

به نام خدا

پاسخ کوئیز ششم درس تجزیه و تحلیل سیستم ها

با محاسبه‌ی پاسخ فرکانسی سیستم، داریم:

$$H(e^{j\omega}) = 2 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} = \frac{3 - e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

تعریف می کنیم $u = e^{-j\omega}$. در این صورت:

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= \frac{3 - e^{-j\omega}}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right) \left(1 - \frac{1}{5}e^{-j\omega}\right)} \\ &= 40 \frac{u - 3}{(u - 5)(u + 2)(u - 2)^2} = \frac{A}{u - 5} + \frac{B}{u + 2} + \frac{C_1}{u - 2} + \frac{C_2}{(u - 2)^2} \end{aligned}$$

برای محاسبه‌ی ضرایب بالا، روند زیر را خواهیم داشت:

$$A = \lim_{u \rightarrow 5} 40 \frac{(u - 5)(u - 3)}{(u - 5)(u + 2)(u - 2)^2} = \lim_{u \rightarrow 5} 40 \frac{u - 3}{(u + 2)(u - 2)^2} = \frac{80}{63}$$

$$B = \lim_{u \rightarrow -2} 40 \frac{(u + 2)(u - 3)}{(u - 5)(u + 2)(u - 2)^2} = \lim_{u \rightarrow -2} 40 \frac{u - 3}{(u - 5)(u - 2)^2} = \frac{25}{14}$$

$$\begin{aligned} C_1 &= \lim_{u \rightarrow 2} \frac{d}{du} 40 \frac{(u - 2)^2(u - 3)}{(u - 5)(u + 2)(u - 2)^2} = \lim_{u \rightarrow 2} 40 \frac{d}{du} \frac{u - 3}{(u - 5)(u + 2)} \\ &= \lim_{u \rightarrow 2} 40 \frac{(u - 5)(u + 2) - (u - 3)(2u - 3)}{[(u - 5)(u + 2)]^2} = \frac{-55}{18} \end{aligned}$$

$$C_2 = \lim_{u \rightarrow 2} 40 \frac{(u - 2)^2(u - 3)}{(u - 5)(u + 2)(u - 2)^2} = \lim_{u \rightarrow 2} 40 \frac{u - 3}{(u - 5)(u + 2)} = \frac{10}{3}$$

پس:

$$Y(e^{j\omega}) = -\frac{\frac{A}{5}}{1 - \frac{1}{5}e^{-j\omega}} + \frac{\frac{B}{2}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{\frac{C_1}{2}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{\frac{C_2}{4}}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^2} =$$

$$= -\frac{\frac{16}{63}}{1 - \frac{1}{5}e^{-j\omega}} + \frac{\frac{25}{28}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{\frac{55}{36}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{\frac{5}{6}}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^2}$$

از آنجا که سیستم علی است و ورودی از لحظه‌ی $n=0$ به بعد شروع می شود، خروجی نیز از $n=0$ شروع خواهد شد و در نتیجه یک سیگنال دست راستی است. همچنین می دانیم:

$$\alpha^n u[n] \xleftrightarrow{\text{تبدیل فوریه ی گسسته}} \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}} \quad \text{و} \quad |\alpha| < 1$$

از طرفی، به کمک خاصیت

$$-jnx[n] \xleftrightarrow{\text{تبدیل فوریه ی گسسته}} \frac{d}{d\omega} X(e^{j\omega})$$

می توان نوشت:

$$(n+1)\alpha^n u[n+1] \xleftrightarrow{\text{تبدیل فوریه ی گسسته}} \frac{1}{(1 - \alpha e^{-j\omega})^2} \quad \text{و} \quad |\alpha| < 1$$

بنابراین رابطه‌ی زمانی خروجی به صورت زیر به دست می آید:

$$y[n] = \left[-\frac{16}{63} \left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{25}{28} \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{55}{36} \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] u[n] + (n+1) \frac{5}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n+1]$$