به نام زیبایی

تمرینات سری هشتم سیگنال ها و سیستم ها

---

**سوال ۱)**

یک سیگنال پیوسته‌ی $x(t)$ با تبدیل فوریه ی $X(j\omega)$ از داخل سیستم نمونه برداری ضربه ای با دوره‌ی نمونه برداری $T$ عبور می کند و سیگنال زیر را به دست می دهد:

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

که $T = ۱۰^{-۴}$ . تحقیق کنید با کدام یک از شرایط زیر (قیدهایی روی $x(t)$ یا $X(j\omega)$)، طبق قضیه‌ی نمونه برداری نایکوییست می توان سیگنال $x(t)$ را از روی $x_p(t)$ به طور کامل بازیابی کرد.

الف) $X(j\omega) = ۰ \quad , \quad |\omega| > ۵۰۰۰\pi$

ب) $X(j\omega) = ۰ \quad , \quad |\omega| > ۱۵۰۰۰\pi$

پ) $\mathfrak{R}\{X(j\omega)\} = ۰ \quad , \quad |\omega| > ۵۰۰۰\pi$

ت) $x(t)$ حقیقی است و $X(j\omega) = ۰ \quad , \quad \omega > ۵۰۰۰\pi$

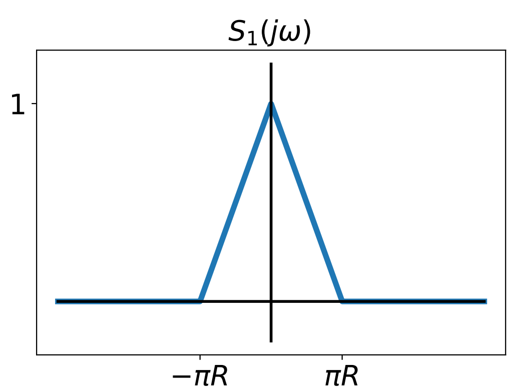
ت) $x(t)$ حقیقی است و $X(j\omega) = ۰ \quad , \quad \omega < -۱۵۰۰۰\pi$

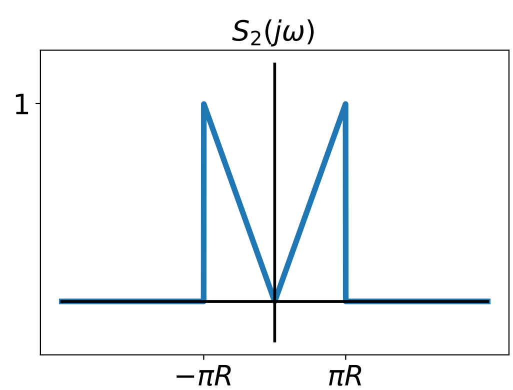
ث) $X(j\omega) * X(j\omega) = ۰ \quad , \quad |\omega| > ۱۵۰۰۰\pi$

ج) $|X(j\omega)| = ۰ \quad , \quad |\omega| > ۵۰۰۰\pi$

**سوال ۲)**

فرض کنید دو سیگنال $s_۱(t)$ و $s_۲(t)$ ، زمان پیوسته، باند محدود و دارای تبدیل فوریه‌های زیر باشند:




سیگنال $y(t) = s_۱(t)e^{j۲\pi(۲R)t} + s_۲(t)e^{j۲\pi(۳R)t}$ را در نظر بگیرید.

الف) تبدیل فوریه ی $y(t)$ را رسم کنید.

ب) حداقل نرخ نمونه برداری را برای برآوردن شرط نایکوییست در مورد سیگنال $y(t)$ به دست آورده و نشان دهید اگر سیگنال $y(t)$ را با نرخ $R$ نمونه برداری کنیم و سیگنال $\hat{y}[n] = y\left(\frac{n}{R}\right)$ را بسازیم، همپوشانی (aliasing) رخ می دهد؛ به گونه ای که نمی توان از روی $\hat{y}[n]$ ، $y(t)$ ، $s_1(t)$ و $s_2(t)$ را بازسازی کرد. برای این کار، تبدیل فوریه ی $y\left(\frac{n}{R}\right)$ را رسم کنید.

پ) اگر فرض کنیم نرخ نمونه برداری به جای $R$، برابر $2R$ است، تبدیل فوریه‌ی $y\left(\frac{n}{2R}\right)$ را رسم کنید.

ت) نشان دهید اگر سیگنال $z(t) = s_1(t)e^{j2\pi(4R)t} + s_2(t)e^{j2\pi(5R)t}$ را با نرخ $2R$ نمونه برداری کنیم و سیگنال $\hat{z}[n] = z\left(\frac{n}{2R}\right)$ را بسازیم، خواهیم داشت:

$$\hat{z}[n] = \hat{y}[n]$$

بنابراین حتی با برآوردن نرخ نایکوییست، الزاما نمی توان سیگنال زمان پیوسته را بازسازی کرد.

**سوال ۳)** (امتیازی)

سیگنال باند محدود $x(t)$ با تبدیل فوریه‌ی $X(j\omega)$ مفروض است؛ به گونه ای که

$$X(j\omega) = 0 \quad , \quad |\omega| > R$$

این سیگنال با نرخ نمونه برداری $R_s$ که $R_s > 2R$، نمونه برداری می شود و سیگنال $\hat{x}[n]$ را می سازد؛ به عبارت دیگر:

$$\hat{x}[n] = x\left(\frac{n}{R_s}\right)$$

رابطه‌ی بین انرژی این دو سیگنال، یعنی

$$E_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

و

$$E_2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

را بیابید.

**سوال ۴)** (امتیازی)

اگر $x[n] = \cos\frac{\pi}{4}n + \phi_0$ که $0 \le \phi_0 < 2\pi$ و $g[n] = x[n]\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-4k]$ ، چه شرط اضافه ای باید روی $\phi_0$ داشته باشیم تا

$$g[n] * \left(\frac{\sin\frac{\pi}{4}n}{\frac{\pi}{4}n}\right) = x[n]$$

؟