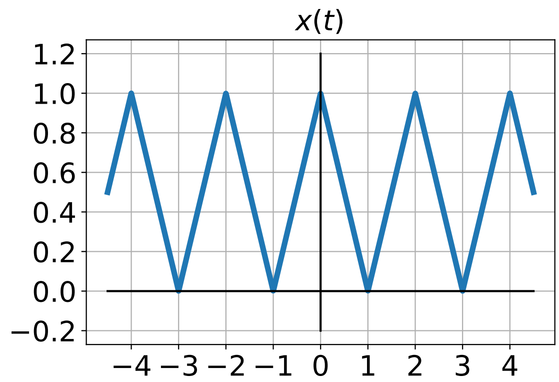
به نام زیبایی

تمرینات سری پنجم سیگنال ها و سیستم ها

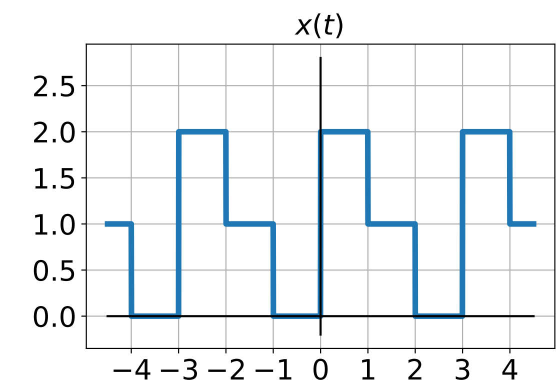
سوال ۱)

ضرایب سری فوریه‌ی پیوسته‌ی هر یک از سیگنال های زیر را به دست آورید.

الف)



ب)



پ) $x(t) = e^{j۲\pi\frac{m}{n}t}$ که m و n دو عدد طبیعی و نسبت به هم اول هستند.

ت) $x(t)$ با دوره‌ی ۴ متناوب است و داریم

$$x(t) = \begin{cases} \sin \pi t & , \quad ۰ \leq t \leq ۲ \\ ۰ & , \quad ۲ < t \leq ۴ \end{cases}$$

ث) $\frac{d}{dt}x(t)$ که $x(t)$ سیگنال قسمت ب است.

سوال ۲)
یک سیستم پیوسته و علی، دارای معادله‌ی دیفرانسیل ورودی–خروجی زیر است:

$$\frac{d}{dt}y(t) + ۴y(t) = x(t)$$

ضرایب سری فوریه‌ی خروجی را برای ورودی های زیر به دست آورید.
الف) $x(t) = \cos ۲\pi t$
ب) $x(t) = \sin ۴\pi t + \cos\left(۶\pi t + \frac{\pi}{۴}\right)$

آیا برای محاسبه‌ی خروجی از روی ورودی، شرایط اولیه مورد نیاز است؟

سوال ۳)
یک سیستم LTI دارای پاسخ ضربه‌ی $h(t) = e^{-|t|}$ است. ضرایب سری فوریه‌ی خروجی را با اعمال ورودی های زیر به دست آورید.
الف) $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)$
ب) $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-۱)^n \delta(t-n)$

سوال ۴)
فرض کنید اطلاعات زیر برای یک سیگنال پیوسته‌ی $x(t)$ و متناوب با دوره‌ی ۳ داده شده است:

(۱) $a_k = a_{k+۲}$

(۲) $a_k = a_{-k}$

(۳) $\int_{-۰/۵}^{۰/۵} x(t)dt = ۱$

(۴) $\int_{۱}^{۲} x(t)dt = ۲$

در این صورت $x(t)$ را بیابید.

سوال ۵)
خواص معروف سری فوریه‌ی پیوسته را اثبات کنید!
نشان دهید اگر $x(t)$ دارای دوره تناوب T و ضرایب سری فوریه a_k باشد، در اینصورت

الف) $\frac{d}{dt}x(t)$ دارای ضرایب $j\frac{۲\pi}{T}ka_k$ است

ب) $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ دارای ضرایب $\frac{T}{j۲\pi}\cdot\frac{a_k}{k}$ است با این شرط که انتگرال، محدود باشد و $a_۰ = ۰$. (چرا شرط $a_۰ = ۰$ مهم است؟)

پ) چنانچه $x(t)$ حقیقی باشد، آنگاه داریم

$$\begin{aligned}
&a_k = a^*_{-k} \\
&\Re(a_k) = \Re(a_{-k}) \\
&\Im(a_k) = -\Im(a_{-k}) \\
&|a_k| = |a_{-k}| \\
&\angle a_k = -\angle a_{-k}
\end{aligned}$$

عملگرهای $\Re$ و $\Im$، به ترتیب قسمت های حقیقی و موهومی یک عدد مختلط را به دست می دهند.

ت) چنانچه $x(t)$ حقیقی باشد، آنگاه $x_e(t)$ و $x_o(t)$ به ترتیب دارای ضرایب فوریه‌ی $\Re(a_k)$ و $j\Im(a_k)$ هستند.

(راهنمایی: برای اثبات هر یک از خواص فوق، ابتدا $x(t)$ را به صورت حاصل جمع نمایی هایی با ضرایب سری فوریه اش بنویسید. در هر مورد، سیگنال داده شده را بر حسب $x(t)$ ابتدا به دست آورده، تاثیر آن را بر روی ضرایب سری فوریه‌ی سیگنال بررسی کنید.)

سوال ۶) (امتیازی)

نشان دهید اگر برای دو سیگنال متناوب $x(t)$ و $y(t)$ با دوره‌ی T داشته باشیم

$$\int_{0}^{T} x(t)y^*(t)dt = 0$$

آنگاه

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_k b_k^* = 0$$

که a_k ضرایب سری فوریه‌ی $x(t)$ و b_k ضرایب سری فوریه‌ی $y(t)$ است.

(راهنمایی: رابطه‌ی هر یک از سیگنال های فوق را بر حسب ضرایب آن بنویسید و در انتگرال جایگذاری کنید. تابع تحت انتگرال به صورت حاصلضرب دو $\sum$ ظاهر می شود که با ساده کردن آن، می توانید اثبات را کامل کنید.)