فهرست مطالب

فصل ۱

مبانی احتمال و جبر مجموعه ها

پاسخ سوال۱) از اصل سوم احتمال، برای هر دو مجموعه‌ی ناسازگار A و B داریم

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

ازآنجاکه A و A' طبق تعریف ناسازگارند، بنابراین

$$P(A \cup A') = P(A) + P(A').$$

از طرفی طبق تعریف،

$$A \cup A' = S$$

که S فضای نمونه است. در نتیجه

$$P(A) + P(A') = 1.$$

بر اساس اصل اول احتمال، احتمال هر مجموعه مقداری نامنفی است؛ در نتیجه

$$P(A) = 1 - P(A') \leq 1$$

و اثبات کامل است ■

پاسخ سوال ۲) طبق اصل ضرب، تعداد تمام اعداد سه رقمی متمایزی که می توان به این روش ساخت، برابر است با $9^3 = 729$. تعداد ارقام فرد از بین اعداد ۱ تا ۹، برابر ۵ است

(ارقام ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹). در نتیجه، تعداد اعداد سه رقمی ای که تمام ارقام آن فرد هستند را می توان دوباره طبق اصل ضرب به $125 = 5^3$ طریق ممکن ساخت. بنابراین احتمال مطلوب عبارتست از

$$p = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{125}{729}$$

پاسخ سوال ۳) تعداد حالات برداشتن ۲۰ توپ، برابر $\binom{100}{20}$ بوده و تعداد حالات مطلوب، برابر $\binom{40}{5}\binom{60}{15}$ است؛ لذا احتمال مطلوب برابر $\frac{\binom{40}{5}\binom{60}{15}}{\binom{100}{20}}$ خواهد بود.

پاسخ:

اصولاً در پرسشهای احتمالاتی، باید فضای نمونه و پیشامدها را در ابتدا به درستی تعریف کرد. اینجا نیز چنین قاعده‌ای را پی می‌گیریم.

از آنجا که یک فرد خاص می‌تواند زن یا مرد باشد یا چشم آبی باشد یا نباشد، چهار پیشامد ممکن وجود دارد:

$M =$ پیشامد مرد بودن
$F =$ پیشامد زن بودن
$B =$ پیشامد چشم آبی بودن
$N =$ پیشامد چشم آبی نبودن
$S_1 =$ پیشامد اهل استان ۱ بودن
$S_2 =$ پیشامد اهل استان ۲ بودن

صورت سوال، اطلاعات احتمالاتی زیر را به ما می‌دهد:

$$P(S_1) = \frac{100}{1100}$$
$$P(S_2) = \frac{1000}{1100}$$
$$P(B|S_1) = \frac{20}{100}$$
$$P(B|S_2) = \frac{50}{1000}$$
$$P(M|S_1) = \frac{60}{100}$$
$$P(M|S_2) = \frac{350}{1000}$$

الف) احتمال مطلوب ما، $P(S_1|B)$ است که به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} P(S_1|B) &= \frac{P(S_1 \cap B)}{P(B)} \\ &= \underbrace{\frac{P(S_1)P(B|S_1)}{P(B)}}_{\text{قاعده‌ی بیز}} \\ &= \frac{P(S_1)P(B|S_1)}{P(S_1)P(B|S_1) + P(S_2)P(B|S_2)} \\ &= \frac{\frac{100}{1100} \times \frac{20}{100}}{\frac{100}{1100} \times \frac{20}{100} + \frac{1000}{1100} \times \frac{50}{1000}} = \frac{2}{7} \end{aligned}$$

ب) برای این بخش داریم:

$$P(S_2 \cap N|F) = \frac{P(S_2 \cap N \cap F)}{P(F)}$$

پیشامد $F \cap N \cap S_2$، پیشامد حالتی است که فرد انتخاب شده، زن بوده، از استان ۲ انتخاب شود و چشم آبی نباشد. از آنجا که از جامعه‌ی ۱۱۰۰ نفری، ۶۳۰ نفر چنین ویژگی‌ای دارند در نتیجه:

$$P(S_2 \cap N \cap F) = \frac{630}{1100}$$

و می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
P(S_2 \cap N|F) &= \frac{P(S_2 \cap N \cap F)}{P(F)} \\
&= \frac{P(S_2 \cap N \cap F)}{P(S_1)P(F|S_1) + P(S_2)P(F|S_2)} \\
&= \frac{P(S_2 \cap N \cap F)}{\frac{100}{1100} \times \frac{40}{100} + \frac{1000}{1100} \times \frac{650}{1000}} \\
&= \frac{\frac{630}{1100}}{\frac{100}{1100} \times \frac{40}{100} + \frac{1000}{1100} \times \frac{650}{1000}} \\
&= \frac{21}{23}
\end{aligned}$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

پاسخ سوال ۴)

سوال ۱) الف) فضای نمونه، مجموعه‌ی تمام وقایع ساده‌ی محتمل است که عبارتست از:

$$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

ب) از آنجا که واقعه طبق تعریف یک زیر مجموعه از فضای نمونه است و فضای نمونه ۸ عضوی است، این مسئله دارای $256 = 2^8$ واقعه محتمل است که اگر تهی را نامحتمل بگیریم، ۲۵۵ وافعه‌ی محتمل خواهیم داشت.

پ) طبق تعریف کلاسیک احتمال، احتمال زیرمجموعه‌ی A از مجموعه ی S عبارتست از

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

از طرفی واقعه‌ی اینکه در پرتاب اول و دوم سکه نتیجه یکسان باشد (در پرتاب سوم نتیجه دلخواه است)، دارای چهار عضو HHH، HHT، TTT و TTH است که نتیجه می دهد:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

سوال ۲) الف و ب و پ)

$$A \cap B = \{4\}$$
$$A - B = \{1, 5\}$$

$$A \times B = \{(1,2), (1,3), (1,4), (4,2), (4,3), (4,4), (5,2), (5,3), (5,4)\}$$

ت) برای محاسبه‌ی $(A \cup B) \cap C$ داریم:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

بنابراین

$$(A \cup B) \cap C = \{2, 5\}$$

همچنین برای محاسبه‌ی $(A\cap C)\cup(B\cap C)$:

$$A\cap C=\{5\} \quad , \quad B\cap C=\{2\}$$

پس خواهیم داشت

$$(A\cap C)\cup(B\cap C)=\{2,5\}$$

که نتیجه می دهد:

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$$

سوال ۳) از اصل ۳ کولموگروف می توان دریافت که اگر دو مجموعه ی S و T ناسازگار باشند، خواهیم داشت:

$$P(S\cup T)=P(S)+P(T)$$

در این مسئله با تعریف

$$S=A-B$$
$$T=A\cap B$$

می دانیم که مجموعه‌ی $A-B$ شامل عناصر B نیست؛ در حالی که عناصر مجموعه ی $A\cap B$ در B وجود دارند؛ پس نتیجه گیری زیر به دست می آید:

$$[A-B]\cap[A\cap B]=\emptyset \implies P(A)=P([A-B]\cup[A\cap B])=P(A-B)+P(A\cap B)$$

سوال ۱) الف) از آنجا که سکه دارای ۲ حالت و تاس دارای ۶ حالت است، طبق اصل ضرب ۱۲ حالت مختلف برای پیشامد های ساده خواهیم داشت؛ یعنی فضای شدنی مسئله‌ی ما ۱۲ حالتی است. از این ۱۲ حالت فقط حالاتی که سکه رو بیاید و تاس یکی از اعداد ۱–۳–۵ شود مدنظر است که تعداد این حالات خاص ۳ تاست. در نتیجه احتمال مطلوب $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$ خواهد بود.

ب) پیشامد اینکه سکه به رو بیفتد را با A و اینکه تاس فرد شود را با B نمایش می دهیم. هدف محاسبه‌ی $P(A\cup B)$ که می دانیم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

از طرفی

$$P(A) = \frac{1}{2} \quad , \quad P(B) = \frac{1}{2} \quad , \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

بنابراین

$$P(A \cup B) = \frac{3}{4}$$

سوال ۲) الف)

$$S = \{3, 6, \text{پشت}, \text{رو}\}$$

ب) سکه زمانی رو می آید که تاس مضرب ۳ نشود و خود سکه هم به رو بیفتد. احتمال اینکه تاس مضرب ۳ نشود برابر $\frac{2}{3}$ و احتمال اینکه سکه در صورت پرتاب شدن به رو بیفتد برابر $\frac{1}{2}$ است؛ پس احتمال مطلوب برابر حاصلضرب دو احتمال قبلی یعنی $\frac{1}{3}$ خواهد بود.

پ) اگر پیشامد ۱ آمدن تاس را با A و پشت آمدن سکه را با B نمایش دهیم، در این صورت مطلوبست

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

از طرفی

$$P(A) = \frac{1}{6} \quad , \quad P(B) = \frac{1}{3}$$

تاس با احتمال $\frac{1}{6}$، ۱ می آید که در این صورت منجر به پرتاب سکه خواهد شد و سکه هم با احتمال 0.5 به پشت می افتد؛ پس $P(A \cap B)$ برابر $\frac{1}{12} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6}$ و $P(A \cup B)$ برابر $\frac{5}{12}$ خواهد بود.

سوال ۳) هنگامی که از اشکال دوبعدی بهره می گیریم، جهت استفاده از مفهوم اندازه‌ی پیشامد ها، باید مساحت آن ها را در نظر بگیریم.

الف) نقطه ای از داخل مربع به مساحت ۴ انتخاب شده است. چون پیشامد مطلوب، انتخاب نقطه از داخل دایره است و دایره به طور کامل درون مربع قرار دارد، احتمال مطلوب

عبارت است از:

$$P(A) = \frac{\text{مساحت دایره}}{\text{مساحت مربع}} = \frac{\pi}{4}$$

ب) از آنجا که قطر ضخامتی ندارد (مساحت آن برابر صفر است؛ برای درک این موضوع، به جای قطر یک نوار نازک در نظر بگیرید و ضخامت آن را به سمت صفر میل دهید) احتمال مطلوب برابر ۰ خواهد بود.

پ) مکمل این پیشامد عبارتست از اینکه فاصله ی نقطه از دست کم یکی از رأس های مربع کمتر از 0.5 باشد. به ازای هر راس مربع، مکان هندسی نقاطی از داخل مربع که فاصله‌ی آنها از راس مورد نظر کمتر از 0.5 باشد، یه ربع دایره به مرکز آن راس و شعاع 0.5 داخل مربع خواهد بود. ۴ راس در مربع داریم؛ پس ۴ تا از این ربع دایره ها خواهیم داشت که همپوشانی ندارند؛ پس مساحت مکمل پیشامد مورد نظر عبارتست از:

$$\text{مساحت پیشامد A'} = 4 \times \text{مساحت هر ربع دایره} = \frac{\pi}{4}$$

و برای احتمال مطلوب داریم:

$$P(A) = \frac{\text{مساحت پیشامد A}}{\text{مساحت مربع}} = \frac{16-\pi}{16} = 1 - \frac{\pi}{16}$$

سوال ۴) الف) یک عدد زمانی به ۳ بخش پذیر است که جمع ارقام آن به ۳ بخش پذیر باشد. مجموعه‌ی این اعداد عبارتست از:

$$S = \{111, 222, 210, 201, 120, 102\} \implies |S| = 6$$

ب) تمام اعداد ۳ رقمی ای که با این ارقام ساخته می شوند، یا دارای صدگان ۱ یا ۲ هستند. تعداد اعداد سه رقمی و سه رقمی زوج که دارای صدگان ۱ یا ۲ باشند، به ترتیب برابر ۹ و ۶ خواهد بود. بنابراین احتمال مطلوب عبارتست از:

$$P(A) = \frac{6+6}{9+9} = \frac{2}{3}$$

سوال ۱) الف) فضای نمونه، مجموعه‌ی تمام وقایع ساده‌ی محتمل است که عبارتست از:

$$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

ب) از آنجا که واقعه طبق تعریف یک زیر مجموعه از فضای نمونه است و فضای نمونه ۸ عضوی است، این مسئله دارای $2^8 = 256$ واقعه محتمل است که اگر تهی را نامحتمل بگیریم، ۲۵۵ واقعه‌ی محتمل خواهیم داشت.

پ) طبق تعریف کلاسیک احتمال، احتمال زیرمجموعه‌ی A از مجموعه ی S عبارتست از

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

از طرفی واقعه‌ی اینکه در پرتاب اول و دوم سکه نتیجه یکسان باشد (در پرتاب سوم نتیجه دلخواه است)، دارای چهار عضو HHH، HHT، TTT و TTH است که نتیجه می دهد:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

سوال ۲) الف و ب و پ)

$$A \cap B = \{4\}$$
$$A - B = \{1, 5\}$$

$$A \times B = \{(1,2), (1,3), (1,4), (4,2), (4,3), (4,4), (5,2), (5,3), (5,4)\}$$

ت) برای محاسبه‌ی $(A \cup B) \cap C$ داریم:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

بنابراین

$$(A \cup B) \cap C = \{2, 5\}$$

همچنین برای محاسبه‌ی $(A \cap C) \cup (B \cap C)$:

$$A \cap C = \{5\} \quad , \quad B \cap C = \{2\}$$

پس خواهیم داشت

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) = \{2, 5\}$$

که نتیجه می دهد:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

سوال ۳) از اصل ۳ کولموگروف می توان دریافت که اگر دو مجموعه ی S و T ناسازگار باشند، خواهیم داشت:

$$P(S \cup T) = P(S) + P(T)$$

در این مسئله با تعریف

$$S = A - B$$
$$T = A \cap B$$

می دانیم که مجموعه‌ی $A - B$ شامل عناصر B نیست؛ در حالی که عناصر مجموعه ی $A \cap B$ در B وجود دارند؛ پس نتیجه گیری زیر به دست می آید:

$$[A-B] \cap [A \cap B] = \emptyset \implies P(A) = P([A-B] \cup [A \cap B]) = P(A-B) + P(A \cap B)$$

سوال ۱) الف) از آنجا که سکه دارای ۲ حالت و تاس دارای ۶ حالت است، طبق اصل ضرب ۱۲ حالت مختلف برای پیشامدهای ساده خواهیم داشت؛ یعنی فضای شدنی مسئله‌ی ما ۱۲ حالتی است. از این ۱۲ حالت فقط حالاتی که سکه رو بیاید و تاس یکی از اعداد ۱–۳–۵ شود مدنظر است که تعداد این حالات خاص ۳ تاست. در نتیجه احتمال مطلوب $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ خواهد بود.

ب) پیشامد اینکه سکه به رو بیفتد را با A و اینکه تاس فرد شود را با B نمایش می دهیم. هدف محاسبه‌ی $P(A \cup B)$ که می دانیم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

از طرفی

$$P(A) = \frac{1}{2} \quad , \quad P(B) = \frac{1}{2} \quad , \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

بنابراین
$$P(A \cup B) = \frac{3}{4}$$

سوال ۲) الف)
$$S = \{3, 6, \text{پشت}, \text{رو}\}$$

ب) سکه زمانی رو می آید که تاس مضرب ۳ نشود و خود سکه هم به رو بیفتد. احتمال اینکه تاس مضرب ۳ نشود برابر $\frac{2}{3}$ و احتمال اینکه سکه در صورت پرتاب شدن به رو بیفتد برابر $\frac{1}{2}$ است؛ پس احتمال مطلوب برابر حاصلضرب دو احتمال قبلی یعنی $\frac{1}{3}$ خواهد بود.

پ) اگر پیشامد ۱ آمدن تاس را با A و پشت آمدن سکه را با B نمایش دهیم، در این صورت مطلوبست
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
از طرفی
$$P(A) = \frac{1}{6} \quad , \quad P(B) = \frac{1}{3}$$
تاس با احتمال $\frac{1}{6}$، ۱ می آید که در این صورت منجر به پرتاب سکه خواهد شد و سکه هم با احتمال 0.5 به پشت می افتد؛ پس $P(A \cap B)$ برابر $\frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$ و $P(A \cup B)$ برابر $\frac{5}{12}$ خواهد بود.

سوال ۳) هنگامی که از اشکال دوبعدی بهره می گیریم، جهت استفاده از مفهوم اندازه‌ی پیشامدها، باید مساحت آن ها را در نظر بگیریم.

الف) نقطه ای از داخل مربع به مساحت ۴ انتخاب شده است. چون پیشامد مطلوب، انتخاب نقطه از داخل دایره است و دایره به طور کامل درون مربع قرار دارد، احتمال مطلوب عبارت است از:
$$P(A) = \frac{\text{مساحت دایره}}{\text{مساحت مربع}} = \frac{\pi}{4}$$

ب) از آنجا که قطر ضخامتی ندارد (مساحت آن برابر صفر است؛ برای درک این موضوع،

به جای قطر یک نوار نازک در نظر بگیرید و ضخامت آن را به سمت صفر میل دهید) احتمال مطلوب برابر ۰ خواهد بود.

پ) مکمل این پیشامد عبارتست از اینکه فاصله ی نقطه از دست کم یکی از رأس های مربع کمتر از 0.5 باشد. به ازای هر راس مربع، مکان هندسی نقاطی از داخل مربع که فاصله‌ی آنها از راس مورد نظر کمتر از 0.5 باشد، یه ربع دایره به مرکز آن راس و شعاع 0.5 داخل مربع خواهد بود. ۴ راس در مربع داریم؛ پس ۴ تا از این ربع دایره ها خواهیم داشت که همپوشانی ندارند؛ پس مساحت مکمل پیشامد مورد نظر عبارتست از:

$$\text{مساحت پیشامد A'} = 4 \times \text{مساحت هر ربع دایره} = \frac{\pi}{4}$$

و برای احتمال مطلوب داریم:

$$P(A) = \frac{\text{مساحت پیشامد A}}{\text{مساحت مربع}} = \frac{16-\pi}{16} = 1 - \frac{\pi}{16}$$

سوال ۴) الف) یک عدد زمانی به ۳ بخش پذیر است که جمع ارقام آن به ۳ بخش پذیر باشد. مجموعه‌ی این اعداد عبارتست از:

$$S = \{111, 222, 210, 201, 120, 102\} \implies |S| = 6$$

ب) تمام اعداد ۳ رقمی ای که با این ارقام ساخته می شوند، یا دارای صدگان ۱ یا ۲ هستند. تعداد اعداد سه رقمی و سه رقمی زوج که دارای صدگان ۱ یا ۲ باشند، به ترتیب برابر ۹ و ۶ خواهد بود. بنابراین احتمال مطلوب عبارتست از:

$$P(A) = \frac{6+6}{9+9} = \frac{2}{3}$$

سوالات ۱۳، ۲۲ ، ۲۴ و ۲۵ از کتاب غیرمرجع (کتاب Probability, Random Variables and Stochastic Processes از پاپولیس)

سوالات ۱۳ و ۲۵ از کتاب غیرمرجع، به دلیل کاربرد متغیرهای تصادفی سوالات امتیازی محسوب می‌شوند.

سوال ۱۳) تعریف کنید

$$f(t_0) \triangleq P\{t \geq t_0\}$$

در اینصورت باید نشان دهیم

$$P\Big([t_0 \leq t \leq t_0 + t_1] \cap [t \geq t_0]\Big) = f(t_0)\Big[1 - f(t_1)\Big]$$

یا به عبارت دیگر

$$P(t \geq t_0) - P(t \geq t_0 + t_1) = f(t_0) - f(t_0)f(t_1)$$

طبق تعریف

$$f(t_0) - f(t_0 + t_1) = f(t_0) - f(t_0)f(t_1)$$

یا معادلا

$$f(t_0 + t_1) = f(t_0)f(t_1)$$

می‌توان ثابت کرد تنها تابع پیوسته ای که شرط بالا را برآورده می‌کند، تابع نمایی است بنابراین $f(t_0) = e^{-ct_0}$ که $c > 0$ و اثبات کامل است ■

سوال ۲۲) می دانیم که برای استقلال رخدادهای $A_1, A_2, \cdots, A_n$ باید هر ترکیب چندتایی از این رخدادها مستقل باشند؛ یعنی هر دوتایی از آنها، هر سه تایی از آنها، ... و همه‌ی n تا از آنها. چون دقیقا $\binom{n}{k}$ ترکیب k تایی از این مجموعه ها وجود دارد، در اینصورت باید دقیقا

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} = 2^n - n - 1$$

معادله داشته باشیم.

سوال ۲۴) (در این مسئله بهتر است خرابی هر دو لامپ را یک پیشامد در نظر بگیریم؛ زیرا تنها این پیشامد به همراه پیشامد انتقاب جعبه مورد سوال است. هر چند مسئله را می توان

از طریق تعریف یک پیشامد برای هر لامپ نیز حل کرد. این هنر فرد است که پیشامدها و رخدادها را به صورت **کاملا درست و واضح** و البته تا حد امکان **حداقلی** تعریف کند تا دقیقا همان مسئله ای را حل کند که از او خواسته شده و البته همان مسئله را هم به صورت خلاصه و حداقلی حل نماید. تناقض برتراند، نمونه‌ی بسیار خوبی از حل مسئله‌ی احتمالی به چند روش ممکن فقط بر اساس تخصیص احتمال های مختلف به رخدادهاست.)

الف)

$$A = \{\text{پیشامد خرابی هر دو لامپ}\}$$

$$B = \{\text{پیشامد انتخاب جعبه‌ی ۱}\}$$

در این سوال داریم

$$P(A|B) = \frac{\binom{100}{2}}{\binom{1000}{2}} \approx 0.01$$

$$P(A|B^c) = \frac{\binom{100}{2}}{\binom{2000}{2}} \approx 0.0025$$

$$P(B) = \frac{1}{2}$$

و مطلوب ما $P(A)$ است؛ در اینصورت طبق قاعده‌ی احتمال کل

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B)P(A|B) + P(B^c)P(A|B^c) \\ &= \frac{1}{2}(0.01 + 0.0025) \\ &= 0.0063 \end{aligned}$$

ب) مطلوب ما $P(B|A)$ است. در اینصورت

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(AB)}{P(A)} \\ &= \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)} \\ &= \frac{0.5 \times 0.01}{0.0063} \\ &= 0.7937 \end{aligned}$$

این احتمال، احتمال قابل توجهی است زیرا درصد تعداد لامپ‌های خراب در جعبه‌ی ا بیشتر است.

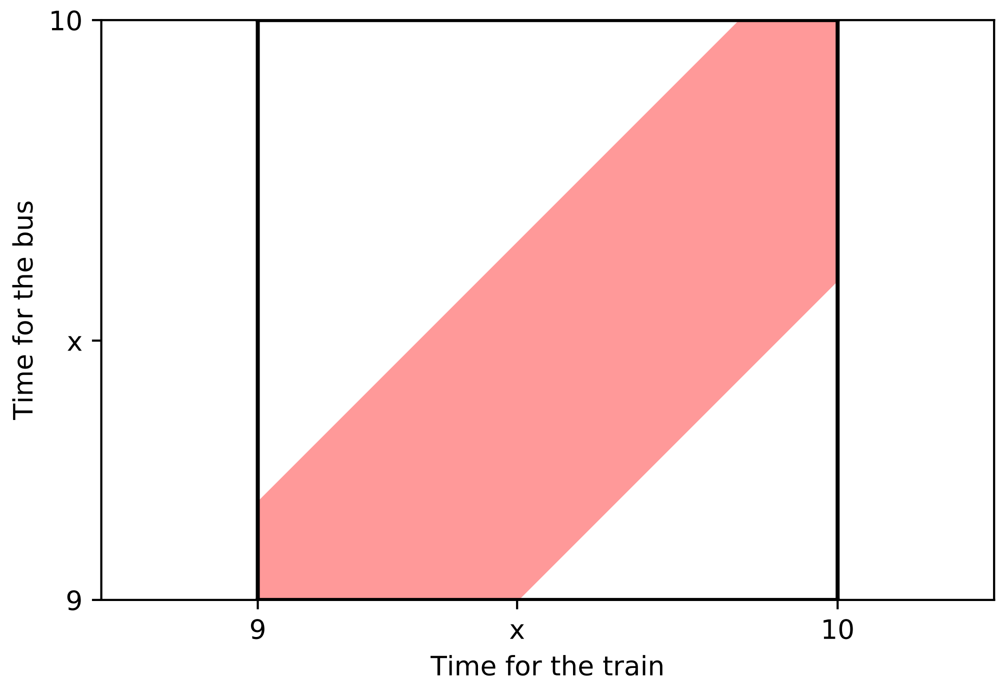
سوال ۲۵) اگر X و Y را به ترتیب متغیرهای تصادفی ورود قطار و اتوبوس به ایستگاه بدانیم، این متغیرها دارای توزیع یکنواخت بین ساعتهای ۹ و ۱۰ و مستقل هستند. در اینصورت قطار بازه‌ی زمانی $\left(X, X+\frac{1}{6}\right)$ و اتوبوس بازه‌ی زمانی $(Y, Y+x)$ را اشغال می کند. مکمل این پیشامد، حالتی است که اتوبوس و قطار یکدیگر را ملاقات نکنند؛ یعنی

$$Y > X + \frac{1}{6} \qquad \text{یا} \qquad Y + x < X$$

در اینصورت پیشامد مطلوب ما خواهد بود:

$$X - x < Y < X + \frac{1}{6}$$

که مساحت ناحیه‌ی زیر است:



مساحت ناحیه‌ی هاشور نخورده برابر است با

$$\frac{25}{72} + \frac{(1-x)^2}{2}$$

این مساحت باید برابر $\frac{1}{2}$ باشد که در این‌صورت مقدار x برابر $1 - \frac{\sqrt{11}}{6} \approx 0.4472\text{h} \approx$ ۲۷ دقیقه محاسبه می شود.

سوالات ۱۳، ۲۲ و ۱۲۴ از کتاب مرجع (کتاب Probability and Statistics از پاپولیس)

سوال ۱۳) این مسئله به کمک قانون احتمال کل و استفاده از تعریف احتمال شرطی به راحتی قابل حل است

سوال ۲۲) مشابه سوال ۱۲۲ از کتاب غیر مرجع.

سوال ۲۴) رشته‌ی لامپ زمانی کار می‌کند که تمام لامپ های آن سالم باشند (تقسیم ولتاژ و خاصیت سری بودن؛ در حالت موازی، کافی است حداقل یکی از لامپ ها کار کند به دلیل تقسیم جریان) در اینصورت خواهیم داشت:

$$p = (1 - 0.01)^{50} \approx 0.61$$

سوال ۱)

$$\begin{aligned} P(F) &= 0.37 \\ P(M) &= 0.43 \\ P(D|M) &= 0.15 \\ P(D|F) &= 0.25 \end{aligned}$$

$P(D|M \cup F)$ مطلوب است. در اینصورت داریم

$$\begin{aligned} P(D|M \cup F) &= \frac{P(D \cap [M \cup F])}{P(M \cup F)} \\ &= \frac{P([D \cap M] \cup [D \cap F])}{P(M) + P(F)} \\ &= \frac{P(D \cap M) + P(D \cap F)}{P(M) + P(F)} \\ &= \frac{P(M)P(D|M) + P(F)P(D|F)}{P(M) + P(F)} \\ &= \frac{0.37 \times 0.25 + 0.43 \times 0.15}{0.8} \\ &\approx 0.20 \end{aligned}$$

این مسئله را به گونه‌ی دیگری نیز می توان حل کرد. از آنجا که به طور کل کودکان در سوال مطرح نمی‌شوند نسبت جمعیت زنان و مردان بزرگسال را به کل بزرگسالان محاسبه می کنیم. به طور کل، 53.75% جمعیت بزرگسالان را مردان و 46.25% را زنان تشکیل می دهند.

بنابراین می توان نوشت

$$P(M) = 0.5375$$
$$P(F) = 0.4625$$

و مطلوب $P(D)$ خواهد بود، در این صورت

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D \cap M) + P(D \cap F) \\ &= P(D|M)P(M) + P(D|F)P(F) \\ &= 0.5375 \times 0.15 + 0.4625 \times 0.25 \\ &\approx 0.20 \end{aligned}$$

سوال ۲)

$$P(A|B \cap C) = \frac{P([A \cap B] \cap [A \cap C])}{P(B)P(C)}$$

برای آنکه تساوی ارضا شود، یک شرط کافی مستقل بودن $A \cap B$ و $A \cap C$ است.

سوال ۳) کران بالا به وضوح بنا به رابطه‌ی احتمال اجتماع برقرار است. این کران بسیار مهم، **کران اجتماع**[1] نامیده می شود.

برای اثبات کران پایین، ابتدا به دلیل تقارن فرض می کنیم $P(A) \le P(B)$. اکنون کافی است مد نظر قرار دهیم که نامساوی های زیر معادلند:

$$\begin{aligned} & P(A) + P(B) - \frac{1}{4 - 4P(A)} \le P(A \cup B) \\ \iff & \frac{1}{4 - 4P(A)} \ge P(A \cap B) \\ \iff & P(A \cap B)(1 - P(A)) \le \frac{1}{4} \end{aligned}$$

[1] Union Bound

از آنجایی که $P(A \cap B) \leq P(A)$ و بیشینه مقدار $u - u^2$ به ازای $0 < u < 1$ در $u = \frac{1}{2}$ رخ می‌دهد، اثبات کامل است

پاسخ سوال ۵)

سوال ۱)

الف) اگر جایگذاری داشته باشیم، پس از برداشتن گلوله‌ی اول به ۸ حالت، گلوله‌ی دوم را نیز می توانیم به ۸ حالت برداریم. در این صورت از آنجا که ترتیب برداشتن فرقی نمی کند، برداشتن دو گلوله مجموعا به $\frac{8\times8}{2}$ طریق ممکن است. همچنین اینکه یکی از گلوله ها سفید و دیگری آبی باشد، به 3×5 راه ممکن است؛ پس احتمال مطلوب برابر است با

$$P = \frac{15}{32}$$

نکته مهم!! ممکن است این گونه برداشت شود که پاسخ اصلی در یک ضریب ۲ با پاسخ بالا تفاوت می کند؛ به طور مثال یک راه حل (که البته نادرست است!) به صورت زیر است:

پیشامد اینکه گلوله‌ی اول سفید و دومی آبی باشد، ۱۵ حالت متفاوت دارد. چون هر گلوله را به ۸ حالت مستقل از دیگری بر می داریم، پاسخ $\frac{3\times5}{8\times8}$ می شود.

ایراد استدلال بالا این است که رنگ گلوله ها در ترتیب برداشته شدن گلوله ها اثرگذار بوده است. برای اینکه مشکل این استدلال رفع شود، باید پیشامد عکس هم در نظر گرفته شود؛ یعنی حالتی که گلوله‌ی اول آبی و دومی سفید باشد تا محور زمان دیده نشود.

نوع دیگر استدلال (درست) چنین است: هنگامی که جایگذاری داشته باشیم، برداشتن گلوله های اول و دوم کاملا از هم مستقل می شود. پس مسئله معادل است با اینکه:

دو کیسه داریم که هر یک شامل ۵ سفید و ۳ آبی است. از هر یک، یک گلوله بر می داریم. با چه احتمالی یکی سفید و دیگری آبی می شود؟

مسئله ی فوق، بعد زمان را به فضا تبدیل کرده است؛ یعنی به جای دو بار برداشتن گلوله ها از یک کیسه در زمانهای مختلف، دوتا را از دو کیسه همزمان برداشته ایم. در اینصورت پیشامد اینکه یکی آبی و دیگری سفید باشد، اجتماع دو پیشامد هم احتمال است که هر یک با احتمال $\frac{15}{64}$ رخ می دهد؛ پس پاسخ درست $\frac{15}{32}$ است.

ب) اگر جایگذاری مجاز نباشد، دو گلوله را به $\binom{8}{2} = 28$ طریق ممکن می توان برداشت که فقط حالاتی که یکی سفید و دیگری آبی باشد مطلوب است. این حالات مجموعا به $\binom{5}{1}\binom{3}{1} = 15$ طریق ممکن امکان پذیرند؛ پس احتمال مطلوب برابر است با

$$P = \frac{15}{28}$$

سوال ۲) الف) مکمل این پیشامد، حالتی است که حداکثر یک بار رو ظاهر شود که برابر است با حالاتی که در ۱۰ پرتاب دقیقا ۱ رو یا دقیقا صفر رو ظاهر شود (همگی به پشت ظاهر شوند). مجموع احتمالات برابر است با

$$p' = 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^9 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{11}{1024}$$

بنابراین احتمال مطلوب برابر است با

$$p = 1 - p' = \frac{1013}{1024}$$

ب) مشابه قسمت بالا، از آنجا که پرتاب های سکه از هم مستقل هستند، داریم:

$$p = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}$$

پ) احتمال اینکه در پرتاب های زوج نتیجه رو باشد با اینکه پشت باشد، به دلیل تقارن مسئله

یکسان است. از طرفی برای محاسبه‌ی احتمال اینکه در پرتاب های زوج نتیجه رو باشد داریم:

$$p' = \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

بنابراین احتمال مطلوب برابر است با

$$p = 2p' = \frac{1}{16}$$

سوال ۳) این دسته گل را به $\binom{20}{5} = 15504$ راه ممکن می توان برگزید.

الف) اگر دسته گل بخواهد شامل ۲ نسترن و ۲ بنفشه باشد، باید گل باقیمانده را از بین لاله ها و اقاقیاها به ۱۲ طریق ممکن برداریم. این کار به $\binom{3}{2}\binom{5}{2}\binom{12}{1} = 180$ حالت ممکن امکان پذیر است؛ بنابراین احتمال مطلوب برابر است با

$$p = \frac{180}{15504} \approx 0.01$$

(اگر فرض کرده اید دسته گل شامل حداقل ۲ نسترن یا ۲ بنفشه است نیز راه حل مورد قبول است!)

ب) فقط می توان از بین ۷ گل بنفشه و اقاقیا انتخاب کرد که این به $\binom{7}{5} = 21$ حالت ممکن است؛ پس:

$$p = \frac{21}{15504} \approx 0.0014$$

پ) احتمال مطلوب عبارتست از

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{15504}\binom{10}{2}\binom{5}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1} \\ &+ \frac{1}{15504}\binom{10}{1}\binom{5}{2}\binom{3}{1}\binom{2}{1} \\ &+ \frac{1}{15504}\binom{10}{1}\binom{5}{1}\binom{3}{2}\binom{2}{1} \\ &+ \frac{1}{15504}\binom{10}{1}\binom{5}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{2} \\ &= \frac{50}{323} \approx 0.15 \end{aligned}$$

سوال ۴) الف) هر مجموعه n عضوی شامل 2^n زیر مجموعه‌ی متمایز است که $\binom{n}{k}$ تا از آنها k عضوی اند. پس احتمال مطلوب برابر است با

$$p = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

ب) از آنجا که مجموع تمام احتمالات فوق برابر ۱ است، داریم:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{2^n} = 1$$

که معادل گزاره ای است که میخواستیم ثابت کنیم.

سوال ۵)

الف) در رشته متوالی لامپ ها، لامپ ها به صورت پشت سر هم به یکدیگر وصل شده اند؛ پس رشته زمانی روشن است که تمام لامپ ها سالم باشند. احتمال این امر برابر $(1-p)^n$ است.

ب) در رشته‌ی موازی لامپ ها، یکی از سرهای همه‌ی لامپ ها به یک نقطه و سر دیگر

تمام لامپ ها به نقطه‌ی دیگر وصل شده اند؛ پس رشته زمانی خراب می شود که همه ی لامپ های آن خراب باشند. بنابراین احتمال روشن شدن رشته برابر $1 - p^n$ است.

پاسخ سوال ۶)

سوال ۱) قضیه‌ی دوموآو – لاپلاس اذعان می کند:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)}}$$

هنگامی که k نزدیک به np باشد. در اینجا می خواهیم شهودی از میزان این نزدیکی پیدا کنیم. به ازای k های مختلف داریم:

$$\begin{cases} k = 1 & , \quad \text{خطای نسبی} \sim 10^{80} \\ k = 300 & , \quad \text{خطای نسبی} \approx 7.99 \\ k = 490 & , \quad \text{خطای نسبی} \approx 6.34 \times 10^{-5} \end{cases}$$

شایان گفتن است که در دو حالت اول، مقدارهای دقیق و تقریبی احتمال تقریبا برابر صفر هستند.

سوال ۲)

الف)

$$\binom{n}{m} \left(\frac{M}{N}\right)^m \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-m}$$

ب)

$$\frac{\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}$$

ج) در این حالت باید داشته باشیم $n = M + 2$ در غیر این صورت احتمال برابر صفر است. با این فرض، پس از تمام شدن گلوله های سفید، حتما دو گلوله‌ی سیاه برداشته خواهند شد

و این احتمال برابر یک است.

$$\begin{aligned} P &= \Pr[\text{برداشتن دو سیاه}|\text{برداشتن تمام سفیدها}] \\ &= \frac{\Pr[\text{برداشتن دو سیاه} \cap \text{برداشتن تمام سفیدها}]}{\Pr[\text{برداشتن تمام سفیدها}]} \\ &= 1 \end{aligned}$$

سوال ۳) این حالت زمانی رخ می دهد که تعداد قدم زدن های به سمت چپ فرد با تعداد قدم زدن های به سمت راست فرد برابر باشد؛ پس اولین شرط زوج بودن k است در غیر این صورت احتمال برابر صفر خواهد بود. با فرض زوج بودن k داریم:

$$p = \binom{k}{\frac{k}{2}}[p(1-p)]^{\frac{k}{2}}$$

سوال ۴) ابتدا، زیرمجموعه ها را با A و B و سپس پیشامد آن را که عدد i در A و B باشد، به ترتیب با X_i و Y_i نمایش می دهیم. در این صورت احتمال زیر مطلوب است:

$$\begin{aligned} \Pr\{&\text{پیشامد قرار نداشتن عدد ۱ در هر دو مجموعه} \\ &\cap \text{پیشامد قرار نداشتن عدد ۲ در هر دو مجموعه} \\ &\cap \text{پیشامد قرار نداشتن عدد ۳ در هر دو مجموعه} \\ &\cap \cdots \\ &\cap \text{پیشامد قرار نداشتن عدد } n \text{ در هر دو مجموعه}\} \end{aligned}$$

به زبان ریاضی:

$$\Pr\left\{\bigcap_{i=1}^{n}[X_i \cap Y_i]^c\right\}$$

به دلیل استقلال می توان نوشت:

$$\begin{aligned}\Pr\left\{\bigcap_{i=1}^{n}[X_i\cap Y_i]^c\right\} &= \prod_{i=1}^{n}\Pr\left\{[X_i\cap Y_i]^c\right\}\\ &= \prod_{i=1}^{n}1-\Pr\left\{X_i\cap Y_i\right\}\\ &= \prod_{i=1}^{n}1-\Pr\left\{X_i\right\}\Pr\{Y_i\}\\ &= (1-p^2)^n\end{aligned}$$

سوال ۵) الف) این حالت زمانی ممکن است که تیم A پس از ۶ دست، در حداقل ۵ دست پیروز شده باشد که این احتمال برابر با احتمال پیروزی در دقیقا ۵ دست یا دقیقا ۶ دست از ۶ دست اول است؛ بنابراین

$$p=\binom{6}{5}p^5(1-p)+\binom{6}{6}p^6=p^5(6-5p)$$

ب)

$$\Pr\{\text{برد تیم } A \,|\, \text{باخت در حداقل یک دست به تیم } B\}$$
$$=\frac{\Pr\{\text{برد تیم } A\cap\text{باخت در حداقل یک دست به تیم } B\}}{\Pr\{\text{برد تیم } A\}}$$

احتمال آن که تیم A بازی را ببرد و هیچ دستی را به تیم B نبازد برابر p^9 است. هم چنین احتمال برد تیم A نیز برابر $\sum_{k=5}^{9}\binom{9}{k}p^k(1-p)^{9-k}$ خواهد بود. در نتیجه احتمال مطلوب به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$1-\frac{p^9}{\sum_{k=5}^{9}\binom{9}{k}p^k(1-p)^{9-k}}$$

ج) تیم A در صورتی بازی را می برد که حداقل ۴ دست از ۸ دست باقی مانده را ببرد. این احتمال برابرست با:

$$\frac{\sum_{k=4}^{8}\binom{8}{k}}{2^8} \approx 0.6367$$

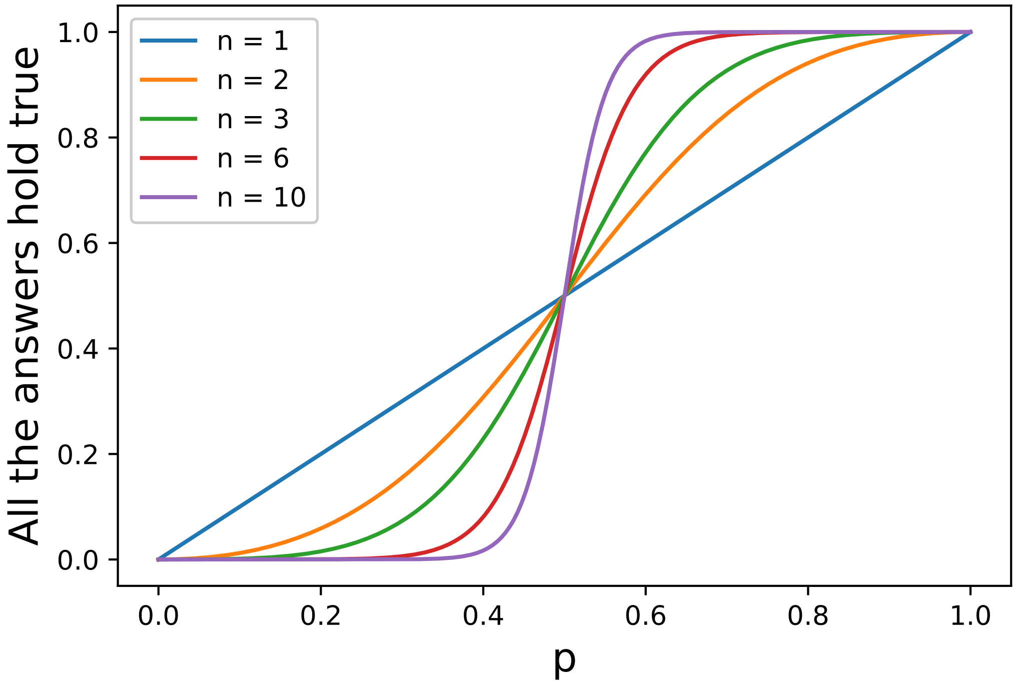
سوال ۶) احتمال مطلوب عبارتست از:

$$\Pr\{\text{یکسان بودن پاسخ تمام دانشجویان}|\text{درست بودن پاسخ تمام دانشجویان}\}$$
$$= \frac{\Pr\{\text{یکسان بودن پاسخ تمام دانشجویان} \cap \text{درست بودن پاسخ تمام دانشجویان}\}}{\Pr\{\text{یکسان بودن پاسخ تمام دانشجویان}\}}$$

پیشامد آن که تمام دانشجویان مستقل از هم به پاسخ درست برسند، حالت خاصی از کوشش مکرر و احتمال آن برابر p^n است. احتمال آن که دانشجویان به پاسخ یکسانی برسند طبق قاعده‌ی احتمال کل برابر احتمال پاسخ یکسان در دو حالت پاسخ درست یا نادرست است. احتمال آن که تمام دانشجویان به پاسخ نادرست رسیده باشند برابر $(1-p)^n$ و در نتیجه احتمال مطلوب برابر

$$\frac{p^n}{p^n + (1-p)^n} = \frac{1}{1 + \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n}$$

خواهد بود. نسبت $\frac{1}{p} - 1$ را می توان معیاری از سختی سوال ارزیابی کرد. در حقیقت هر چه سوال به تعبیر ریاضی آن "سخت تر" باشد، احتمال درست پاسخ دادن تمام دانشجویانی که به پاسخ یکسان رسیده اند کمتر است. به علاوه هر چه تعداد دانشجویان بیشتری پس از امتحان به یک پاسخ رسیده باشند، احتمال آن که همه‌ی آنها اشتباه کنند بیشتر می شود. این وضعیت را می‌توان در نمودار زیر مشاهده کرد:



پاسخ سوال ۷)

سوال ۱)

$$
\begin{aligned}
&\Pr\{\text{ابتلا به کرونا}|\text{ماسک زدن}\} = 0.15\\
&\Pr\{\text{ابتلا به کرونا}|\text{ماسک نزدن}\} = 0.7\\
&\Pr\{\text{ماسک زدن}\} = 0.05
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Pr\{\text{ابتلا به کرونا}\} &= \Pr\{\text{ابتلا به کرونا}|\text{ماسک زدن}\}\Pr\{\text{ماسک زدن}\}\\
&+ \Pr\{\text{ابتلا به کرونا}|\text{ماسک نزدن}\}\Pr\{\text{ماسک نزدن}\}\\
&= 0.7 \times 0.95 + 0.15 \times 0.05 = 67.25\%
\end{aligned}
$$

سوال ۲)

$$\Pr\{\text{هردو زوج}\} = \Pr\{\text{هردو زوج}\} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \implies \Pr\{\text{جمع زوج}\} = \frac{1}{2} = 0.5$$

ب)

$$\Pr\{\text{جمع بیشتر از ۸}|\text{جمع زوج}\} = \frac{\Pr\{\text{جمع بیشتر از ۸} \cap \text{جمع زوج}\}}{\Pr\{\text{جمع زوج}\}} = \frac{\frac{4}{36}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{9} \approx 0.22$$

سوال ۳)

راه ۱

اگر عناصر ۱ و ۲ را که در هر دو زیر مجموعه هستند کنار بگذاریم، سایر اعضا را به 3^{n-2} طریق ممکن می توان بین دو زیرمجموعه پخش کرد. از طرفی برای آنکه اشتراک دو زیر مجموعه برابر $\{1,2\}$ باشد و اعضای $3,4,5$ داخل یکی از زیرمجموعه ها بیفتند، باید در هنگام انتخاب سایر اعضای زیرمجموعه ها از بین اعضای $\{5,\cdots,n\}$ ابتدا هر عضو مجموعه‌ی بالا را در نظر بگیریم. هر عضو سه حالت دارد: یا فقط داخل زیرمجموعه‌ی ۱ است؛ یا فقط داخل زیر مجموعه‌ی ۲ است و یا در هیچ یک از زیر مجموعه ها نیست. بنابراین این کار به 3^{n-5} طریق ممکن امکان پذیر می شود و احتمال مطلوب برابر است با

$$\frac{3^{n-5}}{3^{n-2}} = \frac{1}{27}$$

راه ۲

از آنجا که ۱ و ۲ در هر دو زیرمجموعه هستند، می توان آنها را نادیده گرفت و سایر اعضای هر دو زیرمجموعه را از اعضای $\{3,4,\cdots,n\}$ برگزید. با این شرط، تعداد کل حالاتی که می توان دو زیر مجموعه را برگزید عبارتست از اینکه ابتدا k عضو برداریم و سپس این k عضو را بین دو

زیرمجموعه پخش کنیم؛ یعنی

$$\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} 2^k = 3^{n-2}$$

تعداد حالاتی که یکی از زیر مجموعه های شامل عناصر $\{3, 4, 5\}$ باشد، این است که عناصر معلوم الحال را (یعنی $\{1, 2, 3, 4, 5\}$) در نظر بگیریم و سپس سایر اعضا را از بین $\{6, \cdots, n\}$ برگزینیم. این کار به طریق مشابه به

$$\sum_{k=0}^{n-5} \binom{n-5}{k} 2^{k-1} = 3^{n-5}$$

امکان پذیر است؛ پس احتمال مطلوب می شود:

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-5} \binom{n-5}{k} 2^{k-1}}{\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} 2^{k-1}} = \frac{1}{27}$$

سوال ۴) پیشامد معیوب بودن لامپ را با C و انتخاب جعبه‌ی i ام را با B_i نشان می دهیم. در این صورت:

الف)

$$P(C) = \sum_{i=1}^{3} P(C|B_i)P(B_i) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{1000} + \frac{3}{10} + \frac{0}{3000}\right) = 0.101$$

ب)

$$P(B_2|C) = \frac{P(B_2 \cap C)}{P(C)} = \frac{P(C|B_2)P(B_2)}{P(C)} = \frac{\frac{3}{10} \times \frac{1}{3}}{\frac{101}{1000}} = \frac{100}{101} \approx 0.99$$

پ)

$$\begin{aligned}
P(B_1 \cup B_2|C') &= \frac{P([B_1 \cup B_2] \cap C')}{P(C')} \\
&= \frac{P([B_1 \cap C'] \cup [B_2 \cap C'])}{P(C')} \\
&= \frac{P(B_1 \cap C') + P(B_2 \cap C')}{P(C')} \\
&= \frac{P(C'|B_1)P(B_1) + P(C'|B_2)P(B_2)}{P(C')} \\
&= \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{997}{1000} + \frac{7}{10}\right)}{1 - 0.101} \approx 0.63
\end{aligned}$$

سوال ۵)

$$P(P_1|B) = \frac{P(P_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|P_1)P(P_1)}{P(B)} = \frac{\frac{20}{100} \times \frac{100}{100+1000}}{\frac{70}{1100}} = \frac{2}{7} \approx 0.29$$

$$P(P_2 \cap B'|F) = \frac{P(P_2 \cap B' \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{630}{1100}}{\frac{690}{1100}} = \frac{21}{23} \approx 0.91$$

$$P(B|M) = \frac{P(B \cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{40}{1100}}{\frac{410}{1100}} = \frac{4}{41} \approx 0.10$$

پاسخ سوال ۸)

سوال ۱)

الف) از آنجا که برای $n < a$ و $n > b$ به ترتیب داریم $F(n) = 0$ و $F(n) = 1$ در نتیجه می

توان نوشت:

$$f(n)=\begin{cases}\frac{1}{b-a+1} & , \quad a\le n\le b\\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} nf(n) &= \sum_{n=a}^{b}\frac{n}{b-a+1}\\ &= \sum_{n=1}^{b}\frac{n}{b-a+1}-\sum_{n=1}^{a-1}\frac{n}{b-a+1}\\ &= \frac{b^2+b-a^2+a}{2(b-a+1)}\\ &= \frac{(b+a)(b-a+1)}{2(b-a+1)}\\ &= \frac{b+a}{2}\end{aligned}$$

ب)

$$f(n)=A^n-A^{n+1}=A^n(1-A) \quad , \quad n\ge 0$$

در نتیجه

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} nf(n) &= \sum_{n=0}^{\infty} nA^n(1-A) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} nA^n(1-A) \\
&= A(1-A)\sum_{n=1}^{\infty} nA^{n-1} \\
&= A(1-A)\frac{d}{dA}\sum_{n=1}^{\infty} A^n \\
&= A(1-A)\frac{d}{dA}\frac{A}{1-A} \\
&= \frac{A}{1-A}
\end{aligned}
$$

سوال ۲)

الف)

$$
f(x) = \frac{1}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}x} \quad , \quad x > 0
$$

در نتیجه

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx &= \int_0^{\infty} \frac{x}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}x}dx \\
&= -xe^{-\frac{1}{\lambda}x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{\lambda}x}dx \\
&= \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{\lambda}x}dx \\
&= -\lambda e^{-\frac{1}{\lambda}x}\Big|_0^{\infty} \\
&= \lambda
\end{aligned}
$$

ب)

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad , \quad a < x < b$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx &= \int_a^b \frac{x}{b-a}dx \\ &= \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} \\ &= \frac{b+a}{2}\end{aligned}$$

پ)

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\Big|_{t=x} - \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\Big|_{t=-\infty} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \exp\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu+\mu) \cdot \exp\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dx \\ &= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu) \cdot \exp\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dx}_{\triangleq I_1} \\ &+ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \mu \cdot \exp\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dx}_{\triangleq I_2}\end{aligned}$$

انتگرال I_1 برابر است با $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} w \cdot \exp\left(\frac{w^2}{2\sigma^2}\right) dw$ که همگرا و برابر صفر است؛ زیرا این انتگرال، انتگرال یک تابع فرد را روی بازه‌ی متقارنی نشان می دهد به علاوه جمله ی

نمایی میرا شونده باعث کاهش سریع تابع تحت انتگرال می گردد. برای انتگرال I_2 نیز با توجه به تابع $F(x)$ تعریف شده در صورت سوال می توان نوشت:

$$I_2 = \mu \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \mu F(\infty) = \mu$$

در مجموع خواهیم داشت:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \mu$$

سوال ۳)

متغیر تصادفی برنولی، یک متغیر تصادفی دو مقداره است که تنها مقادیر صفر و یک را می پذیرد. به طور مثال برای متغیر تصادفی برنولی X داریم

$$\Pr\{X=1\} = p$$

از آنجا که عملگر این قسمت یک xor (یا جمع به پیمانه‌ی ۲) است، متغیر تصادفی Z نیز دو مقداره و دارای توزیع برنولی خواهد بود.

$$\begin{aligned}
\Pr\{Z=1\} &= \Pr\{X \oplus Y \mod 2 = 1\} \\
&= \Pr\{X \text{xor} Y = 1\} \\
&= \Pr\{X=1, Y=0 \text{ یا } X=0, Y=1\} \\
&= \Pr\{X=1, Y=0\} + \Pr\{X=1, Y=0\} \\
&= \Pr\{X=1\}\Pr\{Y=0\} + \Pr\{X=0\}\Pr\{Y=1\} \\
&= \frac{1}{2}\cdot(1-p) + \frac{1}{2}\cdot p \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

سوال ۴)

با توضیحاتی مشابه سوال قبل، به سادگی دیده می شود که متغیر تصادفی Z دو مقداره و دارای

توزیع برنولی خواهد بود.

$$\begin{aligned}\Pr\{Z=1\} &= \Pr\{XY=1\}\\ &= \Pr\{X=1, Y=1\}\\ &= \Pr\{X=1\}\Pr\{Y=1\}\\ &= \frac{1}{2}p\end{aligned}$$

سوال ۵)

متغیر تصادفی X حاصل n_1 کوشش برنولی مستقل با پارامتر احتمالاتی p و متغیر تصادفی Y حاصل n_2 کوشش برنولی مستقل با پارامتر احتمالاتی p است؛ در نتیجه می توان متغیر های تصادفی X و Y را به مانند تعداد شیرهای رو آمده در پرتاب به ترتیب n_1 و n_2 بار سکه‌ی ناسالم تعبیر نمود. با این تعبیر، متغیر تصادفی $X+Y$ تعداد شیرها را در n_1+n_2 بار پرتاب همان سکه‌ی ناسالم نشان می دهد؛ به عبارت دیگر فرقی نمی کند که ابتدا سکه را n_1 بار پرتاب کرده و تعداد شیر ها را یادداشت کنیم، سپس با تعداد شیرها در n_2 بار پرتاب جمع بزنیم یا از ابتدا سکه را n_1+n_2 بار پرتاب کنیم و سپس تعداد شیرها را یادداشت کنیم. این عدم تفاوت، به دلیل مستقل بودن پرتاب هاست و در صورت مستقل نبودن پرتاب ها، استدلال های فوق معتبر نخواهند بود.

الف) فضای نمونه عبارتست از مجموعه‌ی تمام برآمدها(رخدادها)یی که می‌توانند در یک مسئله‌ی احتمالاتی رخ دهند. به طور مثال، فضای نمونه‌ی پرتاب تاس، $\{1,2,3,4,5,6\}$ است.

ب) به هر زیرمجموعه از فضای نمونه، یک پیشامد یا واقعه گفته می‌شود. در پرتاب تاس، واقعه‌ی روآمدن عدد زوج معادل مجموعه‌ی $\{2,4,6\}$ است.

پ) به هر زیرمجموعه‌ی تک عضوی از فضای نمونه، یک پیشامد ساده یا برآمد گفته می‌شود. در پرتاب تاس، ۶ برآمد وجود دارد.

پاسخ سوال ۹)

در صورتی که فضای نمونه متناهی باشد، پاسخ مثبت است؛ زیرا هر برآمد دارای احتمال مثبت است و در نتیجه، احتمال رخداد هر زیرمجموعه کمتر ازا خواهد بود. در حالتی که فضای نمونه نامتناهی باشد، حذف یک برآمد با احتمال رخداد صفر از فضای نمونه، تغییر در احتمال آن ایجاد نمی‌کند. به طور مثال، فرض کنید بخواهیم عددی حقیقی را به تصادف کامل از بازه‌ی $[0, 1]$ برگزینیم. در این صورت، احتمال اینکه این عدد برابر 0.5 نباشد برابر ا است.

پاسخ سوال ۱۰

الف)

$$A \times B = \{(\mathrm{H}, 1), (\mathrm{H}, 2), (\mathrm{H}, 3), (\mathrm{H}, 4), (\mathrm{H}, 5), (\mathrm{H}, 6), (\mathrm{T}, 1), (\mathrm{T}, 2), (\mathrm{T}, 3), (\mathrm{T}, 4), (\mathrm{T}, 5), (\mathrm{T}, 6)\}$$

این مجموعه، فضای نمونه‌ی آزمایش پرتاب توأم تاس و سکه است (**“**یک سکه و یک تاس را به طور همزمان پرتاب میکنیم...**”**).

ب) به طور مثال

$$S_1 = \{(\mathrm{T}, 2), (\mathrm{H}, 5), (\mathrm{T}, 6)\}$$
$$S_2 = \{(\mathrm{H}, 2), (\mathrm{T}, 5), (\mathrm{H}, 6)\}$$

نمی‌توان همین کار را برای زیرمجموعه‌های ۷ عضوی تکرار کرد؛ چرا که طبق اصل لانه‌ی کبوتری، حداقل دو عضو تکراری در این دو زیرمجموعه وجود خواهد داشت.

پاسخ سوال ۱۱

می‌دانیم

$$P\{A \cap (B \cup C)\} = P\{[A \cap B] \cup [A \cap C]\}$$

از طرفی

$$[A \cap B] \cap [A \cap C] = A \cap B \cap C = A \cap [B \cap C] = A \cap \emptyset = \emptyset$$

بنابراین طبق اصل سوم کولموگروف،

$$\begin{aligned} P\left\{A \cap (B \cup C)\right\} &= P\left\{[A \cap B] \cup [A \cap C]\right\} \\ &= P\left\{A \cap B\right\} + P\left\{A \cap C\right\}. \end{aligned}$$

اگر پیشامدهای ابتلا به کرونا و آنفلوآنزا را به ترتیب با A و B نشان دهیم، طبق فرض مسئله داریم

$$\begin{aligned} &P(A) = 0.07, \\ &P(B) = 0.19, \\ &P(A \cup B) = 0.2. \end{aligned}$$

در این صورت

الف) خواسته‌ی مسئله، $P(A \cap B)$ است که برابر است با

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.07 + 0.19 - 0.2 = 0.06$$

ب) مطلوبست $P(A - B)$. در این صورت

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0.07 - 0.06 = 0.01.$$

پاسخ سوال ۱۲)

الف)

$$P(A) = P(2) + P(3) + P(5) + P(7) = 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 = 0.4$$

ب)

$$\begin{aligned} &A - B = \{2\} \\ &A \cap B = \{3, 5, 7\} \\ &\implies \\ &P(A - B) = 0.1 \\ &P(A \cap B) = 0.3 \end{aligned}$$

پ) داریم

$$\begin{aligned} &P(A-B)=0.1\\ &P(A)=0.4\\ &P(A\cap B)=0.3 \end{aligned}$$

بنابراین درستی رابطه‌ی زیر مشاهده می‌شود:

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B).$$

علت درستی این رابطه آن است که دو مجموعه‌ی $A-B$ و $A\cap B$ ناسازگارند؛ در نتیجه طبق اصل سوم کولموگروف

$$P(A\cap B)+P(A-B)=P([A\cap B]\cup[A-B])=P(A).$$

پاسخ سوال ۱۳) نامساوی سمت راست به سادگی از

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$$

و $P(A\cap B)\geq 0$ نتیجه می‌شود. برای نامساوی سمت چپ باید اثبات کنیم

$$P(A\cap B)\leq \frac{1}{4\max\{1-P(A),1-P(B)\}}$$

به دلیل تقارن مسئله، فرض می‌کنیم $P(A)\geq P(B)$. در نتیجه

$$P(A\cap B)\leq \frac{1}{4[1-P(B)]}.$$

از طرفی

$$\begin{aligned} &(\frac{1}{2}-P(B))^2\geq 0 \implies\\ &4P^2(B)-4P(B)+1\geq 0 \implies\\ &1\geq 4P(B)-4P^2(B) \implies\\ &1\geq 4P(B)[1-P(B)] \implies\\ &P(B)\leq \frac{1}{4[1-P(B)]}. \end{aligned}$$

همچنین می دانیم $B \subseteq A \cap B$. در نتیجه

$$P(A\cap B) \le P(B) \le \frac{1}{4[1-P(B)]}$$

و اثبات کامل می شود ■

اگر کتابهای هم نوع متمایز باشند، اینکه مثلا دو کتاب رمان نسبت به هم در چه موقعیتی قرار میگیرند مهم است. با این فرض، تمام کتابها متمایزند و مجموع حالات مطلوب، $(3+2+4)! = 9!$ خواهد بود.

اگر تمام کتابهای هم نوع نامتمایز باشند، در این صورت دو حالت که دو کتاب رمان در دو موقعیت متفاوت نسبت به هم باشند (مثلا رمان بینوایان سمت چپ یا راست رمان گوژپشت نتردام باشد!)، یکبار شمرده می‌شوند. ترتیب کتابهای فیزیک و روانشناسی نیز به $3!$ و $4!$ حالت مختلف تعیین می شود. در این صورت، تعداد کل حالات مطلوب برابر $\frac{9!}{3!\times 2!\times 4!}$ خواهد بود.

پاسخ سوال ۱۴)

این دسته گل می تواند شامل حالات زیر باشد:

- ۳ بنفشه
- ۲ بنفشه و ۱ رز
- ۲ بنفشه و ۱ اقاقیا
- ۱ بنفشه و ۲ رز
- ۱ بنفشه و ۲ اقاقیا
- ۱ بنفشه، ۱ رز و ۱ اقاقیا
- ۳ رز
- ۲ رز و ۱ اقاقیا

- ۱ رز و ۲ اقاقیا

در نتیجه، مجموع کل حالات مطلوب عبارتست از

$$\binom{3}{3}+\binom{3}{2}\binom{4}{1}+\binom{3}{2}\binom{2}{1}+\binom{3}{1}\binom{4}{2}+\binom{3}{1}\binom{2}{2}+$$
$$\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{4}{1}+\binom{4}{3}+\binom{4}{2}\binom{2}{1}+\binom{4}{1}\binom{2}{2}=$$
$$1+12+6+18+3+24+4+12+4=84.$$

پاسخ سوال ۱۵)

در حل مسائلی که با افراد سروکار دارند، اگر مسئله از نوع کلان نباشد (مانند شیوع افسردگی در یک جامعه که به طور نسبی، به تعداد افراد مربوط است نه به تک تک آنها)، باید افراد را متمایز دانست. مسئله‌ی پیش رو چنین حالتی دارد. به دلیل اینکه نشست در یک میزگرد اتفاق می افتد، ابتدا یک نفر (مثلا مدیرعامل) را در یک صندلی می‌نشانیم و سپس حالات نشستن سایر افراد را بررسی می کنیم (چرا؟).

الف) اگر هر دو منشی کنار هم باشند، ابتدا هر دو نفر را یک نفر (به نام دو-منشی) به حساب می آوریم و تعداد حالات حاصله را می‌شماریم. سپس تعداد حالات را در تعداد ترتیبات نشستن دو منشی نسبت به هم ضرب می کنیم. با این رویکرد، دو-منشی دو صندلی کنار هم اختیار می‌کند که معادل این است که یک صندلی به او اختصاص داده و از تمام صندلی ها ا واحد کم کنیم. در این صورت، دو-منشی و سایر اعضا (به غیر از مدیرعامل)، باید ۷ صندلی از ۹ صندلی باقیمانده را تصاحب کنند. این کار، به دلیل تمایز اعضا، به $7! \times \binom{9}{7}$ طریق ممکن امکان پذیر است. چون دو-منشی شامل دو حالت ترتیب نشستن منشی ها نسبت به هم است، تعداد کل حالات ممکن برابر $2 \times 7! \times \binom{9}{7} = 362880$ خواهد بود.

ب) در این حالت باید تمام اعضای هیئت مدیره، ۵ صندلی از ۸ صندلی باقیمانده (غیرمجاور

با مدیرعامل و خود مدیرعامل) را به $6720 = \binom{8}{5} \times 5!$ طریق تصاحب کنند. سپس منشی ها و حسابدار می‌توانند ۳ صندلی از ۵ صندلی باقیمانده را به $60 = \binom{5}{3} \times 3!$ راه انتخاب کنند. تعداد کل حالات طبق اصل ضرب برابر 403200 خواهد بود.

پ) حسابدار به دو حالت کنار مدیرعامل می‌نشیند و تمام اعضای هیئت مدیره (به جز مدیرعامل) را که کنار هم می‌نشینند، یک نفر به نام پنج–مدیر در نظر می‌گیریم. پنج–مدیر، ۵ صندلی کنار هم انتخاب می‌کند که در این صورت، معادلاً با ۳ نفر روبرو هستیم که باید بر روی ۵ صندلی بنشینند. مشابه بخش الف و به دلیل تمایز منشی ها و اعضای هیئت مدیره، تعداد کل حالات مطلوب برابر است با $14400 = 2 \times 5! \times 3! \times \binom{5}{3}$.

الف) پیشامد مطلوب، عبارتست از آنکه دقیقا ۲ بار عدد زوج یا دقیقا ۳ بار عدد زوج بیاید. احتمال عدد زوج آمدن برابر 0.5 است. در نتیجه احتمال مطلوب برابر است با

$$\binom{3}{2}(\frac{1}{2})^3 + \binom{3}{3}(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{2}.$$

ب) مجموع اعداد رو آمده در این ۳ پرتاب، در حالات زیر برابر ۵ می شود:

- دو بار ۱ و یکبار ۳ بیاید.
- دوبار ۲ و یکبار ۱ بیاید.

هر یک از حالات فوق، دارای احتمال

$$\binom{3}{1}(\frac{1}{6})^3 = \frac{1}{72}$$

هستند؛ در نتیجه احتمال مطلوب، برابر $\frac{1}{36} = \frac{1}{72} + \frac{1}{72}$ خواهد بود.

پ) برای رو آمدن مضرب ۳، باید اعداد ۳ و ۶ ظاهر شوند. احتمال این موضوع برابر $\frac{1}{3}$ است و چون نتیجه‌ی سایر پرتاب ها مهم نیست، احتمال مطلوب نیز $\frac{1}{3}$ خواهد بود.

پاسخ سوال ۱۶)