

به نام او

امتحان پایان ترم درس احتمال مهندسی

مدت امتحان:

---

سوال (۱) برای متغیر تصادفی  $X$  با چگالی احتمال زیر، ابتدا تابع مولد گشتاور را یافته و سپس از روی آن، مقادیر میانگین و واریانس را بیابید.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin x & , \quad 0 < x < \pi \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \cos x & , \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} x e^{-x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{7} x^2 & , \quad 1 < x < 2 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \delta(x-1) & , \quad x = 1 \\ x & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

سوال ۲) برای متغیرهای تصادفی  $X$  و  $Y$  با چگالی احتمال توام زیر،

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x + ky & , \quad 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} kx & , \quad 0 < x < 1, 0 < x < y < 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} kx & , \quad 0 < y < 1, 0 < y < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} kx & , \quad x + y < 1, x > 0, y > 0 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k(1 + x + y) & , \quad 1 < x < 2, 0 < y < 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

الف) مقدار مناسب  $k$  را بیابید.

ب) توزیع حاشیه ای  $f_X(x)$  را پیدا کنید.

ج) مقدار  $\text{cov}(X, Y)$  را محاسبه کنید.

سوال ۳) برای متغیرهای تصادفی  $X$  و  $Y$  با چگالی احتمال توام زیر،  
(چگالی های احتمال سوال ۲ به صورت جایگشتی)  
الف) استقلال دو متغیر تصادفی را بررسی کنید.  
ب) چگالی احتمال  $X + Y$  را بیابید.

سوال ۴) اگر  $X$  یک متغیر تصادفی با چگالی احتمال زیر باشد،  
(چگالی های احتمال سوال ۱ به صورت جایگشتی)  
مقدار  $\text{var}\{X|X > ?\}$  را به دست آورید.

سوال ۵) سکه سالمی را ۵ بار می اندازیم. اگر  $X$  تعداد رو آمدن ها در سه پرتاب اول و  $Y$  تعداد پشت آمدن ها در سه پرتاب آخر باشد،

یا (تعداد روها در پرتاب های فرد و تعداد پشت ها در سه پرتاب آخر)

یا (تعداد پشت ها در پرتاب های زوج و تعداد پشت ها در سه پرتاب آخر)

یا (تعداد پشت ها و تعداد روها در سه پرتاب آخر)

یا (تعداد پشت ها و تعداد روها در دو پرتاب اول)

الف) تابع مولد گشتاور مشترک  $X$  و  $Y$  را محاسبه کنید.

ب) مقدار  $\mathbb{E}\{X + Y | X = 1\}$  را به دست آورید.

سوال ۶) یک امتحان احتمال مهندسی به صورت آنلاین (و با رعایت پروتکل ها!) به مدت ۲ ساعت برگزار می شود. فرهاد و آرش، هر یک مستقل از دیگری و به تصادف در ۱۰ دقیقه اول (با توزیع یکنواخت) وارد جلسه امتحان می شوند. اگر این دو نفر مستقل از هم در بازه ۱ تا ۱.۵ ساعت از شروع و با توزیع یکنواخت، امتحان خود را به پایان رسانده و از جلسه خارج شوند،

الف) با چه احتمالی فرهاد زودتر از آرش از جلسه امتحان خارج می شود؟

ب) اگر آرش زودتر از فرهاد به جلسه آمده باشد، با چه احتمالی حداکثر ۱۵ دقیقه دیرتر از جلسه خارج می شود؟

الف) با چه احتمالی آرش حداکثر ۱۰ دقیقه پس از فرهاد از جلسه خارج می شود؟

ب) احتمال آن که فرهاد زودتر از آرش به جلسه آمده و زودتر از او خارج شود چقدر است؟

الف) اگر آرش از جلسه امتحان خارج شده باشد، با چه احتمالی فرهاد حداکثر ۲۰ دقیقه پس از او از جلسه خارج می شود؟

ب) اگر فرهاد دیرتر از آرش از جلسه خارج شود، با چه احتمالی زودتر از او وارد جلسه شده است؟

الف) احتمال آن که فرهاد زودتر از آرش به جلسه آمده ولی دیرتر از او خارج شود چقدر است؟

ب) اگر آرش از جلسه امتحان خارج شده باشد، با چه احتمالی فرهاد حداقل ۲۰ دقیقه پیش از او از جلسه خارج شده است؟

الف) اگر آرش زودتر از فرهاد به جلسه آمده باشد، با چه احتمالی دیرتر از او از جلسه خارج می شود؟

ب) احتمال آن که زمان مورد نیاز آرش برای حل سوالات، ۱۰ دقیقه بیشتر از فرهاد باشد چقدر است؟

(یادآوری: اگر متغیر تصادفی  $X$  دارای توزیع یکنواخت در بازه  $(a, b)$  باشد آنگاه:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , \quad a < x < b \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

(

هرف و پ برای یک گروه امتحانی است)

موفق باشید!