

سوالات ۱۳، ۲۲، ۲۴ و ۲۵ از کتاب غیرمرجع (کتاب Probability, Random Variables and Stochastic Processes از پاپولیس)

سوالات ۱۳ و ۲۵ از کتاب غیرمرجع، به دلیل کاربرد متغیرهای تصادفی سوالات امتیازی محسوب می‌شوند.

سوال ۱۳) تعریف کنید

$$f(t_0) \triangleq P\{t \geq t_0\}$$

در اینصورت باید نشان دهیم

$$P([t_0 \leq t \leq t_0 + t_1] \cap [t \geq t_0]) = f(t_0)[1 - f(t_1)]$$

یا به عبارت دیگر

$$P(t \geq t_0) - P(t \geq t_0 + t_1) = f(t_0) - f(t_0)f(t_1)$$

طبق تعریف

$$f(t_0) - f(t_0 + t_1) = f(t_0) - f(t_0)f(t_1)$$

یا معادلا

$$f(t_0 + t_1) = f(t_0)f(t_1)$$

می‌توان ثابت کرد تنها تابع پیوسته ای که شرط بالا را برآورده می‌کند، تابع نمایی است بنابراین $f(t_0) = e^{-ct_0}$ که $c > 0$ و اثبات کامل است ■

سوال ۲۲) می‌دانیم که برای استقلال رخدادهای A_1, A_2, \dots, A_n باید هر ترکیب چندتایی از این رخدادها مستقل باشند؛ یعنی هر دوتایی از آنها، هر سه تایی از آنها، ... و همه‌ی n تا از آنها. چون دقیقا $\binom{n}{k}$ ترکیب k تایی از این مجموعه‌ها وجود دارد، در اینصورت باید دقیقا

$$\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} = 2^n - n - 1$$

معادله داشته باشیم.

سوال ۲۴) (در این مسئله بهتر است خرابی هر دو لامپ را یک پیشامد در نظر بگیریم؛ زیرا تنها این پیشامد به همراه پیشامد انتخاب جعبه مورد سوال است. هر چند مسئله را می‌توان از طریق تعریف یک پیشامد برای هر لامپ نیز حل کرد. این هنر فرد است که پیشامدها و رخدادها را به صورت **کاملا درست و واضح** و البته تا حد امکان **حداقلی** تعریف کند تا دقیقا همان مسئله‌ای را حل کند که از او خواسته شده و البته همان مسئله را هم به صورت خلاصه و حداقلی حل نماید. تناقض برتراند، نمونه‌ی بسیار خوبی از حل مسئله‌ی احتمالی به چند روش ممکن فقط بر اساس تخصیص احتمالات مختلف به رخدادهاست.)

(الف)

$A = \{ \text{پیشامد خرابی هر دو لامپ} \}$

$B = \{ \text{پیشامد انتخاب جعبه‌ی ۱} \}$

در این سوال داریم

$$P(A|B) = \frac{\binom{100}{2}}{\binom{1000}{2}} \approx 0.01$$

$$P(A|B^c) = \frac{\binom{100}{2}}{\binom{2000}{2}} \approx 0.0025$$

$$P(B) = \frac{1}{2}$$

و مطلوب ما $P(A)$ است؛ در اینصورت طبق قاعده‌ی احتمال کل

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B)P(A|B) + P(B^c)P(A|B^c) \\ &= \frac{1}{2}(0.01 + 0.0025) \\ &= 0.0063 \end{aligned} \quad (1)$$

(ب) مطلوب ما $P(B|A)$ است. در اینصورت

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(AB)}{P(A)} \\ &= \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)} \\ &= \frac{0.5 \times 0.01}{0.0063} \\ &= 0.7937 \end{aligned} \quad (2)$$

این احتمال، احتمال قابل توجهی است زیرا درصد تعداد لامپ‌های خراب در جعبه‌ی ۱ بیشتر است.

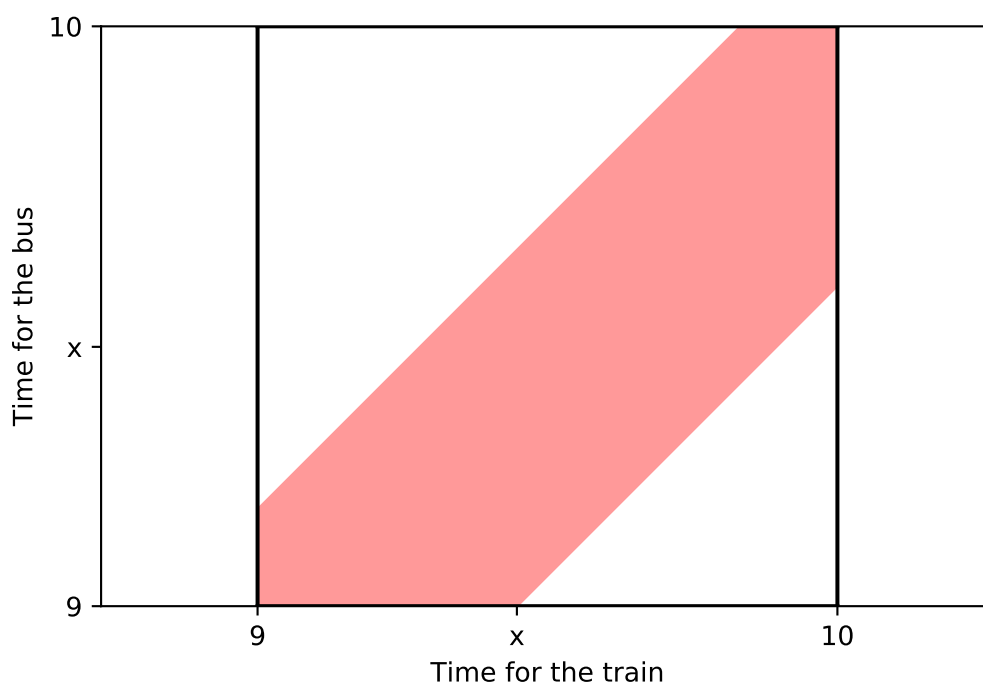
سوال ۲۵) اگر X و Y را به ترتیب متغیرهای تصادفی ورود قطار و اتوبوس به ایستگاه بدانیم، این متغیرها دارای توزیع یکنواخت بین ساعتهای ۹ و ۱۰ و مستقل هستند. در اینصورت قطار بازه‌ی زمانی $(X, X + \frac{1}{6})$ و اتوبوس بازه‌ی زمانی $(Y, Y + x)$ را اشغال می کند. مکمل این پیشامد، حالتی است که اتوبوس و قطار یکدیگر را ملاقات نکنند؛ یعنی

$$Y > X + \frac{1}{6} \quad \text{یا} \quad Y + x < X$$

در اینصورت پیشامد مطلوب ما خواهد بود:

$$X - x < Y < X + \frac{1}{6}$$

که مساحت ناحیه‌ی زیر است:



مساحت ناحیه‌ی هاشور نخورده برابر است با

$$\frac{25}{72} + \frac{(1-x)^2}{2}$$

این مساحت باید برابر $\frac{1}{4}$ باشد که در این صورت مقدار x برابر ۲۷ دقیقه $\approx 0.4472h \approx 1 - \frac{\sqrt{11}}{6}$ محاسبه می شود.

سوالات ۱۳، ۲۲ و ۲۴ از کتاب مرجع (کتاب Probability and Statistics از پاپولیس)

سوال ۱۳) این مسئله به کمک قانون احتمال کل و استفاده از تعریف احتمال شرطی به راحتی قابل حل است ■

سوال ۲۲) مشابه سوال ۲۲ از کتاب غیر مرجع.

سوال ۲۴) رشته‌ی لامپ زمانی کار می‌کند که تمام لامپ های آن سالم باشند (تقسیم و لتاژ و خاصیت سری بودن؛ در حالت موازی، کافی است حداقل یکی از لامپ ها کار کند به دلیل تقسیم جریان) در اینصورت خواهیم داشت:

$$p = (1 - 0.01)^{50} \approx 0.61 \quad (3)$$

سوالات تالیفی

سوال ۱)

$$\begin{aligned} P(F) &= 0.37 \\ P(M) &= 0.43 \\ P(D|M) &= 0.15 \\ P(D|F) &= 0.25 \end{aligned} \quad (4)$$

مطلوب است $P(D|M \cup F)$. در اینصورت داریم

$$\begin{aligned} P(D|M \cup F) &= \frac{P(D \cap [M \cup F])}{P(M \cup F)} \\ &= \frac{P([D \cap M] \cup [D \cap F])}{P(M) + P(F)} \\ &= \frac{P(D \cap M) + P(D \cap F)}{P(M) + P(F)} \\ &= \frac{P(M)P(D|M) + P(F)P(D|F)}{P(M) + P(F)} \\ &= \frac{0.37 \times 0.25 + 0.43 \times 0.15}{0.8} \\ &\approx 0.20 \end{aligned} \quad (5)$$

این مسئله را به گونه‌ی دیگری نیز می‌توان حل کرد. از آنجا که به طور کل کودکان در سوال مطرح نمی‌شوند نسبت جمعیت زنان و مردان بزرگسال را به کل بزرگسالان محاسبه می‌کنیم. به طور کل، ۵۳/۷۵٪ جمعیت بزرگسالان را مردان و ۴۶/۲۵٪ را زنان تشکیل می‌دهند. بنابراین می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} P(M) &= 0.5375 \\ P(F) &= 0.4625 \end{aligned} \quad (6)$$

و مطلوب $P(D)$ خواهد بود؛ در این صورت

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D \cap M) + P(D \cap F) \\ &= P(D|M)P(M) + P(D|F)P(F) \\ &= 0.5375 \times 0.15 + 0.4625 \times 0.25 \\ &\approx 0.20 \end{aligned} \quad (7)$$

سوال ۲)

$$P(A|B \cap C) = \frac{P([A \cap B] \cap [A \cap C])}{P(B)P(C)} \quad (8)$$

برای آنکه تساوی ارضا شود، یک شرط کافی مستقل بودن $A \cap B$ و $A \cap C$ است.

سوال ۳) کران بالا به وضوح بنا به رابطه‌ی احتمال اجتماع برقرار است. این کران بسیار مهم، کران اجتماع^۱ نامیده می‌شود.

برای اثبات کران پایین، ابتدا به دلیل تقارن فرض می‌کنیم $P(A) \leq P(B)$. اکنون کافی است مد نظر قرار دهیم که نامساوی‌های زیر معادلند:

$$\begin{aligned} P(A) + P(B) - \frac{1}{1 - P(A)} &\leq P(A \cup B) \\ \iff \frac{1}{1 - P(A)} &\geq P(A \cap B) \\ \iff P(A \cap B)(1 - P(A)) &\leq \frac{1}{1} \end{aligned} \quad (9)$$

از آنجایی که $P(A \cap B) \leq P(A)$ و بیشینه مقدار $u - u^2$ به ازای $0 < u < 1$ در $u = \frac{1}{2}$ رخ می‌دهد، اثبات کامل است ■