به نام زیبایی

تمرینات سری هفتم سیگنال ها و سیستم ها

سوال ۱)

تبدیل فوریه‌ی پیوسته ی هریک از سیگنال های زیر را به دست آورید.

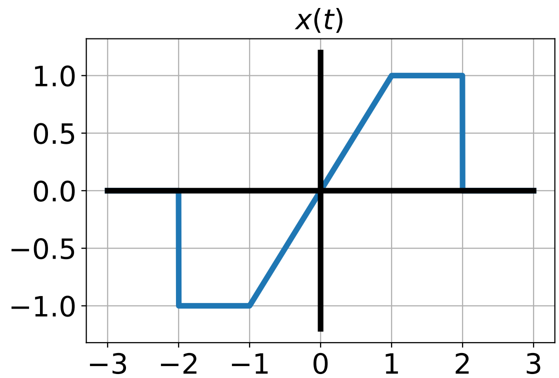
الف) $e^{\alpha t}\cos \omega_\circ t u(t)$ که در آن $\alpha < ۰$.

ب) $te^{\alpha t}\cos \omega_\circ t u(t)$

پ) $\frac{\sin \pi t}{\pi t} \cdot \frac{\sin \pi(t-۱)}{\pi(t-۱)}$

ت) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-|t-۲n|}$

ث)



سوال ۲)

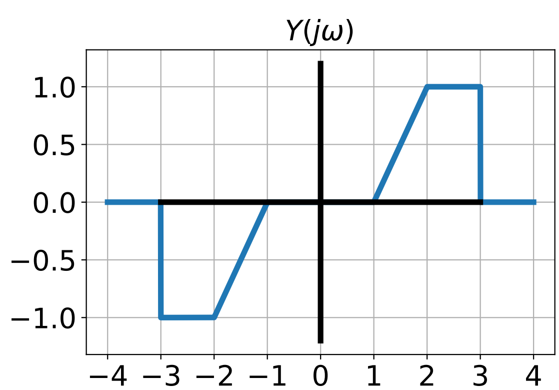
عکس تبدیل فوریه ی هر یک از موارد زیر را به دست آورید.

الف) $X(\omega) = \cos\left(۴\omega + \frac{\pi}{۳}\right)$

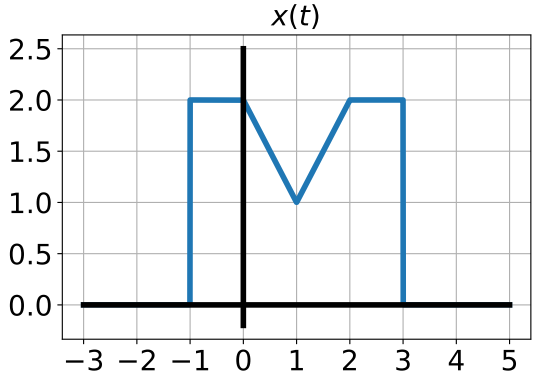
ب) $X(\omega) = ۲[\delta(\omega - ۱) - \delta(\omega + ۱)] + ۳[\delta(\omega - ۲\pi) + \delta(\omega + ۲\pi)]$

پ) $X(\omega) = \frac{۲\sin ۳(\omega - ۲\pi)}{\omega - ۲\pi}$

ت)



سوال ۳)
فرض کنید $X(j\omega)$ تبدیل فوریه ی سیگنال $x(t)$ و به شکل زیر باشد.



در این صورت موارد زیر را محاسبه کنید.
الف) $\measuredangle X(j\omega)$
ب) $X(j0)$
پ) $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)d\omega$
ت) $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{j2\omega}d\omega$
ث) $\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$
ج) تبدیل فوریه معکوس $\Re\{X(j\omega)\}$
(دقت کنید که تمام موارد بالا را باید بدون محاسبه مستقیم $X(j\omega)$ انجام دهید)

سوال ۴)
الف) سه سیستم با پاسخ ضربه‌ی زیر داده شده اند.

$$h_1(t) = u(t)$$
$$h_2(t) = -2\delta(t) + 5e^{-2t}u(t)$$
$$h_3(t) = 2te^{-t}u(t)$$

به کمک تبدیل فوریه، نشان دهید هر سه ی این سیستم ها به ورودی $x(t) = \cos t$ ، خروجی یکسان می دهند.
ب) سیستم دیگری را بیابید که پاسخ یکسانی مانند سه سیستم قبل به ورودی $x(t) = \cos t$ بدهد.
از این تمرین می توان نتیجه گرفت که نمیتوان از روی ورودی تک فرکانس، مشخصه ی سیستم LTI را به طور یکتا یافت.

سوال ۵)
فرض کنید یک سیستم LTI با معادله دیفرانسیل زیر داده شده باشد:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = 2x(t)$$

الف) پاسخ ضربه ی این سیستم را بیابید.
ب) پاسخ این سیستم به ورودی $x(t) = te^{-۲t}u(t)$ چیست؟

سوال ۶)

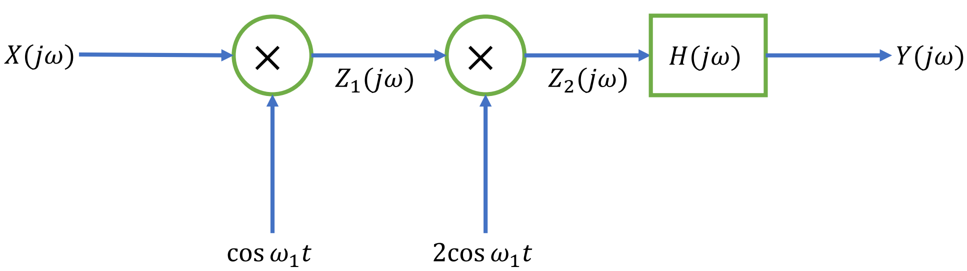
سیستمی را با پاسخ فرکانسی زیر در نظر بگیرید:

$$H(j\omega) = \frac{a - j\omega}{a + j\omega}$$

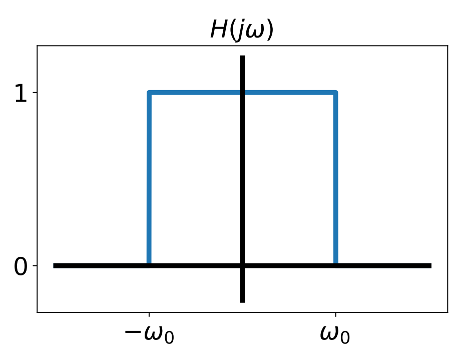
الف) نمودار دامنه و فاز این پاسخ فرکانسی را رسم کنید و پاسخ ضربه ی این سیستم را به دست آورید.
ب) به ازای $a = ۱$، پاسخ این سیستم را به ورودی $x(t) = \cos\frac{t}{\sqrt{۳}} + \cos t + \cos t\sqrt{۳}$ به دست آورید و به طور تقریبی، هردوی ورودی و خروجی را ترسیم کنید.
به چنین سیستمی، فیلتر تمام گذر می گویند؛ زیرا دامنه‌ی تمام فرکانس های ورودی با خروجی یکسان است .

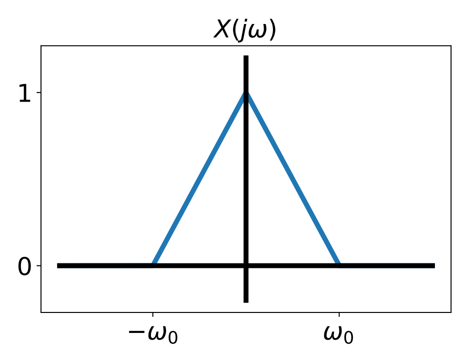
سوال ۷)

الف) نمودار بلوکی سیستم زیر را با ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ در نظر بگیرید. فرض کنید $\omega_۱ > \omega_۰$
.

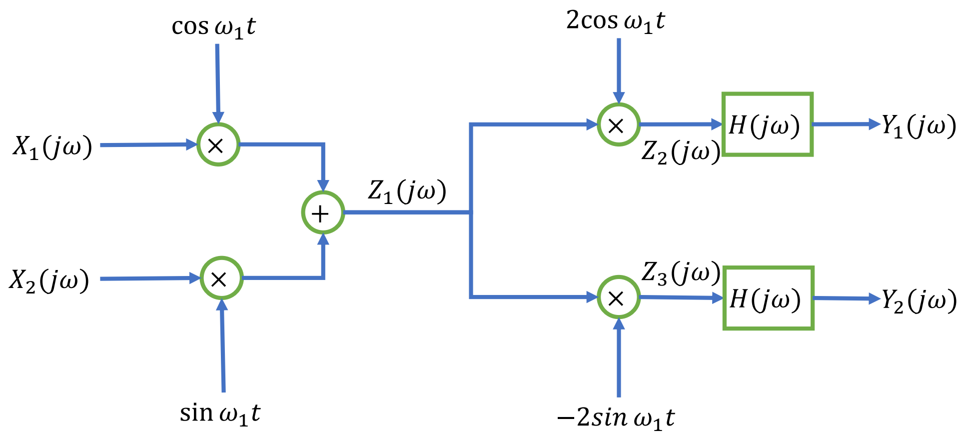


اگر نمودار $X(j\omega)$ و $H(j\omega)$ به شکل زیر باشد، نمودار $Z_۱(j\omega)$ ، $Z_۲(j\omega)$ و $Y(j\omega)$ را رسم‌کنید.

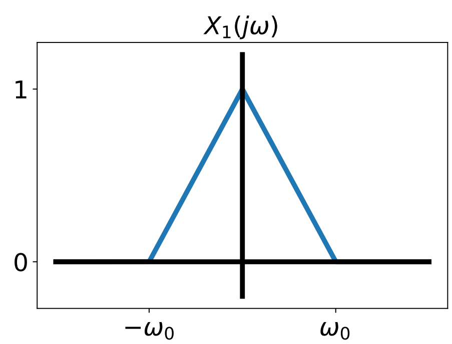


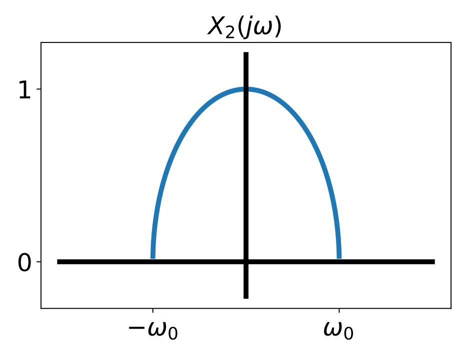


ب) نمودار بلوکی سیستم زیر را با دو ورودی $x_{۱}(t)$ و $x_{۲}(t)$ و دو خروجی $y_{۱}(t)$ و $y_{۲}(t)$ در نظر بگیرید. فرض کنید $\omega_{۱} > \omega_{۰}$.



اگر نمودارهای $X_{۱}(j\omega)$ و $X_{۲}(j\omega)$ به شکل زیر باشد، قسمت حقیقی و موهومی $Z_{۱}(j\omega)$ ، $Z_{۲}(j\omega)$ ، $Z_{۳}(j\omega)$ ، $Y_{۱}(j\omega)$ و $Y_{۲}(j\omega)$ را رسم کنید. نمودار $H(j\omega)$ مانند قسمت قبل است.





سوال ۸)

فرض کنید ورودی یک سیستم LTI با پاسخ فرکانسی $H(j\omega)$، برابر $x(t)$، متناوب با دوره ی T و دارای ضرایب سری فوریه ی a_k باشد.

الف) نشان دهید خروجی $y(t)$ این سیستم متناوب است و دوره تناوب آن را بیابید.

ب) نشان دهید اگر ضرایب سری فوریه ی $y(t)$ برابر b_k باشد، آنگاه:

$$b_k = a_k H(jk\omega_{۰})$$

که در آن $\omega_{۰} = \frac{۲\pi}{T}$.

(راهنمایی: ابتدا سیگنال $y(t)$ را بر حسب $h(t)$ و $x(t)$ نوشته و سپس ضرایب سری فوریه ی $x(t)$ را در حاصل جای گذاری کنید. با ساده سازی، می توانید رابطه ی مورد نظر را اثبات کنید.)

سوال ۹)
سیستم LTI ای با معادله ورودی-خروجی زیر توصیف می شود:

$$y(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau)}{t-\tau}d\tau$$

الف) پاسخ ضربه‌ی این سیستم را به دست آورید.
ب) نشان دهید

$$H(j\omega) = \begin{cases} -j & , \quad \omega > 0 \\ j & , \quad \omega < 0 \end{cases}$$

پ) در چنین سیستمی، اصطلاحاً گفته می شود که $y(t)$ تبدیل هیلبرت $x(t)$ است. بسیاری از اوقات نیز نماد زیر استفاده می شود:

$$y(t) = \hat{x}(t)$$

تبدیل هیلبرت $\cos 3t$ چیست؟
ت) (امتیازی) نشان دهید

$$\hat{\hat{x}}(t) = -x(t)$$

به عبارت دیگر، با دو بار تبدیل هیلبرت گرفتن از یک سیگنال، به قرینه ی آن می رسیم.

سوال ۱۰)
نشان دهید اگر برای دو سیگنال $x(t)$ و $y(t)$ داشته باشیم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = 0$$

در این صورت

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)Y^*(j\omega)d\omega = 0$$

(راهنمایی: مشابه سری فوریه، تبدیل فوریه ی دو سیگنال $x(t)$ و $y(t)$ را در رابطه ی انتگرالی حاصلضرب آنها جایگذاری کرده و نتیجه را ساده کنید.)

سوال ۱۱)
الف) نشان دهید تبدیل فوریه ی $e^{-at}u(t)$ برابر $\frac{1}{a+j\omega}$ است.
ب) به کمک دوگانی و با استفاده از خواص تبدیل فوریه، تبدیل فوریه ی

$$x(t) = \frac{1}{(a+jt)^n}$$

را بیابید.
(راهنمایی: می توانید از جدول ۲-۴ در کتاب اوپنهایم استفاده کنید.)