

نمونه سوالات

مصطفی ایاز

۲۶ مرداد ۱۴۰۱

فهرست مطالب

۲	۱ مبانی احتمال و جبر مجموعه ها
۸	۲ آزمایش های تکراری
۱۰	۳ متغیرهای تصادفی
۱۳	۴ متغیرهای تصادفی توأم
۱۶	۵ احتمال شرطی در متغیرهای تصادفی
۱۷	۶ دنباله ی متغیرهای تصادفی

فصل ۱

مبانی احتمال و جبر مجموعه ها

سوال ۱) دو کیسه در اختیار داریم. کیسه اول شامل ۲۰ گلوله قرمز و ۳۰ گلوله آبی و دومی شامل ۲۰ گلوله زرد، ۳۰ گلوله آبی و ۵۰ گلوله قرمز است. ابتدا یکی از کیسه ها را به تصادف انتخاب کرده و سپس گلوله ای را از داخل آن به تصادف بر می داریم. با چه احتمالی گلوله انتخاب شده قرمز و از کیسه ی ۲ است؟

سوال ۲) دو کیسه در اختیار داریم. کیسه اول شامل ۲۰ گلوله قرمز و ۳۰ گلوله آبی و دومی شامل ۲۰ گلوله زرد، ۳۰ گلوله آبی و ۵۰ گلوله قرمز است. ابتدا یکی از کیسه ها را به تصادف انتخاب کرده و سپس گلوله ای را از داخل آن به تصادف بر می داریم. اگر گلوله از کیسه ۱ انتخاب شده باشد، با چه احتمالی آبی است؟

سوال ۳) دو کیسه در اختیار داریم. کیسه اول شامل ۲۰ گلوله قرمز و ۳۰ گلوله آبی و دومی شامل ۲۰ گلوله زرد، ۳۰ گلوله آبی و ۵۰ گلوله قرمز است. ابتدا یکی از کیسه ها را به تصادف انتخاب کرده و سپس گلوله ای را از داخل آن به تصادف بر می داریم. اگر گلوله زرد نباشد با چه احتمالی قرمز است؟

سوال ۴) دو کیسه در اختیار داریم. کیسه اول شامل ۲۰ گلوله قرمز و ۳۰ گلوله آبی و دومی

شامل ۲۰ گلوله زرد، ۳۰ گلوله آبی و ۵۰ گلوله قرمز است. ابتدا یکی از کیسه ها را به تصادف انتخاب کرده و سپس گلوله ای را از داخل آن به تصادف بر می داریم. اگر گلوله آبی نباشد، با چه احتمالی از کیسه ی ۲ انتخاب شده است؟

سوال ۵) دو کیسه در اختیار داریم. کیسه اول شامل ۲۰ گلوله قرمز و ۳۰ گلوله آبی و دومی شامل ۲۰ گلوله زرد، ۳۰ گلوله آبی و ۵۰ گلوله قرمز است. ابتدا یکی از کیسه ها را به تصادف انتخاب کرده و سپس گلوله ای را از داخل آن به تصادف بر می داریم. اگر گلوله قرمز یا زرد نباشد، با چه احتمالی از کیسه ۲ انتخاب شده است؟

سوال ۶) استانی دارای دو شهر است. شهر ۱ دارای ۱۲۰ مرد و ۸۰ زن و شهر ۲ دارای ۱۰۰۰ زن و ۸۰۰ مرد است. در شهر ۱، ۵۰ مرد و ۳۰ زن و در شهر ۲، ۱۰۰ مرد و ۱۵۰ زن به بیماری X مبتلا هستند. فردی را از این استان به تصادف انتخاب می کنیم.

الف) با چه احتمالی این فرد، زن سالمی از شهر ۱ است؟

ب) اگر فردی که انتخاب می کنیم بیمار باشد، با چه احتمالی مردی از شهر ۲ است؟

پ) اگر فرد انتخاب شده سالم باشد، احتمال زن بودن او چقدر است؟

سوال ۷) یک سکه سالم را برداشته، آن را سه بار پرتاب می کنیم و نتیجه ی سه بار پرتاب را در نظر می گیریم. اگر رو آمدن سکه را با H و پشت آمدن را با T نمایش دهیم:

الف) فضای نمونه را بنویسید.

ب) این مسئله ی احتمال، چند واقعه ی محتمل دارد؟ (واقعه طبق تعریف یک زیر مجموعه از فضای نمونه است).

پ) طبق تعریف کلاسیک احتمال، واقعه ی اینکه در پرتاب اول و دوم سکه نتیجه یکسان باشد (در پرتاب سوم نتیجه دلخواه است)، با چه احتمالی رخ می دهد؟

سوال ۸) دو مجموعه ی $A = \{1, 4, 5\}$ و $B = \{2, 3, 4\}$ را در نظر بگیرید. مجموعه های

زیر را به دست آورید.

الف) $A \cap B$

ب) $A - B$

پ) $A \times B$ (ضرب دکارتی)

ت) اگر $C = \{2, 5, 6\}$ ، با مناسبی مجموعه های $(A \cup B) \cap C$ و $(A \cap C) \cup (B \cap C)$ نشان دهید:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

سوال ۹) به کمک تعریف اصولی احتمال (و با بهره گیری از اصول کولموگوروف)، برای هر دو مجموعه A و B نتیجه بگیرید:

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$$

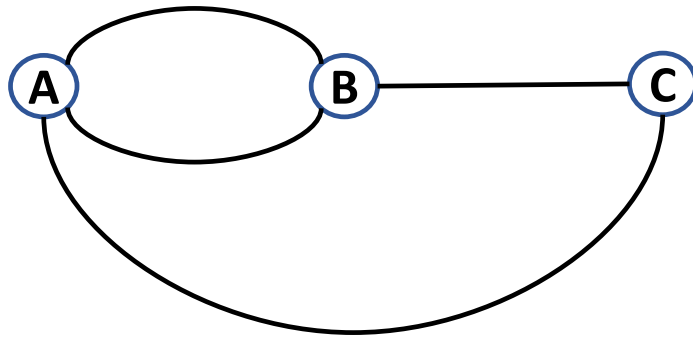
سوال ۱۰) در یک کیسه، ۵ گلوله ی آبی و ۳ گلوله ی سفید وجود دارد. دو عدد گلوله بر می داریم. احتمال این را که یکی از گلوله ها آبی و دیگری سفید باشد در حالت

الف) با جایگزاری

ب) بدون جایگزاری

به دست آورید (جایگزاری حالتی است که گلوله ای را پس از بیرون آوردن از کیسه و مشاهده ی رنگ آن، به کیسه بازگردانیم).

سوال ۱۱) در نقشه ی زیر، از شهر A به شهر B دو مسیر و از B به C یا از A به C یک مسیر وجود دارد. اگر احتمال قطع شدن هر مسیر مستقل از سایرین برابر p باشد، احتمال آن که شخصی بتواند از شهر A به C برود چقدر است؟



سوال ۱۲) در مبحث مدولاسیون دیجیتال، می‌توان هر سمبل مخابراتی را با تعدادی بیت کد نموده و پس از شکل دهی پالس روی کانال ارسال کرد. فرض کنید یک سمبل مخابراتی از n بیت تشکیل شده باشد. به طور مثال

$$S_k \equiv (1010001101)_2$$

که k اندیس سمبل است و در اینجا سمبل از ۱۰ بیت تشکیل شده است. این سمبل از یک کانال مخابراتی ارسال و در انتهای کانال دریافت می‌شود. اگر احتمال خرابی هر بیت مستقل از سایرین برابر p باشد، با چه احتمالی سمبل به درستی آشکار نمی‌شود؟

سوال ۱۳) دو تاس را پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه دو عدد رو آمده نسبت به هم اول باشند چقدر است؟

از یک مجموعه‌ی n عضوی، یک زیر مجموعه به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که این زیر مجموعه k عضوی باشد چقدر است؟

سوال ۱۴) به کمک سوال قبل ثابت کنید

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

سوال ۱۵) یک سکه‌ی سالم و یک تاس سالم را با هم پرتاب می‌کنیم.

الف) احتمال اینکه سکه به رو بیفتد و تاس عدد فرد شود را به دست آورید.

ب) احتمال اینکه سکه به رو بیفتد یا تاس عدد فرد شود را به دست آورید (هر دو باهم نیز می توانند رخ دهند!)

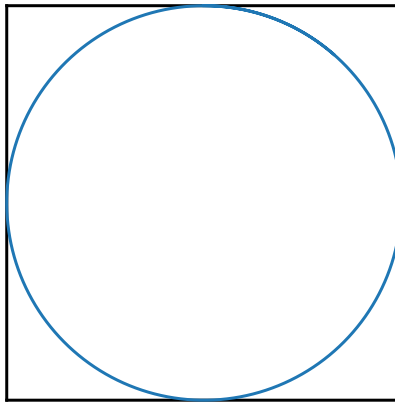
سوال ۱۶) یک تاس را پرتاب می کنیم. اگر مضرب ۳ ظاهر شد، نتیجه را یادداشت می کنیم و در غیر این صورت سکه ای را می اندازیم و نتیجه ی سکه (پشت یا رو) را می نویسیم.

الف) فضای شذنی این مسئله را بیابید.

ب) با چه احتمالی واقعه ی رو آمدن سکه اتفاق می افتد؟

پ) احتمال واقعه ی اینکه تاس عدد ۱ بیاید یا سکه به پشت ظاهر شود را به دست آورید.

سوال ۱۷) نقطه ای را از داخل مربع زیر بر می گزینیم (طول ضلع مربع برابر ۲ است). احتمال اینکه:



الف) نقطه، داخل دایره ی واحد (نشان داده شده در شکل) بیفتد چقدر است؟

ب) نقطه، روی یکی از دو قطر مربع بیفتد چقدر است؟

پ) فاصله ی نقطه از هر یک از رأس های مربع بیش از $\frac{1}{5}$ باشد چقدر است؟

سوال ۱۸) از بین اعداد سه رقمی ای که با ترکیب رقم‌های ۰، ۱ و ۲ می‌توان سافت (تک‌دار می‌باشد)؛

الف) چند عدد به ۳ بخش پذیرند؟

ب) اگر عددی را به تصادف برگزینیم، با چه احتمالی زوج خواهد بود؟

سوال ۱۹) در یک جامعه‌ی آماری، نسبت جمعیت زنان بزرگسال، مردان بزرگسال و کودکان به کل جمعیت جامعه به ترتیب برابر 0.37، 0.43 و 0.2 است. در این جامعه، 0.15 مردان بزرگسال و 0.25 زنان بزرگسال به نوعی بیماری مبتلا شده‌اند. فرد بزرگسالی را به تصادف از این جامعه انتخاب می‌کنیم، احتمال بیمار بودن او چقدر است؟

سوال ۲۰) فرض کنید مجموعه‌های B و C مستقل و دارای احتمال مثبت باشند. در چه حالتی داریم

$$P(A|B \cap C) = P(A|B)P(A|C)$$

؟

سوال ۲۱) (کران بالا و پایین برای احتمال اجتماع) برای هر دو مجموعه‌ی A و B ثابت کنید:

$$P(A) + P(B) - \frac{1}{4 \max\{1 - P(A), 1 - P(B)\}} \leq P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

سوال ۲۲) جعبه‌ی ۱ حاوی ۱۰۰۰ لامپ است که ۱۰ درصد آنها خراب هستند. جعبه‌ی ۲ نیز حاوی ۲۰۰۰ لامپ است که ۵ درصد آنها خراب هستند. از یک جعبه که به طور تصادفی انتخاب شده، دو لامپ بیرون آورده می‌شوند.

الف) احتمال خرابی هر دو چقدر است؟

ب) اگر هر دو لامپ خراب باشند، با چه احتمالی جعبه‌ی ۱ انتخاب شده است؟

سوال ۲۳) در یک کیسه، ۵ گلوله‌ی آبی و ۳ گلوله‌ی سفید وجود دارد. دو عدد گلوله بر می

داريم. احتمال اين، راکه يکی از گلوله ها آبی و ديگري سفيد باشد در حالت

الف) با جايگذازي

ب) بدون جايگذازي

به دست آوريد (جايگذازي حالتی است که گلوله اي را پس از بيرون آوردن از کيسه و مشاهده ي رنگ آن، به کيسه باز گردانيم).

فصل ۲

آزمایش های تکراری

سوال ۲۴) تاس سالمی را ۳ بار پرتاب می کنیم و اعداد رو آمده در سه پرتاب را در نظر می گیریم. احتمال آن که جمع اعداد رو آمده برابر ۵ باشد چقدر است؟

سوال ۲۵) تاس سالمی را ۳ بار پرتاب می کنیم و اعداد رو آمده در سه پرتاب را در نظر می گیریم. اگر عدد رو آمده ی اول برابر ۴ باشد، احتمال آن که جمع اعداد پرتاب ها برابر ۷ باشد چقدر است؟

سوال ۲۶) تاس سالمی را ۳ بار پرتاب می کنیم و اعداد رو آمده در سه پرتاب را در نظر می گیریم. احتمال آن که جمع اعداد تاس در پرتاب های فرد، برابر ۵ باشد چقدر است؟

سوال ۲۷) تاس سالمی را ۴ بار پرتاب می کنیم و اعداد رو آمده در چهار پرتاب را در نظر می گیریم. اگر در دو پرتاب این تاس عدد ۲ ظاهر شده باشد، احتمال آنکه در دو پرتاب دیگر عدد فردی ظاهر شده باشد چقدر است؟

سوال ۲۸) تاس سالمی را ۴ بار پرتاب می کنیم و اعداد رو آمده در چهار پرتاب را در نظر می گیریم. با چه احتمالی، جمع اعداد در پرتاب های زوج، ۵ برابر جمع اعداد در پرتاب های فرد است؟

سوال ۲۹) سکه‌ی سالمی را ۱۰ بار پرتاب می‌کنیم. مطلوب‌ست احتمال آن‌که
الف) در این ۱۰ پرتاب، حداقل دو بار رو بیاید.
ب) در سه پرتاب اول حداکثر یک بار پشت بیاید.
پ) در پرتاب‌های زوج، نتیجه یکسان باشد (همگی رو یا همگی پشت باشند).

فصل ۳

متغیرهای تصادفی

سوال ۳۰) برای هر یک از توابع چگالی احتمال داده شده‌ی زیر،

$$f(x) = \begin{cases} k\delta(x+1) & , \quad x = -1 \\ x - x^2 & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\delta(x) & , \quad x = 0 \\ \frac{3}{32}\sqrt{x-1} & , \quad 1 \leq x \leq k \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} k\delta(x+1) & , \quad x = -1 \\ \frac{1}{2}e^{-x+1} & , \quad x \geq 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}, f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\delta(x+3) & , \quad x = -3 \\ \frac{1}{2}\sin x & , \quad 0 \leq x \leq k \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\delta(x+1) & , \quad x = -1 \\ \frac{1}{x^3} & , \quad x \geq k \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

الف) مقدار k را بیابید.

ب) تابع توزیع تجمعی را بیابید.

پ) مقدار احتمال $\Pr\{X^2 \leq 4\}$ را به دست آورید.

سوال ۳۱) فرض کنید متغیر تصادفی X ، یکنواخت در بازه‌ی $[0, 1]$ است. متغیر تصادفی Y را به صورت $Y = g(X)$ می‌سازیم. تابع g را به گونه‌ای تعیین کنید که Y ؛

الف) یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر λ باشد؛ یعنی

$$f(y) = \begin{cases} e^{-y} & , \quad y > 0 \\ 0 & , \quad y \leq 0 \end{cases}$$

ب) یک متغیر تصادفی کوشی با پارامتر π باشد؛ یعنی

$$f(y) = \frac{1}{y^2 + \pi^2} \quad , \quad y \in \mathbb{R}$$

سوال ۳۲) متغیر تصادفی وکسسته‌ی N دارای چگالی احتمال زیر است؛

$$f(n) = \begin{cases} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} & , \quad n \in \mathbb{N} \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

الف) تابع مولد گشتاور آن را به دست آورید.

ب) از روی تابع مولد گشتاور، مقادیر میانگین و واریانس این متغیر تصادفی را محاسبه کنید.
(راهنمایی؛

$$\sum_{n=1}^{\infty} na^n = \frac{a}{(1-a)^2} \quad , \quad |a| < 1$$

)

سوال ۳۳) فرض کنید برای یک متغیر تصادفی با چگالی توزیع $f(x)$ داشته باشیم

$$\exists a \in \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = f(a - x)$$

نشان دهید میانگین و میانه‌ی این متغیر تصادفی برابر a است.

سوال ۳۴) متغیر تصادفی X با تابع توزیع تجمعی زیر داده شده است:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x+1}{2}e^{-x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

در این صورت

الف) تابع مولد گشتاور آن را به دست آورید.

ب) میانگین و واریانس این متغیر تصادفی را بیابید.

سوال ۳۵) نشان دهید که اگر به ازای هر t_0 و t_1 مثبتی داشته باشیم

$$\Pr\{t_0 \leq t \leq t_0 + t_1 | t \geq t_0\} = \Pr\{t \leq t_1\}$$

آنگاه

$$\Pr\{t \leq t_1\} = 1 - e^{-ct_1}$$

فصل ۴

متغیرهای تصادفی توأم

سوال ۳۶) تابع چگالی احتمال توأم دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر است:

$$f(x, y) = \begin{cases} k(4 - x - y) & , \quad 1 < x < 2, \quad 0 < y < 2 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

الف) مقدار مناسب k را بیابید.

ب) با مقدار k به دست آمده در قسمت قبل، مقدار $\mathbb{E}\{XY\}$ را به دست آورید.

سوال ۳۷) تابع چگالی احتمال توأم دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر است:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & , \quad |x| + 2|y| < 1 \\ 0 & , \quad |x| + 2|y| \geq 1 \end{cases}$$

الف) چگالی‌های احتمال ناشیه‌ای X و Y را به دست آورید. همچنین ناهمبستگی، استقلال و تعامد این دو متغیر تصادفی را تحقیق کنید.

ب) چگالی احتمال $X + Y$ را به دست آورید.

سوال ۳۸) یک قطار و اتوبوس به طور تصادفی و مستقل از هم بین ساعات ۵ تا ۶ وارد یک ایستگاه می‌شوند. فردی نیز به طور تصادفی بین ساعت ۵ تا ۳۰:۵ وارد همان ایستگاه

می شود.

الف) احتمال آن که فرد بیش از ۱۰ دقیقه منتظر قطار و اتوبوس شود چقدر است؟

ب) اگر قطار و اتوبوس هر یک ۱۰ دقیقه در ایستگاه تاخیر داشته باشند، احتمال با هم بودن آنها در ایستگاه چقدر است؟

پ) اگر فرد پس از ساعت ۱۵ : ۵ به ایستگاه برسد، با چه احتمالی به هیچ یک نمی رسد؟

سوال ۳۹) یک قطار و اتوبوس به طور تصادفی و مستقل از هم بین ساعات ۶ تا ۷ صبح وارد ایستگاهی می شوند. فردی نیز به طور تصادفی بین ساعات ۵:۵۰ تا ۶:۵۰ وارد همان ایستگاه می شود.

الف) احتمال اینکه فرد بیش از ۱۰ دقیقه منتظر قطار و یا اتوبوس بماند چقدر است؟

ب) احتمال اینکه این فرد به هیچ یک از قطار یا اتوبوس نرسد چقدر است؟

سوال ۴۰) اگر X و Y ، دو متغیر تصادفی نرمال با میانگین ۰ و واریانس ۱ باشند به گونه ای که $\text{cov}(X, Y) = 0.5$ ، در این صورت مقدار a را به گونه ای بیابید که $X + aY$ و $X + 2Y$ مستقل از هم باشند و در این صورت، واریانس هر یک را بیابید.

سوال ۴۱) تابع چگالی احتمال توأم دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر است:

$$f(x, y) = \begin{cases} k(4 - x - y) & , \quad 1 < x < 2, 0 < y < 2 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

الف) مقدار مناسب k را بیابید.

ب) با مقدار k به دست آمده در قسمت قبل، مقدار $\mathbb{E}\{XY\}$ را به دست آورید.

سوال ۴۲) تابع چگالی احتمال توأم دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر است:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} k & , \quad x - 1 < y < x , \quad 0 < x < 2 , \quad 0 < y < 1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که k ثابت است.

الف) مقدار k را به دست آورید.

ب) نشان دهید Y و $X - Y$ از هم مستقل هستند.

سوال ۴۳) یک قطار و یک اتوبوس بین ساعت ۹ و ۱۰ در زمانی تصادفی وارد ایستگاه می شوند. قطار ۱۰ دقیقه و اتوبوس x دقیقه توقف دارند. x را طوری تعیین کنید که احتمال با هم بودن قطار و اتوبوس برابر ۰.۵ باشد.

فصل ۵

احتمال شرطی در متغیرهای تصادفی

سوال ۴۴) تاس سالمی را ۹ بار پرتاب می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی X ، تعداد اعداد زوج رو آمده به شرط دانستن این باشد که در سه پرتاب اول، حداقل یک عدد فرد آمده است، (الف) چگالی احتمال X را مناسبه کنید.

ب) اگر متغیر تصادفی Y ، تعداد اعداد اول رو آمده باشد، مقدار $\Pr\{X = x|Y = 0\}$ چقدر است؟

سوال ۴۵) سکه ای را ۱۰ بار پرتاب می‌کنیم. متغیر تصادفی X برابر تعداد دفعات رو آمدن در پرتاب های دوم و چهارم و متغیر تصادفی Y برابر تعداد دفعات پشت آمدن در ۲ پرتاب اول است.

الف) چگالی احتمال شرطی $f_{X|Y}(X = x|Y = y)$ را به دست آورید (می‌توانید از روش جدول نویسی برای چگالی احتمال استفاده کنید که سطر جدول $X = x$ و ستون جدول $Y = y$ است).

ب) مقدار $E\{XY\}$ را بیابید.

فصل ۶

دنباله‌ی متغیرهای تصادفی

سوال ۴۶) فرض کنید دنباله‌ی متغیرهای تصادفی $\{X_n\}$ ، از توزیع یکنواخت بین $-\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$ به طور مستقل پیروی می‌کند. به کمک قضیه‌ی حد مرکزی، توزیع متغیر تصادفی Y و میانگین و واریانس آن را به دست آورید؛ اگر

$$Y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}.$$

سوال ۴۷) الف) تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی پواسون با پارامتر λ را به دست آورید.

ب) اگر دنباله‌ی متغیرهای تصادفی مستقل $\{X_n\}$ ، از نوع پواسون با پارامتر λ باشد، نشان دهید متغیر تصادفی

$$Y = \sum_{i=1}^N X_i,$$

دارای توزیع پواسون با پارامتر $N\lambda$ است.

پ) نشان دهید اگر دنباله‌ی متغیرهای تصادفی مستقل $\{X_n\}$ ، برنولی با پارامتر p و N از

نوع پواسون با پارامتر λ باشد، متغیر تصادفی

$$Y = \sum_{n=0}^{N-1} X_n$$

دارای توزیع پواسون با پارامتر λp است.

سوال ۴۸) نشان دهید دنباله‌ی متغیرهای تصادفی $X_n = X + \frac{1}{n}$ که n عدد طبیعی و X دارای توزیع یکنواخت بین ۰ و ۱ است، در احتمال به X میل می‌کند.

سوال ۴۹) فرض کنید دنباله‌ی متغیرهای تصادفی $\{X_n\}$ ، از توزیع یکنواخت بین $-\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$ و به طور مستقل پیروی می‌کند. به کمک قضیه‌ی حد مرکزی، توزیع متغیر تصادفی Y را به دست آورید که

$$Y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}$$

و میانگین و واریانس آن را بیابید.

سوال ۲۲) نشان دهید که برای استقلال n رخداد باید $2^n - n - 1$ معادله برقرار باشد.

سوال ۳) در یک گل فروشی، ۱۰ اکل لاله، ۵ نسترن، ۳ بنفشه و ۲ اقاقیا وجود دارد. می‌خواهیم دسته‌کلی شامل ۵ گل که همگی به تصادف انتخاب شده باشند، برگزینیم. با چه احتمالی

الف) دسته‌گل شامل ۲ نسترن و ۲ بنفشه است؟

ب) دسته‌گل شامل هیچ‌گل لاله و بنفشه‌ای نیست؟

پ) دسته‌گل شامل حداقل یک گل از هر یک از ۴ نوع گل است؟

دقت کنید گل‌های هر نوع با هم فرقی نمی‌کنند!

سوال ۴)

الف) از یک مجموعه‌ی n عضوی، یک زیر مجموعه به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که این زیر مجموعه k عضوی باشد چقدر است؟

ب) به کمک قسمت قبل ثابت کنید:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

سوال ۵)

الف) اگر یک رشته لامپ متوالی شامل n لامپ که هر لامپ به احتمال p خراب است، به ولتاژ برق وصل شود، با چه احتمالی روشن می‌شود؟ (در رشته متوالی لامپ‌ها، لامپ‌ها به صورت پشت سر هم به یکدیگر وصل شده‌اند)

ب) اگر رشته لامپ موازی باشد، مسئله را حل کنید. (در رشته‌ی موازی لامپ‌ها، یکی از سرهای همه‌ی لامپ‌ها به یک نقطه و سر دیگر تمام لامپ‌ها به نقطه‌ی دیگر وصل شده‌اند)

سوال ۱) (امتیازی)

الف) قضیه‌ی دموآو-لاپلاس در چه حالتی برای تکرر توزیع برنولی به تعداد n بار برقرار است؟

ب) توزیع دو جمله‌ای را با پارامترهای $n = 1000$ و $p = 0.5$ در نظر بگیرید. به کمک ماشین حساب یا کامپیوتر، خطای نسبی تقریب قضیه‌ی دموآو-لاپلاس را برای $k = 1, 300, 490$ محاسبه کنید.

سوال ۲)

از یک جعبه که دارای M گلوله‌ی سفید و $N - M$ گلوله‌ی سیاه است، n گلوله برداشته می‌شود.

الف) احتمال آنکه m گلوله از گلوله‌های برداشته شده سفید باشند در حالت بایگزار چقدر

است؟

ب) احتمال آنکه m گلوله از گلوله های برداشته شده سفید باشند در حالت بدون جایگذاری
بقدراست؟

ج) اگر بدانیم تمام گلوله های سفید برداشته شده اند، احتمال آنکه دقیقاً ۲ گلوله سیاه نیز
برداشته شده باشند بقدراست؟

سوال ۳) (قدم زدن تصادفی)

فردی از نقطه‌ی صفر روی محور اعداد حقیقی با احتمال p یک متر به سمت راست و با
احتمال $1 - p$ یک متر به سمت چپ می‌رود. اگر این فرد این نوع قدم زدن را n بار و
هر بار از روی نقطه‌ای که روی آن ایستاده تکرار کند، با چه احتمالی پس از k بار قدم زدن به
مبدأ باز می‌گردد؟

سوال ۴)

از مجموعه‌ی $S = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ دو زیرمجموعه به تصادف و به طور مستقل برمی‌گزینیم
به گونه‌ای که احتمال آن که هر عضو S داخل هر یکی از زیرمجموعه‌ها باشد، مستقل از دیگر
اعضا برابر p است. با چه احتمالی این دو زیرمجموعه ناسازگار هستند؟

سوال ۵)

دو تیم ورزشی A و B در یک بازی در ۹ دست با هم روبرو می‌شوند و نتیجه‌ی هر دست فقط
برد یکی از دو تیم می‌تواند باشد. فرض کنید تیم A با احتمال p در هر دست پیروز می‌شود
و نتیجه‌ی دست‌ها مستقل از هم است. برنده‌ی بازی کسی است که بیشتر بازی‌ها را برده
باشد.

الف) با چه احتمالی تیم A پس از ۶ بازی موفق به بردن بازی می‌شود؟

ب) اگر بدانیم تیم A در نهایت بازی را برده است، با چه احتمالی در حداقل یک دست به
تیم B باخته است؟

ج) به ازای $p = 0.5$ ، اگر بدانیم تیم A دست اول را برده، با چه احتمالی بازی را می برد؟
(سوال ۶)

در یک امتحان، احتمال درست پاسخ دادن به یک سوال دو گزینه ای برابر p است. پس از امتحان، n دانشجو پاسخ های خود را با هم مقایسه می کنند و متوجه می شوند که همگی به آن سوال پاسخ یکسانی داده اند. با چه احتمالی تمام این n دانشجو ها به پاسخ درست رسیده اند؟

سوال ۱) احتمال اینکه فردی به covid-19 مبتلا شود، در صورتی که ماسک نزنند برابر 70% و در صورتی که ماسک بزنند برابر 15% است. اگر این فرد به طور متوسط 5% مواقع ماسک بزند، احتمال کرونا گرفتن او چقدر است؟

سوال ۲) دو تاس می اندازیم و جمع دو عدد رو آمده را یادداشت می کنیم.

الف) احتمال اینکه عدد رو آمده، زوج باشد چقدر است؟

ب) اگر جمع دو عدد رو آمده زوج باشد، با چه احتمالی بیشتر از ۸ است؟

سوال ۳) از بین 2^n زیرمجموعه ی مجموعه ی $S = \{1, 2, \dots, n\}$ ، دو زیرمجموعه به تصادف و مستقل از هم بر می داریم. اگر این دو زیرمجموعه، دارای اشتراک $\{1, 2\}$ باشند، احتمال آن که یکی از زیرمجموعه ها شامل عضوهای ۳، ۴ و ۵ باشد چقدر است؟ ($n \geq 5$)

سوال ۴) سه جعبه در اختیار داریم. در جعبه ی ۱، ۱۰۰۰ لامپ موجود است که ۳ تای آنها معیوبند. جعبه ی ۲ شامل ۱۰ لامپ است که ۳ تای آنها معیوبند و در جعبه ی سوم هم ۳۰۰۰ لامپ وجود دارد که همگی سالمند. اگر یکی از این جعبه ها را به تصادف برگزیده و از داخل آن لامپی انتخاب کنیم،

الف) با چه احتمالی لامپ معیوب است؟

ب) اگر لامپ معیوب باشد، با چه احتمالی از جعبه‌ی ۲ انتقا ب شده است؟

پ) اگر لامپ سالم باشد، با چه احتمالی از یکی از جعبه‌های ۱ یا ۲ انتقا ب شده است؟

سوال ۵) کشوری شامل دو استان ۱ و ۲ است. استان ۱، شامل ۶۰ مرد و ۴۰ زن و استان ۲ شامل ۶۵۰ زن و ۳۵۰ مرد است. در استان ۱، ۱۰ مرد و ۱۰ زن چشم آبی و در استان ۲، ۳۰ مرد و ۲۰ زن چشم آبی هستند. فردی را به تصادف از این کشور انتقا ب می‌کنیم.

الف) اگر این فرد چشم آبی باشد، با چه احتمالی از استان ۱ انتقا ب شده است؟

ب) اگر این فرد زن باشد، با چه احتمالی از استان ۲ انتقا ب شده و چشم آبی نیست؟

پ) اگر فرد انتقا ب شده مرد باشد، با چه احتمالی چشم آبی است؟

سوال ۱) فرض کنید تابع توزیع تجمعی یک متغیر تصادفی گسسته به صورت های زیر داده شده باشد:

$$F(n) = \Pr\{X \leq n\} = \begin{cases} 1 & , \quad n > b \\ \frac{n-a+1}{b-a+1} & , \quad a \leq n \leq b \\ 0 & , \quad n < a \end{cases} \quad \text{الف) زمانی که } b \geq a$$

$$F(n) = \begin{cases} 1 - A^{n+1} & , \quad n \geq 0 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad \text{ب) زمانی که } 0 < A < 1$$

کمیت $f(n) = F(n) - F(n-1)$ را مناسبه کرده و سپس $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n f(n)$ را برای این دو توزیع به دست آورید.

سوال ۲) تابع توزیع های تجمعی و پیوسته ی زیر را در نظر بگیرید:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{\lambda}x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad \text{الف) زمانی که } \lambda > 0$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \geq b \\ \frac{x-a}{b-a} & , \quad a < x < b \\ 0 & , \quad x \leq a \end{cases} \quad \text{ب) زمانی که } b > a$$

ج) $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$ که μ و σ^2 دو مقدار حقیقی هستند و $\sigma^2 \neq 0$ کمیت $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ را محاسبه کرده و از روی آن، $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ را برای این سه توزیع به دست آورید.

سوال ۳) فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل برنولی به ترتیب با پارامترهای $\frac{1}{2}$ و p باشند. ثابت کنید متغیر تصادفی $Z = X \oplus Y \pmod{2}$ دارای توزیع برنولی با پارامتر $\frac{1}{2}$ است.

سوال ۴) فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل برنولی به ترتیب با پارامترهای $\frac{1}{2}$ و p باشند. ثابت کنید متغیر تصادفی $Z = XY$ دارای توزیع برنولی با پارامتر $\frac{1}{2}p$ است.

سوال ۵) اگر X و Y دو توزیع چند جمله‌ای به ترتیب با پارامترهای (n_1, p) و (n_2, p) باشند، ثابت کنید توزیع $X + Y$ دو جمله‌ای با پارامترهای $(n_1 + n_2, p)$ است.

سوال ۱) یک سکه‌ی سالم را ۷ بار پرتاب می‌کنیم.

الف) احتمال اینکه نتیجه‌ی پرتاب اول و آخر برابر باشد چقدر است؟

ب) با چه احتمالی حداقل دو رو و سه پشت در این ۷ پرتاب خواهیم داشت؟

پ) اگر نتیجه‌ی پرتاب سکه در سه پرتاب اول یکسان باشد، با چه احتمالی در این ۷ پرتاب، در مجموع دقیقاً ۴ بار سکه رو می‌آید؟

سوال ۲) یک تاس سالم را ۵ بار پرتاب می‌کنیم.

الف) اگر جمع پنج عدد رو آمده در این پنج پرتاب را در نظر بگیریم، با چه احتمالی این مجموع

برابر ۷ است؟

ب) با چه احتمالی عدد رو آمده در پرتاب پنجم برابر جمع اعداد رو آمده در ۴ پرتاب قبلی خواهد بود؟

سوال ۳) بزرگراه ۸ بانده ای را در نظر بگیرید که از هر باند آن در هر لحظه حداکثر یک ماشین می تواند عبور کند. اگر ۹ ماشین هر یک با احتمال p وارد بزرگراه شوند،

الف) با چه احتمالی همه ی ماشین های وارد شده به بزرگراه بدون مشکل از آن رد می شوند؟
ب) p مقدار باشد تا احتمال قسمت الف بیشتر از 0.99 باشد؟

سوال ۴) دو تیم ورزشی A و B در یک بازی در ۹ دست با هم روبرو می شوند و نتیجه ی هر دست فقط برد یکی از دو تیم می تواند باشد. فرض کنید تیم A با احتمال p در هر دست پیروز می شود و نتیجه ی دست ها مستقل از هم است. برنده ی بازی کسی است که بیشتر بازی ها را برده باشد.

الف) با چه احتمالی تیم A پس از ۶ دست موفق به بردن بازی می شود؟

ب) اگر بدانیم تیم A در نهایت بازی را برده است، با چه احتمالی در حداقل یک دست به تیم B باخته است؟

ج) به ازای $p = 0.5$ ، اگر بدانیم تیم A دست اول را برده، با چه احتمالی بازی را می برد؟

سوال ۵) یک سکه ی سالم n بار پرتاب شده و k بار رو آمده است. کوچکترین مقدار n را بیابید به گونه ای که

$$P \left\{ 0.49 \leq \frac{k}{n} \leq 0.51 \right\} > 0.95$$

سوال ۱) سکه ای را پرتاب می کنیم. اگر رو آمد، دو تاس را پرتاب کرده، جمع دو عدد روی تاس را یادداشت می کنیم. اگر سکه پشت آمد، یک تاس را پرتاب کرده و عدد آنرا یادداشت

می‌کنیم. با چه احتمالی

الف) عدد یادداشت شده برابر ۳ است؟

ب) عدد یادداشت شده برابر ۸ است؟

سوال ۲) کدام یک از توابع زیر می‌توانند تابع توزیع تجمعی یه متغیر تصادفی پیوسته باشند؟
در این حالت، مقادیر مناسب k را معین کنید.

$$F(x) = \begin{cases} \frac{kx}{1+x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases} \text{ (الف)}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x > 0 \\ k & , \quad x = 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases} \text{ (ب)}$$

$$F(x) = \frac{e^x + k}{e^x + 1} \text{ (پ)}$$

$$F(x) = \begin{cases} k + xe^{-x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases} \text{ (ت)}$$

سوال ۳) اگر تابع توزیع تجمعی یک متغیر تصادفی به صورت

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

باشد، مقدار میانه (Median) را مناسبه کنید.

سوال ۴) برای هر یک از توابع توزیع تجمعی زیر، مقدار $P(X = 1)$ مقدار است؟

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3-x} & , \quad x < 1 \\ \frac{3x}{3x+1} & , \quad x \geq 1 \end{cases} \text{ (الف)}$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3-x} & , \quad x < 1 \\ \frac{x}{x+1} & , \quad x \geq 1 \end{cases} \text{ (ب)}$$

سوال ۵) اگر متغیر تصادفی X دارای چگالی احتمال $f(x)$ و تابع توزیع تجمعی $F(x)$ باشد، چگالی احتمال و توزیع تجمعی هر یک از متغیرهای تصادفی زیر چه خواهد بود؟

الف) $X + 1$

ب) $2X$

پ) $-X$

ت) X^2

(سوالات زیر امتیازی هستند)

سوال ۶) بزرگراه ۸ بانده ای را در نظر بگیرید که از هر باند آن در هر لحظه حداکثر یک ماشین می تواند عبور کند. اگر ۹ ماشین هر یک دارای احتمال ورود به بزرگراه p باشند،

الف) با چه احتمالی همه ی ماشین های وارد شده به بزرگراه بدون مشکل از آن رد می شوند؟

ب) p بقدر، باشد تا احتمال قسمت الف کمتر از ۰.۰۰۲ باشد؟

سوال ۷) یک سکه ی سالم n بار پرتاب شده و k بار رو آمده است. کوچکترین مقدار n را بیابید به گونه ای که

$$P \left\{ 0.49 \leq \frac{k}{n} \leq 0.51 \right\} > 0.95$$

سوال ۱) دایره ی واحد را با مرکز مبدأ مختصات در نظر بگیرید.

الف) نقطه ای به تصادف از داخل این دایره انتخاب می شود. اعداد $0 < r_0 < 1$

اگر $0 < \phi_0 < 2\pi$ را در نظر بگیرید. اگر مفتصات قطبی این نقطه را با (r, ϕ) نشان دهیم، با چه احتمالی داریم $r_0 < r < r_0 + \Delta r_0$ و $\phi_0 < \phi < \phi_0 + \Delta \phi_0$ ؟

ب) ابتدا قطری از دایره را به تصادف انتخاب کرده و سپس نقطه ای از این قطر را به تصادف بر می گزینیم. اگر مفتصات قطبی این نقطه را با (r, ϕ) نشان دهیم، با چه احتمالی داریم $r_0 < r < r_0 + \Delta r_0$ و $\phi_0 < \phi < \phi_0 + \Delta \phi_0$ ؟

پ) تابع چگالی احتمال نقطه را در هر دو حالت قسمت های الف و ب به دست آورید.

سوال ۲) (بی حافظگی توزیع نمایی) طول عمر یک یفپال از توزیع نمایی زیر پیروی می کند:

$$f_X(x) = \frac{1}{20} e^{-\frac{1}{20}x}$$

که x طول عمر یفپال بر حسب سال است. یفپال دست دومی که پس از ۱۵ سال کار کرد، همپنان سالم است به همراه یفپال نوی که از بازار خریداری شده مفروضند. احتمال خرابی هر یک از آنها دقیقاً در ۱۰ سال آینده بقدر است؟

سوال ۳) منفی تابع $y = Ax^2 + 2Bx + C$ را در نظر بگیرید که در آن A, B, C ، متغیرهای تصادفی مستقل و دارای توزیع زیر هستند:

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & , \quad 1 < x < e \\ 0 & , \quad \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

الف) با چه احتمالی این منفی از سه ربع از چهار ربع مفتصات می گذرد؟

ب) با چه احتمالی این منفی از هر چهار ربع مفتصات می گذرد؟

سوال ۴) (ناوردایی متغیرهای تصادفی گوسی تحت عمل جمع)

الف) فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی با توابع چگالی احتمال زیر باشند:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_X^2}\right)$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_Y^2}\right)$$

ثابت کنید متغیر تصادفی $X + Y$ از توزیع زیر پیروی می کند:

$$f_{X+Y}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi[\sigma_X^2 + \sigma_Y^2]}} \exp\left(-\frac{u^2}{2\pi[\sigma_X^2 + \sigma_Y^2]}\right)$$

ب) (امتیازی) رابطه‌ی کلی تری را که می توان از تعمیم قسمت الف استنتاج کرد، بنویسید.

سوال ۱) به کمک یک ماشین حساب یا کامپیوتر، مقادیر $e^{-np} \frac{(np)^k}{k!}$ و $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ را به ازای حالت های مختلف n و p مناسبه کرده و خطای تقریب پواسون را به دست آورید.

الف) $n = 10$, $p = 0.7$, $k = 7$

ب) $n = 30$, $p = 0.3$, $k = 9$

پ) $n = 50$, $p = 0.02$, $k = 1$

در کدام حالت تقریب پواسون، خطای کمتری دارد و چرا؟

سوال ۲) در پرتاب دو تاس سالم، اگر متغیر تصادفی X را برابر تعداد اعداد زوج رو آمده در هر دو تاس در نظر بگیریم:

الف) فضای شذنی مسئله (Ω) را بیابید.

ب) مقدار $\Pr\{X \leq 1.5\} - \Pr\{X \leq 0.5\}$ را بیابید و با $\Pr\{X = 1\}$ مقایسه کنید. میزان تفاوت دو مقدار فوق را توضیح دهید.

پ) pmf این متغیر تصادفی را به دست آورید.

سوال ۳) فرض کنید یک سکه سالم را n بار پرتاب کرده ایم. در این صورت pmf متغیر تصادفی X را در حالت های زیر بیابید.

الف) متغیر تصادفی X برابر تعداد روها در پرتاب های زوج است.

ب) متغیر تصادفی X برابر جمع تعداد روها در ۲ پرتاب اول و تعداد پشت ها در ۲ پرتاب آخر است ($n > 4$).

پ) متغیر تصادفی X دو مقدار ۰ و ۱ را اختیار می کند و مقدار آن ۱ است هنگامی که تعداد روها و پشت ها با هم برابر باشد و ۰ در غیر این صورت.

سوال ۱) برای هر یک از توزیع های زیر، میانگین و واریانس را به دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , \quad a < x < b \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad \text{الف)}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad \text{ب)}$$

$$f(n) = \begin{cases} p & , \quad n = 0 \\ 1 - p & , \quad n = 1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad \text{پ)}$$

$$f(n) = \begin{cases} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} & , \quad n \geq 0 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad \text{ت)}$$

سوال ۲) آزمایشی را که احتمال موفقیت آن p و احتمال شکست آن $1 - p$ است، آنقدر تکرار می کنیم تا به k -امین موفقیت برسیم. متوسط تعداد آزمایش ها را تا حصول k -امین موفقیت به ازای

$$\text{الف) } k = 1$$

$$\text{ب) } k = 2$$

به دست آورید.

سوال ۳) از دو جامعه ی آماری بزرگ، یک آزمون علمی ۱۰۰ نمره ای گرفته شده است. مشاهده شده که نمرات افراد این دو جامعه، به ترتیب از دو توزیع گوسی با میانگین های ۵۹ و ۷۳ و واریانس های ۹ و ۱۶ پیروی می کند.

الف) کدام یک از این دو جامعه به طور متوسط دارای سطح علمی بالاتری است؟ چرا؟
ب) افراد کدام جامعه دارای سطح علمی نزدیک تری به یکدیگر هستند؟ (یا به عبارت دیگر، هم سطح ترند؟) چرا؟

سوال ۴) الف) آیا چگالی احتمال یک متغیر تصادفی می تواند فرد باشد؟ توضیح دهید.
ب) گشتاور مرتبه n -ام یک متغیر تصادفی یکنواخت در بازه ی $[a, b]$ را به دست آورید.
سوال ۵)

الف) برای هر متغیر تصادفی X و $s > 0$ تحقیق کنید

$$\Pr\{X \geq a\} = \Pr\{e^{sX} \geq e^{sa}\}$$

ب) به کمک نامساوی مارکوف ثابت کنید:

$$\Pr\{X \geq x\} \leq e^{-sx} \Phi_X(s)$$

سوال ۱)

تعیین کنید به ازای چه مقادیری از k هر یک از توابع زیر می تواند CDF یک متغیر تصادفی باشد.

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-kx^2} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases} \quad \text{الف)}$$

$$F(x) = \begin{cases} kx & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & , \quad x > 1 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases} \quad (\text{ب})$$

$$F(x) = \begin{cases} k - e^{x-x^2} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases} \quad (\text{پ})$$

$$F(x) = \frac{e^x}{e^x + k} \quad (\text{ت})$$

$$F(x) = \cos \frac{\pi}{e^x + k} \quad (\text{ث}) \quad (\text{امتیازی})$$

سوال ۲) اگر $F(x)$ تابع توزیع تجمعی یک متغیر تصادفی پیوسته باشد، کدام یک از توابع زیر می توانند تابع توزیع تجمعی یک متغیر تصادفی باشند؟ (راهنمایی: از خواص CDF بهره بگیرید.)

$$F(x^2) \quad (\text{الف})$$

$$F(x^3) \quad (\text{ب})$$

$$1 - F(-x) \quad (\text{پ})$$

$$F^n(x) \quad (\text{ت}) \quad \text{برای هر مقدار طبیعی از } n$$

$$\sin \left[\frac{\pi}{2} F(x) \right] \quad (\text{ث})$$

سوال ۳) برای هر یک از CDF های سوال ۱، مقدار $\Pr\{1 < X \leq 2\}$ را بیابید (پاسخ می تواند شامل ثابت k نیز باشد. بخش ث) نیز امتیازی است).

سوال ۱) کدام یک از توابع زیر می توانند PDF توام متغیرهای تصادفی باشند؟ برای هر کدام از PDF ها، ثابت مناسب k را بیابید.

$$f(x, y) = \frac{k}{1+x^2+y^2} \quad (\text{الف})$$

$$f(x, y) = e^{a(x^2+y^2)} \quad (\text{ب})$$

$$f(x, y) = \begin{cases} k & , \quad x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (\text{پ})$$

$$f(x, y) = \begin{cases} k - k\sqrt{x^2 + y^2} & , \quad x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (\text{ت})$$

$$f(x, y) = \begin{cases} xy & , \quad 0 < x < k \quad , \quad 0 < y < k \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (\text{ث})$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & , \quad x > 0 \quad , \quad y > 0 \quad , \quad x + y < a \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (\text{ج})$$

سوال ۲) برای هر یک از PDFهای سوال ۱، مقادیر زیر را به دست آورید.

$$\Pr\{X > 0\} \quad (\text{الف})$$

$$\Pr\{X + Y > 0\} \quad (\text{ب})$$

(راهنمایی: ابتدا تحقیق کنید اگر $f(x, y)$ تابعی از $x^2 + y^2$ باشد، داریم

$$\Pr\{aX + bY > 0\} = \Pr\{X > 0\} \quad , \quad \text{زمانی که حداقل یکی از } a \text{ یا } b \text{ غیر صفر است} \quad (\text{ج})$$

سوال ۳) برای قسمت های ث و ج، PDF متغیر تصادفی X را به دست آورید.

سوال ۴) جدول زیر را برای متغیرهای تصادفی X و Y در نظر بگیرید: الف) توابع توزیع

1	0	$Y \backslash X$
		0
θ	$\frac{1}{2} - \theta$	1
$\frac{1}{2} - \theta$	θ	

احتمال متغیرهای X و Y را به دست آورید.

ب) به ازای چه مقدار θ داریم

$$P(X = Y) = 1$$

؟

پ) به ازای چه مقدار θ داریم

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

؟

سوال ۱)

تعیین کنید به ازای چه مقادیری از k هر یک از توابع زیر می تواند pdf یک متغیر تصادفی باشد.

$$f(x) = \begin{cases} 1/x^k & , \quad x \geq 1 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases} \text{ (الف)}$$

$$f(x) = \begin{cases} kxe^{-x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases} \text{ (ب)}$$

$$(k > 0) f(x) = \begin{cases} \sin x & , \quad 0 \leq x \leq k \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases} \text{ (پ)}$$

$$f(x) = \begin{cases} k\delta(x-1) & , \quad x = 1 \\ x & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases} \text{ (ت)}$$

دارای ضربه ای به مسافت k است

$$f(x) = k\delta(x-1) + (1-k)\delta(x) \text{ (ث)}$$

سوال ۲) یک سامانه دارای ۷۰ قطعه است. پیشامد اینکه هر قطعه پس از شروع به کار در

زمان ۰، در بازه‌ی $(0, x)$ دچار خرابی گردد، یک متغیر تصادفی با pdf زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{T}e^{-\frac{x}{T}} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

احتمال آن را بیابید که بیش از ۶۵ قطعه از این سیستم در بازه‌ی $(0, \frac{T}{4})$ دچار خرابی نشوند.

سوال ۳) برای هر یک از pdf های سوال ۱، مقدارهای $\Pr\{X = 1\}$ و $\Pr\{X < \frac{1}{2}\}$ را بیابید (پاسخ می تواند شامل ثابت k باشد).

سوال ۴) اگر x_u ، صدک- u متغیر تصادفی X باشد، در این صورت مقدار x_u را به ازای $u = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ برای حالت های زیر به دست آورید.

الف) X یک متغیر تصادفی با pdf زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

ب) X یک متغیر تصادفی با pdf زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

سوال ۱) در پرتاب دو تاس سالم و متمایز، متغیر تصادفی X را مجموع اعداد رو آمده و Y را تعداد ۶ های رو آمده در نظر بگیرید.

الف) مقدار $\Pr\{X = 1, Y = 7\}$ را به دست آورید.

ب) مقدار $E\{XY\}$ چقدر است؟

پ) (امتیازی) آیا این دو متغیر تصادفی ناهمبسته اند؟

سوال ۲) در جدول زیر که توزیع احتمال را برای متغیرهای تصادفی X و Y نشان می دهد،

		Y
1	0	X
p_2	p_1	0
p_4	p_3	1

الف) مقدار $\text{cov}(X, Y)$ را به دست آورید و تحقیق کنید که چه زمانی داریم $\text{cov}(X, Y) = 0$ ؟

ب) آیا برای این دو متغیر تصادفی، ناهمبستگی، استقلال، را نتیجه می دهد؟ اگر چنین است، نشان دهید و اگر چنین نیست، مثالی برای مقادیر p_1, p_2, p_3, p_4 بزنید که ناهمبستگی، استقلال را نتیجه نمی دهد (دقت داشته باشید که جمع احتمالات برابر یک است و احتمالات نامنفی اند).

سوال ۳) چگالی احتمال زیر را در نظر بگیرید:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 1 + \alpha \sin[2\pi(x + y)] & , \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که α مقدار مناسبی است.

الف) کوواریانس این دو متغیر تصادفی را به دست آورید. آیا این دو متغیر تصادفی ناهمبسته هستند؟

ب) مقادیری از α را بیابید که این دو متغیر تصادفی مستقل باشند.

سوال ۴) تابع چگالی احتمال توأم زیر را در نظر بگیرید:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\rho^2} (x^2 + y^2 - 2\rho xy) \right]$$

الف) ثابت کنید X (و مشابهاً همپنین Y) دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس 1 است.

ب) ثابت کنید اگر $\rho = 0$ ، در این صورت متغیرهای تصادفی X و Y مستقل هستند.

پ) (امتیازی) ثابت کنید اگر متغیرهای تصادفی X و Y مستقل باشند آنگاه $\rho = 0$.

ت) (امتیازی تحقیقی) تابع چگالی احتمالی که در صورت این سوال تعریف شد، حالت خاصی از چگالی احتمال چند متغیره‌ی نرمال است.

ضریب همبستگی ρ در حالت دو متغیره، میزان همبستگی دو متغیر تصادفی را نشان می‌دهد. ابتدا تحقیق کنید به ازای چه مقداری از ρ ، این چگالی احتمال، دایروی-مقارن خواهد بود. چگالی احتمال دو متغیره را به ازای مقادیر $\rho = 0.5$, $\rho = 0$, $\rho = -0.5$ ترسیم کنید. به طور شهودی چگونه می‌توان از روی نمودارها، به میزان همبستگی این دو متغیر تصادفی پی برد؟ این تابع چگالی را به صورت دیگری نیز می‌توان نوشت:

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \det(\Sigma)}} \exp \left[-\frac{1}{2} \cdot ([x, y] \Sigma^{-1} [x, y]^T) \right]$$

که بردار $[x, y]$ یک بردار سطری دوتایی است و

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس Σ در متغیرهای تصادفی نرمال توأم، مفهوم مهمی است و ماتریس کوواریانس نام دارد.

به ازای هر یک از مقادیر $\rho = 0.5$, $\rho = 0$, $\rho = -0.5$ و به کمک دستور `mvnrnd()` در متلب، ۱۰۰۰ جفت داده‌ی تصادفی تولید و آنها را در یک نمودار پراکنندگی ترسیم کنید (پس از اجرای دستور فوق در متلب به شیوه‌ی مناسب، ۱۰۰۰ داده‌ی تصادفی برای X و ۱۰۰۰ داده‌ی تصادفی برای Y خواهید داشت. کافی است Y را بر حسب X رسم کنید تا به نمودار پراکنندگی برسید. همچنین می‌توانید از Help متلب برای توضیحات بیشتر در مورد `mvnrnd()` بهره ببرید). چگونه از روی نمودار پراکنندگی می‌توان میزان همبستگی دو متغیر تصادفی را نشان داد؟ چه شهودی در آن نهفته است؟

(این کار، تحقیقی، امتیاز ویژه ای دارد و مهلت آن تا پایان امتحان نهایی خواهد بود؛ بنابراین زمان، محدود کننده نخواهد بود. بسیار مهم است که در این تحقیق، تحلیل و دیدگاه خود را نیز ذکر بفرمایید.)

هنگامی که $\rho = 1$ ، توضیح دهید چه اتفاقی می افتد؟ تفاوت آن با حالت $\rho = -1$ چیست؟ آیا همپتان می توان از چگالی احتمال داده شده استفاده کرد؟ چرا؟

سوال ۱) زمان خرابی یک لامپ، یک متغیر تصادفی با pdf زیر است:

$$f_X(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}, \quad x > 0$$

الف) احتمال آن که این لامپ، به مدت حداکثر 2λ عمر کند، چقدر است؟

ب) احتمال آن که این لامپ بیش از 3λ و کمتر از 3.5λ عمر کند چقدر است؟

سوال ۲) یک متغیر تصادفی دارای چگالی احتمال زیر است:

$$f_X(x) = \begin{cases} 6x^2(1-x) & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ k\delta(x+1) & , \quad x = -1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

به عبارت دیگر، pdf دارای ضربه ای به اندازه k در $x = -1$ است.

الف) مقدار k را بیابید.

ب) CDF را به دست آورید و آن را رسم کنید.

پ) مقدار احتمال های $\Pr\{-2 < X \leq \frac{1}{2}\}$ و $\Pr\{0 < X \leq \frac{1}{2}\}$ چقدر است؟

سوال ۳) فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع یکنواخت بین 0 و 1 است. در این صورت، CDF و pdf هر یک از متغیرهای تصادفی زیر را بیابید.

الف) $Y = X^2$

$$Y = -\ln(1 - X) \text{ (ب)}$$

$$Y = \tan \pi(X - \frac{1}{2}) \text{ (پ)}$$

سوال ۴) برای قسمت پ سوال پیش، مقدار احتمال های $\{X \leq \frac{2}{3}\}$ و $\{Y \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\}$ را از روی pdf های X و Y بیابید و با هم مقایسه کنید. نتیجه مقایسه را توضیح دهید.

سوال ۵) اگر CDF متغیر تصادفی X را با $F(x)$ نشان دهیم، CDF متغیرهای تصادفی زیر را بر حسب $F(x)$ دست آورید.

$$\text{الف) } Y = |X| \quad \text{ب) } Y = \begin{cases} 0 & , \quad X \leq 0 \\ 1 & , \quad X > 0 \end{cases} \quad \text{پ) } Y =$$

$$X^2 - 2X$$

سوال ۱) ابتدا فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای توزیع یکنواخت در بازه ی $[0, 1]$ و مستقل هستند. توزیع احتمال متغیرهای تصادفی

$$XY \text{ (الف)}$$

$$X + Y \text{ (ب)}$$

$$\frac{X}{Y} \text{ (پ)}$$

$$\max\{X, Y\} \text{ (ت)}$$

$$\min\{X, Y\} \text{ (ج)}$$

را به دست آورید.

حال فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی نمایی و مستقل با پارامتر باشند. توزیع احتمال هر یک از متغیرهای تصادفی قسمت ب) و پ) را بیابید.

سوال ۲) توزیع مشترک دو متغیر تصادفی به صورت زیر است:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\rho^2} (x^2 + y^2 - 2\rho xy) \right]$$

ثابت کنید متغیر تصادفی $X + Y$ یک متغیر تصادفی نرمال است و سپس واریانس آن را به دست آورید. چه زمانی این واریانس بیشینه است و چرا؟ در شرایطی که واریانس بیشینه باشد، متغیرهای تصادفی X و Y چه رابطه ای دارند؟

سوال ۱) برای هر یک از متغیرهای تصادفی زیر، واریانس را به دست آورید.

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & , \quad x > 1 \\ 0 & , \quad x \leq 1 \end{cases} \text{ (الف)}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \sin x & , \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases} \text{ (ب)}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{x^3} & , \quad x > 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases} \text{ (پ)}$$

ت) X یک متغیر تصادفی گسسته است و $\Pr\{X = i\} = 2(\frac{1}{3})^i$ برای $i \in \mathbb{N}$

سوال ۲) برای قسمت های الف و ت سوال ۱، ابتدا تابع مولد گشتاور را مناسبه نموده و سپس از روی آن، میانگین و واریانس را به دست آورید.

سوال ۳) برای قسمت های الف و ب سوال ۱، میانگین متغیر تصادفی e^{-X} را بیابید.

سوال ۴) برای هر یک از جفت متغیرهای تصادفی X و Y ، ابتدا مقدار مناسب k و سپس مقدار $\Pr\{X + 3Y < \frac{1}{3}\}$ را بیابید. در هر بخش آیا X و Y مستقلند؟ $f_{X,Y}(x, y)$ چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی پیوسته ی X و Y است.

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} k \sin(x + 3y) & , \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < \frac{\pi}{6} \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases} \text{ (الف)}$$

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} kxy(1 - y) & , \quad 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases} \text{ (ب)}$$

سوال ۵) جدول زیر را برای متغیرهای تصادفی X و Y در نظر بگیرید:

		Y	
		0	1
X	0	$\frac{1}{2} - \theta$	θ
	1	θ	$\frac{1}{2} - \theta$

الف) توابع توزیع احتمال حاشیه ای متغیرهای X و Y را به دست آورید.

ب) به ازای چه مقدار θ داریم

$$P(X = Y) = 1$$

؟

پ) به ازای چه مقدار θ داریم

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

؟

سوال ۱) در پرتاب ۱۰ بار سکه ی سالم به طور مستقل،

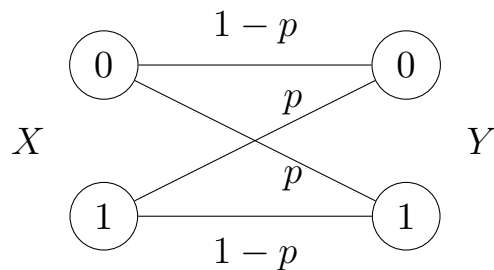
الف) توزیع احتمال متغیر تصادفی تعداد سکه های شیرآمده را به شرط آن که بدانیم سه پرتاب اول خط بوده اند به دست آورید.

ب) توزیع احتمال متغیر تصادفی تعداد سکه های شیرآمده را به شرط آن که بدانیم دو پرتاب از سه پرتاب اول خط بوده اند به دست آورید.

سوال ۲) کانال مخابراتی زیر را در نظر بگیرید:

که در آن، پیکان ها احتمالات گذار را از متغیر تصادفی X به متغیر تصادفی Y نشان می دهند. به طور مثال

$$\Pr\{Y = 0|X = 1\} = p$$



الف) اگر $\Pr\{X = 0\} = q$ که $0 \leq q \leq 1$ ، در این صورت توزیع توام X و Y را مناسبه کنید.

ب) احتمال خطا ($\Pr\{X \neq Y\}$) را مناسبه کنید. اگر مقدار p ثابت باشد، آیا احتمال خطا بر حسب q نقطه‌ای بهینه دارد؟ اگر دارد آنرا بیابید و در غیر این صورت، علت را بیان کنید.

سوال ۳) فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع احتمال نمایی با پارامتر λ باشد. ثابت کنید

$$E\{X|X > a\} = E\{X\} + a$$

سوال ۴) اگر توزیع تجمعی یک متغیر تصادفی ترکیبی به صورت

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \frac{x+2}{4} & , \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

باشد، چگالی احتمال متغیر تصادفی $(X \neq 0 \text{ یا } X \neq 1)$ را به دست آورید.

سوال ۱) برای هر یک از pdf های توام داده شده‌ی زیر، موارد $f_X(x)$ ، $E\{X\}$ و $E\{XY\}$ را به دست آورید.

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi} e^{-x^2-y^2} \quad \text{الف)}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1 - |x-1| - |y-1|) & , \quad |x-1| + |y-1| < 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases} \quad (\text{ب})$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{1-x} & , \quad 0 < x < y < 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases} \quad (\text{پ})$$

ت) X و Y دو متغیر تصادفی گسسته (با مقادیر صحیح) اند و pmf آنها به صورت زیر است:

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{16} & , \quad x^2 + y^2 \leq 10, \quad x \geq y \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

سوال ۲) در جدول زیر که توزیع احتمال را برای متغیرهای تصادفی X و Y نشان می دهد،

	Y		
$ $	\circ		
p_2	p_1	\circ	X
p_4	p_3	$ $	

		Y	
		0	1
X	0	P_1	P_2
	1	P_3	P_4

الف) مقدار $\text{cov}(X, Y)$ را به دست آورید و تحقیق کنید کنید چه زمانی داریم $\text{cov}(X, Y) = 0$ ؟

ب) آیا برای این دو متغیر تصادفی، ناهمبستگی، استقلال را نتیجه می دهد؟ اگر چنین است، نشان دهید و اگر چنین نیست، مثالی برای مقادیر p_1, p_2, p_3, p_4 بزنید که ناهمبستگی، استقلال را نتیجه نمی دهد (دقت داشته باشید که جمع احتمالات برابر یک است و احتمالات نامنفی اند).

سوال ۳) چگالی احتمال زیر را در نظر بگیرید:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 1 + \alpha \sin[2\pi(x + y)] & , \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که α مقدار مناسبی است.

الف) کوواریانس این دو متغیر تصادفی را به دست آورید. به ازای چه مقادیری از α ، این دو متغیر تصادفی ناهمبسته هستند؟

ب) مقادیری از α را بیابید که این دو متغیر تصادفی مستقل باشند.

سوال ۴) ابتدا فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای توزیع یکنواخت در بازه‌ی $[0, 1]$ و مستقل هستند. توزیع احتمال متغیرهای تصادفی

الف) XY

ب) $X + Y$

پ) $\frac{X}{Y}$ (امتیازی)

ت) $\max\{X, Y\}$ (امتیازی)

ث) $\min\{X, Y\}$ (امتیازی)

را به دست آورید.

حال فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی نمایی و مستقل با پارامتر λ باشند. توزیع احتمال هر یک از متغیرهای تصادفی قسمت ب و پ را بیابید (بخش پ همپنان امتیازی است!).

(توزیع احتمال یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر λ به صورت زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases}$$

توزیع احتمال یک متغیر تصادفی یکنواخت در بازه‌ی $[a, b]$ به صورت زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , \quad a < x < b \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

(

سوال ۱) تابع چگالی احتمال توام دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر است:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} k & , \quad |x| + |y| < 1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

الف) مقدار مناسب k را بیابید.

ب) کوواریانس و ضریب همبستگی X و Y را بیابید.

پ) ثابت کنید متغیرهای تصادفی $X + Y$ و $X - Y$ مستقل هستند و توزیع توام آنها را به دست آورید.

ت) توزیع X و میانگین و واریانس آن را به دست آورید.

سوال ۲) برای متغیر تصادفی X که دارای توزیع زیر است

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & , \quad |x| < \frac{1}{2} \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

تابع مولد گشتاور را به دست آورده و از روی آن، $E\{X^4\}$ را محاسبه نمایید.

سوال ۳) ثابت کنید اگر X, Y ، دو متغیر تصادفی نرمال مستقل با میانگین ۰ و واریانس ۱ باشند، آنگاه توزیع $\tan^{-1} \frac{Y}{X}$ ، یکنواخت بین $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ خواهد بود.

سوال ۴) اگر برای متغیرهای تصادفی X و Y ، چگالی احتمال زیر را داشته باشیم

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} e^{-x(y+1)^2} & , \quad x, y > 0 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در این صورت توزیع $X|Y$ را به دست آورید.

سوال ۵) (امتیازی) تحقیق کنید هر یک از دنباله‌ی متغیرهای تصادفی زیر، با چه مفهومی به یک متغیر تصادفی مدی میل می‌کنند. برای هر یک دلیل بیاورید.

الف) $X_n = X + \frac{1}{n}$ که X ، یک متغیر تصادفی یکنواخت در بازه‌ی $[0, 1]$ است.

ب) متغیر تصادفی نمایی با پارامتر $\frac{n+1}{n}$

پ) متوسط تعداد شیرها در n بار پرتاب مستقل یک سکه‌ی سالم

سوال ۱) اگر متغیر تصادفی X را دارای چگالی احتمال زیر در نظر بگیریم

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \quad 0 < x < 2 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

موارد (cdf) $F(x|X < 1)$ ، (pdf) $f(x|X > 1)$ و $\mathbb{E}\{X|0.5 < X < 1.5\}$ را بیابید.

سوال ۲) فرض کنید متغیر تصادفی X دارای چگالی احتمال زیر باشد

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases} \quad , \quad \lambda > 0$$

در این صورت مقادیر $\mathbb{E}\{X|X > a\}$ و $\mathbb{E}\{X\} + a$ را بیابید و با هم مقایسه کنید. نتیجه را تفسیر کنید و ببینید آیا با شهود سازگار است. این چه ویژگی‌ای از متغیرهای تصادفی نمایی را نشان می‌دهد؟

سوال ۵۰) برای متغیر تصادفی X با توزیع زیر

$$\Pr\{X = i\} = (1 - p)^i \cdot p \quad , \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

الف) مقدار $\text{var}\{X|X \geq 4\}$ را به دست آورید.

ب) pmf شرطی $\{X \text{ زوج است} | X = x\}$ را پیدا کنید.

سوال ۴) فرض کنید متغیر تصادفی X ، نتیجه پرتاب یک تاس سالم باشد ($X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$). سپس با توجه به مقدار X ، متغیر تصادفی پیوسته Y را به صورت شرطی با چگالی احتمال زیر تعریف می کنیم:

$$f_{Y|X}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \quad 0 < y < x \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

الف) احتمال $\Pr\{Y \geq 3\}$ را بیابید.

ب) چگالی احتمال $f_Y(y)$ را به دست آورید.

پ) مقادیر $\mathbb{E}\{Y\}$ و $\text{var}(Y)$ را از روی چگالی احتمال Y مناسبه کنید.

سوال ۵۱) از کیسه ای که شامل ۵ مهره سیاه، ۱ مهره سفید و ۱ مهره قرمز است، دو توپ به تصادف بیرون می آوریم. احتمال آنکه هر دو توپ هم رنگ باشند چقدر است؟

سوال ۵۲) دو جعبه از لامپ ها در اختیار داریم. جعبه ی اول، دارای ۱۰۰۰ لامپ است که ۱% آنها سالمند. جعبه ی دوم، دارای ۱۰۰۰۰ لامپ است که ۹۵% آنها سالم اند. یکی از جعبه ها را به تصادف انتخاب کرده و دو لامپ بیرون می کشیم. احتمال آن که هر دو لامپ از جعبه ی ۱ انتخاب شده باشند چقدر است اگر

الف) هر دو لامپ خراب باشند.

ب) اگر یکی از لامپ ها سالم و دیگری خراب باشد.

سوال ۵۳) سکه ای را پرتاب می کنیم. اگر رو آمد، آن را ۹ بار دیگر پرتاب می کنیم و نتایج ۱۰ پرتاب را در نظر می گیریم. اگر پشت آمد، آن را ۵ بار دیگر پرتاب می کنیم و نتایج ۶ پرتاب را

در نظر می‌گیریم. احتمال آن که در تمام پرتاب‌های سکه، دقیقاً ۶ بار رو بیاید چقدر است؟

سوال ۵۴) یک آزمایش برنولی را که احتمال موفقیت در آن برابر 40% است، n بار تکرار می‌کنیم. اگر k ، برابر تعداد موفقیت‌ها در این پرتاب‌ها باشد، n حداقل چقدر باشد تا احتمال رخداد $\{38\% < \frac{k}{n} < 42\% \}$ بیش از 70% باشد؟

(راهنمایی: از قضیه‌ی دموآور-لاپلاس استفاده نمایید.)

(جدول مربوط به مناسبه‌ی تابع $G^{-1}(x)$ در صفحه‌ی بعد آمده است.)

$G^{-1}(x)$	x	$G^{-1}(x)$	x	$G^{-1}(x)$	x	$G^{-1}(x)$	x
0.7063	0.76	0.0251	0.51	-0.6433	0.26	-2.3263	0.01
0.7388	0.77	0.0502	0.52	-0.6128	0.27	-2.0537	0.02
0.7722	0.78	0.0753	0.53	-0.5828	0.28	-1.8808	0.03
0.8064	0.79	0.1004	0.54	-0.5534	0.29	-1.7507	0.04
0.8416	0.80	0.1257	0.55	-0.5244	0.30	-1.6449	0.05
0.8779	0.81	0.1510	0.56	-0.4959	0.31	-1.5548	0.06
0.9154	0.82	0.1764	0.57	-0.4677	0.32	-1.4758	0.07
0.9542	0.83	0.2019	0.58	-0.4399	0.33	-1.4051	0.08
0.9945	0.84	0.2275	0.59	-0.4125	0.34	-1.3408	0.09
1.0364	0.85	0.2533	0.60	-0.3853	0.35	-1.2816	0.10
1.0803	0.86	0.2793	0.61	-0.3585	0.36	-1.2265	0.11
1.1264	0.87	0.3055	0.62	-0.3319	0.37	-1.1750	0.12
1.1750	0.88	0.3319	0.63	-0.3055	0.38	-1.1264	0.13
1.2265	0.89	0.3585	0.64	-0.2793	0.39	-1.0803	0.14
1.2816	0.90	0.3853	0.65	-0.2533	0.40	-1.0364	0.15
1.3408	0.91	0.4125	0.66	-0.2275	0.41	-0.9945	0.16
1.4051	0.92	0.4399	0.67	-0.2019	0.42	-0.9542	0.17
1.4758	0.93	0.4677	0.68	-0.1764	0.43	-0.9154	0.18
1.5548	0.94	0.4959	0.69	-0.1510	0.44	-0.8779	0.19
1.6449	0.95	0.5244	0.70	-0.1257	0.45	-0.8416	0.20
1.7507	0.96	0.5534	0.71	-0.1004	0.46	-0.8064	0.21
1.8808	0.97	0.5828	0.72	-0.0753	0.47	-0.7722	0.22
2.0537	0.98	0.6128	0.73	-0.0502	0.48	-0.7388	0.23
2.3263	0.99	0.6433	0.74	-0.0251	0.49	-0.7063	0.24
3.7190	0.9999	0.6745	0.75	0.0000	0.50	-0.6745	0.25

سوال ۵۵) موارد زیر را در یک مسئله‌ی احتمالاتی تعریف کنید:

الف) فضای نمونه

ب) پیشامد (واقعه)

پ) پیشامد (واقعه‌ی) ساده

سوال ۵۶) آیا فضای نمونه در یک مسئله‌ی احتمالاتی، تنها مجموعه با احتمال یک است؟ پاسخ را برای هر دو حالتی که فضای نمونه متناهی یا نامتناهی باشد شرح دهید و در صورت لزوم، مثال بزنید.

سوال ۵۷) اگر A فضای نمونه‌ی آزمایش پرتاب سکه با رخ‌های پشت و رو و B فضای نمونه‌ی پرتاب تاس با اعداد طبیعی ۱ تا ۶ باشد:

الف) حاصلضرب دکارتی A و B ($A \times B$) را به دست آورید. این مجموعه، فضای نمونه‌ی چه آزمایشی است؟

ب) دو زیرمجموعه‌ی 3 عضوی از مجموعه‌ی $A \times B$ برگزینید که با یکدیگر ناسازگار باشند. آیا می‌توانید همین کار را برای زیرمجموعه‌های 7 عضوی تکرار کنید؟ چرا؟

سوال ۵۸) با بهره‌گیری از جبر مجموعه‌ها و اصول کولموگوروف احتمال، نشان دهید اگر A ، B و C سه مجموعه باشند به طوری که $P(B \cap C) = 0$ ، در این صورت

$$P\{A \cap (B \cup C)\} = P\{A \cap B\} + P\{A \cap C\}$$

سوال ۵۹) در یک جامعه، احتمال اینکه فردی به کرونا مبتلا باشد ۰.۰۷ و احتمال آن که به آنفلوآنزا مبتلا باشد ۰.۱۹ است. اگر ۲۰ درصد افراد این جامعه مبتلا به حداقل یکی از این دو بیماری باشند،

الف) چند درصد افراد به هر دو بیماری مبتلا هستند؟

ب) چند درصد افراد فقط به کرونا مبتلا هستند؟

سوال ۶۰) یک عدد از مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ به تصادف برمی‌گزینیم. اگر تمام وقایع ساده هم شانس باشند و تعریف کنیم

$$A = \{2, 3, 5, 7\}$$

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

الف) مقدار $P(A)$ را بیابید.

ب) مجموعه‌های $A - B$ و $A \cap B$ را به دست آورده و مقادیر $P(A - B)$ و $P(A \cap B)$ را بیابید.

پ) تحقیق کنید

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$$

چه توضیحی برای پاسخ شما وجود دارد؟

سوال ۶۱) برای هر دو مجموعه‌ی A و B ثابت کنید:

$$P(A) + P(B) - \frac{1}{4 \max\{1 - P(A), 1 - P(B)\}} \leq P(A \cup B) \leq P(A) + P(B).$$

سوال ۶۲) در یک کتابخانه، سه کتاب فیزیک، دو کتاب رمان و چهار کتاب روان‌شناسی موجود است. مطلوب‌ست تعداد حالات پیدن این کتاب‌ها در یک قفسه کنار هم چنانچه:

الف) تمام کتابهای هم نوع متمایز باشند (مثلاً ترتیب دو کتاب رمان نسبت به هم مهم باشد).

ب) تمام کتابهای هم نوع نامتمایز باشند (مثلاً ترتیب دو کتاب رمان نسبت به هم مهم نباشد).

سوال ۶۳) در یک گل فروشی، سه گل بنفشه، چهار گل رز و ۲ گل اقاقیا موجود است. به چند طریق می‌توان دسته‌کلی متشکل از ۳ گل از بین گل‌های موجود برگزید، اگر گل‌های هم نوع نامتمایز باشند؟

سوال ۶۴) اعضای یک شرکت شامل ۱ مدیرعامل، ۲ منشی، ۱ حسابدار و ۵ نفر از سایر اعضای هیئت مدیره در یک میزگرد دارای ۱۱ صندلی می‌نشینند. مطلوب است تعداد حالاتی که الف) هر دو منشی کنار هم باشند.

ب) هیچ یک از اعضای هیئت مدیره (به جز مدیرعامل)، مجاور مدیرعامل نباشد.

پ) حسابدار کنار مدیرعامل بنشیند و تمام اعضای هیئت مدیره (به جز مدیرعامل) کنار هم باشند.

(راهنمایی: برای حل این سوال، به تمایز یا عدم تمایز اعضای هیئت مدیره یا منشی‌ها دقت کنید. آیا منطقی است متمایز باشند یا نباشند؟ همچنین دقت کنید که همواره دو صندلی از میزگرد خالی می‌مانند و باید در شمارش حالات مناسبه شوند.)

سوال ۶۵) تاس سالمی را ۳ بار پرتاب می‌کنیم (احتمال رو آمدن هر عدد از ۱ تا ۶، برابر $\frac{1}{6}$ است).

الف) احتمال آنکه از این ۳ بار، حداقل ۲ بار عدد زوج بیاید چقدر است؟

ب) احتمال آنکه مجموع اعداد رو آمده در این ۳ پرتاب برابر ۵ باشد، چقدر است؟

پ) احتمال رو آمدن مضرب ۳ در پرتاب اول چقدر است؟

سوال ۶۶) در کیسه ای، ۱۰ توپ آبی و ۷ توپ قرمز موجود است. دو توپ به تصادف و بدون جایگزاری بر می‌داریم.

الف) اگر توپهای هم‌رنگ نامتمایز باشند، تعداد حالات برداشتن دو توپ غیر هم‌رنگ چقدر است؟

ب) اگر توپهای هم‌رنگ نامتمایز باشند، احتمال برداشتن دو توپ غیر هم‌رنگ چقدر است؟

پ) اگر توپهای آبی را از ۱ تا ۱۰ و توپهای قرمز را از ۱ تا ۷ شماره‌گذاری کنیم، احتمال آنکه توپ آبی شماره ۴ و توپ آبی شماره ۳ برداشته شود چقدر است؟

ت) اگر توپهای آبی را از ۱ تا ۱۰ و توپهای قرمز را از ۱ تا ۷ شماره گذاری کنیم، آیا احتمال برداشتن دو توپ غیرهمرنگ، با مقدار بدست آمده در قسمت الف تفاوت می‌کند؟ توضیح دهید.

سوال ۶۷) قسمت‌های ب)، پ) و ت) مسئله‌ی پیش را با فرض داشتن جایگذاری حل کنید؛ یعنی زمانی که توپ اول را برداشتیم، رنگ آن را یادداشت کرده، آنرا به کیسه بازگردانده و سپس توپ دوم را برمی‌داریم.

سوال ۶۸) نقطه‌ای را از داخل مربع به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه فاصله‌ی این نقطه تا مرکز مربع، از فاصله‌ی این نقطه تا هر یک از رئوس مربع بیشتر باشد چقدر است؟

سوال ۶۹) الف) در یک صفحه‌ی شطرنجی ۸ در ۸، یک مهره‌ی رخ سفید به تصادف در یکی از خانه‌های این صفحه قرار می‌گیرد. سپس، یک مهره‌ی رخ سیاه را به تصادف در یکی از خانه‌های این صفحه قرار می‌دهیم. با چه احتمالی، رخ سیاه در معرض حمله‌ی رخ سفید قرار می‌گیرد؟ (حرکت رخ، به صورت افقی یا عمودی در صفحه است)

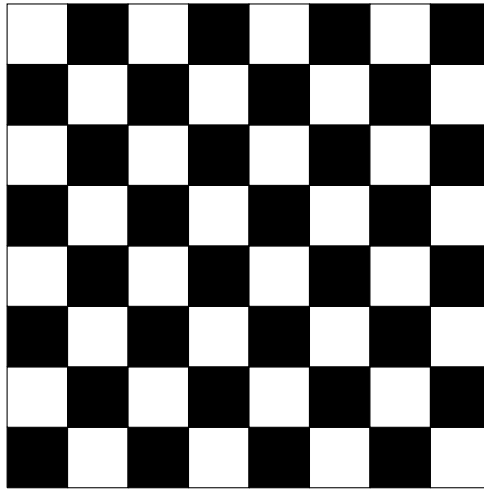
ب) یک مهره‌ی شاه سفید، در یکی از گوشه‌های یک صفحه‌ی شطرنجی ۸ در ۸ قرار دارد. دو رخ سیاه به تصادف در دو خانه‌ی این صفحه قرار می‌گیرند. با چه احتمالی، شاه سفید مات می‌شود؟ (مات شدن شاه، زمانی اتفاق می‌افتد که نوبت حرکت شاه بوده و با هر حرکت، در معرض حمله‌ی یکی از مهره‌های دشمن قرار گیرد)

سوال ۷۰)

از مجموعه‌ی زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ ، دو زیرمجموعه‌ی متمایز به تصادف انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی، این دو زیرمجموعه ناسازگارند؟

سوال ۷۱)

یک سکه‌ی سالم را پرتاب می‌کنیم. اگر رو بیاید، یک تاس را پرتاب کرده و عدد روی آن را



یادداشت می‌کنیم. اگر سکه پشت بیاید، دو تاس را پرتاب کرده و جمع اعداد دو تاس را یادداشت می‌کنیم. احتمال آنکه عدد رو آمده برابر n باشد چقدر است؟ ($2 \leq n \leq 12$)

سوال ۷۲)

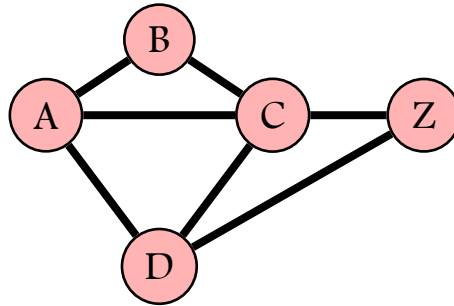
از کیسه‌ای که شامل ۷ توپ سیاه و ۱۰ توپ سفید است، ۳ توپ به تصادف بیرون می‌آوریم. سپس از بین ۳ توپ بیرون آمده، یکی را به تصادف بر می‌گزینیم. اگر بدانیم حداقل یک توپ از ۳ توپ بیرون آمده سیاه است، احتمال آنکه توپ انتخابی از بین این ۳ توپ، سفید باشد چقدر است؟

سوال ۷۳)

دو کیسه در اختیار داریم. کیسه‌ی ۱ شامل ۷ توپ سیاه و ۱۰ توپ سفید و کیسه‌ی ۲ شامل ۴ توپ سیاه، ۲ توپ سفید و ۳ توپ قرمز است. ابتدا یکی از کیسه‌ها را به تصادف انتخاب کرده و سپس، توپی از آن به تصادف بیرون می‌آوریم. اگر بدانیم توپ انتخابی سفید نیست، با چه احتمالی از کیسه‌ی ۲ انتخاب شده است؟

سوال ۷۴)

فرض کنید در نقشه‌ی زیر قصد داریم از شهر A به شهر Z برویم. هر یک از ۷ لینک نقشه‌ی زیر، با احتمال p مستقل از سایر لینک‌ها سالم هستند. احتمال آن که مسیر سالمی از A تا Z وجود داشته باشد چقدر است؟



سوال ۷۵)

یک سکه‌ی سالم را ۱۰ بار پرتاب می‌کنیم.

الف) احتمال آن که دقیقاً ۳ بار شیر بیاید چقدر است؟

ب) احتمال آن که دست کم ۲ بار خط بیاید چقدر است؟

پ) اگر بدانیم در ۵ پرتاب اول خط آمده است، احتمال آن که در کل، دقیقاً ۷ بار خط آمده باشد چقدر است؟

سوال ۷۶)

یک تاس سالم را ۶ بار پرتاب می‌کنیم.

الف) احتمال آن که جمع اعداد رو آمده در ۶ پرتاب برابر ۸ باشد چقدر است؟

ب) احتمال آن که در این ۶ پرتاب، تمام اعداد ۱ تا ۶ ظاهر شوند چقدر است؟

سوال ۷۷)

از کیسه‌ای که شامل ۷ توپ آبی و ۳ توپ سفید است، ۱ توپ به تصادف برداشته، رنگ

آن را یادداشت کرده و دوباره به کیسه برمی گردانیم. اگر این کار را ۱۱ بار انجام دهیم، احتمال آن که از این ۱۱ بار دقیقاً در ۷ مرتبه، توپ آبی بیرون آمده باشد چقدر است؟

سوال ۷۸)

یک کانال مخابراتی دارای ظرفیت ۲۵ گیگابیت بر ثانیه است. در مجموع، ۱۲ کاربر قصد استفاده از این کانال برای ارسال داده‌ی خود را دارند که هر کاربر، ۲.۵ گیگابیت بر ثانیه از کانال را اشغال می‌کند و احتمال فعال بودن او، مستقل از سایرین برابر $p = 0.6$ است. با چه احتمالی، برای تفصیص کانال به کاربران فعال، دچار کمبود ظرفیت کانال نخواهیم شد؟

سوال ۷۹)

یک آزمایش برنولی را که احتمال موفقیت در آن برابر $\frac{1}{3}$ است، n بار تکرار می‌کنیم. اگر k تعداد موفقیت‌ها در n آزمایش باشد، n حداقل چقدر باشد تا احتمال رخداد $\left\{ \frac{97}{300} < \frac{k}{n} < \frac{103}{300} \right\}$ برابر ۹۹٪ باشد؟

سوال ۸۰)

با استفاده از قضیه‌ی تقریب پواسن، کمیت‌های $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ و $e^{-np} \frac{(np)^k}{k!}$ را به ازای مقادیر مختلف داده شده برای n ، p و k مناسبه کرده و خطای نسبی را در هر مورد به دست آورید. از مقایسه‌ی خطاهای نسبی چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$\text{الف) } n = 300, \quad p = 0.01, \quad k = 3$$

$$\text{ب) } n = 30, \quad p = 0.8, \quad k = 24$$

سوال ۸۱)

برای هر یک از توابع زیر، محدوده مقادیر k را به گونه‌ای تعیین کنید که تابع مورد نظر، یک تابع توزیع انباشته باشد. سپس، چگالی احتمال را بیابید.

$$\text{الف) } F(x) = \frac{1}{e^{-kx} + 1}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1 - e^{-x-k \sin x} & , \quad x \geq 0 \end{cases} \text{ (ب)}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1 + xe^{-kx} & , \quad x \geq 0 \end{cases} \text{ (پ)}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \frac{1}{2} & , \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{k-kx} & , \quad x \geq 1 \end{cases} \text{ (ت)}$$

سوال ۸۲)

برای بخش های الف و ت سوال پیش، مقادیر میانه، صدکهای ۱۲۵ام و ۱۷۵ام و همپنین احتمال های $\Pr\{X = 0\}$ و $\Pr\{0 < X \leq 2\}$ را بیابید.

سوال ۸۳)

یک تاس را پرتاب می کنیم. اگر زوج آمد، عدد آن را یادداشت می کنیم و اگر فرد آمد، عددی را به تصادف از بازه ی $[1, 6]$ انتخاب کرده و آن را یادداشت می کنیم. اگر متغیر تصادفی X ، نشان دهنده ی عدد یادداشت شده باشد، چگالی احتمال و تابع توزیع انباشته ی آن را به دست آورده و مقدار $\Pr\{1 \leq X \leq 3\}$ را بیابید.

سوال ۸۴)

یک تابع چگالی احتمال $f(x)$ ، همواره مثبت بوده و به ازای عدد حقیقی و داده شده ی a ، دارای خاصیت زیر است:

$$f(x) = f(a - x).$$

در این صورت، میانه ی آن را بیابید.

سوال ۸۵)

فرض کنید متغیر تصادفی X ، از توزیع نهایی با پارامتر $\lambda = 1$ پیروی کند. در این صورت، چگالی احتمال متغیر تصادفی Y را در حالت های زیر بیابید.

الف) $Y = e^X$

ب) $Y = X^\alpha$ که α عدد ثابت مثبتی است.

پ) $Y = \lfloor X \rfloor$

سوال ۱۶)

فرض کنید X ، یک متغیر تصادفی باشد که از توزیع زیر پیروی می‌کند:

$$f_X(x) = \begin{cases} kx & , \quad 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}\delta(x) & , \quad x = 1 \\ 0 & , \quad \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

الف) مقدار مناسب k را بیابید.

ب) مقدار $\mathbb{E}\{X\}$ را مناسبه کنید.

پ) مقدار $\mathbb{E}\{e^{aX}\}$ را به دست آورید که a عدد حقیقی دلخواهی است.

سوال ۱۷)

متغیر تصادفی X از توزیع زیر پیروی می‌کند:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

متغیر تصادفی $Y = X^2$ مفروض است.

الف) چگالی احتمال Y را به دست آورید.

ب) امید ریاضی X را بیابید.

پ) امید ریاضی Y را از روی چگالی احتمال آن و مقدار $\mathbb{E}\{X^2\}$ را از قضیه‌ی اساسی امید ریاضی مناسبه کرده و با هم مقایسه کنید.

ت) مقادیر $\Pr\{X < \frac{1}{2}\}$ و $\Pr\{Y < \frac{1}{4}\}$ را به ترتیب از روی پیکالی های احتمال X و Y به دست آورده و با هم مقایسه کنید.

سوال ۱۸)

برای هر یک از توزیع های زیر، مقدار $\Pr\{X \geq \alpha\}$ را به دست آورده و همچنین، یک کران بالا برای این احتمال برای هر توزیع با کمک نامساوی مارکوف به دست آورید. سپس مقدار دقیق احتمال و کران آن را مقایسه کنید.

الف) $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$

ب) $f(x) = \frac{1}{\ln 2} \frac{1}{1+e^x}$, $x > 0$

پ) $f(x) = xe^{-x}$, $x > 0$

سوال ۱۹)

برای توزیع های بفش های الف و پ سوال پیش، مقدار واریانس را به دست آورید.

سوال ۹۰)

برای هر یک از توزیع های زیر، تابع مولد گشتاور را یافته و سپس از روی آن، مقدار $\mathbb{E}\{X^2\}$ را بیابید.

الف) $f(x) = \begin{cases} 1-x & , \quad 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}\delta(x-1) & , \quad x = 1 \end{cases}$

ب) $f(x) = \begin{cases} \cos x & , \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & , \quad \text{باهای دیگر} \end{cases}$

پ) $p(x) = \Pr\{X = x\} = \begin{cases} \frac{n}{2^{n+1}} & , \quad n \in \mathbb{N} \\ 0 & , \quad \text{باهای دیگر} \end{cases}$

ت) X متغیر تصادفی حاصل ضرب دو عدد رو آمده در پرتاب دو تاس به طور مستقل است.

سوال ۹۱

برای هر یک از توابع دو متغیره‌ی زیر، مقادیر k را به گونه ای بیابید که تابع مورد نظر، چگالی احتمال توأم دو متغیر تصادفی باشد و سپس، توزیع تجمعی توأم را (در صورت وجود) بیابید.

$$f(x, y) = \begin{cases} xy + kx + ky & , \quad 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$f(x, y) = \begin{cases} k \sin(x + 3y) & , \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < \frac{\pi}{6} \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases} \quad (\text{ب})$$

سوال ۹۲

برای هر یک از چگالی های احتمال زیر، مقادیر $\Pr\{X + Y \leq 2\}$ ، $\Pr\{X \leq 4, Y \leq -2\}$ و $\Pr\{X = 4Y\}$ را بیابید.

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin(x + y) & , \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < \frac{\pi}{2} \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \delta \left(\sqrt{(x+4)^2 + (y+1)^2} \right) & , \quad x = -4, y = -1 \\ \frac{1}{2} & , \quad 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases} \quad (\text{ب})$$

(دقت شود که همانگونه که $\delta(x - x_0)$ نشان دهنده‌ی ضربه ای در $x = x_0$ است، $\delta(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2})$ نیز نشان دهنده‌ی ضربه ای در $x = x_0, y = y_0$ دو بعد و دارای سطح زیر یک است.)

سوال ۹۳

برای چگالی احتمال توأم زیر، مقادیر $\sigma_X^2, \sigma_Y^2, \Phi_X(s), \Phi_Y(s)$ و چگالی احتمال متغیرهای

تصادفی XY و $\max\{X, Y\}$ را مناسبه کنید.

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} (xy - 1)e^{1-xy} & , \quad x \geq 1, y \geq 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

سوال ۹۴)

چگالی احتمال توأم زیر برای دو متغیر تصادفی X و Y داده شده است:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \alpha + 2(\frac{1}{\pi} - \alpha)(x^2 + y^2) & , \quad x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

الف) مقادیر α را بیابید.

ب) به ازای چه مقدار α ، دو متغیر تصادفی X و Y مستقل اند؟ ناهمبسته اند؟

پ) احتمال های $\Pr\{aX + bY \geq 0\}$ و $\Pr\{XY \geq 0\}$ را بیابید.

سوال ۹۵)

برای چگالی احتمال زیر، مقادیر $\mathbb{E}\{X|X > 1\}$ و $\sigma_X^2(X|X > 1)$ و چگالی های احتمال شرطی $f(x|X < \frac{1}{2})$ و $f(x|X \neq 1)$ را مناسبه کنید.

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x(1-x) & , \quad 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}\delta(x-1) & , \quad x = 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

سوال ۹۶)

چگالی احتمال توأم زیر برای دو متغیر تصادفی X و Y داده شده است:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & , \quad x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

الف) چگالی احتمال شرطی $(u|X \leq \frac{1}{2})$ را بیابید (ابتدا $\Pr\{\max\{X, Y\} \leq \frac{1}{2}\}$ را مناسبه کنید).

ب) مقدار $\mathbb{E}\{\sqrt{X^2 + Y^2} | X + Y \leq 1\}$ را بیابید.

سوال ۹۷)

اطلاعات زیر در مورد دو متغیر تصادفی X و Y داده شده است:

$$\Pr\{X = -1\} = \Pr\{X = 1\} = \frac{1}{2}$$

$$f_Y(y|X = x) = \frac{a}{2} \exp(-a|x - y|)$$

که a ، عدد ثابت مثبتی است.

الف) احتمال های $\Pr\{Y \leq 0 | X = 1\}$ و $\Pr\{Y \geq 0 | X = -1\}$ را بیابید. با افزایش a ، مقادیر احتمال های فوق چه تغییر می کنند؟

ب) (امتیازی) نتیجه ی قسمت الف را با دیدگاه احتمال فضا توجیه کنید.

سوال ۹۸)

اگر pdf مشترک دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر باشد

$$f(x, y) = \begin{cases} 12x^2 & , \quad 0 < x < y < 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

در این صورت مقدار $\text{cov}(X, Y)$ را بیابید.

سوال ۹۹)

نشان دهید احتمال هر مجموعه، کمتر از یا مساوی ۱ است.

پاسخ:

از اصل سوم احتمال، برای هر دو مجموعه ی ناسازگار A و B داریم

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

از آنجا که A و A' طبق تعریف ناسازگارند، بنابراین

$$P(A \cup A') = P(A) + P(A').$$

از طرفی طبق تعریف،

$$A \cup A' = S$$

که S فضای نمونه است. در نتیجه

$$P(A) + P(A') = 1.$$

بر اساس اصل اول احتمال، احتمال هر مجموعه مقداری نامنفی است؛ در نتیجه

$$P(A) = 1 - P(A') \leq 1$$

و اثبات کامل است ■

سوال ۱۰۰)

فرض کنید که برنامه‌ی نوشته‌اید که اعداد ۱ تا ۹ را به صورت کاملاً تصادفی در هر بار اجرا در ۳ جایگاه (سه رقم) چاپ می‌کند. احتمال ظاهر شده اعداد با هر سه رقم فرد را محاسبه کنید.

پاسخ:

طبق اصل ضرب، تعداد تمام اعداد سه رقمی متمایزی که می‌توان به این روش ساخت، برابر است با $9^3 = 729$. تعداد ارقام فرد از بین اعداد ۱ تا ۹، برابر ۵ است (ارقام ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹). در نتیجه، تعداد اعداد سه رقمی‌ای که تمام ارقام آن فرد هستند را می‌توان دوباره طبق اصل ضرب به $5^3 = 125$ طریق ممکن ساخت. بنابراین احتمال مطلوب عبارتست از

$$p = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{125}{729}$$

سوال ۱۰۱)

از کیسه‌ای که دارای ۴۰ مهره سیاه و ۶۰ مهره قرمز است، ۲۰ مهره برمی‌داریم. با چه احتمالی، از این ۲۰ مهره، ۵ مهره سیاه و ۱۵ مهره قرمزند؟

پاسخ:

تعداد حالات برداشتن ۲۰ توپ، برابر $\binom{100}{20}$ بوده و تعداد حالات مطلوب، برابر $\binom{60}{15} \binom{40}{5}$ است؛ لذا احتمال مطلوب برابر $\frac{\binom{60}{15} \binom{40}{5}}{\binom{100}{20}}$ خواهد بود.

سوال ۱۰۲

کشوری شامل دو استان ۱ و ۲ است. استان ۱، شامل ۶۰ مرد و ۴۰ زن و استان ۲ شامل ۶۵ زن و ۳۵ مرد است. در استان ۱، ۱۰ مرد و ۱۰ زن چشم آبی و در استان ۲، ۳۰ مرد و ۲۰ زن چشم آبی هستند. فردی را به تصادف از این کشور انتخاب می‌کنیم.

الف) اگر این فرد چشم آبی باشد، با چه احتمالی از استان ۱ انتخاب شده است؟

ب) اگر این فرد زن باشد، با چه احتمالی از استان ۲ انتخاب شده و چشم آبی نیست؟

پاسخ:

اصولاً در پرسشهای احتمالاتی، باید فضای نمونه و پیشامدها را در ابتدا به درستی تعریف کرد. اینجا نیز چنین قاعده‌ای را پی می‌گیریم.

از آنجا که یک فرد خاص می‌تواند زن یا مرد باشد یا چشم آبی باشد یا نباشد، چهار پیشامد ممکن وجود دارد:

M = پیشامد مرد بودن

F = پیشامد زن بودن

B = پیشامد چشم آبی بودن

N = پیشامد چشم آبی نبودن

S_1 = پیشامد اهل استان ۱ بودن

S_2 = پیشامد اهل استان ۲ بودن

صورت سوال، اطلاعات احتمالاتی زیر را به ما می‌دهد:

$$P(S_1) = \frac{100}{1100}$$

$$P(S_2) = \frac{1000}{1100}$$

$$P(B|S_1) = \frac{20}{100}$$

$$P(B|S_2) = \frac{50}{1000}$$

$$P(M|S_1) = \frac{60}{100}$$

$$P(M|S_2) = \frac{350}{1000}$$

الف) احتمال مطلوب ما، $P(S_1|B)$ است که به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} P(S_1|B) &= \frac{P(S_1 \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(S_1)P(B|S_1)}{\underbrace{P(B)}_{\text{قاعده‌ی بیز}}} \\ &= \frac{P(S_1)P(B|S_1)}{P(S_1)P(B|S_1) + P(S_2)P(B|S_2)} \\ &= \frac{\frac{100}{1100} \times \frac{20}{100}}{\frac{100}{1100} \times \frac{20}{100} + \frac{1000}{1100} \times \frac{50}{1000}} = \frac{2}{7} \end{aligned}$$

ب) برای این بخش داریم:

$$P(S_2 \cap N|F) = \frac{P(S_2 \cap N \cap F)}{P(F)}$$

پیشامد $S_2 \cap N \cap F$ ، پیشامد حالتی است که فرد انتخاب شده، زن بوده، از استان ۲ انتخاب

شود و چشم آبی نباشد. از آنجا که از جامعه‌ی ۱۱۰۰ نفری، ۶۳۰ نفر چپین و ویژگی‌ای دارند در نتیجه:

$$P(S_2 \cap N \cap F) = \frac{630}{1100}$$

و می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} P(S_2 \cap N | F) &= \frac{P(S_2 \cap N \cap F)}{P(F)} \\ &= \frac{P(S_2 \cap N \cap F)}{P(S_1)P(F|S_1) + P(S_2)P(F|S_2)} \\ &= \frac{P(S_2 \cap N \cap F)}{\frac{100}{1100} \times \frac{40}{100} + \frac{1000}{1100} \times \frac{650}{1000}} \\ &= \frac{\frac{630}{1100}}{\frac{100}{1100} \times \frac{40}{100} + \frac{1000}{1100} \times \frac{650}{1000}} \\ &= \frac{21}{23} \end{aligned}$$

کوئیز ۴)

سه جعبه در اختیار داریم. جعبه‌ی ۱ شامل ۷ توپ آبی و ۳ توپ قرمز، جعبه‌ی ۲ شامل ۱ توپ آبی، ۳ توپ قرمز و ۶ توپ زرد و جعبه‌ی ۳ شامل ۷ توپ آبی و ۳ توپ زرد هستند. ابتدا یکی از جعبه‌ها را به تصادف برداشته و سپس توپی از آن جعبه به تصادف برمی‌داریم. اگر توپ بیرون آمده آبی نباشد، با چه احتمالی قرمز است و از جعبه‌ی ۱ یا از جعبه‌ی ۲ بیرون آمده است؟

کوئیز ۵)

سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر رو آمد، تاسی را ۳ بار پرتاب کرده و جمع اعداد رو آمده در ۳ پرتاب را در نظر می‌گیریم. اگر پشت آمد، تاسی را ۴ بار پرتاب کرده و جمع اعداد رو آمده در ۴ پرتاب را در نظر می‌گیریم. اگر جمع اعداد رو آمده‌ی تاس برابر ۵ باشد، با چه احتمالی سکه پشت آمده است؟

کوئیز ۲)

یک عدد دو رقمی را به این صورت می سازیم که هر رقم آن، به صورت تصادفی از بین ارقام ۱ تا ۹ انتخاب شده باشد. با چه احتمالی، عدد ساخته شده بر ۹ بخش پذیر است؟

کوئیز ۵)

سه جعبه داریم که هر یک شامل ۱۰ توپ هستند. در جعبه اول، ۳ توپ آبی و ۷ توپ قرمز، در جعبه دوم، ۳ توپ سفید و ۵ توپ آبی و در جعبه سوم، ۱ توپ قرمز و ۹ توپ سفید هستند. ابتدا یکی از جعبه ها را به تصادف انتخاب کرده و سپس توپی از آن جعبه بیرون می کشیم. اگر توپ مورد نظر سفید باشد، با چه احتمالی از جعبه دوم نیست؟

کوئیز ۸)

تابع جرم احتمال متغیر تصادفی X دارای خاصیت زیر است:

$$6 \Pr\{X = k+2\} - 5 \Pr\{X = k+1\} + \Pr\{X = k\} = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

همچنین $\Pr\{X = 1\} = \frac{7}{12}$. در این صورت، چگالی جرم احتمال متغیر X را بیابید.

کوئیز ۹)

متغیر تصادفی X دارای چگالی احتمال زیر است:

$$f(x) = \frac{a}{2}e^{-ax} + \frac{1}{2}e^{-x}, \quad x > 0.$$

مقدار a را به گونه ای بیابید به طوری که $\mathbb{E}\{X\} = 5$.

کوئیز ۱۰)

سکه ای را ۱۰ بار پرتاب می کنیم. متغیر تصادفی X ، تعداد دفعات رو آمدن سکه در ۵ پرتاب اول و متغیر تصادفی Y ، تعداد دفعات رو آمدن سکه در پرتاب های زوج است. احتمال $\Pr\{X = 5Y\}$ را بیابید.

کوئیز ۱۱)

متغیر تصادفی X ، دارای تابع جرم احتمال زیر است:

2	1	0	-1	x
0.4	0.3	0.2	0.1	$\Pr\{X = x\}$

اگر داشته باشیم $Y = X^2 - 1$ ، در این صورت مقدار $\text{cov}(X, Y)$ را بیابید.