text{ } \mathbf{X} \end{cases} \\ &= \begin{cases} p(2-p)(1-p)^x & , \quad \mathcal{J} \text{ } \mathbf{X} \\ 0 & , \quad \text{ } \mathbf{X} \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Pr\{Y \geq 3\} &= \int_3^{\infty} f_Y(y) dy \\
 &= \int_3^{\infty} \sum_{x=1}^6 f_{X,Y}(x, y) dy \\
 &= \int_3^{\infty} \sum_{x=1}^6 f_x(x) f_{Y|X}(x, y) dy \\
 &= \int_3^{\infty} \sum_{x=1}^6 \frac{1}{6} f_{Y|X}(x, y) dy \\
 &= \frac{1}{6} \int_3^{\infty} f_{Y|X}(1, y) dy \\
 &\quad + \frac{1}{6} \int_3^{\infty} f_{Y|X}(2, y) dy \\
 &\quad + \frac{1}{6} \int_3^{\infty} f_{Y|X}(3, y) dy \\
 &\quad + \frac{1}{6} \int_3^{\infty} f_{Y|X}(4, y) dy \\
 &\quad + \frac{1}{6} \int_3^{\infty} f_{Y|X}(5, y) dy \\
 &\quad + \frac{1}{6} \int_3^{\infty} f_{Y|X}(6, y) dy \\
 &= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{5} + \frac{3}{6} \right) \\
 &= \frac{23}{120}
 \end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned}
 f_Y(y) &= \sum_x f_{X,Y}(x,y) \\
 &= \sum_x f_x(x) f_{Y|X}(x,y) \\
 &= \frac{1}{6} \sum_{x=1}^6 f_{Y|X}(x,y) \\
 &= \frac{1}{6} \times \begin{cases} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} & , \quad 0 < y < 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} & , \quad 1 < y < 2 \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} & , \quad 2 < y < 3 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} & , \quad 3 < y < 4 \\ \frac{1}{5} + \frac{1}{6} & , \quad 4 < y < 5 \\ \frac{1}{6} & , \quad 5 < y < 6 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{49}{120} & , \quad 0 < y < 1 \\ \frac{29}{120} & , \quad 1 < y < 2 \\ \frac{19}{120} & , \quad 2 < y < 3 \\ \frac{37}{360} & , \quad 3 < y < 4 \\ \frac{11}{180} & , \quad 4 < y < 5 \\ \frac{1}{36} & , \quad 5 < y < 6 \end{cases}
 \end{aligned}$$

بنابر این

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\{Y\} &= \int_0^6 y f_Y(y) dy \\
 &= \dots (!!!) \\
 &= 1.75
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\{Y^2\} &= \int_0^6 y^2 f_Y(y) dy \\
 &= \dots (!!!) \\
 &\approx 5.06
 \end{aligned}$$

بنابر این

$$\text{var}(Y) \approx 2$$

۱۳۲

پاسخ سوال ۵۵)

ابتدا باید $f_X(x|X \geq 1)$ را مناسبه کنیم. برای این منظور داریم:

$$\begin{aligned}\Pr\{X \leq x|X \geq 1\} &= \frac{\Pr\{1 \leq X \leq x\}}{\Pr\{X \geq 1\}} \\ &= \frac{\Pr\{1 \leq X \leq x\}}{\Pr\{X = 1\}} \\ &= \frac{\Pr\{1 \leq X \leq x\}}{\frac{1}{2}} \\ &= \begin{cases} 1 & , \quad x \geq 1 \\ 0 & , \quad x < 1 \end{cases}\end{aligned}$$

در این صورت

$$f_X(x|X \geq 1) = \delta(x - 1)$$

و خواهیم داشت

$$\begin{aligned}E\{X|X \geq 1\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x|X \geq 1) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \delta(x - 1) dx = 1 \\ E\{X^2|X \geq 1\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x|X \geq 1) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \delta(x - 1) dx = 1\end{aligned}$$

بنابراین

$$E\{X|X \geq 1\} = 1 \quad , \quad \sigma^2(X|X \geq 1) = E\{X^2|X \geq 1\} - E^2\{X|X \geq 1\} = 0$$

برای چگالی احتمال زیر، مقادیر $\mathbb{E}\{X|X > 1\}$ و $\sigma_X^2(X|X > 1)$ برای مناسبه‌ی $f(x|X \neq 1)$ داریم

$$\begin{aligned}\Pr\{X \leq x|X \neq 1\} &= \frac{\Pr\{X \leq x, X \neq 1\}}{\Pr\{X \neq 1\}} \\ &= \frac{\Pr\{X \leq x, X \neq 1\}}{\frac{1}{2}} \\ &= \begin{cases} \frac{\Pr\{X < 1\}}{\frac{1}{2}} & , \quad x \geq 1 \\ \frac{\Pr\{X \leq x\}}{\frac{1}{2}} & , \quad x < 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & , \quad x \geq 1 \\ 3x^2 - 2x^3 & , \quad 0 \leq x < 1 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}\end{aligned}$$

در نتیجه

$$f_X(x|X \neq 1) = \begin{cases} 6x - 6x^2 & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

در نهایت، برای مناسبه‌ی $f(x|X < \frac{1}{2})$ چنین می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}\Pr\{X \leq x|X < \frac{1}{2}\} &= \frac{\Pr\{X \leq x, X < \frac{1}{2}\}}{\Pr\{X < \frac{1}{2}\}} \\ &= \begin{cases} \frac{\Pr\{X < \frac{1}{2}\}}{\Pr\{X < \frac{1}{2}\}} & , \quad x \geq \frac{1}{2} \\ \frac{\Pr\{X \leq x\}}{\Pr\{X < \frac{1}{2}\}} & , \quad x < \frac{1}{2} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & , \quad x \geq \frac{1}{2} \\ 6x^2 - 4x^3 & , \quad 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}\end{aligned}$$

پس:

$$f_X(x|X < \frac{1}{2}) = \begin{cases} 12x - 12x^2 & , \quad 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}.$$

پاسخ سوال (۵۶)

(الف)

$$\begin{aligned}
\Pr\{\max\{X, Y\} \leq u | X \leq \tfrac{1}{2}\} &= \Pr\{X \leq u, Y \leq u | X \leq \tfrac{1}{2}\} \\
&= \frac{\Pr\{X \leq u, Y \leq u, X \leq \tfrac{1}{2}\}}{\Pr\{X \leq \tfrac{1}{2}\}} \\
&= \begin{cases} \frac{\Pr\{Y \leq u, X \leq \tfrac{1}{2}\}}{\Pr\{X \leq \tfrac{1}{2}\}} & , \quad u \geq \tfrac{1}{2} \\ \frac{\Pr\{X \leq u, Y \leq u\}}{\Pr\{X \leq \tfrac{1}{2}\}} & , \quad u < \tfrac{1}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

از طرفی

$$\begin{aligned}
\Pr\{X \leq \tfrac{1}{2}\} &= \int_{x^2+y^2 \leq 1, x \leq \frac{1}{2}} \frac{1}{\pi} dx dy \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{x^2+y^2 \leq 1, x \leq \frac{1}{2}} dx dy \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4\pi} + \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned}
\Pr\{X \leq \tfrac{1}{2}, Y \leq u\} &= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\min\{\sqrt{1-x^2}, u\}} \frac{1}{\pi} dy dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{x \in (-1, \frac{1}{2}), u \geq -\sqrt{1-x^2}} \min\{\sqrt{1-x^2}, u\} + \sqrt{1-x^2} dx \\
&= C_1 + \frac{1}{\pi} \int_{x \in (-1, \frac{1}{2}), u \geq -\sqrt{1-x^2}} \min\{\sqrt{1-x^2}, u\} dx
\end{aligned}$$

که در رابطه بالا، $C_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} dx$ (تعیین مقدار دقیق آن اهمیت ندارد؛ زیرا همانطور که بعداً دیده می‌شود، در مشتق‌گیری حذف خواهد شد.)

با مشتق گیری خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{du} \Pr\{X \leq \frac{1}{2}, Y \leq u\} &= \frac{1}{\pi} \int_{x \in (-1, \frac{1}{2}), -\sqrt{1-x^2} \leq u \leq \sqrt{1-x^2}} dx \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{x \in (-1, \frac{1}{2}), -\sqrt{1-x^2} \leq u} dx & , \quad u \leq 0 \\ \frac{1}{\pi} \int_{x \in (-1, \frac{1}{2}), u \leq \sqrt{1-x^2}} dx & , \quad u \geq 0 \end{cases} \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{x \in (-1, \frac{1}{2}), -\sqrt{1-u^2} < x < \sqrt{1-u^2}} dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \min \left\{ \sqrt{1-u^2}, \frac{1}{2} \right\} + \frac{1}{\pi} \min \{ \sqrt{1-u^2}, 1 \}
 \end{aligned}$$

به طریق مشابه

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{du} \Pr\{X \leq u, Y \leq u\} &= \frac{1}{\pi} \int_{x \in (-1, u), -\sqrt{1-x^2} \leq u \leq \sqrt{1-x^2}} dx \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{x \in (-1, u), -\sqrt{1-x^2} \leq u} dx & , \quad u \leq 0 \\ \frac{1}{\pi} \int_{x \in (-1, u), u \leq \sqrt{1-x^2}} dx & , \quad u \geq 0 \end{cases} \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{x \in (-1, u), -\sqrt{1-u^2} < x < \sqrt{1-u^2}} dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \min \left\{ \sqrt{1-u^2}, u \right\} + \frac{1}{\pi} \min \{ \sqrt{1-u^2}, 1 \}
 \end{aligned}$$

بنابراین

$$f_{\max\{X,Y\}}(u | X \leq \frac{1}{2}) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \min \left\{ \sqrt{1-u^2}, \frac{1}{2} \right\} \\ + \frac{1}{\pi} \min \left\{ \sqrt{1-u^2}, u \right\} \\ + \frac{2}{\pi} \min \{ \sqrt{1-u^2}, 1 \} & , \quad |u| \leq 1 \\ 0 & , \quad |u| > 1 \end{cases}$$

(ب)

$$\begin{aligned}
\Pr\{\sqrt{X^2 + Y^2} \leq u | X + Y \leq 1\} &= \frac{\Pr\{\sqrt{X^2 + Y^2} \leq u, X + Y \leq 1\}}{\Pr\{X + Y \leq 1\}} \\
&= \frac{1}{\frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi}} \Pr\{\sqrt{X^2 + Y^2} \leq u, X + Y \leq 1\} \\
&= \begin{cases} 1 & , \quad u \geq 1 \\ \frac{1}{\frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi}} \left[\left(1 - \frac{1}{\pi} \cos^{-1} \frac{1}{u\sqrt{2}}\right) u^2 + \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{u^2}{2} - \frac{1}{4}} \right] & , \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \leq u < 1 \\ \frac{u^2}{\frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi}} & , \quad 0 \leq u < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & , \quad u \leq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

نتیجه ،،

$$f_{\sqrt{X^2 + Y^2} | X + Y \leq 1}(u) = \begin{cases} \frac{2u}{\frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi}} \left(1 - \frac{1}{\pi} \cos^{-1} \frac{1}{u\sqrt{2}}\right) & , \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \leq u < 1 \\ \frac{2u}{\frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi}} & , \quad 0 \leq u < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & , \quad \text{سایر موارد} \end{cases}$$

نتیجه ،،

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{\sqrt{X^2 + Y^2} | X + Y \leq 1\} &= \int_0^1 u f_{\sqrt{X^2 + Y^2} | X + Y \leq 1}(u) du \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{2u^2}{\frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi}} du \\
&\quad + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{2u^2}{\frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi}} \left(1 - \frac{1}{\pi} \cos^{-1} \frac{1}{u\sqrt{2}}\right) du \\
&= \int_0^1 \frac{2u^2}{\frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi}} du \\
&\quad - \frac{2}{\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 u^2 \cos^{-1} \frac{1}{u\sqrt{2}} du \\
&= \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{9\pi + 6} \ln(1 + \sqrt{2})
\end{aligned}$$

پاسخ سوال (۵۷)

(الف)

$$\begin{aligned}\Pr\{Y \leq 0|X = 1\} &= \int_{-\infty}^0 f(y|X = 1)dy \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{a}{2} \exp(-a|y - 1|)dy \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{a}{2} \exp(a(y - 1))dy = \frac{e^{-a}}{2}\end{aligned}$$

9

$$\begin{aligned}\Pr\{Y \geq 0|X = -1\} &= \int_{-\infty}^0 f(y|X = 1)dy \\ &= \int_0^{\infty} \frac{a}{2} \exp(-a|y + 1|)dy \\ &= \int_0^{\infty} \frac{a}{2} \exp(-a(y + 1))dy = \frac{e^{-a}}{2}\end{aligned}$$

مشاهده می شود که هر دو احتمال، با افزایش مقدار a افت می کنند.

ب) صورت سوال، یک مسئله ی مفابراتی را نشان می دهد که در آن، مقادیر -1 و 1 روی کانال ارسال می شوند و نویزی با چگالی احتمال نمایی دو طرفه، با سیگنال ارسالی جمع می شود. هر چه a بیشتر باشد، واریانس (توان) نویز کاهش می یابد و انتظار می رود که احتمال خطا در آشکارسازی سمبلهای ارسالی در گیرنده نیز کاهش یابد. این امر، با مناسبه ی احتمالهای $\Pr\{Y \leq 0|X = 1\}$ و $\Pr\{Y \geq 0|X = -1\}$ تحقیق شد.

فصل ۶

دنباله‌ی متغیرهای تصادفی