به نام زیبایی
یک سوال از نمونه برداری

سوال ۱)
فرض کنید میخواهیم سیستم پیوسته ای را با پاسخ ضربه ی $h(t)$، ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ شبیه سازی کنیم. می دانیم

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

از آنجا که نمی توان سیستم پیوسته را در دنیای واقعی شبیه سازی کرد (زیرا پیوسته بودن سیگنال ها معادل با اطلاعات بینهایت است)، ناگزیریم شبیه سازی را در حوزه‌ی گسسته انجام دهیم؛ یعنی سیگنال‌های $x(t)$ و $h(t)$ را با نرخ نمونه برداری مناسب R_s نمونه برداری کرده، سیگنال های

$$\hat{x}[n] = x\left(\frac{n}{R_s}\right)$$

$$\hat{h}[n] = h\left(\frac{n}{R_s}\right)$$

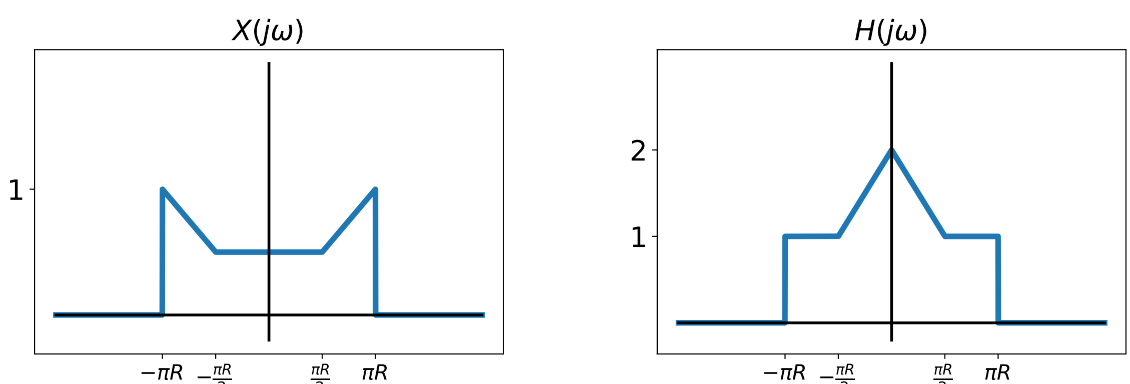
را بسازیم و سپس سیگنال

$$\hat{y}[n] = \hat{x}[n] * \hat{h}[n]$$

را تولید کنیم. در مرحله‌ی آخر، ادعا می کنیم

$$\hat{y}[n] = y\left(\frac{n}{R_s}\right)$$

برای بررسی این ادعا، تبدیل فوریه های سیگنال های $x(t)$ و $h(t)$ را به صورت زیر بگیرید:



الف) تبدیل فوریه های $\hat{x}[n]$ و $\hat{h}[n]$ را ترسیم کنید.
ب) تبدیل فوریه های (گسسته‌ی) $\hat{y}[n]$ و (پیوسته‌ی) $y(t)$ را رسم کنید.
پ) سیگنال آنالوگ $y_c(t)$ را چنان بیابید که تساوی $\hat{y}[n] = y\left(\frac{n}{R_s}\right)$ محقق شود. برای این کار، یک تناوب از تبدیل فوریه‌ی $\hat{y}[n]$ را برگزیده، آن را با ضریب R_s بسط دهید؛ به گونه ای که فرکانس های

π و $-\pi$ به ترتیب به πR_s و $-\pi R_s$ نگاشت شوند. نشان دهید تبدیل فوریه ی $y(t)$ با تبدیل فوریه ی $y_c(t)$ برابر است.

ت) آیا می توان این استدلال را برای حالاتی که فقط یکی از $x(t)$ و $h(t)$ باند محدود باشند به کار برد؟ چرا؟