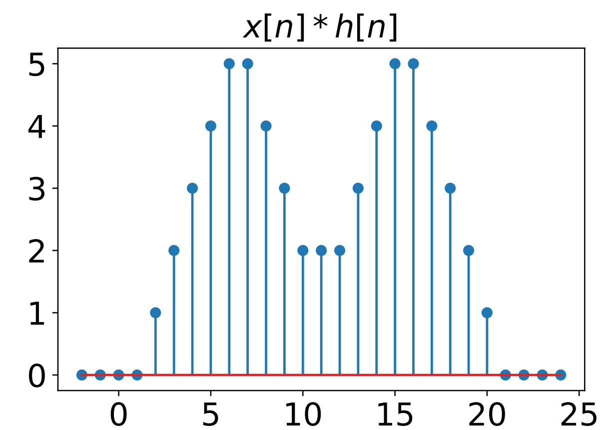
به نام زیبایی
پاسخ تمرینات سری چهارم سیگنال ها و سیستم ها

سوال ۱)

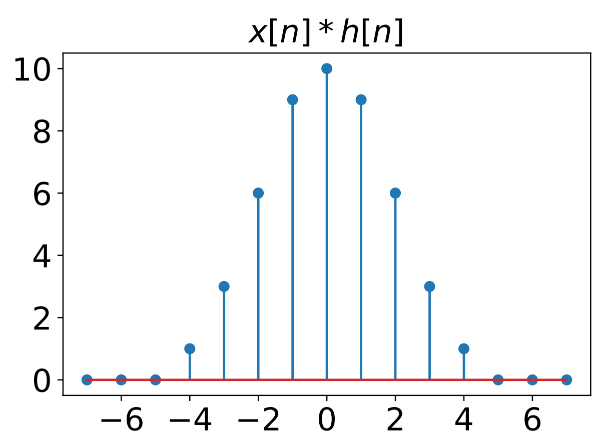
در محاسبه‌ی کانولوشن به روش ترسیمی، باید یک سیگنال را حفظ کرده و سیگنال دیگر را قرینه و شیفت زمانی بدهیم. سپس جمع نمونه های ضرب شده ی دو سیگنال را در یکدیگر به ازای شیفت های مختلف محاسبه کنیم تا خروجی به دست آید.

الف) سیگنال $h[n]$ را حفظ کرده و $x[n]$ را قرینه و شیفت زمانی می دهیم. در این صورت سیگنال $x[-n]$ از ۴− تا ۰ و سیگنال $x[n_0-n]$ از n_0-4 تا n_0 مقدار خواهد داشت. از آنجا که نمونه های $x[n_0-n]$ حداکثر تا n_0 وجود دارند، این سیگنال با سیگنال $h[n]$ به ازای $n_0 < 2$ نمونه ی مشترک ندارد و در نتیجه کانولوشن برابر صفر خواهد بود. شکل ۷، مراحل این کانولوشن را نشان می دهد.



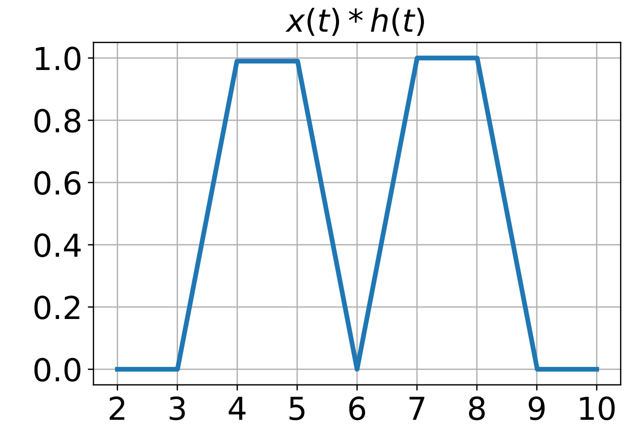
شکل ۱: نتیجه ی کانولوشن دو سیگنال $x[n]$ و $h[n]$

ب)



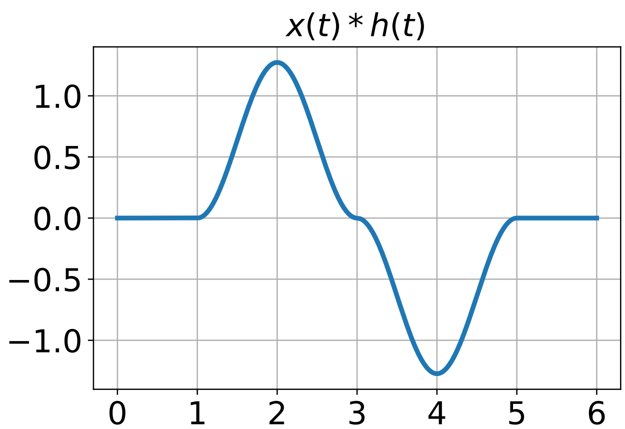
شکل ۲: نتیجه ی کانولوشن دو سیگنال $x[n]$ و $h[n]$

پ)



شکل ۳: کانولوشن دو سیگنال $x[n]$ و $h[n]$

ت)



شکل ۴: کانولوشن دو سیگنال $x[n]$ و $h[n]$

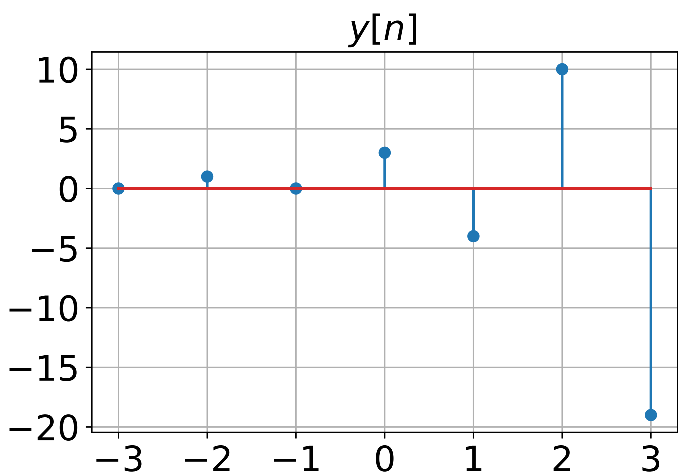
سوال ۲) (!)

سوال ۳)

از آنجا که سیستم در شرایط اولیه ی صفر قرار دارد، خروجی همواره همزمان یا بعد از ورودی شروع می‌شود. در این حالت، چون ورودی تا لحظه ی $t = -۳$ برابر صفر است، خروجی نیز در لحظات -۳ و ماقبل آن صفر خواهد بود و برای لحظات بعد از آن خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
y[-۲] + ۲y[-۳] = x[-۲] = ۱ &\implies y[-۲] = ۱ \\
y[-۱] + ۲y[-۲] = x[-۱] = ۲ &\implies y[-۱] = ۰ \\
y[۰] + ۲y[-۱] = x[۰] = ۳ &\implies y[۰] = ۳ \\
y[۱] + ۲y[۰] = x[۱] = ۲ &\implies y[۱] = -۴ \\
y[۲] + ۲y[۱] = x[۲] = ۲ &\implies y[۲] = ۱۰ \\
y[۳] + ۲y[۲] = x[۳] = ۱ &\implies y[۳] = -۱۹ \\
y[۴] + ۲y[۳] = x[۴] = ۱ &\implies y[۳] = ۳۸
\end{aligned}
$$

پس از لحظه ی ۴، خروجی هر بار -۲ برابر می شود؛ زیرا ورودی برابر صفر است.



شکل ۵: سیگنال $y[n]$

سوال ۴)

از آنجا که رابطه ی سیگنال ضربه با پله به صورت زیر است:

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$$

رابطه ی پاسخ ضربه نیز با پاسخ پله به صورت زیر خواهد بود:

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$$

بنابراین

$$
\begin{aligned}
s[n] &= \sum_{k=-\infty}^{n} (k+1)\alpha^k u[k] \\
&= u[n]\sum_{k=0}^{n}(k+1)\alpha^k \\
&= u[n]\frac{d}{d\alpha}\sum_{k=0}^{n}\alpha^{k+1} \\
&= u[n]\frac{d}{d\alpha}\sum_{k=1}^{n+1}\alpha^{k} \\
&= u[n]\frac{d}{d\alpha}\sum_{k=0}^{n+1}\alpha^{k} \\
&= u[n]\frac{d}{d\alpha}\frac{1-\alpha^{n+2}}{1-\alpha} \\
&= u[n]\left[\frac{1}{(1-\alpha)^2} - \frac{d}{d\alpha}\frac{\alpha^{n+2}}{1-\alpha}\right] \\
&= u[n]\left[\frac{1}{(1-\alpha)^2} - \frac{(n+2)\alpha^{n+1}(1-\alpha)+\alpha^{n+2}}{(1-\alpha)^2}\right] \\
&= u[n]\left[\frac{1}{(1-\alpha)^2} + \frac{(n+2)\alpha^{n+1}}{\alpha-1} - \frac{\alpha^{n+2}}{(1-\alpha)^2}\right] \\
&= u[n]\left[\frac{1}{(1-\alpha)^2} + \frac{(n+1)\alpha^{n+1}}{\alpha-1} + \frac{\alpha^{n+1}}{\alpha-1} - \frac{\alpha^{n+2}}{(1-\alpha)^2}\right] \\
&= u[n]\left[\frac{1}{(1-\alpha)^2} + \frac{(n+1)\alpha^{n+1}}{\alpha-1} - \frac{\alpha^{n+1}}{(\alpha-1)^2}\right]
\end{aligned}
$$

سوال ۵)

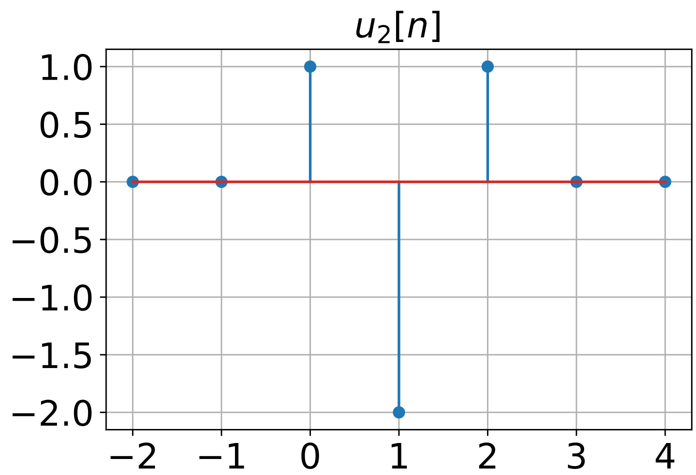
الف) این سیستم، سیگنال را یک واحد به راست شیفت می دهد و از خود سیگنال کم می کند؛ در واقع معادل مشتق گیر در حوزه ی پیوسته است.

ب) می توان نوشت:

$$
\begin{aligned}
u_2[n] = u_1[n] * u_1[n] &= \{\delta[n] - \delta[n-1]\} \\
&= \{\delta[n] - \delta[n-1]\} = \delta[n] - 2\delta[n-1] + \delta[n-2]
\end{aligned}
$$

هردوی این سیگنال ها مانند شکل ۶ هستند؛ بنابراین پایه ی استقرا ثابت است. برای اثبات حکم به ازای $k+1$، فرض می کنیم حکم برای k صادق است. بنابراین کافی است نشان دهیم

$$
u_k[n] * u_1[n] = \frac{(-1)^n (k+1)!}{n!(k+1-n)!}\Big(u[n] - u[n-k-2]\Big)
$$



شکل ۶: سیگنال $u_۲[n]$

برای اثبات تساوی قبل، رابطه ی $u_k[n]$ را جایگذاری می کنیم:

$$\begin{aligned} u_k[n] * u_۱[n] &= \left\{\frac{(-۱)^n k!}{n!(k-n)!}\Big(u[n]-u[n-k-۱]\Big)\right\} * \{\delta[n]-\delta[n-۱]\} \\ &= \left\{\frac{(-۱)^n k!}{n!(k-n)!}\Big(u[n]-u[n-k-۱]\Big)\right\} \\ &- \left\{\frac{(-۱)^{n-۱} k!}{(n-۱)!(k-n+۱)!}\Big(u[n-۱]-u[n-k-۲]\Big)\right\} \\ &= \left\{\frac{(-۱)^n (k-n+۱) k!}{n!(k-n+۱)!}\Big(u[n]-u[n-k-۱]\Big)\right\} \\ &+ \left\{\frac{(-۱)^n k!}{(n-۱)!(k-n+۱)!}\Big(u[n-۱]-u[n-k-۲]\Big)\right\} \end{aligned}$$

مقدار این سیگنال در لحظات ۰ و $k+۱$ برابر است با:

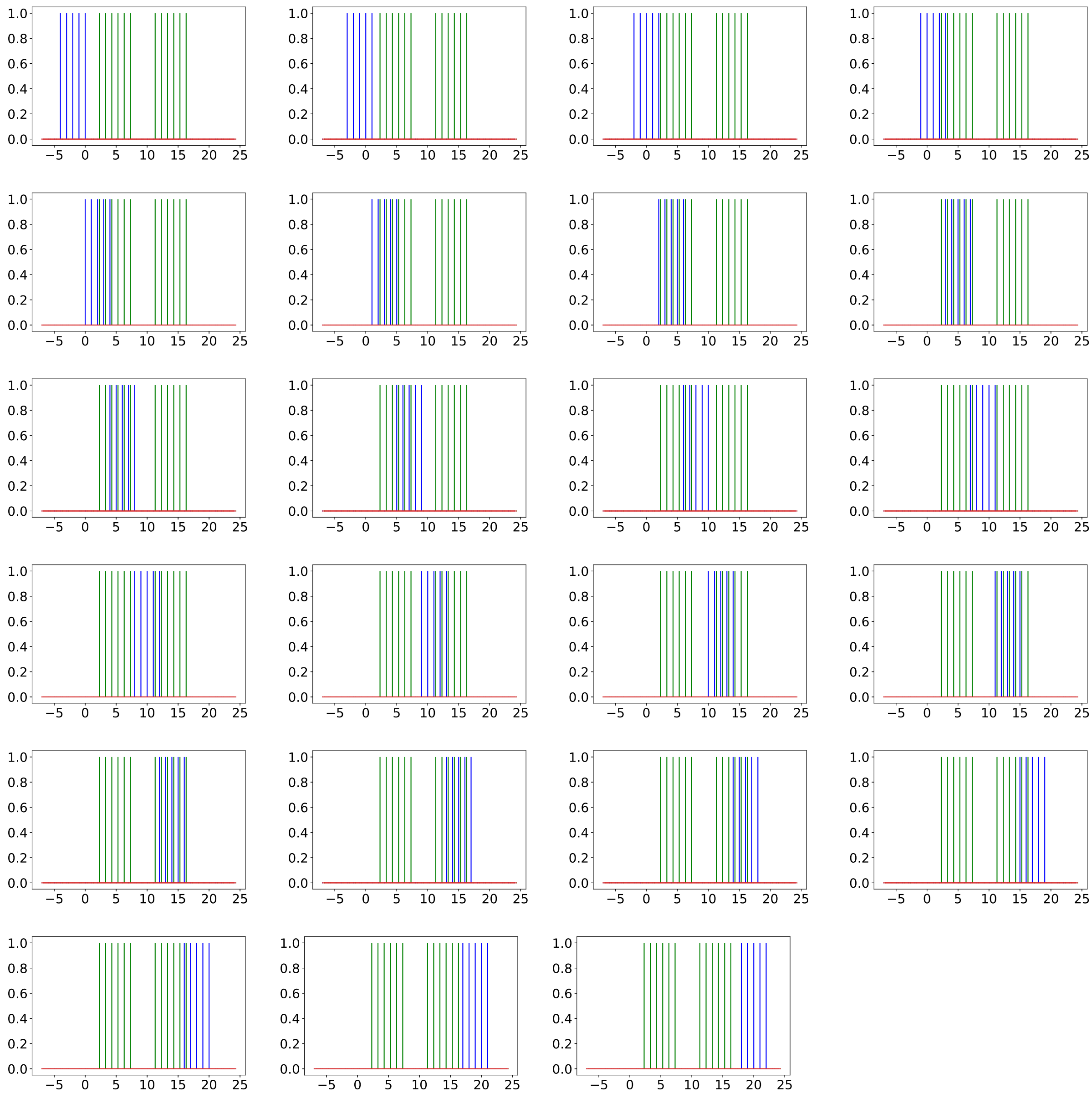
$$u_k[n] * u_۱[n]\Big|_{n=۰} = ۱$$

$$u_k[n] * u_۱[n]\Big|_{n=k+۱} = (-۱)^{k+۱}$$

همچنین در لحظات $۱ \le n \le k+۱$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} u_k[n] * u_۱[n] &= \frac{(-۱)^n (k-n+۱) k!}{n!(k-n+۱)!} + \frac{(-۱)^n k!}{(n-۱)!(k-n+۱)!} \\ &= \frac{(-۱)^n k!}{n!(k-n+۱)!}(k-n+۱+n) \\ &= \frac{(-۱)^n (k+۱)!}{n!(k-n+۱)!} \end{aligned}$$

همچنین مقدار این سیگنال در سایر لحظات برابر ۰ است. ملاحظه می شود که این سیگنال در تمام لحظات، با سیگنال $\frac{(-1)^n(k+1)!}{n!(k+1-n)!}\Big(u[n]-u[n-k-2]\Big)$ برابر است و در نتیجه حکم ثابت است ■



شکل ۷: سیگنال های $x[n_0-n]$ و $h[n]$ از سوال ۱ قسمت الف، به ترتیب به رنگ آبی و سبز هستند.