فهرست مطالب

فصل ۱

مبانی احتمال و جبر مجموعه ها

پاسخ سوال ۱)

برای اثبات گزاره‌ی این سوال، باید از اصول کولموگروف برای احتمال بهره ببریم. این اصول عبارتند از:

۱. احتمال هر زیرمجموعه از فضای نمونه نامنفی است.

۲. احتمال رخداد فضای نمونه، برابر ۱ است (به عبارت دیگر، هر پیشآمد محتمل احتمالاتی، شامل حداقل یکی از اعضای فضای نمونه است).

۳. اگر دو مجموعه‌ی A و B ناسازگار باشند (یعنی اشتراک این دو مجموعه تهی باشد)، در این صورت $P(A\cup B) = P(A) + P(B).$

اکنون، زیر مجموعه‌ی A از فضای نمونه‌ی S را در نظر می‌گیریم. تعریف می‌کنیم $B = S - A$. در این صورت، مجموعه‌های A و B ناسازگارند و می‌توان با استفاده از اصول اول و سوم احتمال نوشت

$$1 = P(S) = P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

در نتیجه، طبق اصل دوم، هر دو احتمال $P(A)$ و $P(B)$ نامنفی اند. در نتیجه

$$P(A) = 1 - P(B) \leq 1$$

و اثبات کامل است ■

پاسخ سوال ۲) طبق اصل ضرب، تعداد تمام اعداد سه رقمی متمایزی که می توان به این روش ساخت، برابر است با $9^3 = 729$. تعداد ارقام فرد از بین اعداد ۱ تا ۹، برابر ۵ است (ارقام ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹). در نتیجه،

تعداد اعداد سه رقمی ای که تمام ارقام آن فرد هستند را می توان دوباره طبق اصل ضرب به $5^3 = 125$ طریق ممکن ساخت. بنابراین احتمال مطلوب عبارتست از

$$p = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{125}{729}$$

پاسخ سوال ۳) تعداد حالات برداشتن ۲۰ توپ، برابر $\binom{100}{20}$ بوده و تعداد حالات مطلوب، برابر $\binom{40}{5}\binom{60}{15}$ است؛ لذا احتمال مطلوب برابر $\frac{\binom{40}{5}\binom{60}{15}}{\binom{100}{20}}$ خواهد بود.

پاسخ سوال ۴)

ابتدا پیشامدهای زیر را تعریف می‌کنیم:

$B =$ پیشامد آبی بودن توپ

$R =$ پیشامد قرمز بودن توپ

$Y =$ پیشامد زرد بودن توپ

$U_1 =$ پیشامد انتخاب کیسه‌ی ۱

$U_2 =$ پیشامد انتخاب کیسه‌ی ۲.

در این صورت،

الف)

$$P(R \cap A_5) = P(R|A_5)P(A_5) = \frac{20}{50} \times \frac{1}{2} = 20\%.$$

ب)

$$P(B|U_1) = \frac{30}{50} = 60\%.$$

پ)

$$\begin{aligned} P(R|Y') &= \frac{P(R \cap Y')}{P(Y')} = \frac{P(R)}{1 - P(Y)} \\ &= \frac{P(R|U_1)P(U_1) + P(R|U_2)P(U_2)}{1 - P(Y|U_1)P(U_1) - P(Y|U_2)P(U_2)} \\ &= \frac{\frac{20}{50} \times \frac{1}{2} + \frac{50}{100} \times \frac{1}{2}}{1 - 0 \times \frac{1}{2} - \frac{20}{100} \times \frac{1}{2}} = 50\%. \end{aligned}$$

ت)

$$\begin{aligned} P(U_2|B') &= \frac{P(U_2 \cap B')}{P(B')} = \frac{P(B'|U_2)P(U_2)}{P(B'|U_1)P(U_1) + P(B'|U_2)P(U_2)} \\ &= \frac{\frac{70}{100} \times \frac{1}{2}}{\frac{20}{50} \times \frac{1}{2} + \frac{70}{100} \times \frac{1}{2}} \approx 63.64\%. \end{aligned}$$

ث)

$$\begin{aligned} P(U_2|R' \cap Y') &= \frac{P(U_2 \cap R' \cap Y')}{P(R' \cap Y')} \\ &= \frac{P(R' \cap Y'|U_2)P(U_2)}{P(R' \cap Y'|U_1)P(U_1) + P(R' \cap Y'|U_2)P(U_2)} \\ &= \frac{\frac{30}{50} \times \frac{1}{2}}{\frac{30}{100} \times \frac{1}{2} + \frac{30}{50} \times \frac{1}{2}} \approx 66.67\%. \end{aligned}$$

پاسخ سوال ۵)

مجموعه‌ی X_i را پیشامد انتقاب جعبه‌ی i–ام به ازای $i \in \{1, 2, 3\}$ در نظر می‌گیریم. همچنین، مجموعه‌های B، R و Y را به ترتیب پیشامدهای انتقاب توپ آبی، قرمز و زرد تعریف می‌کنیم. در این صورت، احتمالات زیر از صورت سوال استخراج می‌شوند:

$$\begin{aligned} &P(X_1) = P(X_2) = P(X_3) = \frac{1}{3}, \\ &P(B|X_1) = \frac{7}{10}, \quad P(R|X_1) = \frac{3}{10}, \quad P(Y|X_1) = 0, \\ &P(B|X_2) = \frac{1}{10}, \quad P(R|X_2) = \frac{3}{10}, \quad P(Y|X_2) = \frac{6}{10}, \\ &P(B|X_3) = \frac{7}{10}, \quad P(R|X_3) = 0, \quad P(Y|X_3) = \frac{3}{10}. \end{aligned}$$

اکنون، با کمک پیشامدهای تعریف شده در ابتدای پاسخ، احتمال مطلوب عبارتست از

$$\begin{aligned}
P(R\cap[X_1\cup X_2]|B') &= \frac{P(R\cap[X_1\cup X_2]\cap B')}{P(B')}\\
&= \frac{P(R\cap[X_1\cup X_2])}{P(B'|X_1)P(X_1)+P(B'|X_2)P(X_2)+P(B'|X_3)P(X_3)}\\
&= \frac{P([R\cap X_1]\cup[R\cap X_2])}{P(B'|X_1)P(X_1)+P(B'|X_2)P(X_2)+P(B'|X_3)P(X_3)}\\
&= \frac{P(R\cap X_1)+P(R\cap X_2)}{P(B'|X_1)P(X_1)+P(B'|X_2)P(X_2)+P(B'|X_3)P(X_3)}\\
&= \frac{P(R|X_1)P(X_1)+P(R|X_2)P(X_2)}{P(B'|X_1)P(X_1)+P(B'|X_2)P(X_2)+P(B'|X_3)P(X_3)}\\
&= \frac{\frac{3}{10}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{10}\times\frac{1}{3}}{\frac{3}{10}\times\frac{1}{3}+\frac{9}{10}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{10}\times\frac{1}{3}} = \frac{2}{5} = 40\%.
\end{aligned}$$

پاسخ سوال ۶)

تعداد اعداد دورقمی‌ای که به این ترتیب ساخته می‌شوند برابر است با $9^2 = 81$. از سوی دیگر، اعداد طبیعی مضرب ۹، به فرم $9k$ هستند که k عدد طبیعی است. از بین این اعداد، اعداد دورقمی مضرب ۹ تنها به ازای $2 \leq k \leq 11$ ساخته می‌شوند. همچنین، عدد ۹۰ در شمارش محسوب نمی‌شود؛ زیرا رقم یکان آن صفر است. بنابراین، تعداد کل اعداد مطلوب برابر ۹ و احتمال مطلوب برابر $\frac{9}{81}$ است.

پاسخ سوال ۷)

مجموعه‌ی X_i را پیشامد انتخاب جعبه‌ی i-ام به ازای $i \in \{1,2,3\}$ در نظر می‌گیریم. همچنین، مجموعه‌های B ، R و W را به ترتیب پیشامدهای انتخاب توپ آبی، قرمز و سفید تعریف می‌کنیم. در این صورت، احتمالات زیر از صورت سوال استخراج می‌شوند:

$$\begin{aligned}
&P(X_1) = P(X_2) = P(X_3) = \frac{1}{3},\\
&P(B|X_1) = \frac{3}{10},\quad P(R|X_1) = \frac{7}{10},\quad P(W|X_1) = 0,\\
&P(B|X_2) = \frac{5}{8},\quad P(R|X_2) = 0,\quad P(W|X_2) = \frac{3}{8},\\
&P(B|X_3) = 0,\quad P(R|X_3) = \frac{1}{10},\quad P(W|X_3) = \frac{9}{10},
\end{aligned}$$

اکنون، با کمک پیشآمدهای تعریف شده در ابتدای پاسخ، احتمال مطلوب عبارتست از

$$\begin{aligned}
P(X_2'|W) &= \frac{P(X_2' \cap W)}{P(W)} \\
&= \frac{P([X_1 \cup X_3] \cap W)}{P(W|X_1)P(X_1) + P(W|X_2)P(X_2) + P(W|X_3)P(X_3)} \\
&= \frac{P([X_1 \cap W] \cup [X_3 \cap W])}{P(W|X_1)P(X_1) + P(W|X_2)P(X_2) + P(W|X_3)P(X_3)} \\
&= \frac{P(X_1 \cap W) + P(X_3 \cap W)}{P(W|X_1)P(X_1) + P(W|X_2)P(X_2) + P(W|X_3)P(X_3)} \\
&= \frac{P(W|X_1)P(X_1) + P(W|X_3)P(X_3)}{P(W|X_1)P(X_1) + P(W|X_2)P(X_2) + P(W|X_3)P(X_3)} \\
&= \frac{0 \times \frac{1}{3} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{3}}{0 \times \frac{1}{3} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{3} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{3}} = \frac{12}{17}.
\end{aligned}$$

پاسخ سوال ۸)

پاسخ سوال ۹)

پاسخ سوال ۱۰)

پاسخ سوال ۱۱)

پاسخ سوال ۱۲)

پاسخ سوال ۱۳)

اصولاً در پرسشهای احتمالاتی، باید فضای نمونه و پیشامدها را در ابتدا به درستی تعریف کرد. اینجا نیز چنین قاعده‌ای را پی می‌گیریم.

ازآنجا که یک فرد خاص می‌تواند زن یا مرد باشد یا چشم آبی باشد یا نباشد، چهار پیشامد ممکن وجود دارد:

$M =$ پیشامد مرد بودن

$F =$ پیشامد زن بودن

$B =$ پیشامد چشم آبی بودن

$N =$ پیشامد چشم آبی نبودن

$S_1 =$ پیشامد اهل استان ۱ بودن

$S_2 =$ پیشامد اهل استان ۲ بودن

صورت سوال، اطلاعات احتمالاتی زیر را به ما می‌دهد:

$$P(S_1) = \frac{100}{1100}$$
$$P(S_2) = \frac{1000}{1100}$$
$$P(B|S_1) = \frac{20}{100}$$
$$P(B|S_2) = \frac{50}{1000}$$
$$P(M|S_1) = \frac{60}{100}$$
$$P(M|S_2) = \frac{350}{1000}$$

الف) احتمال مطلوب ما، $P(S_1|B)$ است که به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
P(S_1|B) &= \frac{P(S_1 \cap B)}{P(B)} \\
&= \underbrace{\frac{P(S_1)P(B|S_1)}{P(B)}}_{\text{قاعده‌ی بیز}} \\
&= \frac{P(S_1)P(B|S_1)}{P(S_1)P(B|S_1) + P(S_2)P(B|S_2)} \\
&= \frac{\frac{100}{1100} \times \frac{20}{100}}{\frac{100}{1100} \times \frac{20}{100} + \frac{1000}{1100} \times \frac{50}{1000}} = \frac{2}{7}
\end{aligned}$$

ب) برای این بخش داریم:

$$P(S_2 \cap N|F) = \frac{P(S_2 \cap N \cap F)}{P(F)}$$

پیشامد $S_2 \cap N \cap F$، پیشامد حالتی است که فرد انتخاب شده، زن بوده، از استان ۲ انتخاب شود و چشم آبی نباشد. از آنجا که از جامعه‌ی ۱۱۰۰ نفری، ۶۳۰ نفر چنین ویژگی‌ای دارند در نتیجه:

$$P(S_2 \cap N \cap F) = \frac{630}{1100}$$

و می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
P(S_2 \cap N|F) &= \frac{P(S_2 \cap N \cap F)}{P(F)} \\
&= \frac{P(S_2 \cap N \cap F)}{P(S_1)P(F|S_1) + P(S_2)P(F|S_2)} \\
&= \frac{P(S_2 \cap N \cap F)}{\frac{100}{1100} \times \frac{40}{100} + \frac{1000}{1100} \times \frac{650}{1000}} \\
&= \frac{\frac{630}{1100}}{\frac{100}{1100} \times \frac{40}{100} + \frac{1000}{1100} \times \frac{650}{1000}} \\
&= \frac{21}{23}
\end{aligned}$$

پ) احتمال مطلوب، به صورت زیر به دست می‌آید

$$P(B|M) = \frac{P(B \cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{40}{1100}}{\frac{410}{1100}} = \frac{4}{41}.$$

پاسخ:

٪٪

٪٪

٪٪

٪٪

٪٪

٪٪

٪٪

٪٪

٪٪

٪٪

٪٪

٪٪

٪٪

٪٪

پاسخ سوال ۱۴)

سوال ۱) الف) فضای نمونه، مجموعه‌ی تمام وقایع ساده‌ی محتمل است که عبارتست از:

$$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

ب) از آنجا که واقعه طبق تعریف یک زیر مجموعه از فضای نمونه است و فضای نمونه ۸ عضوی است، این مسئله دارای $2^8 = 256$ واقعه محتمل است که اگر تهی را نامحتمل بگیریم، ۲۵۵ واقعه‌ی محتمل خواهیم داشت.

پ) طبق تعریف کلاسیک احتمال، احتمال زیرمجموعه‌ی A از مجموعه ی S عبارتست از

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

از طرفی واقعه‌ی اینکه در پرتاب اول و دوم سکه نتیجه یکسان باشد (در پرتاب سوم نتیجه دلخواه است)، دارای چهار عضو HHH، HHT، TTT و TTH است که نتیجه می دهد:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

سوال ۲) الف و ب و پ)

$$\begin{aligned} &A \cap B = \{4\} \\ &A - B = \{1, 5\} \end{aligned}$$

$$A \times B = \{(1,2),(1,3),(1,4),(4,2),(4,3),(4,4),(5,2),(5,3),(5,4)\}$$

ت) برای محاسبه‌ی $(A \cup B) \cap C$ داریم:

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$$

بنابراین

$$(A \cup B) \cap C = \{2,5\}$$

همچنین برای محاسبه‌ی $(A \cap C) \cup (B \cap C)$:

$$A \cap C = \{5\} \quad , \quad B \cap C = \{2\}$$

پس خواهیم داشت

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) = \{2,5\}$$

که نتیجه می دهد:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

سوال ۳) از اصل ۳ کولموگروف می توان دریافت که اگر دو مجموعه ی S و T ناسازگار باشند، خواهیم داشت:

$$P(S \cup T) = P(S) + P(T)$$

در این مسئله با تعریف

$$S = A - B$$
$$T = A \cap B$$

می دانیم که مجموعه‌ی $A-B$ شامل عناصر B نیست؛ در حالی که عناصر مجموعه ی $A\cap B$ در B وجود دارند؛ پس نتیجه گیری زیر به دست می آید:

$$[A-B] \cap [A \cap B] = \emptyset \implies P(A) = P([A-B] \cup [A \cap B]) = P(A-B) + P(A \cap B)$$

سوال ۱) الف) از آنجا که سکه دارای ۲ حالت و تاس دارای ۶ حالت است، طبق اصل ضرب ۱۲ حالت مختلف برای پیشامدهای ساده خواهیم داشت؛ یعنی فضای شدنی مسئله‌ی ما ۱۲ حالتی است. از این ۱۲ حالت فقط حالاتی که سکه رو بیاید و تاس یکی از اعداد ۱–۳–۵ شود مدنظر است که تعداد این حالات خاص ۳ تاست. در نتیجه احتمال مطلوب $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ خواهد بود.

ب) پیشامد اینکه سکه به رو بیفتد را با A و اینکه تاس فرد شود را با B نمایش می دهیم. هدف محاسبه‌ی $P(A \cup B)$ که می دانیم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

از طرفی

$$P(A)=\frac{1}{2} \quad , \quad P(B)=\frac{1}{2} \quad , \quad P(A\cap B)=\frac{1}{4}$$

بنابراین

$$P(A\cup B)=\frac{3}{4}$$

سوال ۲) الف)

$$S=\{3,6,\text{پشت},\text{رو}\}$$

ب) سکه زمانی رو می آید که تاس مضرب ۳ نشود و خود سکه هم به رو بیفتد. احتمال اینکه تاس مضرب ۳ نشود برابر $\frac{2}{3}$ و احتمال اینکه سکه در صورت پرتاب شدن به رو بیفتد برابر $\frac{1}{2}$ است؛ پس احتمال مطلوب برابر حاصلضرب دو احتمال قبلی یعنی $\frac{1}{3}$ خواهد بود.

پ) اگر پیشامد ۱ آمدن تاس را با A و پشت آمدن سکه را با B نمایش دهیم، در این صورت مطلوبست

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

از طرفی

$$P(A)=\frac{1}{6} \quad , \quad P(B)=\frac{1}{3}$$

تاس با احتمال $\frac{1}{6}$، ۱ می آید که در این صورت منجر به پرتاب سکه خواهد شد و سکه هم با احتمال 0.5 به پشت می افتد؛ پس $P(A\cap B)$ برابر $\frac{1}{12}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}$ و $P(A\cup B)$ برابر $\frac{5}{12}$ خواهد بود.

سوال ۳) هنگامی که از اشکال دوبعدی بهره می گیریم، جهت استفاده از مفهوم اندازه‌ی پیشامدها، باید مساحت آن ها را در نظر بگیریم.

الف) نقطه ای از داخل مربع به مساحت ۴ انتخاب شده است. چون پیشامد مطلوب، انتخاب نقطه از داخل دایره است و دایره به طور کامل درون مربع قرار دارد، احتمال مطلوب عبارت است از:

$$P(A)=\frac{\text{مساحت دایره}}{\text{مساحت مربع}}=\frac{\pi}{4}$$

ب) از آنجا که قطر ضخامتی ندارد (مساحت آن برابر صفر است؛ برای درک این موضوع، به جای قطر یک نوار نازک در نظر بگیرید و ضخامت آن را به سمت صفر میل دهید) احتمال مطلوب برابر ۰ خواهد بود.

پ) مکمل این پیشامد عبارتست از اینکه فاصله ی نقطه از دست کم یکی از رأس های مربع کمتر از 0.5 باشد. به ازای هر راس مربع، مکان هندسی نقاطی از داخل مربع که فاصله‌ی آنها از راس مورد نظر کمتر از 0.5 باشد، یه ربع دایره به مرکز آن راس و شعاع 0.5 داخل مربع خواهد بود. ۴ راس در مربع داریم؛ پس ۴ تا از این ربع دایره ها خواهیم داشت که همپوشانی ندارند؛ پس مساحت مکمل پیشامد مورد نظر عبارتست از:

$$\text{مساحت پیشامد A'} = 4 \times \text{مساحت هر ربع دایره} = \frac{\pi}{4}$$

و برای احتمال مطلوب داریم:

$$P(A) = \frac{\text{مساحت پیشامد A}}{\text{مساحت مربع}} = \frac{16-\pi}{16} = 1 - \frac{\pi}{16}$$

سوال ۴) الف) یک عدد زمانی به ۳ بخش پذیر است که جمع ارقام آن به ۳ بخش پذیر باشد. مجموعه‌ی این اعداد عبارتست از:

$$S = \{111, 222, 210, 201, 120, 102\} \implies |S| = 6$$

ب) تمام اعداد ۳ رقمی ای که با این ارقام ساخته می شوند، یا دارای صدگان ۱ یا ۲ هستند. تعداد اعداد سه رقمی و سه رقمی زوج که دارای صدگان ۱ یا ۲ باشند، به ترتیب برابر۹ و ۶ خواهد بود. بنابراین احتمال مطلوب عبارتست از:

$$P(A) = \frac{6+6}{9+9} = \frac{2}{3}$$

سوال ۱) الف) فضای نمونه، مجموعه‌ی تمام وقایع ساده‌ی محتمل است که عبارتست از:

$$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

ب) از آنجا که واقعه طبق تعریف یک زیر مجموعه از فضای نمونه است و فضای نمونه ۸ عضوی است، این مسئله دارای $2^8 = 256$ واقعه محتمل است که اگر تهی را نامحتمل بگیریم، ۲۵۵ وافعه‌ی محتمل خواهیم داشت.

پ) طبق تعریف کلاسیک احتمال، احتمال زیرمجموعه‌ی A از مجموعه ی S عبارتست از

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

از طرفی واقعه‌ی اینکه در پرتاب اول و دوم سکه نتیجه یکسان باشد (در پرتاب سوم نتیجه دلخواه است)، دارای چهار عضو HHH، HHT، TTT و TTH است که نتیجه می دهد:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

سوال ۲) الف و ب و پ)

$$A \cap B = \{4\}$$
$$A - B = \{1, 5\}$$

$$A \times B = \{(1,2), (1,3), (1,4), (4,2), (4,3), (4,4), (5,2), (5,3), (5,4)\}$$

ت) برای محاسبه‌ی $(A \cup B) \cap C$ داریم:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

بنابراین

$$(A \cup B) \cap C = \{2, 5\}$$

همچنین برای محاسبه‌ی $(A \cap C) \cup (B \cap C)$:

$$A \cap C = \{5\} \quad , \quad B \cap C = \{2\}$$

پس خواهیم داشت

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) = \{2, 5\}$$

که نتیجه می دهد:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

سوال ۳) از اصل ۳ کولموگروف می توان دریافت که اگر دو مجموعه ی S و T ناسازگار باشند، خواهیم داشت:

$$P(S \cup T) = P(S) + P(T)$$

در این مسئله با تعریف

$$S = A - B$$
$$T = A \cap B$$

می دانیم که مجموعه‌ی $A - B$ شامل عناصر B نیست؛ در حالی که عناصر مجموعه ی $A \cap B$ در B وجود دارند؛ پس نتیجه گیری زیر به دست می آید:

$$[A - B] \cap [A \cap B] = \emptyset \implies P(A) = P([A - B] \cup [A \cap B]) = P(A - B) + P(A \cap B)$$

سوال ۱) الف) از آنجا که سکه دارای ۲ حالت و تاس دارای ۶ حالت است، طبق اصل ضرب ۱۲ حالت مختلف برای پیشامدهای ساده خواهیم داشت؛ یعنی فضای شدنی مسئله‌ی ما ۱۲ حالتی است. از این ۱۲ حالت فقط حالاتی که سکه رو بیاید و تاس یکی از اعداد ۱–۳–۵ شود مدنظر است که تعداد این حالات خاص ۳ تاست. در نتیجه احتمال مطلوب $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ خواهد بود.

ب) پیشامد اینکه سکه به رو بیفتد را با A و اینکه تاس فرد شود را با B نمایش می دهیم. هدف محاسبه‌ی $P(A \cup B)$ که می دانیم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

از طرفی

$$P(A) = \frac{1}{2} \quad , \quad P(B) = \frac{1}{2} \quad , \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

بنابراین

$$P(A \cup B) = \frac{3}{4}$$

سوال ۲) الف)

$$S = \{3, 6, \text{پشت}, \text{رو}\}$$

ب) سکه زمانی رو می آید که تاس مضرب ۳ نشود و خود سکه هم به رو بیفتد. احتمال اینکه تاس مضرب ۳ نشود برابر $\frac{2}{3}$ و احتمال اینکه سکه در صورت پرتاب شدن به رو بیفتد برابر $\frac{1}{2}$ است؛ پس احتمال مطلوب برابر حاصلضرب دو احتمال قبلی یعنی $\frac{1}{3}$ خواهد بود.

پ) اگر پیشامد ۱ آمدن تاس را با A و پشت آمدن سکه را با B نمایش دهیم، در این صورت مطلوبست

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

از طرفی

$$P(A) = \frac{1}{6} \quad , \quad P(B) = \frac{1}{3}$$

تاس با احتمال $\frac{1}{6}$، ۱ می آید که در این صورت منجر به پرتاب سکه خواهد شد و سکه هم با احتمال 0.5 به پشت می افتد؛ پس $P(A \cap B)$ برابر $\frac{1}{12} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6}$ و $P(A \cup B)$ برابر $\frac{5}{12}$ خواهد بود.

سوال ۳) هنگامی که از اشکال دوبعدی بهره می گیریم، جهت استفاده از مفهوم اندازه‌ی پیشامدها، باید مساحت آن ها را در نظر بگیریم.

الف) نقطه ای از داخل مربع به مساحت ۴ انتخاب شده است. چون پیشامد مطلوب، انتخاب نقطه از داخل دایره است و دایره به طور کامل درون مربع قرار دارد، احتمال مطلوب عبارت است از:

$$P(A) = \frac{\text{مساحت دایره}}{\text{مساحت مربع}} = \frac{\pi}{4}$$

ب) از آنجا که قطر ضخامتی ندارد (مساحت آن برابر صفر است؛ برای درک این موضوع، به جای قطر یک نوار نازک در نظر بگیرید و ضخامت آن را به سمت صفر میل دهید) احتمال مطلوب برابر ۰ خواهد بود.

پ) مکمل این پیشامد عبارتست از اینکه فاصله ی نقطه از دست کم یکی از رأس های مربع کمتر از 0.5 باشد. به ازای هر راس مربع، مکان هندسی نقاطی از داخل مربع که فاصله‌ی آنها از راس مورد نظر کمتر از 0.5 باشد، یه ربع دایره به مرکز آن راس و شعاع 0.5 داخل مربع خواهد بود. ۴ راس در مربع داریم؛ پس ۴ تا از این ربع دایره ها خواهیم داشت که همپوشانی ندارند؛ پس مساحت مکمل پیشامد مورد نظر عبارتست از:

$$\text{مساحت پیشامد A'} = 4 \times \text{مساحت هر ربع دایره} = \frac{\pi}{4}$$

و برای احتمال مطلوب داریم:

$$P(A) = \frac{\text{مساحت پیشامد A}}{\text{مساحت مربع}} = \frac{16-\pi}{16} = 1 - \frac{\pi}{16}$$

سوال ۴) الف) یک عدد زمانی به ۳ بخش پذیر است که جمع ارقام آن به ۳ بخش پذیر باشد. مجموعه‌ی این اعداد عبارتست از:

$$S = \{111, 222, 210, 201, 120, 102\} \implies |S| = 6$$

ب) تمام اعداد ۳ رقمی ای که با این ارقام ساخته می شوند، یا دارای صدگان ۱ یا ۲ هستند. تعداد اعداد سه رقمی و سه رقمی زوج که دارای صدگان ۱ یا ۲ باشند، به ترتیب برابر۹ و ۶ خواهد بود. بنابراین احتمال مطلوب عبارتست از:

$$P(A) = \frac{6+6}{9+9} = \frac{2}{3}$$

سوالات ۱۳، ۲۲ ، ۲۴ و ۲۵ از کتاب غیرمرجع (کتاب Probability, Random Variables and Stochastic Processes از پاپولیس)

سوالات ۱۳ و ۲۵ از کتاب غیرمرجع، به دلیل کاربرد متغیرهای تصادفی سوالات امتیازی محسوب می‌شوند.

سوال ۱۳) تعریف کنید

$$f(t_0) \triangleq P\{t \geq t_0\}$$

در اینصورت باید نشان دهیم

$$P\Big([t_0 \leq t \leq t_0+t_1] \cap [t \geq t_0]\Big) = f(t_0)\Big[1-f(t_1)\Big]$$

یا به عبارت دیگر

$$P(t \geq t_0) - P(t \geq t_0+t_1) = f(t_0) - f(t_0)f(t_1)$$

طبق تعریف

$$f(t_0) - f(t_0+t_1) = f(t_0) - f(t_0)f(t_1)$$

یا معادلا

$$f(t_0+t_1) = f(t_0)f(t_1)$$

می‌توان ثابت کرد تنها تابع پیوسته ای که شرط بالا را برآورده می‌کند، تابع نمایی است بنابراین $f(t_0) = e^{-ct_0}$ که $c > 0$ و اثبات کامل است ■

سوال ۲۲) می دانیم که برای استقلال رخدادهای $A_1, A_2, \cdots, A_n$ باید هر ترکیب چندتایی از این رخدادها مستقل باشند؛ یعنی هر دوتایی از آنها، هر سه تایی از آنها، ... و همه‌ی n تا از آنها. چون دقیقا $\binom{n}{k}$ ترکیب k تایی از این مجموعه ها وجود دارد، در اینصورت باید دقیقا

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} = 2^n - n - 1$$

معادله داشته باشیم.

سوال ۲۴) (در این مسئله بهتر است خرابی هر دو لامپ را یک پیشامد در نظر بگیریم؛ زیرا تنها این پیشامد به همراه پیشامد انتخاب جعبه مورد سوال است. هر چند مسئله را می توان از طریق تعریف یک پیشامد برای هر لامپ نیز حل کرد. این هنر فرد است که پیشامدها و رخدادها را به صورت کاملا درست و واضح و البته تا حد امکان حداقلی تعریف کند تا دقیقا همان مسئله ای را حل کند که از او خواسته شده و البته همان مسئله را هم به صورت خلاصه و حداقلی حل نماید. تناقض برتراند، نمونه‌ی بسیار خوبی از حل مسئله‌ی احتمالی به چند روش ممکن فقط بر اساس تخصیص احتمال های مختلف به رخدادهاست.)

الف)

$$A = \{\text{پیشامد خرابی هر دو لامپ}\}$$
$$B = \{\text{پیشامد انتخاب جعبه‌ی ۱}\}$$

در این سوال داریم

$$P(A|B) = \frac{\binom{100}{2}}{\binom{1000}{2}} \approx 0.01$$

$$P(A|B^c) = \frac{\binom{100}{2}}{\binom{2000}{2}} \approx 0.0025$$

$$P(B) = \frac{1}{2}$$

و مطلوب ما $P(A)$ است؛ در اینصورت طبق قاعده‌ی احتمال کل

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B)P(A|B) + P(B^c)P(A|B^c) \\ &= \frac{1}{2}(0.01 + 0.0025) \\ &= 0.0063 \end{aligned}$$

ب) مطلوب ما $P(B|A)$ است. در اینصورت

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(AB)}{P(A)} \\ &= \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)} \\ &= \frac{0.5 \times 0.01}{0.0063} \\ &= 0.7937 \end{aligned}$$

این احتمال، احتمال قابل توجهی است زیرا درصد تعداد لامپ‌های خراب در جعبه‌ی ا بیشتر است.

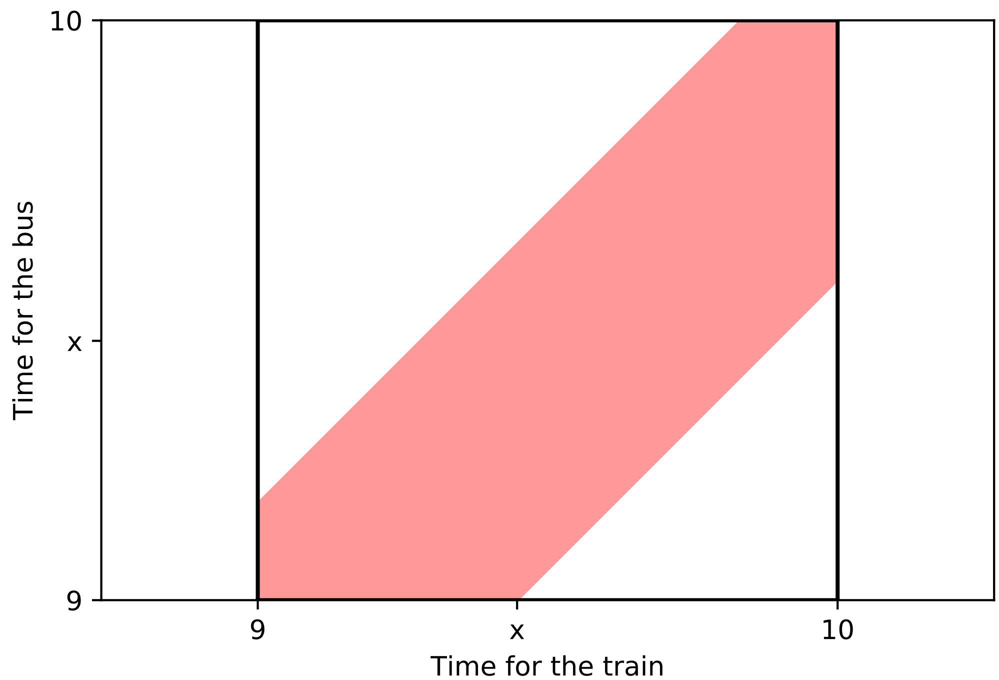
سوال ۲۵) اگر X و Y را به ترتیب متغیرهای تصادفی ورود قطار و اتوبوس به ایستگاه بدانیم، این متغیرها دارای توزیع یکنواخت بین ساعتهای ۹ و ۱۰ و مستقل هستند. در اینصورت قطار بازه‌ی زمانی $(X, X + \frac{1}{6})$ و اتوبوس بازه‌ی زمانی $(Y, Y + x)$ را اشغال می کند. مکمل این پیشامد، حالتی است که اتوبوس و قطار یکدیگر را ملاقات نکنند؛ یعنی

$$Y > X + \frac{1}{6} \qquad \text{یا} \qquad Y + x < X$$

در اینصورت پیشامد مطلوب ما خواهد بود:

$$X - x < Y < X + \frac{1}{6}$$

که مساحت ناحیه‌ی زیر است:



مساحت ناحیه‌ی هاشور نخورده برابر است با

$$\frac{25}{72}+\frac{(1-x)^2}{2}$$

این مساحت باید برابر $\frac{1}{2}$ باشد که در این‌صورت مقدار x برابر ۲۷ دقیقه $\approx 0.4472\mathrm{h} \approx 1-\frac{\sqrt{11}}{6}$ محاسبه می شود.

سوالات ۱۳، ۲۲ و ۲۴ از کتاب مرجع (کتاب Probability and Statistics از پاپولیس)

سوال ۱۳) این مسئله به کمک قانون احتمال کل و استفاده از تعریف احتمال شرطی به راحتی قابل حل است

سوال ۲۲) مشابه سوال ۲۲ از کتاب غیر مرجع.

سوال ۲۴) رشته‌ی لامپ زمانی کار می‌کند که تمام لامپ های آن سالم باشند (تقسیم ولتاژ و خاصیت سری بودن؛ در حالت موازی، کافی است حداقل یکی از لامپ ها کار کند به دلیل تقسیم جریان) در اینصورت خواهیم

داشت:

$$p = (1-0.01)^{50} \approx 0.61$$

سوال ۱)

$$\begin{aligned} P(F) &= 0.37 \\ P(M) &= 0.43 \\ P(D|M) &= 0.15 \\ P(D|F) &= 0.25 \end{aligned}$$

مطلوب است $P(D|M\cup F)$. در اینصورت داریم

$$\begin{aligned} P(D|M\cup F) &= \frac{P(D\cap [M\cup F])}{P(M\cup F)} \\ &= \frac{P([D\cap M]\cup [D\cap F])}{P(M)+P(F)} \\ &= \frac{P(D\cap M)+P(D\cap F)}{P(M)+P(F)} \\ &= \frac{P(M)P(D|M)+P(F)P(D|F)}{P(M)+P(F)} \\ &= \frac{0.37\times 0.25+0.43\times 0.15}{0.8} \\ &\approx 0.20 \end{aligned}$$

این مسئله را به گونه‌ی دیگری نیز می توان حل کرد. از آنجا که به طور کل کودکان در سوال مطرح نمی‌شوند نسبت جمعیت زنان و مردان بزرگسال را به کل بزرگسالان محاسبه می کنیم. به طور کل، 53.75% جمعیت بزرگسالان را مردان و 46.25% را زنان تشکیل می دهند. بنابراین می توان نوشت

$$\begin{aligned} P(M) &= 0.5375 \\ P(F) &= 0.4625 \end{aligned}$$

و مطلوب $P(D)$ خواهد بود؛ در این صورت

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D\cap M)+P(D\cap F) \\ &= P(D|M)P(M)+P(D|F)P(F) \\ &= 0.5375\times 0.15+0.4625\times 0.25 \\ &\approx 0.20 \end{aligned}$$

سوال ۲)

$$P(A|B\cap C)=\frac{P([A\cap B]\cap[A\cap C])}{P(B)P(C)}$$

برای آنکه تساوی ارضا شود، یک شرط کافی مستقل بودن $A\cap B$ و $A\cap C$ است.

سوال ۳) کران بالا به وضوح بنا به رابطه‌ی احتمال اجتماع برقرار است. این کران بسیار مهم، کران اجتماع [1] نامیده می شود.

برای اثبات کران پایین، ابتدا به دلیل تقارن فرض می کنیم $P(A)\leq P(B)$. اکنون کافی است مد نظر قرار دهیم که نامساوی های زیر معادلند:

$$\begin{aligned}
&P(A)+P(B)-\frac{1}{4-4P(A)}\leq P(A\cup B)\\
&\iff \frac{1}{4-4P(A)}\geq P(A\cap B)\\
&\iff P(A\cap B)(1-P(A))\leq\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

از آنجایی که $P(A\cap B)\leq P(A)$ و بیشینه مقدار $u-u^2$ به ازای $0<u<1$ در $u=\frac{1}{2}$ رخ می‌دهد، اثبات کامل است

پاسخ سوال ۱۵)

سوال ۱)

الف) اگر جایگذاری داشته باشیم، پس از برداشتن گلوله‌ی اول به ۸ حالت، گلوله‌ی دوم را نیز می توانیم به ۸ حالت برداریم. در این صورت از آنجا که ترتیب برداشتن فرقی نمی کند، برداشتن دو گلوله مجموعا به $\frac{8\times 8}{2}$ طریق ممکن است. همچنین اینکه یکی از گلوله ها سفید و دیگری آبی باشد، به 3×5 راه ممکن است؛ پس احتمال مطلوب برابر است با

$$P=\frac{15}{32}$$

نکته مهم!! ممکن است این گونه برداشت شود که پاسخ اصلی در یک ضریب ۲ با پاسخ بالا تفاوت می کند؛ به طور مثال یک راه حل (که البته نادرست است!) به صورت زیر است:

[1] Union Bound

پیشامد اینکه گلوله‌ی اول سفید و دومی آبی باشد، ۱۵ حالت متفاوت دارد. چون هر گلوله را به ۸ حالت مستقل از دیگری بر می داریم، پاسخ $\frac{3\times5}{8\times8}$ می شود.

ایراد استدلال بالا این است که رنگ گلوله ها در ترتیب برداشته شدن گلوله ها اثرگذار بوده است. برای اینکه مشکل این استدلال رفع شود، باید پیشامد عکس هم در نظر گرفته شود؛ یعنی حالتی که گلوله‌ی اول آبی و دومی سفید باشد تا محور زمان دیده نشود.

نوع دیگر استدلال (درست) چنین است: هنگامی که جایگذاری داشته باشیم، برداشتن گلوله های اول و دوم کاملا از هم مستقل می شود. پس مسئله معادل است با اینکه:

دو کیسه داریم که هر یک شامل ۵ سفید و ۳ آبی است. از هر یک، یک گلوله بر می داریم. با چه احتمالی یکی سفید و دیگری آبی می شود؟

مسئله ی فوق، بعد زمان را به فضا تبدیل کرده است؛ یعنی به جای دو بار برداشتن گلوله ها از یک کیسه در زمانهای مختلف، دوتا را از دو کیسه همزمان برداشته ایم. در اینصورت پیشامد اینکه یکی آبی و دیگری سفید باشد، اجتماع دو پیشامد هم احتمال است که هر یک با احتمال $\frac{15}{64}$ رخ می دهد؛ پس پاسخ درست $\frac{15}{32}$ است.

ب) اگر جایگذاری مجاز نباشد، دو گلوله را به $28 = \binom{8}{2}$ طریق ممکن می توان برداشت که فقط حالاتی که یکی سفید و دیگری آبی باشد مطلوب است. این حالات مجموعا به $15 = \binom{5}{1}\binom{3}{1}$ طریق ممکن امکان پذیرند؛ پس احتمال مطلوب برابر است با

$$P = \frac{15}{28}$$

سوال ۲) الف) مکمل این پیشامد، حالتی است که حداکثر یک بار رو ظاهر شود که برابر است با حالاتی که در ۱۰ پرتاب دقیقا ۱ رو یا دقیقا صفر رو ظاهر شود (همگی به پشت ظاهر شوند). مجموع احتمالات برابر است با

$$p' = 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^9 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{11}{1024}$$

بنابراین احتمال مطلوب برابر است با

$$p = 1 - p' = \frac{1013}{1024}$$

ب) مشابه قسمت بالا، از آنجا که پرتاب های سکه از هم مستقل هستند، داریم:

$$p = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}$$

پ) احتمال اینکه در پرتاب های زوج نتیجه رو باشد با اینکه پشت باشد، به دلیل تقارن مسئله یکسان است. از طرفی برای محاسبه‌ی احتمال اینکه در پرتاب های زوج نتیجه رو باشد داریم:

$$p' = \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

بنابراین احتمال مطلوب برابر است با

$$p = 2p' = \frac{1}{16}$$

سوال ۳) این دسته گل را به $\binom{20}{5} = 15504$ راه ممکن می توان برگزید.

الف) اگر دسته گل بخواهد شامل ۲ نسترن و ۲ بنفشه باشد، باید گل باقیمانده را از بین لاله ها و اقاقیاها به ۱۲ طریق ممکن برداریم. این کار به $\binom{3}{2}\binom{5}{2}\binom{12}{1} = 180$ حالت ممکن امکان پذیر است؛ بنابراین احتمال مطلوب برابر است با

$$p = \frac{180}{15504} \approx 0.01$$

(اگر فرض کرده اید دسته گل شامل حداقل ۲ نسترن یا ۲ بنفشه است نیز راه حل مورد قبول است!)

ب) فقط می توان از بین ۷ گل بنفشه و اقاقیا انتخاب کرد که این به $\binom{7}{5} = 21$ حالت ممکن است؛ پس:

$$p = \frac{21}{15504} \approx 0.0014$$

پ) احتمال مطلوب عبارتست از

$$\begin{aligned}p &= \frac{1}{15504}\binom{10}{2}\binom{5}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}\\ &+ \frac{1}{15504}\binom{10}{1}\binom{5}{2}\binom{3}{1}\binom{2}{1}\\ &+ \frac{1}{15504}\binom{10}{1}\binom{5}{1}\binom{3}{2}\binom{2}{1}\\ &+ \frac{1}{15504}\binom{10}{1}\binom{5}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{2}\\ &= \frac{50}{323} \approx 0.15\end{aligned}$$

سوال ۴) الف) هر مجموعه n عضوی شامل 2^n زیر مجموعه‌ی متمایز است که $\binom{n}{k}$ تا از آنها k عضوی اند. پس احتمال مطلوب برابر است با

$$p = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

ب) از آنجا که مجموع تمام احتمالات فوق برابر ۱ است، داریم:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{2^n} = 1$$

که معادل گزاره ای است که میخواستیم ثابت کنیم.

سوال ۲)

الف)

$$\binom{n}{m}\left(\frac{M}{N}\right)^m\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-m}$$

ب)

$$\frac{\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}$$

ج) در این حالت باید داشته باشیم $n = M + 2$ در غیر این صورت احتمال برابر صفر است. با این فرض،

پس از تمام شدن گلوله های سفید، حتما دو گلوله‌ی سیاه برداشته خواهند شد و این احتمال برابر یک است.

$$\begin{aligned} P &= \Pr[\text{برداشتن دو سیاه}|\text{برداشتن تمام سفیدها}] \\ &= \frac{\Pr[\text{برداشتن دو سیاه} \cap \text{برداشتن تمام سفیدها}]}{\Pr[\text{برداشتن تمام سفیدها}]} \\ &= 1 \end{aligned}$$

سوال ۳) این حالت زمانی رخ می دهد که تعداد قدم زدن های به سمت چپ فرد با تعداد قدم زدن های به سمت راست فرد برابر باشد؛ پس اولین شرط زوج بودن k است در غیر این صورت احتمال برابر صفر خواهد بود. با فرض زوج بودن k داریم:

$$p = \binom{k}{\frac{k}{2}} [p(1-p)]^{\frac{k}{2}}$$

سوال ۴) ابتدا، زیرمجموعه ها را با A و B و سپس پیشامد آن را که عدد i در A و B باشد، به ترتیب با X_i و Y_i نمایش می دهیم. در این صورت احتمال زیر مطلوب است:

$$\begin{aligned} \Pr\{&\text{پیشامد قرار نداشتن عدد ۱ در هر دو مجموعه} \\ &\cap \text{پیشامد قرار نداشتن عدد ۲ در هر دو مجموعه} \\ &\cap \text{پیشامد قرار نداشتن عدد ۳ در هر دو مجموعه} \\ &\cap \cdots \\ &\cap \text{پیشامد قرار نداشتن عدد } n \text{ در هر دو مجموعه}\} \end{aligned}$$

به زبان ریاضی:

$$\Pr\left\{\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \cap Y_i]^c\right\}$$

به دلیل استقلال می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \Pr\left\{\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \cap Y_i]^c\right\} &= \prod_{i=1}^{n} \Pr\left\{[X_i \cap Y_i]^c\right\} \\ &= \prod_{i=1}^{n} 1 - \Pr\left\{X_i \cap Y_i\right\} \\ &= \prod_{i=1}^{n} 1 - \Pr\left\{X_i\right\} \Pr\{Y_i\} \\ &= (1-p^2)^n \end{aligned}$$

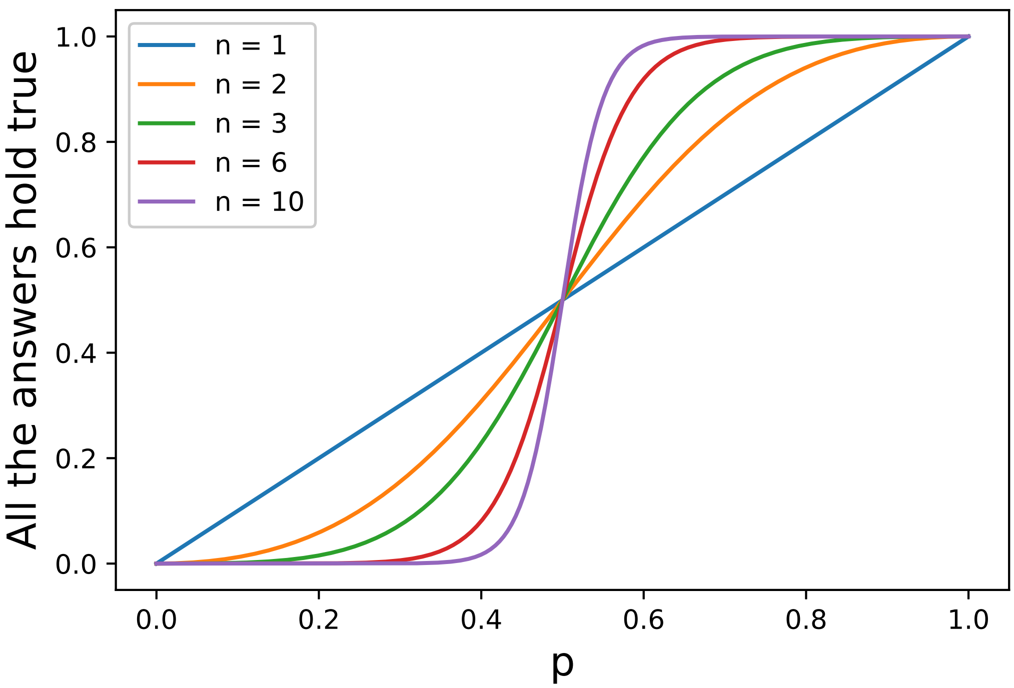
سوال ۶) احتمال مطلوب عبارتست از:

$$\Pr\{\text{یکسان بودن پاسخ تمام دانشجویان}|\text{درست بودن پاسخ تمام دانشجویان}\}$$
$$= \frac{\Pr\{\text{یکسان بودن پاسخ تمام دانشجویان} \cap \text{درست بودن پاسخ تمام دانشجویان}\}}{\Pr\{\text{یکسان بودن پاسخ تمام دانشجویان}\}}$$

پیشامد آن که تمام دانشجویان مستقل از هم به پاسخ درست برسند، حالت خاصی از کوشش مکرر و احتمال آن برابر p^n است. احتمال آن که دانشجویان به پاسخ یکسانی برسند طبق قاعده‌ی احتمال کل برابر احتمال پاسخ یکسان در دو حالت پاسخ درست یا نادرست است. احتمال آن که تمام دانشجویان به پاسخ نادرست رسیده باشند برابر $(1-p)^n$ و در نتیجه احتمال مطلوب برابر

$$\frac{p^n}{p^n+(1-p)^n} = \frac{1}{1+\left(1-\frac{1}{p}\right)^n}$$

خواهد بود. نسبت $\frac{1}{p}-1$ را می توان معیاری از سختی سوال ارزیابی کرد. در حقیقت هر چه سوال به تعبیر ریاضی آن "سخت تر" باشد، احتمال درست پاسخ دادن تمام دانشجویانی که به پاسخ یکسان رسیده اند کمتر است. به علاوه هر چه تعداد دانشجویان بیشتری پس از امتحان به یک پاسخ رسیده باشند، احتمال آن که همه‌ی آنها اشتباه کنند بیشتر می شود. این وضعیت را می‌توان در نمودار زیر مشاهده کرد:



پاسخ سوال ۱۶)

سوال ۱)

$$\Pr\{\text{ماسک زدن|ابتلا به کرونا}\} = 0.15$$
$$\Pr\{\text{ماسک نزدن|ابتلا به کرونا}\} = 0.7$$
$$\Pr\{\text{ماسک زدن}\} = 0.05$$

$$\begin{aligned}\Pr\{\text{ابتلا به کرونا}\} &= \Pr\{\text{ماسک زدن|ابتلا به کرونا}\}\Pr\{\text{ماسک زدن}\} \\ &+ \Pr\{\text{ماسک نزدن|ابتلا به کرونا}\}\Pr\{\text{ماسک نزدن}\} \\ &= 0.7 \times 0.95 + 0.15 \times 0.05 = 67.25\%\end{aligned}$$

سوال ۲)

$$\Pr\{\text{هردو زوج}\} = \Pr\{\text{هردو زوج}\} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \implies \Pr\{\text{جمع زوج}\} = \frac{1}{2} = 0.5$$

ب)

$$\Pr\{\text{جمع بیشتر از ۸}|\text{جمع زوج}\} = \frac{\Pr\{\text{جمع بیشتر از ۸} \cap \text{جمع زوج}\}}{\Pr\{\text{جمع زوج}\}} = \frac{\frac{4}{36}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{9} \approx 0.22$$

سوال ۳)

راه ۱

اگر عناصر ۱ و ۲ را که در هر دو زیر مجموعه هستند کنار بگذاریم، سایر اعضا را به 3^{n-2} طریق ممکن می توان بین دو زیرمجموعه پخش کرد. از طرفی برای آنکه اشتراک دو زیر مجموعه برابر $\{1,2\}$ باشد و اعضای $3,4,5$ داخل یکی از زیرمجموعه ها بیفتند، باید در هنگام انتخاب سایر اعضای زیرمجموعه ها از بین اعضای $\{5,\cdots,n\}$ ابتدا هر عضو مجموعه‌ی بالا را در نظر بگیریم. هر عضو سه حالت دارد: یا فقط داخل زیرمجموعه‌ی ۱ است؛ یا فقط داخل زیر مجموعه‌ی ۲ است و یا در هیچ یک از زیر مجموعه ها نیست. بنابراین این کار به 3^{n-5} طریق ممکن امکان پذیر می شود و احتمال مطلوب برابر است با

$$\frac{3^{n-5}}{3^{n-2}} = \frac{1}{27}$$

راه ۲

از آنجا که ۱ و ۲ در هر دو زیرمجموعه هستند، می توان آنها را نادیده گرفت و سایر اعضای هر دو زیرمجموعه را از اعضای $\{3,4,\cdots,n\}$ برگزید. با این شرط، تعداد کل حالاتی که می توان دو زیر مجموعه را برگزید عبارتست از اینکه ابتدا k عضو برداریم و سپس این k عضو را بین دو زیرمجموعه پخش کنیم؛ یعنی

$$\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} 2^k = 3^{n-2}$$

تعداد حالاتی که یکی از زیر مجموعه های شامل عناصر $\{3,4,5\}$ باشد، این است که عناصر معلوم الحال را (یعنی $\{1,2,3,4,5\}$) در نظر بگیریم و سپس سایر اعضا را از بین $\{6,\cdots,n\}$ برگزینیم. این کار به طریق مشابه به

$$\sum_{k=0}^{n-5} \binom{n-5}{k} 2^{k-1} = 3^{n-5}$$

امکان پذیر است؛ پس احتمال مطلوب می شود:

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-5}\binom{n-5}{k}2^{k-1}}{\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}2^{k-1}} = \frac{1}{27}$$

سوال ۴) پیشامد معیوب بودن لامپ را با C و انتخاب جعبه‌ی i ام را با B_i نشان می دهیم. در این صورت:

الف)

$$P(C) = \sum_{i=1}^{3} P(C|B_i)P(B_i) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{1000} + \frac{3}{10} + \frac{0}{3000}\right) = 0.101$$

ب)

$$P(B_2|C) = \frac{P(B_2 \cap C)}{P(C)} = \frac{P(C|B_2)P(B_2)}{P(C)} = \frac{\frac{3}{10} \times \frac{1}{3}}{\frac{101}{1000}} = \frac{100}{101} \approx 0.99$$

پ)

$$\begin{aligned}
P(B_1 \cup B_2|C') &= \frac{P([B_1 \cup B_2] \cap C')}{P(C')} \\
&= \frac{P([B_1 \cap C'] \cup [B_2 \cap C'])}{P(C')} \\
&= \frac{P(B_1 \cap C') + P(B_2 \cap C')}{P(C')} \\
&= \frac{P(C'|B_1)P(B_1) + P(C'|B_2)P(B_2)}{P(C')} \\
&= \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{997}{1000} + \frac{7}{10}\right)}{1 - 0.101} \approx 0.63
\end{aligned}$$

سوال ۵)

$$P(P_1|B) = \frac{P(P_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|P_1)P(P_1)}{P(B)} = \frac{\frac{20}{100} \times \frac{100}{100+1000}}{\frac{70}{1100}} = \frac{2}{7} \approx 0.29$$

$$P(P_2 \cap B'|F) = \frac{P(P_2 \cap B' \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{630}{1100}}{\frac{690}{1100}} = \frac{21}{23} \approx 0.91$$

$$P(B|M) = \frac{P(B \cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{40}{1100}}{\frac{410}{1100}} = \frac{4}{41} \approx 0.10$$

پاسخ سوال ۱۷)

سوال ۱)

الف) ازآنجا که برای $n < a$ و $n > b$ به ترتیب داریم $F(n) = 0$ و $F(n) = 1$ در نتیجه می توان نوشت:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{1}{b-a+1} & , \quad a \le n \le b \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} nf(n) &= \sum_{n=a}^{b} \frac{n}{b-a+1} \\ &= \sum_{n=1}^{b} \frac{n}{b-a+1} - \sum_{n=1}^{a-1} \frac{n}{b-a+1} \\ &= \frac{b^2+b-a^2+a}{2(b-a+1)} \\ &= \frac{(b+a)(b-a+1)}{2(b-a+1)} \\ &= \frac{b+a}{2} \end{aligned}$$

ب)

$$f(n) = A^n - A^{n+1} = A^n(1-A) \quad , \quad n \ge 0$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} nf(n) &= \sum_{n=0}^{\infty} nA^n(1-A) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} nA^n(1-A) \\ &= A(1-A)\sum_{n=1}^{\infty} nA^{n-1} \\ &= A(1-A)\frac{d}{dA}\sum_{n=1}^{\infty} A^n \\ &= A(1-A)\frac{d}{dA}\frac{A}{1-A} \\ &= \frac{A}{1-A} \end{aligned}$$

سوال ۲)

الف)

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}x} \quad , \quad x > 0$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx &= \int_{0}^{\infty} \frac{x}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}x} dx \\
&= -x e^{-\frac{1}{\lambda}x}\Big|_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{1}{\lambda}x} dx \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{1}{\lambda}x} dx \\
&= -\lambda e^{-\frac{1}{\lambda}x}\Big|_{0}^{\infty} \\
&= \lambda
\end{aligned}$$

ب)

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad , \quad a < x < b$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx &= \int_{a}^{b} \frac{x}{b-a} dx \\
&= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} \\
&= \frac{b+a}{2}
\end{aligned}$$

پ)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\Big|_{t=x} - \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\Big|_{t=-\infty} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \exp\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu+\mu) \cdot \exp\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \\
&= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu) \cdot \exp\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx}_{\triangleq I_1} \\
&\quad + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \mu \cdot \exp\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx}_{\triangleq I_2}
\end{aligned}$$

انتگرال I_1 برابر است با $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} w \cdot \exp\left(\frac{w^2}{2\sigma^2}\right) dw$ که همگرا و برابر صفر است؛ زیرا این انتگرال، انتگرال یک تابع فرد را روی بازه‌ی متقارنی نشان می دهد به علاوه جمله ی نمایی میرا شونده باعث کاهش سریع تابع تحت انتگرال می گردد. برای انتگرال I_2 نیز با توجه به تابع $F(x)$ تعریف شده در صورت سوال می توان نوشت:

$$I_2 = \mu \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \mu F(\infty) = \mu$$

در مجموع خواهیم داشت:

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \mu$$

سوال ۳)

متغیر تصادفی برنولی، یک متغیر تصادفی دو مقداره است که تنها مقادیر صفر و یک را می پذیرد. به طور مثال برای متغیر تصادفی برنولی X داریم

$$\Pr\{X=1\} = p$$

از آنجا که عملگر این قسمت یک xor (یا جمع به پیمانه‌ی ۲) است، متغیر تصادفی Z نیز دو مقداره و دارای

توزیع برنولی خواهد بود.

$$\begin{aligned}
\Pr\{Z=1\} &= \Pr\{X \oplus Y \mod 2 = 1\} \\
&= \Pr\{X \mathrm{xor} Y = 1\} \\
&= \Pr\{X=1, Y=0 \text{ یا } X=0, Y=1\} \\
&= \Pr\{X=1, Y=0\} + \Pr\{X=1, Y=0\} \\
&= \Pr\{X=1\}\Pr\{Y=0\} + \Pr\{X=0\}\Pr\{Y=1\} \\
&= \frac{1}{2}\cdot(1-p) + \frac{1}{2}\cdot p \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

سوال ۴)

با توضیحاتی مشابه سوال قبل، به سادگی دیده می شود که متغیر تصادفی Z دو مقداره و دارای توزیع برنولی خواهد بود.

$$\begin{aligned}
\Pr\{Z=1\} &= \Pr\{XY=1\} \\
&= \Pr\{X=1, Y=1\} \\
&= \Pr\{X=1\}\Pr\{Y=1\} \\
&= \frac{1}{2}p
\end{aligned}$$

سوال ۵)

متغیر تصادفی X حاصل n_1 کوشش برنولی مستقل با پارامتر احتمالاتی p و متغیر تصادفی Y حاصل n_2 کوشش برنولی مستقل با پارامتر احتمالاتی p است؛ در نتیجه می توان متغیر های تصادفی X و Y را به مانند تعداد شیرهای رو آمده در پرتاب به ترتیب n_1 و n_2 بار سکه‌ی ناسالم تعبیر نمود. با این تعبیر، متغیر تصادفی $X+Y$ تعداد شیرها را در n_1+n_2 بار پرتاب همان سکه‌ی ناسالم نشان می دهد؛ به عبارت دیگر فرقی نمی کند که ابتدا سکه را n_1 بار پرتاب کرده و تعداد شیر ها را یادداشت کنیم، سپس با تعداد شیرها در n_2 بار پرتاب جمع بزنیم یا از ابتدا سکه را n_1+n_2 بار پرتاب کنیم و سپس تعداد شیرها را یادداشت کنیم. این عدم تفاوت، به دلیل مستقل بودن پرتاب هاست و در صورت مستقل نبودن پرتاب ها، استدلال های فوق معتبر نخواهند بود.

الف) فضای نمونه عبارتست از مجموعه‌ی تمام برآمدها(رخدادها)یی که می‌توانند در یک مسئله‌ی احتمالاتی رخ دهند. به طور مثال، فضای نمونه‌ی پرتاب تاس، $\{1,2,3,4,5,6\}$ است.

ب) به هر زیرمجموعه از فضای نمونه، یک پیشامد یا واقعه گفته می‌شود. در پرتاب تاس، واقعه‌ی روآمدن عدد زوج معادل مجموعه‌ی $\{2,4,6\}$ است.

پ) به هر زیرمجموعه‌ی تک عضوی از فضای نمونه، یک پیشامد ساده یا برآمد گفته می‌شود. در پرتاب تاس، ۶ برآمد وجود دارد.

پاسخ سوال ۱۸)

در صورتی که فضای نمونه متناهی باشد، پاسخ مثبت است؛ زیرا هر برآمد دارای احتمال مثبت است و در نتیجه، احتمال رخداد هر زیرمجموعه کمتر از ۱ خواهد بود. در حالتی که فضای نمونه نامتناهی باشد، حذف یک برآمد با احتمال رخداد صفر از فضای نمونه، تغییر در احتمال آن ایجاد نمی‌کند. به طور مثال، فرض کنید بخواهیم عددی حقیقی را به تصادف کامل از بازه‌ی $[0,1]$ برگزینیم. در این صورت، احتمال اینکه این عدد برابر 0.5 نباشد برابر ۱ است.

پاسخ سوال ۱۹)

الف)

$$A \times B = \{(\mathrm{H},1), (\mathrm{H},2), (\mathrm{H},3), (\mathrm{H},4), (\mathrm{H},5), (\mathrm{H},6),\\ (\mathrm{T},1), (\mathrm{T},2), (\mathrm{T},3), (\mathrm{T},4), (\mathrm{T},5), (\mathrm{T},6)\}$$

این مجموعه، فضای نمونه‌ی آزمایش پرتاب توأم تاس و سکه است ("یک سکه و یک تاس را به طور همزمان پرتاب میکنیم...").

ب) به طور مثال

$$S_1 = \{(\mathrm{T},2), (\mathrm{H},5), (\mathrm{T},6)\}$$
$$S_2 = \{(\mathrm{H},2), (\mathrm{T},5), (\mathrm{H},6)\}$$

نمی‌توان همین کار را برای زیرمجموعه‌های ۷ عضوی تکرار کرد؛ چرا که طبق اصل لانه‌ی کبوتری، حداقل دو عضو تکراری در این دو زیرمجموعه وجود خواهد داشت.

پاسخ سوال ۲۰)

می‌دانیم

$$P\{A \cap (B \cup C)\} = P\{[A \cap B] \cup [A \cap C]\}$$

از طرفی

$$[A \cap B] \cap [A \cap C] = A \cap B \cap C = A \cap [B \cap C] = A \cap \emptyset = \emptyset$$

بنابراین طبق اصل سوم کولموگروف،

$$\begin{aligned}P\{A\cap(B\cup C)\} &= P\{[A\cap B]\cup[A\cap C]\}\\ &= P\{A\cap B\}+P\{A\cap C\}.\end{aligned}$$

اگر پیشامدهای ابتلا به کرونا و آنفلوآنزا را به ترتیب با A و B نشان دهیم، طبق فرض مسئله داریم

$$\begin{aligned}&P(A)=0.07,\\ &P(B)=0.19,\\ &P(A\cup B)=0.2.\end{aligned}$$

در این صورت

الف) خواسته‌ی مسئله، $P(A\cap B)$ است که برابر است با

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.07+0.19-0.2=0.06$$

ب) مطلوبست $P(A-B)$. در این صورت

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=0.07-0.06=0.01.$$

پاسخ سوال ۲۱)

الف)

$$P(A)=P(2)+P(3)+P(5)+P(7)=0.1+0.1+0.1+0.1=0.4$$

ب)

$$\begin{aligned}&A-B=\{2\}\\ &A\cap B=\{3,5,7\}\\ &\Longrightarrow\\ &P(A-B)=0.1\\ &P(A\cap B)=0.3\end{aligned}$$

پ) داریم

$$\begin{aligned}&P(A-B)=0.1\\ &P(A)=0.4\\ &P(A\cap B)=0.3\end{aligned}$$

بنابراین درستی رابطه‌ی زیر مشاهده می‌شود:

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B).$$

علت درستی این رابطه آن است که دو مجموعه‌ی $A-B$ و $A\cap B$ ناسازگارند؛ در نتیجه طبق اصل سوم کولموگروف

$$P(A\cap B)+P(A-B)=P([A\cap B]\cup[A-B])=P(A).$$

پاسخ سوال ۲۲) نامساوی سمت راست به سادگی از

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$$

و $P(A\cap B)\geq 0$ نتیجه می‌شود. برای نامساوی سمت چپ باید اثبات کنیم

$$P(A\cap B)\leq \frac{1}{4\max\{1-P(A),1-P(B)\}}$$

به دلیل تقارن مسئله، فرض می‌کنیم $P(A)\geq P(B)$. در نتیجه

$$P(A\cap B)\leq \frac{1}{4[1-P(B)]}.$$

از طرفی

$$\begin{aligned}
&(\frac{1}{2}-P(B))^2\geq 0 \implies\\
&4P^2(B)-4P(B)+1\geq 0 \implies\\
&1\geq 4P(B)-4P^2(B) \implies\\
&1\geq 4P(B)[1-P(B)] \implies\\
&P(B)\leq \frac{1}{4[1-P(B)]}.
\end{aligned}$$

همچنین می دانیم $A\cap B \subseteq B$. در نتیجه

$$P(A\cap B)\leq P(B)\leq \frac{1}{4[1-P(B)]}$$

و اثبات کامل می شود ■

اگر کتابهای هم نوع متمایز باشند، اینکه مثلا دو کتاب رمان نسبت به هم در چه موقعیتی قرار میگیرند مهم است. با این فرض، تمام کتابها متمایزند و مجموع حالات مطلوب، $(3+2+4)!=9!$ خواهد بود.

اگر تمام کتابهای هم نوع نامتمایز باشند، در این صورت دو حالت که دو کتاب رمان در دو موقعیت متفاوت نسبت به هم باشند (مثلا رمان بینوایان سمت چپ یا راست رمان گوژپشت نتردام باشد!)، یکبار شمرده می‌شوند. ترتیب کتابهای فیزیک و روانشناسی نیز به $3!$ و $4!$ حالت مختلف تعیین می شود. در این صورت، تعداد کل حالات مطلوب برابر $\frac{9!}{3!\times 2!\times 4!}$ خواهد بود.

پاسخ سوال ۲۳)

این دسته گل می تواند شامل حالات زیر باشد:

- ۳ بنفشه
- ۲ بنفشه و ۱ رز
- ۲ بنفشه و ۱ اقاقیا
- ۱ بنفشه و ۲ رز
- ۱ بنفشه و ۲ اقاقیا
- ۱ بنفشه، ۱ رز و ۱ اقاقیا
- ۳ رز
- ۲ رز و ۱ اقاقیا
- ۱ رز و ۲ اقاقیا

در نتیجه، مجموع کل حالات مطلوب عبارتست از

$$\binom{3}{3}+\binom{3}{2}\binom{4}{1}+\binom{3}{2}\binom{2}{1}+\binom{3}{1}\binom{4}{2}+\binom{3}{1}\binom{2}{2}+$$
$$\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{4}{1}+\binom{4}{3}+\binom{4}{2}\binom{2}{1}+\binom{4}{1}\binom{2}{2}=$$
$$1+12+6+18+3+24+4+12+4=84.$$

پاسخ سوال ۲۴)

در حل مسائلی که با افراد سروکار دارند، اگر مسئله از نوع کلان نباشد (مانند شیوع افسردگی در یک جامعه که به طور نسبی، به تعداد افراد مربوط است نه به تک تک آنها)، باید افراد را متمایز دانست. مسئله‌ی پیش رو چنین حالتی دارد. به دلیل اینکه نشست در یک میزگرد اتفاق می افتد، ابتدا یک نفر (مثلا مدیرعامل) را در یک صندلی

می‌نشانیم و سپس حالات نشستن سایر افراد را بررسی می کنیم (چرا؟).

الف) اگر هر دو منشی کنار هم باشند، ابتدا هر دو نفر را یک نفر (به نام دو-منشی) به حساب می آوریم و تعداد حالات حاصله را می‌شماریم. سپس تعداد حالات را در تعداد ترتیبات نشستن دو منشی نسبت به هم ضرب می کنیم. با این رویکرد، دو-منشی دو صندلی کنار هم اختیار می‌کند که معادل این است که یک صندلی به او اختصاص داده و از تمام صندلی ها ا واحد کم کنیم. در این صورت، دو-منشی و سایر اعضا (به غیر از مدیرعامل)، باید ۷ صندلی از ۹ صندلی باقیمانده را تصاحب کنند. این کار، به دلیل تمایز اعضا، به $7! \times \binom{9}{7}$ طریق ممکن امکان پذیر است. چون دو-منشی شامل دو حالت ترتیب نشستن منشی ها نسبت به هم است، تعداد کل حالات ممکن برابر $362880 = 2 \times 7! \times \binom{9}{7}$ خواهد بود.

ب) در این حالت باید تمام اعضای هیئت مدیره، ۵ صندلی از ۸ صندلی باقیمانده (غیرمجاور با مدیرعامل و خود مدیرعامل) را به $6720 = \binom{8}{5} \times 5!$ طریق تصاحب کنند. سپس منشی ها و حسابدار می‌توانند ۳ صندلی از ۵ صندلی باقیمانده را به $60 = \binom{5}{3} \times 3!$ راه انتخاب کنند. تعداد کل حالات طبق اصل ضرب برابر 403200 خواهد بود.

پ) حسابدار به دو حالت کنار مدیرعامل می‌نشیند و تمام اعضای هیئت مدیره (به جز مدیرعامل) را که کنار هم می‌نشینند، یک نفر به نام پنج-مدیر در نظر می‌گیریم. پنج-مدیر، ۵ صندلی کنار هم انتخاب می‌کند که در این صورت، معادلاً با ۳ نفر روبرو هستیم که باید بر روی ۵ صندلی بنشینند. مشابه بخش الف و به دلیل تمایز منشی ها و اعضای هیئت مدیره، تعداد کل حالات مطلوب برابر است با $14400 = 2 \times 5! \times 3! \times \binom{5}{3}$.

پاسخ سوال ۲۵)

الف) طبق اصل ضرب، این کار به $70 = 10 \times 7$ طریق ممکن (بدون احتساب ترتیب) و ۱۴۰ طریق ممکن (با احتساب ترتیب) امکان پذیر است.

ب) تعداد کل حالات ممکن برای برداشتن ۲ توپ، برابر $136 = \binom{17}{2}$ است و در نتیجه، احتمال مطلوب برابر $\frac{70}{136}$ خواهد بود.

پ) از آنجا که فقط یک توپ آبی مشخص و یک توپ قرمز مشخص مد نظر ماست، تنها به یک حالت می‌توانیم این دو توپ را برداریم (دقت کنید چه ترتیب انتخاب را محسوب کنیم چه نکنیم، تعداد حالات را عوض می‌کند ولی در مقدار احتمال تأثیری ندارد). در نتیجه احتمال مطلوب برابر $\frac{1}{136}$ خواهد بود.

ت) خیر؛ چرا که متمایز کردن توپ ها (به کمک شماره گذاری آنها)، جزو مطلوبات مسئله نبوده است.

پاسخ سوال ۲۶)

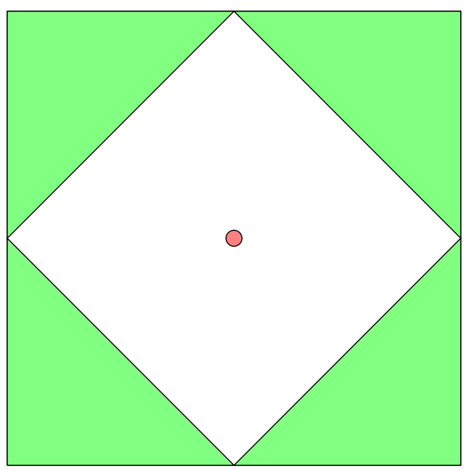
ب) برداشتن دو توپ با جایگذاری، مانند این است که دو توپ از دو کیسه‌ی کاملا مشابه (یک توپ از هر کیسه) برداریم. از آنجا که ترتیب انتخاب نباید مهم باشد، حالتی که توپ کیسه‌ی اول قرمز و توپ کیسه‌ی دوم آبی است، هم ارزند و باید هر دو شمرده شوند. در این صورت، تعداد حالات برداشتن دو توپ به این روش که یکی آبی و دیگری قرمز باشد، 140 تا است و همچنین، این دو توپ به $289 = 17 \times 17$ حالت ممکن برداشته می‌شوند (اگر ترتیب انتخاب مهم نباشد). در نتیجه، احتمال مطلوب برابر $\frac{140}{289}$ خواهد بود.

پ) به طریق مشابه قبل، دو حالت امکان پذیر است که توپ های شماره دار خاصی از هر رنگ برداشته شوند. در نتیجه، احتمال مطلوب برابر $\frac{2}{289}$ خواهد بود.

ت) خیر. دلیل مشابه است؛ زیرا متمایز بودن توپها جزو مطلوبات مسئله نبوده است.

پاسخ سوال ۲۷)

مربع زیر را در نظر بگیرید: اگر نقطه‌ی تصادفی مسئله، در یکی از نواحی سبز بیفتد، فاصله‌ی آن تا مرکز مربع از



فاصله‌ی آن تا حداقل یکی از رئوس مربع بیشتر است. از آنجا که نواحی سبز، نصف مساحت مربع را اشغال می‌کنند در نتیجه احتمال مطلوب برابر $\frac{1}{2}$ خواهد بود.

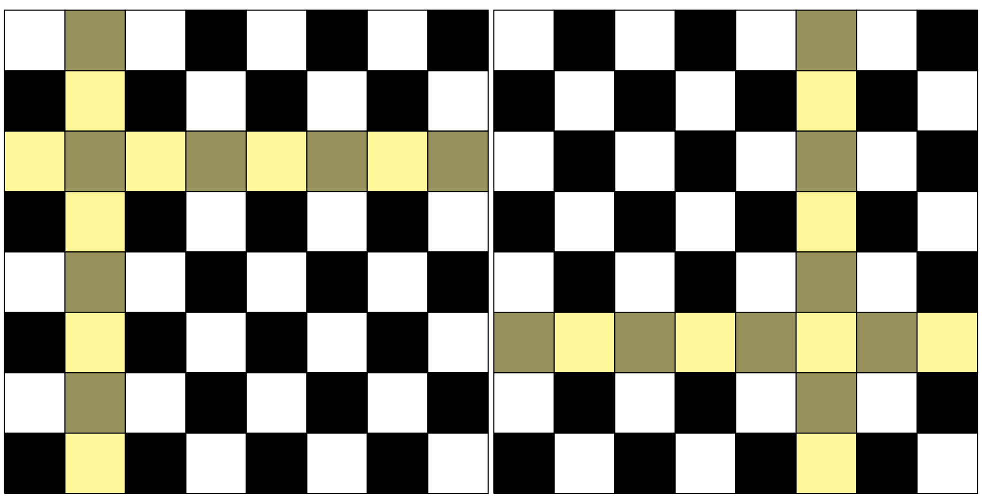
پاسخ سوال ۲۸)

الف) با قرار دادن رخ سفید، دقیقا $14 = 2 - 8 \times 2$ خانه در معرض حمله‌ی رخ سفید قرار می‌گیرند (این موضوع، مستقل از مکان قرارگیری رخ سفید است). در نتیجه پیشامد مطلوب آن است که رخ سیاه، در یکی از

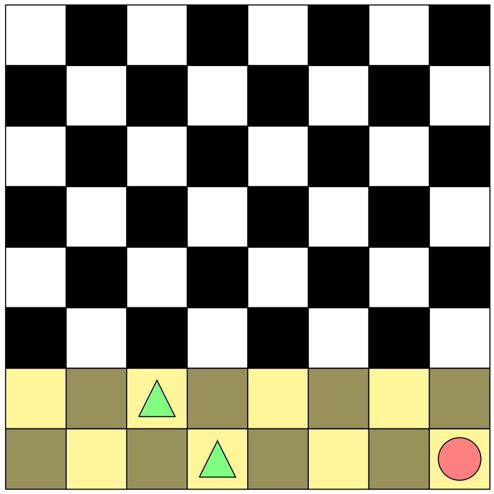
این خانه‌ها قرار گیرد که این امر، با احتمال $\frac{2}{9} = \frac{14}{63}$ رخ می‌دهد.

ب) برای مات شدن شاه سفید، حتما باید حداقل یکی از رخ های سیاه، گوشه‌ای را که شاه سفید در آن قرار دارد تهدید کند. در نتیجه یکی از رخ ها باید در یکی از ۱۴ خانه‌ی ممکن قرار داشته باشد. به دلیل تقارن مسئله، فرض می‌کنیم یک رخ سیاه، در پایینی ترین ردیف قرار دارد.

هنگامی که یک رخ، ردیف یا ستونی که شامل شاه است را تهدید می‌کند، برای مات کردن شاه، رخ دیگر باید ردیف یا ستون دیگری را که شاه می‌تواند حرکت کند، به طور کامل تهدید کند (شکل ۲؛ دایره‌ی قرمز و مثل سبز به ترتیب نشان دهنده‌ی شاه سفید و رخ سیاه هستند). از طرفی، یکی از رخ ها نمی تواند خانه‌ی سیاه بالای شاه را اشغال کند؛ زیرا شاه با زدن آن مهره، از کیش و مات فرار میکند. همچنین اگر یکی از رخ‌ها در خانه‌ی مجاور شاه باشد، رخ دیگر نیز باید دقیقاً بالای آن قرار بگیرد و بالعکس؛ در غیر اینصورت، شاه با زدن رخ کنار خود یا رخی که در خانه‌ی همسایه‌ی قطری شاه قرار دارد، از کیش فرار می‌کند. در نتیجه، آرایش ۲ تایی رخ ها به $6 \times 6 + 1 = 37$ طریق ممکن امکان پذیر است. به دلیل تقارن، مات شدن می‌تواند به صورت ستونی نیز رخ دهد؛ در نتیجه تعداد کل حالات مطلوب برابر $74 = 37 \times 2$ و احتمال مطلوب برابر $\frac{74}{1953} = \frac{74}{\binom{63}{2}}$ خواهد بود.



شکل ۱.۱: دو نمودار مربوط به سوال ۲ قسمت الف



شکل ۲.۱: مثالی از مات شدن شاه سفید

پاسخ سوال ۲۹)

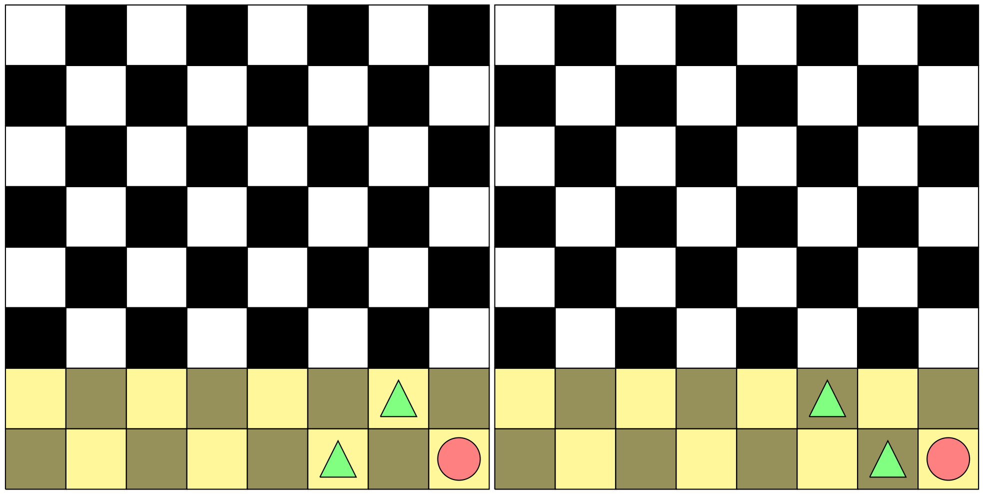
هر مجموعه‌ی n عضوی، 2^n زیرمجموعه دارد. ابتدا یکی از زیرمجموعه‌های k عضوی را به تصادف بر می‌داریم. این کار به $\binom{n}{k}$ طریق امکان دارد. برای آن که زیرمجموعه‌ی دیگر، با زیرمجموعه‌ی انتخاب شده ناسازگار باشد، باید اعضای آن از بین $n-k$ عضو باقیمانده به 2^{n-k} طریق ممکن انتخاب شوند. در نتیجه تعداد حالات مطلوب (برای هر زیرمجموعه با هر تعداد عضو)، طبق اصل ضرب برابر $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}$ خواهد بود. با این حال، باید دقت شود که تعدادی از حالات تکراری اند. به طور مثال، امکان دارد زیرمجموعه‌ی $\{1,3,n\}$ ، در دفعه‌ی اول و زیرمجموعه‌ی $\{2,4,n-1\}$ در دفعه‌ی دوم از بین اعضای باقیمانده انتخاب شود؛ یا بالعکس. همچنین، حالتی که هر دو زیرمجموعه تهی باشند، شمرده شده است که با وجود ناسازگاری، متمایز نیستند. پس باید از تعداد کل حالات مطلوب کنار گذاشته شوند. در نتیجه، حالات مطلوب برداشتن دو زیرمجموعه‌ی ناسازگار متمایز، برابر $\frac{[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}]-1}{2}$ و احتمال مطلوب، برابر $\frac{\frac{[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}]-1}{2}}{\binom{2^n}{2}}$ خواهد بود.

(با ساده سازی، می توان احتمال را به صورت زیر نیز نوشت

$$\frac{3^n-1}{2^n(2^n-1)}$$

)

پاسخ سوال ۳۰)



شکل ۱.۳: حالت هایی که به مات شدن منجر نمی شوند.

ازآنجاکه هر رخداد سکه (پشت یا رو) معادل با پرتاب یک یا دو تاس است، پیشامد های زیر را تعریف می کنیم:

$A =$ پیشامد رو آمدن سکه (پرتاب ۱ تاس)

$B =$ پیشامد پشت آمدن سکه (پرتاب ۲ تاس)

$C_n =$ پیشامد رو آمدن عدد n

می دانیم

$$P(A) = P(B) = 0.5.$$

از طرفی

$$P(C_n|A) = \begin{cases} \frac{1}{6} & , \quad n = 1, 2, \cdots, 6 \\ 0 & , \quad n = 7, 8, \cdots, 12 \end{cases}$$

و

$$P(C_n|B) = \begin{cases} 0 & , \quad n = 1 \\ \frac{6-|n-7|}{36} & , \quad n = 2, \cdots, 12 \end{cases}$$

مطلوبست $P(C_n)$. در نتیجه طبق قاعده‌ی احتمال کل

$$\begin{aligned} P(C_n) &= P(A)P(C_n|A) + P(B)P(C_n|B) \\ &= \frac{1}{2}P(C_n|A) + \frac{1}{2}P(C_n|B) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{12} & , \quad n = 1, 2, \cdots, 6 \\ 0 & , \quad n = 7, 8, \cdots, 12 \end{cases} \\ &+ \begin{cases} 0 & , \quad n = 1 \\ \frac{6-|n-7|}{72} & , \quad n = 2, \cdots, 12 \end{cases} \end{aligned}$$

با ساده سازی خواهیم داشت

$$P(C_n) = \begin{cases} \frac{1}{12} & , \quad n = 1 \\ \frac{5+n}{72} & , \quad n = 2, \cdots, 6 \\ \frac{13-n}{72} & , \quad n = 7, \cdots, 12 \end{cases}$$

پاسخ سوال ۳۱)

راه اول)

پیشامد های زیر را تعریف می‌کنیم:

$A_n =$ پیشامد سیاه بودن n توپ از ۳ توپ بیرون آمده در بار اول
$B =$ پیشامد سفید بودن توپ انتخابی از ۳ توپ بیرون آمده در بار اول

در نتیجه

$$P(A_n) = \frac{\binom{10}{3-n}\binom{7}{n}}{\binom{17}{3}}$$

همچنین

$$P(B|A_n) = \frac{3-n}{3}$$

مطلوبست $P(B|A_1 \cup A_2 \cup A_3)$. در نتیجه

$$\begin{aligned}
P(B|A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= \frac{P(B \cap [A_1 \cup A_2 \cup A_3])}{P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)} \\
&= \frac{P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3)}{P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)} \\
&= \frac{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)}{1 - P(A_0)} \\
&= \frac{\frac{2}{3} \times \frac{\binom{10}{2}\binom{7}{1}}{\binom{17}{3}} + \frac{1}{3} \times \frac{\binom{10}{1}\binom{7}{2}}{\binom{17}{3}} + 0 \times P(A_3)}{1 - \frac{\binom{10}{3}}{\binom{17}{3}}} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

راه دوم)

پیشامدهای زیر را تعریف می‌کنیم:

$A =$ پیشامد سیاه بودن دست کم یک توپ از ۳ توپ بیرون آمده در بار اول

$B =$ پیشامد سفید بودن توپ انتخابی از ۳ توپ بیرون آمده در بار اول

در نتیجه

$P(A) = 1 - P(A') = P($ پیشامد سیاه بودن هیچ توپ از ۳ توپ بیرون آمده در بار اول $)$

$= P($ پیشامد سفید بودن هر سه توپ بیرون آمده در بار اول $)$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \frac{\binom{10}{3}}{\binom{17}{3}} \\
&= 1 - \frac{10 \times 9 \times 8}{17 \times 16 \times 15} \\
&= \frac{14}{17}
\end{aligned}$$

مطلوبست $P(B|A)$. در نتیجه

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$
$$= \frac{P(B \cap A) + P(B \cap A') - P(B \cap A')}{P(A)}$$
$$= \frac{P(B) - P(B|A')P(A')}{P(A)}$$
$$= \frac{P(B) - P(A')}{P(A)}$$

از طرفی، پیشامد B معادل با این است که توپی از کیسه برداریم و سفید باشد (به عبارت دیگر، از ۳ توپ برداشته شده‌ی مرحله‌ی قبل، به طور مثال با بستن چشم بی خبر باشیم). در نتیجه

$$P(B) = \frac{10}{17}$$

و با جایگذاری خواهیم داشت

$$P(B|A) = \frac{P(B) - P(A')}{P(A)} = \frac{\frac{10}{17} - \frac{3}{17}}{\frac{14}{17}} = \frac{1}{2}.$$

پاسخ سوال ۳۲)

پیشامدهای زیر را تعریف می‌کنیم:

$A =$ پیشامد انتخاب کیسه‌ی ۱

$B =$ پیشامد انتخاب کیسه‌ی ۲

$C =$ پیشامد سفید نبودن توپ انتخابی

در نتیجه خواهیم داشت

$$P(A) = P(B) = 0.5$$

و

$$P(C|A) = \frac{7}{17} \quad , \quad P(C|B) = \frac{7}{9}$$

مطلوب است $P(B|C)$. در نتیجه طبق قاعده‌ی احتمال بیز

$$P(B|C) = \frac{P(C|B)P(B)}{P(C|A)P(A) + P(C|B)P(B)}$$
$$= \frac{\frac{7}{9} \times \frac{1}{2}}{\frac{7}{9} \times \frac{1}{2} + \frac{7}{17} \times \frac{1}{2}} = \frac{17}{26}$$

مکمل پیشامد مطلوب آن است که خانواده، دارای هیچ فرزند پسر یا هیچ فرزند دختری نباشد. احتمال پیشامد اخیر برابر است با

$$(\frac{1}{2})^n + (\frac{1}{2})^n = (\frac{1}{2})^{n-1}$$

در نتیجه، احتمال مطلوب برابر است با

$$1 - (\frac{1}{2})^{n-1}$$

که باید بیشتر از یا مساوی با 0.95 باشد. در نتیجه

$$1 - (\frac{1}{2})^{n-1} \geq 0.95$$
$$\implies (\frac{1}{2})^{n-1} \leq 0.05$$
$$\implies 2^{n-1} \geq 20$$
$$\implies n - 1 \geq \log_2 20$$
$$\implies n \geq 6$$

فصل ۲

آزمایش های تکراری

پاسخ سوال ۳۳)

الف) پیشامد مطلوب، عبارتست از آنکه دقیقا ۲ بار عدد زوج یا دقیقا ۳ بار عدد زوج بیاید. احتمال عدد زوج آمدن برابر 0.5 است. در نتیجه احتمال مطلوب برابر است با

$$\binom{3}{2}(\frac{1}{2})^3 + \binom{3}{3}(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{2}.$$

ب) مجموع اعداد رو آمده در این ۳ پرتاب، در حالات زیر برابر ۵ می شود:

- دو بار ۱ و یکبار ۳ بیاید.
- دوبار ۲ و یکبار ۱ بیاید.

هر یک از حالات فوق، دارای احتمال

$$\binom{3}{1}(\frac{1}{6})^3 = \frac{1}{72}$$

هستند؛ در نتیجه احتمال مطلوب، برابر $\frac{1}{36} = \frac{1}{72} + \frac{1}{72}$ خواهد بود.

پ) برای رو آمدن مضرب ۳، باید اعداد ۳ و ۶ ظاهر شوند. احتمال این موضوع برابر $\frac{1}{3}$ است و چون نتیجه‌ی سایر پرتاب ها مهم نیست، احتمال مطلوب نیز $\frac{1}{3}$ خواهد بود.

سوال ۵) الف) این حالت زمانی ممکن است که تیم A پس از ۶ دست، در حداقل ۵ دست پیروز شده باشد

که این احتمال برابر با احتمال پیروزی در دقیقا ۵ دست یا دقیقا ۶ دست از ۶ دست اول است؛ بنابراین

$$p = \binom{6}{5} p^5(1-p) + \binom{6}{6} p^6 = p^5(6-5p)$$

ب)

$$\Pr\{\text{برد تیم } B | \text{باخت در حداقل یک دست به تیم } A\}$$
$$= \frac{\Pr\{\text{برد تیم } B \cap \text{باخت در حداقل یک دست به تیم } A\}}{\Pr\{\text{برد تیم } A\}}$$

احتمال آن که تیم A بازی را ببرد و هیچ دستی را به تیم B نبازد برابر p^9 است. هم چنین احتمال برد تیم A نیز برابر $\sum_{k=5}^{9} \binom{9}{k} p^k (1-p)^{9-k}$ خواهد بود. در نتیجه احتمال مطلوب به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$1 - \frac{p^9}{\sum_{k=5}^{9} \binom{9}{k} p^k (1-p)^{9-k}}$$

ج) تیم A در صورتی بازی را می برد که حداقل ۴ دست از ۸ دست باقی مانده را ببرد. این احتمال برابرست با:

$$\frac{\sum_{k=4}^{8} \binom{8}{k}}{2^8} \approx 0.6367$$

سوال ۵)

الف) در رشته متوالی لامپ ها، لامپ ها به صورت پشت سر هم به یکدیگر وصل شده اند؛ پس رشته زمانی روشن است که تمام لامپ ها سالم باشند. احتمال این امر برابر $(1-p)^n$ است.

ب) در رشته‌ی موازی لامپ ها، یکی از سرهای همه‌ی لامپ ها به یک نقطه و سر دیگر تمام لامپ ها به نقطه‌ی دیگر وصل شده اند؛ پس رشته زمانی خراب می شود که همه ی لامپ های آن خراب باشند. بنابراین احتمال روشن شدن رشته برابر $1-p^n$ است.

پاسخ سوال ۳۴)

سوال ۱) قضیه‌ی دوموآو – لاپلاس اذعان می کند:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)}}$$

هنگامی که k نزدیک به np باشد. در اینجا می خواهیم شهودی از میزان این نزدیکی پیدا کنیم. به ازای k های مختلف داریم:

$$\begin{cases} k = 1 \quad , \quad \text{خطای نسبی} \sim 10^{80} \\ k = 300 \quad , \quad \text{خطای نسبی} \approx 7.99 \\ k = 490 \quad , \quad \text{خطای نسبی} \approx 6.34 \times 10^{-5} \end{cases}$$

شایان گفتن است که در دو حالت اول، مقدارهای دقیق و تقریبی احتمال تقریبا برابر صفر هستند.

سوال ۱) الف) به دلیل استقلال پرتاب ها، می توان تنها دو پرتاب اول و آخر را در نظر گرفت. بنابراین احتمال اینکه در هر دو پرتاب سکه رو یا پشت بیاید برابر 0.5 است.

ب)

$$\begin{aligned} \{\text{پیشامد حداقل ۲ رو و ۳ پشت}\} &= \{\text{پیشامد ۲ رو و ۵ پشت}\} \\ &\cup \{\text{پیشامد ۳ رو و ۴ پشت}\} \\ &\cup \{\text{پیشامد ۴ رو و ۳ پشت}\} \\ &= \binom{7}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \binom{7}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \binom{7}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^7 \\ &= \frac{91}{128} \approx 0.71 \end{aligned}$$

پ) تعریف می کنیم:

$$\begin{aligned} A &= \text{پیشامد رو آمدن در سه پرتاب اول} \\ B &= \text{پیشامد پشت آمدن در سه پرتاب اول} \\ C &= \text{دقیقا ۴ بار رو آمدن سکه در ۷ پرتاب} \end{aligned}$$

با تعاریف فوق مطلوب است:

$$\Pr(C|A \cup B)$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
\Pr(C|A\cup B) &= \frac{p(C\cap[A\cup B])}{p(A\cup B)} \\
&= \frac{p(C\cap A)+p(C\cap B)}{p(A)+p(B)} \\
&= \frac{p(C|A)p(A)+\left(\frac{1}{2}\right)^7}{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}} \\
&= \frac{\binom{4}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{2}\right)^7}{\frac{1}{4}} \\
&= \frac{5}{32}\approx 0.16
\end{aligned}$$

سوال ۲) الف) پیشامد مطلوب برابر است با:

$$\begin{aligned}
\text{پیشامد جمع ۷} &= \text{یک بار رو آمدن عدد ۳ و چهار بار رو آمدن عدد ۱} \\
&\cup \text{دو بار رو آمدن عدد ۲ و سه بار رو آمدن عدد ۱} \\
&= \binom{5}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^4 \\
&+ \binom{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^3 \\
&= \frac{5}{2592}\approx 0.002
\end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned}
\text{پیشامد مطلوب} &= \text{رو آمدن ۴ در پرتاب آخر و ۱ در چهار پرتاب اول} \\
&\cup \text{رو آمدن ۵ در پرتاب آخر، سه تا ۱ و یک ۲ در چهار پرتاب اول} \\
&\cup \text{رو آمدن ۶ در پرتاب آخر و سه تا ۱ و یک ۳ در چهار پرتاب اول} \\
&\cup \text{رو آمدن ۶ در پرتاب آخر و دو تا ۲ و دو تا ۱ در چهار پرتاب اول} \\
&= \left(\frac{1}{6}\right)^5+\binom{4}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^4\times\frac{1}{6}+\binom{4}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^4\times\frac{1}{6}+\binom{4}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^4\times\frac{1}{6} \\
&= \frac{5}{2592}\approx 0.002
\end{aligned}$$

سوال ۳) الف) این اتفاق تنها زمان می افتد که حداکثر ۸ ماشین وارد بزرگراه شوند. مکمل این پیشامد حالتی است که هر ۹ ماشین همزمان وارد بزرگراه شوند که این رخداد دارای احتمال p^9 است. پس احتمال مطلوب، $1 - p^9$ خواهد بود.

ب) p چقدر باشد تا احتمال قسمت الف بیشتر از 0.99 باشد؟

$$1 - p^9 > 0.99 \iff p^9 < 0.01 \iff p < 0.6$$

سوال ۴) الف) زمانی تیم A پس از ۶ دست موفق به بردن بازی می شود که در دست ششم، برد پنجم خود را کسب کند. در این صورت باید در ۴ دست از ۵ دست پیش پیروز شده باشد. این رخداد با احتمال

$$\binom{5}{4} p^4 (1-p) \times p = 5p^5(1-p)$$

رخ می دهد.

ب) با توجه به رابطه‌ی $P(A'|B) + P(A|B) = 1$ داریم:

$$\begin{aligned}
&\Pr\{B \text{ باخت در حداقل یک دست به تیم} | A \text{ برد تیم}\} \\
&= 1 - \Pr\{B \text{ باخت در هیچ دستی به تیم} | A \text{ برد تیم}\} \\
&= 1 - \frac{\Pr\{B \text{ باخت در هیچ دستی به تیم} \cap A \text{ برد تیم}\}}{\Pr\{A \text{ برد تیم}\}}
\end{aligned}$$

احتمال آن که تیم A بازی را ببرد و هیچ دستی را به تیم B نبازد برابر p^9 است. هم چنین احتمال برد تیم A نیز برابر $\sum_{k=5}^{9} \binom{9}{k} p^k (1-p)^{9-k}$ خواهد بود. در نتیجه احتمال مطلوب به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$1 - \frac{p^9}{\sum_{k=5}^{9} \binom{9}{k} p^k (1-p)^{9-k}}$$

ج) تیم A در صورتی بازی را می برد که حداقل ۴ دست از ۸ دست باقی مانده را ببرد. این احتمال برابرست با:

$$\frac{\sum_{k=4}^{8} \binom{8}{k}}{2^8} \approx 0.6367$$

سوال ۵) قضیه ی دوموآو-لاپلاس بیان می دارد:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx G\left(\frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

زمانی که k بسیار به n نزدیک و n بسیار بزرگ باشد. از جمله نتایجی که می توان از این قضیه گرفت، عبارتست از:

$$\sum_{k=k_1}^{k_2}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\approx G\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)-G\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

در این سوال:

$$p=\frac{1}{2}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\Pr\left\{0.49\leq\frac{k}{n}\leq 0.51\right\}&=\sum_{0.49n}^{0.51n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\\&\approx G\left(\frac{0.01n}{\sqrt{\frac{n}{4}}}\right)-G\left(\frac{-0.01n}{\sqrt{\frac{n}{4}}}\right)\\&=2G\left(0.02\sqrt{n}\right)-1>0.95\end{aligned}$$

در نتیجه

$$G\left(0.02\sqrt{n}\right)>0.975$$

(پیدا کردن دقیق کران n اختیاری است)

$$G\left(0.02\sqrt{n}\right)>0.975\iff 0.02\sqrt{n}>G^{-1}(0.975)\iff n\geq 9604\quad(!!)$$

سوال ۱) الف)

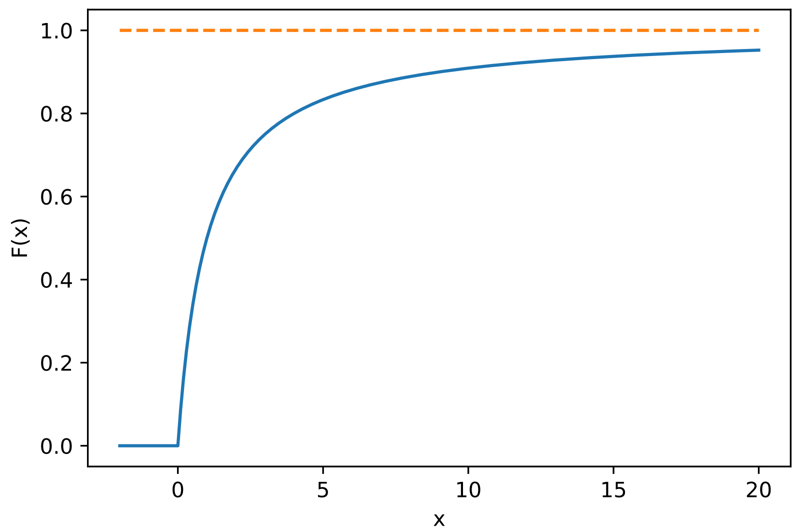
$$\begin{aligned}\Pr\{\text{ظاهر شدن عدد ۳}\}&=\Pr\{\text{ظاهر شدن عدد ۳}\mid\text{پرتاب دو تاس}\}\Pr\{\text{پرتاب دو تاس}\}\\&+\Pr\{\text{ظاهر شدن عدد ۳}\mid\text{پرتاب یک تاس}\}\Pr\{\text{پرتاب یک تاس}\}\\&=\frac{2}{36}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{9}\end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned}\Pr\{\text{ظاهر شدن عدد ۸}\}&=\Pr\{\text{ظاهر شدن عدد ۸}\mid\text{پرتاب دو تاس}\}\Pr\{\text{پرتاب دو تاس}\}\\&+\Pr\{\text{ظاهر شدن عدد ۸}\mid\text{پرتاب یک تاس}\}\Pr\{\text{پرتاب یک تاس}\}\\&=\frac{5}{36}\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{2}\\&=\frac{5}{72}\end{aligned}$$

سوال ۲)

الف) تابع CDF باید در بینهایت به سمت یک میل کند. بنابراین $k = 1$. شکل CDF به صورت زیر است:



ب) تابع CDF باید از راست پیوسته باشد؛ در نتیجه $k = 1$ و در این صورت تابع مورد نظر، به فرم توزیع تجمعی در می آید.

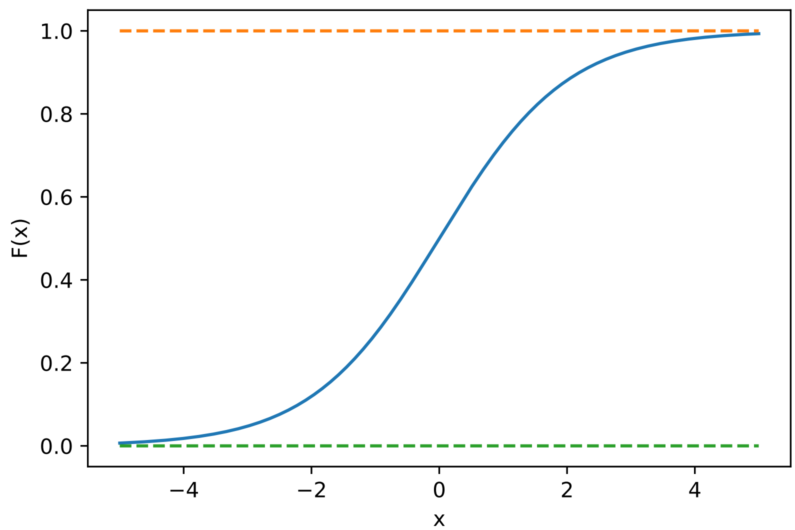
پ) برای تابع توزیع تجمعی F باید داشته باشیم:

$$F(-\infty) = 0 \quad , \quad F(\infty) = 1$$

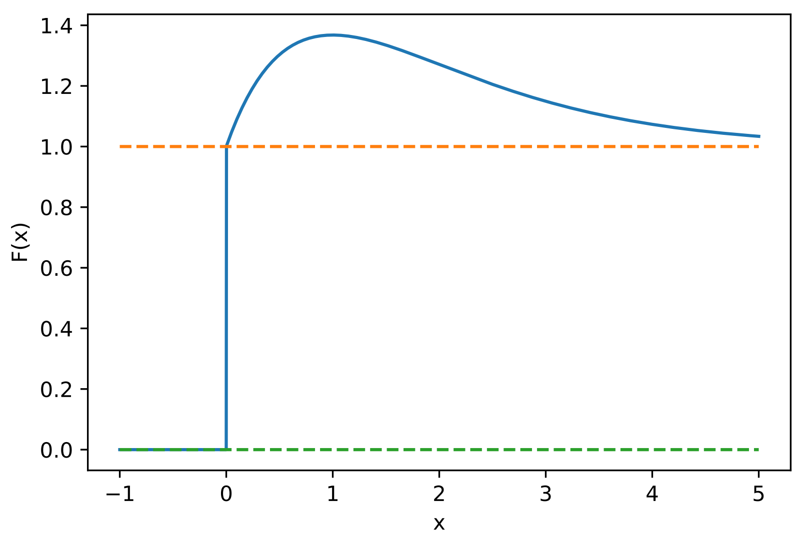
برای تابع $\frac{e^x+k}{e^x+1}$ داریم:

$$F(-\infty) = k \quad , \quad F(\infty) = 1$$

در نتیجه $k = 0$. بنابراین تابع CDF به صورت زیر است:



ت) با استدلالی مشابه قسمت قبل و با میل دادن x به $+\infty$ خواهیم داشت $k = 1$. در این صورت شکل تابع، به صورت زیر است:



مشاهده می شود که تابع به ازای مقادیر مثبت، مقادیر بیشتر از یک را اختیار می کند. در نتیجه تابع نمی تواند

CDF باشد.

سوال ۳) طبق تعریف، میانه صدک ۵۰ محسوب می شود و برای پیدا کردن آن، نیازمند حل معادله ی زیر هستیم:

$$F(x) = \frac{1}{2}$$

که مقدار $x = \ln 2$ را برای میانه به دست می دهد.

سوال ۴) طبق تعریف

$$\Pr\{X = x\} = F(x) - F(x^{-})$$

الف)

$$F(1) = \frac{3}{4}$$
$$F(1^{-}) = \frac{1}{2}$$
$$\Longrightarrow$$
$$\Pr\{X = 1\} = F(1) - F(1^{-}) = \frac{1}{4}$$

ب)

$$F(1) = \frac{1}{2}$$
$$F(1^{-}) = \frac{1}{2}$$
$$\Longrightarrow$$
$$\Pr\{X = 1\} = F(1) - F(1^{-}) = 0$$

سوال ۵) CDF را با $G(x)$ و PDF را با $g(x)$ نشان می دهیم.

الف)

$$\begin{aligned} G(x) &= \Pr\{X + 1 \leq x\} \\ &= \Pr\{X \leq x - 1\} \\ &= F(x - 1) \end{aligned}$$

در نتیجه

$$g(x) = f(x - 1)$$

ب)

$$\begin{aligned} G(x) &= \Pr\{2X \le x\} \\ &= \Pr\left\{X \le \frac{x}{2}\right\} \\ &= F\left(\frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

در نتیجه

$$g(x) = \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right)$$

پ)

$$\begin{aligned} G(x) &= \Pr\{-X \le x\} \\ &= \Pr\{X \ge -x\} \\ &= 1 - \Pr\{X < -x\} \\ &= 1 - \Pr\{X \le -x\} + \Pr\{X = -x\} \\ &= 1 - F(-x) + \Pr\{X = -x\} \end{aligned}$$

بنابراین

$$g(x) = f(-x) + \frac{d}{dx}\Pr\{X = -x\}$$

جمله ی $\frac{d}{dx}\Pr\{X = -x\}$ شامل مشتق تابع توزیع تجمعی در ناپیوستگی هاست.

ت)

$$\begin{aligned} G(x) &= \Pr\{X^2 \le x\} \\ &= \Pr\left\{-\sqrt{x} \le X \le \sqrt{x}\right\} \\ &= \Pr\left\{X \le \sqrt{x}\right\} - \Pr\left\{X < -\sqrt{x}\right\} \\ &= \Pr\left\{X \le \sqrt{x}\right\} - \Pr\left\{X \le -\sqrt{x}\right\} \\ &+ \Pr\left\{X = -\sqrt{x}\right\} \\ &= F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x}) + \Pr\left\{X = -\sqrt{x}\right\} \end{aligned}$$

که از روی آن می توان PDF را به صورت زیر به دست آورد:

$$g(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left[f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})\right] + \frac{d}{dx}\Pr\left\{X = -\sqrt{x}\right\}$$

سوال ۶)

الف) خودروها زمانی بدون مشکل از بزرگراه رد می شوند که هر ۹ تای آنها بخواهند رد شوند. این احتمال برابر p^9 است؛ لذا احتمال مطلوب برابر $1-p^9$ خواهد بود.

ب)

$$1-p^9 < 0.002 \implies p \gtrapprox 0.9998$$

سوال ۷) قضیه ی دوموآو-لاپلاس بیان می دارد:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx G\left(\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

زمانی که k بسیار به n نزدیک و n بسیار بزرگ باشد. از جمله نتایجی که می توان از این قضیه گرفت، عبارتست از:

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx G\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - G\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

در این سوال:

$$p = \frac{1}{2}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
\Pr\left\{0.49 \le \frac{k}{n} \le 0.51\right\} &= \sum_{0.49n}^{0.51n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&\approx G\left(\frac{0.01n}{\sqrt{\frac{n}{4}}}\right) - G\left(\frac{-0.01n}{\sqrt{\frac{n}{4}}}\right) \\
&= 2G\left(0.02\sqrt{n}\right) - 1 \\
&> 0.95
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$G\left(0.02\sqrt{n}\right) > 0.975$$

پاسخ سوال ۳۵)

دو حالت در نظر می گیریم:

حالت ۱) لینک DZ خراب باشد. در این صورت، احتمال وجود مسیر بین A و Z برابر است با

$$p[1-(1-p)(1-p^2)^2] = p - p(1-p)(1-p^2)^2$$

حالت ۲) لینک DZ سالم باشد. در این صورت، می‌توان نودهای D و Z را یکی در نظر گرفت (چرا که رسیدن به D، رسیدن به Z را نتیجه می‌دهد). در این صورت، احتمال وجود مسیر بین A و Z برابر است با

$$\begin{aligned}&1-(1-p)\left\{1-\left[1-(1-p)^2\right]\left[1-(1-p)(1-p^2)\right]\right\}\\&=1-(1-p)\left\{1-(2p-p^2)(p+p^2-p^3)\right\}\\&=p+p^2(1-p)(2-p)(1+p-p^2)\end{aligned}$$

در نتیجه، احتمال وجود داشتن مسیر از A تا Z برابر است با

$$\begin{aligned}&(1-p)[p+p^2(1-p)(2-p)(1+p-p^2)]+p^2+p^3(1-p)(2-p)^2\\&=p+p^2(1-p)^2(2-p)(1+p-p^2)+p^3(1-p)(2-p)^2\end{aligned}$$

پاسخ سوال ۳۶)

الف)

$$\binom{10}{3}(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2})^7=\frac{120}{1024}$$

ب) مکمل پیشامد مطلوب، آن است که دقیقا ۱ یا صفر بار خط بیاید. در نتیجه احتمال مطلوب برابر است با

$$1-\binom{10}{0}(\frac{1}{2})^0(\frac{1}{2})^{10}-\binom{10}{1}(\frac{1}{2})^1(\frac{1}{2})^9=1-\frac{1}{1024}-\frac{10}{1024}=\frac{1013}{1024}$$

پ) اگر بدانیم در ۵ پرتاب اول خط آمده است، احتمال مطلوب، معادل با احتمال رو آمدن دقیقاً دو خط در ۵ پرتاب باقیمانده است. در نتیجه احتمال مطلوب برابر است با

$$\binom{5}{2}(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^3=\frac{10}{32}.$$

از روش احتمال شرطی نیز به همین پاسخ می‌رسیم.

پاسخ سوال ۳۷)

الف) جمع این ۶ پرتاب زمانی ۸ می‌شود که یا دقیقاً دو بار ۲ و ۴ بار ۱ یا دقیقا یک بار ۳ و ۵ بار ۱ داشته باشیم. در این صورت، احتمال مطلوب برابر است با

$$\binom{6}{2}(\frac{1}{6})^2(\frac{1}{6})^4+\binom{6}{1}(\frac{1}{6})^1(\frac{1}{6})^5=\frac{21}{46656}$$

ب)

$$\frac{6!}{6^6}=\frac{5!}{6^5}=\frac{5}{324}$$

پاسخ سوال ۳۸)

احتمال آبی بودن توپ در هر آزمایش، برابر 0.7 است. چون توپ در هر مرحله به کیسه باز می‌گردد، آزمایش ها مستقلند و در نتیجه، احتمال مطلوب برابر است با

$$\binom{11}{7}(0.7)^7(0.3)^4$$

پاسخ سوال ۳۹)

چنانچه حداکثر ۱۰ کاربر بخواهند به طور همزمان از کانال استفاده کنند، کمبود پهنای باند نخواهیم داشت. بنابراین احتمال مطلوب برابر است با

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{10}\binom{12}{k}(0.6)^k(0.4)^{12-k} &= 1-\sum_{k=11}^{12}\binom{12}{k}(0.6)^k(0.4)^{12-k}\\ &= 1-12(0.6)^{11}(0.4)-(0.6)^{12}\\ &\approx 0.9804\end{aligned}$$

پاسخ سوال ۴۰)

مطلوب آن است که مقدار $P\left\{\frac{97}{300}<\frac{k}{n}<\frac{103}{300}\right\}$، حداقل 99% باشد. با تقریب دموآور لاپلاس خواهیم داشت:

$$2G(\epsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}})-1\geq 0.99$$

که در آن $\epsilon=0.01$ و $p=\frac{1}{3}$. در نتیجه

$$\begin{aligned}&G(0.01\sqrt{\frac{n}{\frac{2}{9}}})\geq 0.995\\ \implies\ &0.01\sqrt{\frac{n}{\frac{2}{9}}}\geq G^{-1}(0.995)\\ \implies\ &0.01\sqrt{\frac{n}{\frac{2}{9}}}\gtrapprox 2.5758\\ \implies\ &n\geq 14745\end{aligned}$$

فصل ۳

متغیرهای تصادفی

سوال ۱) الف)

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = 0.2668 \quad , \quad e^{-np}\frac{(np)^k}{k!} = 0.1490 \quad , \quad \textbf{Err. Rel.} = 44.16\%$$

ب)

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = 0.1573 \quad , \quad e^{-np}\frac{(np)^k}{k!} = 0.1318 \quad , \quad \textbf{Err. Rel.} = 16.23\%$$

پ)

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = 0.3716 \quad , \quad e^{-np}\frac{(np)^k}{k!} = 0.3679 \quad , \quad \textbf{Err. Rel.} = 1\%$$

مشاهده می شود که در حالت سوم، خطای تقریب از همه کم تر است؛ زیرا شرایطی که باعث افزایش دقت تقریب می شوند ($n >> 1$ و $k \approx np$)، در این حالت به خوبی مراعات شده اند.

سوال ۲) در پرتاب دو تاس سالم، اگر متغیر تصادفی X را برابر تعداد اعداد زوج رو آمده در هر دو تاس در نظر بگیریم:

الف)

$$\Omega = \{0, 1, 2\}$$

ب) با توجه به فضای شدنی X، داریم:

$$\Pr\{X \leq 1.5\} = \Pr\{X = 0 \text{ یا } X = 1\} = \Pr\{X = 0\} + \Pr\{X = 1\}$$

و

$$\Pr\{X \leq 0.5\} = \Pr\{X = 0\}$$

بنابراین

$$\Pr\{X \leq 1.5\} - \Pr\{X \leq 0.5\} = \Pr\{X = 1\} = \binom{2}{1} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

پ)

$$p_X(x) = \Pr\{X = x\} = \begin{cases} \frac{1}{4} & , \quad x = 0, 2 \\ \frac{1}{2} & , \quad x = 1 \end{cases}$$

سوال ۳) فرض کنید یک سکه سالم را n بار پرتاب کرده ایم. در اینصورت pmf متغیر تصادفی X را در حالت های زیر بیابید.

الف) متغیر تصادفی X برابر تعداد روها در پرتاب های زوج است.

$$\Pr\{X = x\} = \binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

ب) متغیر تصادفی X فقط ۵ مقدار $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ را با احتمال غیرصفر اختیار می کند؛ بنابراین

$$p_X(x) = \Pr\{X = x\} = \binom{4}{x} \frac{1}{16}$$

پ) اگر n فرد باشد، تعداد روها و پشت ها هرگز برابر نمی شوند؛ پس

$$\Pr\{X = x\} = \begin{cases} 1 & , \quad x = 0 \\ 0 & , \quad x = 1 \end{cases}$$

و برای n زوج

$$\Pr\{X = x\} = \begin{cases} 1 - \binom{n}{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n & , \quad x = 0 \\ \binom{n}{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n & , \quad x = 1 \end{cases}$$

سوال ۱) الف)

$$\begin{aligned}
E\{X\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \\
&= \int_a^b \frac{x}{b-a} dx \\
&= \frac{1}{b-a}\frac{b^2-a^2}{2} \\
&= \frac{b+a}{2}
\end{aligned}$$

هم چنین

$$\sigma_X^2 = E\{X^2\} - E^2\{X\}$$

و

$$\begin{aligned}
E\{X^2\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx \\
&= \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx \\
&= \frac{1}{b-a}\frac{b^3-a^3}{3} \\
&= \frac{b^2+a^2+ab}{3}
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= \frac{b^2+a^2+ab}{3} - \frac{b^2+a^2+2ab}{4} \\
&= \frac{1}{12}(4a^2+4b^2+4ab-3a^2-3b^2-6ab) \\
&= \frac{(b-a)^2}{12}
\end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned} E\{X\} &= \int_0^\infty \frac{x}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}dx \\ &= \lambda\int_0^\infty xe^{-x}dx \\ &= \lambda\left[-xe^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}dx\right] \\ &= \lambda \end{aligned}$$

همچنین به کمک انتگرال جزء به جزء

$$\begin{aligned} E\{X^2\} &= \int_0^\infty \frac{x^2}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}dx \\ &= \lambda^2\int_0^\infty x^2e^{-x}dx \\ &= \lambda^2\left[-x^2e^{-x}\Big|_0^\infty + 2\int_0^\infty xe^{-x}dx\right] \\ &= 2\lambda^2 \end{aligned}$$

بنابراین

$$\sigma_X^2 = \lambda^2$$

پ)

$$E\{X\} = \sum nf(n) = p\times 0 + (1-p)\times 1 = 1-p$$

هم چنین

$$E\{X^2\} = \sum n^2f(n) = p\times 0^2 + (1-p)\times 1^2 = 1-p$$

بنابراین

$$\sigma_X^2 = p(1-p)$$

ت) ابتدا می دانیم

$$\sum_{n=0}^\infty e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = 1$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
E\{X\} &= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n+1}}{n!} \\
&= \lambda \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= \lambda
\end{aligned}$$

هم چنین

$$\begin{aligned}
E\{X^2\} &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(n-1+1) \cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(n-1) \cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\\
&= \sum_{n=2}^{\infty}(n-1) \cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{(n-1)!} + \lambda\\
&= \sum_{n=2}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{(n-2)!} + \lambda\\
&= \lambda^2\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} + \lambda\\
&= \lambda + \lambda^2
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\sigma_X^2 = \mu_X = \lambda$$

سوال ۲) فرض کنیم متغیر تصادفی X، تعداد پرتاب ها تا رخداد k امین موفقیت باشد. بنابراین پیشامد $X = n$ معادل است با اینکه بگوییم در n امین پرتاب، به k امین موفقیت می رسیم. همچنین می توان گفت که در $n-1$ پرتاب قبلی، دقیقا به $k-1$ موفقیت دست یافته ایم که این، طبق توزیع دو جمله ای با احتمال $\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k}$ رخ می دهد. چون احتمال موفقیت در پرتاب n ام نیز برابر p است، داریم

$$\Pr\{X=n\} = \binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k} \quad , \quad n \geq k$$

اکنون متوسط تعداد پرتاب ها را حساب می کنیم.

الف) $k = 1$

$$\Pr\{X = n\} = p(1-p)^{n-1} \quad , \quad n \geq 1$$

از یک اتحاد ساده استفاده می کنیم (که به کمک مشتق می توان آن را نشان داد. در اینجا آن را بدون اثبات رها می کنیم)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot u^{n-1} = \frac{1}{(1-u)^2}$$

بنابراین

$$E\{X\} = \sum_{n=1}^{\infty} np(1-p)^{n-1} = \frac{1}{p}$$

ب) $k = 2$

$$\Pr\{X = n\} = (n-1)p^2(1-p)^{n-2} \quad , \quad n \geq 2$$

این بار به کمک اتحاد زیر (با مشتق گیری از اتحاد قبلی!)

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \cdot u^{n-2} = \frac{2}{(1-u)^3}$$

خواهیم داشت

$$E\{X\} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)p^2(1-p)^{n-2} = \frac{2}{p}$$

سوال ۳) هنگامی که به طور متوسط از معیارهای کمی برای ارزیابی یک جامعه ی بزرگ استفاده می شود، می توان گفت که میانگین، مهم ترین معیار کمی ارزیابی است؛ به عبارت دیگر اگر به هریک از افراد یک جامعه، نمره‌ی مخصوصی داده شود، ارزیابی کلی جامعه مستلزم محاسبه کرد میانگین نمرات تکی افراد است. البته که میانگین، تنها کمیت ارزیابی مهم نیست و به طور مثال واریانس نیز معیار بسیار مهم دیگری به شمار می رود. به طور شهودی میانگین، میزان برتری نسبی یک جامعه را به دیگری نشان می دهد. واریانس، نشان دهنده ی میزان یکنواختی افراد جامعه است. طبق این توضیحات، افراد جامعه ای با متوسط نمرات ۷۳ به لحاظ سطح علمی بالاترند؛ اما جامعه ای با میانگین ۵۹ و واریانس ۹، دارای افراد هم سطح تری است.

سوال ۴) الف) مسلما دامنه‌ی تعریف چنین چگالی احتمالی متقارن است و داریم

$$\forall x \in D \quad , \quad f(-x) = -f(x)$$

چون تابع چگالی احتمال نامنفی است، در نتیجه باید الزاما داشته باشیم

$$\forall x \in D \quad , \quad f(x) = 0$$

می توان گفت چنین توزیعی وجود ندارد؛ اما در بسیاری از متون ریاضی، از آن به عنوان توزیع گوسی با واریانس بینهایت نام می برند.

ب)

$$\begin{aligned} E\{X^n\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx \\ &= \int_a^b \frac{x^n}{b-a} dx \\ &= \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{nb - na} \end{aligned}$$

سوال ۵) الف) بررسی درستی این موضوع کار ساده ای است؛ زیرا پیشامد های $e^{sX} \ \geq \ e^{sa}$ و $X \ \geq \ a$ معادلند؛ به عبارت دیگر از هر یک می توان دیگری را نتیجه گرفت.

ب) طبق فرایند مارکوف برای یک متغیر تصادفی مثبت Y و $b > 0$

$$\Pr\{Y \geq b\} \leq \frac{E\{Y\}}{b}$$

بنابراین با تعریف $Y = e^{sX}$ و $b = e^{sa}$ خواهیم داشت:

$$\Pr\{X \geq a\} = \Pr\{e^{sX} \geq e^{sa}\} \leq \frac{E\{e^{sX}\}}{e^{sa}}$$

به کمک تعریف تابع مولد گشتاور به صورت $\phi_X(s) \triangleq E\{e^{sX}\}$، نتیجه ی مورد نظر فورا حاصل می شود.

سوال ۱) هر CDF باید سه خاصیت داشته باشد:

$$\begin{aligned} &F(-\infty) = 0 \\ &F(\infty) = 1 \\ &F(x) \text{صعودی} \end{aligned}$$

الف) شرط $F(\infty) = 1$ هنگامی برآورده می شود که

$$\lim_{x\to\infty} 1 - e^{-kx^2} = 1 \implies k > 0$$

از طرفی به ازای هر $k > 0$ ، تابع $1 - e^{-kx^2}$ روی مقادیر $x > 0$ صعودی است؛ پس محدوده‌ی مناسب k، $(0, \infty)$ خواهد بود.

ب) صعودی بودن $F(x)$ الزام می دارد که $k \geq 0$. از طرفی، نباید مقدار CDF هیچ کجا از بازه‌ی $[0, 1]$ تجاوز کند. در این صورت $k \leq 1$. همچنان یک شرط دیگر باید برآورده شود و آن پیوستگی از راست CDF در تمام نقاط است. این نوع پیوستگی در $x = 1$ تنها زمانی رخ می دهد که $k = 1$. پس بازه‌ی مناسب k برابر $\{1\}$ است.

پ) از آنجا که $F(\infty) = 1$ ، باید داشته باشیم $k = 1$ ؛ ولی صعودی بودن $F(x)$ نقض می شود؛ زیرا

$$0 < x < \frac{1}{2} \implies x - x^2 \text{ صعودی اکید} \implies e^{x-x^2} \text{ صعودی اکید} \implies 1 - e^{x-x^2} \text{ نزولی اکید}$$

پس در این مورد، k هیچ مقداری را نمی تواند داشته باشد.

ت) شرایط $F(-\infty) = 0$ و $F(\infty) = 1$ به ازای $k \neq 0$ برآورده می شوند. صعودی بودن نیز به ازای $k \geq 0$ رخ می دهد؛ پس بازه‌ی مناسب برابر است با $(0, \infty)$.

ث) با توجه به اینکه $F(-\infty) = \cos\frac{\pi}{k} = 0$ باید داشته باشیم

$$\frac{\pi}{k} = l\pi + \frac{\pi}{2} \implies k = \frac{2}{2l+1} \quad , \quad l \in \mathbb{Z}$$

از طرفی چون به ازای $k < 0$ ، تابع $\frac{\pi}{e^x+k}$ دارای مجانب عمودی خواهد بود، بنابراین باید داشته باشیم

$$k = \frac{2}{2l+1} \quad , \quad l \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$$

سوال ۲) الف) $F(x^2)$ در $-\infty$ دارای مقدار ۱ (بجای ۰) می شود؛ پس نمی‌تواند CDF باشد.

ب، پ، ت و ث) این توابع تمام شرایط CDF را برآورده می کنند.

سوال ۳) با توجه به جبر مجموعه ها، با تعریف

$$A = (-\infty, 2]$$
$$B = (-\infty, 1]$$

خواهیم داشت

$$\Pr\{1 < x \le 2\} = \Pr\{A - B\} = \Pr\{A\} - \Pr\{B\} = F(2) - F(1)$$

الف)

$$\Pr\{1 < x \le 2\} = e^{-k} - e^{-4k}$$

ب)

$$\Pr\{1 < x \le 2\} = 0$$

پ) (!!)

ت)

$$\Pr\{1 < x \le 2\} = \frac{e^2}{e^2 + k} - \frac{e}{e + k}$$

ث)

$$\Pr\{1 < x \le 2\} = \cos\frac{\pi}{e^2 + k} - \cos\frac{\pi}{e + k}$$

نکته مهم:

$$\int_a^b \delta(x - c)dx = \begin{cases} 1 & , \quad a < c < b \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

سوال ۱) الف) به وضوح باید k مثبت باشد در غیر این صورت این تابع همواره سطح زیر نامحدود خواهد داشت. از طرفی

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^k}dx = \begin{cases} \infty & , \quad 0 < k \le 1 \\ \frac{1}{k-1} & , \quad k > 1 \end{cases}$$

پس $k = 2$.

ب) این تابع نیز تمام شرایط pdf را برآورده می‌کند؛ به شرط آن که سطح زیر آن واحد باشد. در این صورت:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^{\infty} kxe^{-x}dx = -k(x+1)e^{-x}|_0^{\infty} = k = 1$$

پس k فقط باید برابر ۱ باشد.

پ) به ازای $k > \pi$، pdf مقادیر منفی را نیز اختیار می‌کند؛ پس $\pi \le k$. از طرفی

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^k \sin x dx = 1 - \cos k = 1$$

پس $k = \frac{\pi}{2}$.

ت) $f(x) = \begin{cases} k\delta(x-1) & , \quad x = 1 \\ x & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$ (به عبارت دیگر، تابع در نقطه‌ی $x = 1$ دارای ضربه‌ای به مساحت k است) ابتدا باید k مثبت باشد تا مقدار چگالی احتمال همواره نامنفی باشد. همچنین

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{1^-}^{1^+} k\delta(x-1)dx + \int_0^1 xdx = k + 0.5 = 1$$

پس مقدار k باید برابر 0.5 باشد.

ث) سطح زیر این چگالی همواره برابر ا است و فقط هنگامی نامنفی می شود که $0 \leq k \leq 1$.

سوال ۲) مکمل این حالت زمانی رخ می دهد که بیش از ۶۵ قطعه خراب شوند. احتمال خرابی هر قطعه در بازه‌ی $(0, \frac{T}{4})$ برابر است با:

$$p = \int_{-\infty}^{\frac{T}{4}} f(x)dx = \int_0^{\frac{T}{4}} \frac{1}{T} e^{-\frac{x}{T}} dx = \int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x} dx = 1 - e^{-0.25}$$

بنابراین احتمال پیشامد مطلوب برابر است با:

$$\begin{aligned} P = 1 - [&\binom{70}{66} p^{66}(1-p)^4 \\ &+ \binom{70}{67} p^{67}(1-p)^3 + \binom{70}{68} p^{68}(1-p)^2 \\ &+ \binom{70}{69} p^{69}(1-p) + \binom{70}{70} p^{70}] \end{aligned}$$

سوال ۳) اگر تابع توزیع تجمعی را با $F(x)$ نشان دهیم در این صورت:

$$\Pr\{X = 1\} = F(1) - F(1^-)$$

$$\begin{aligned} \Pr\{X < \frac{1}{2}\} &= \Pr\{X \leq \frac{1}{2}\} - \Pr\{X = \frac{1}{2}\} \\ &= F(0.5) - [F(0.5) - F(0.5^-)] = F(0.5^-) \end{aligned}$$

الف)

$$\Pr\left\{X < \frac{1}{2}\right\} = 0 \quad , \quad \Pr\{X = 1\} = 0$$

ب)

$$\Pr\left\{X < \frac{1}{2}\right\} = 1 - \frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}} \quad , \quad \Pr\{X = 1\} = 0$$

پ)

$$\Pr\left\{X < \frac{1}{2}\right\} = 1 - \cos\frac{1}{2} \quad , \quad \Pr\{X = 1\} = 0$$

ت)

$$\Pr\left\{X < \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{8} \quad , \quad \Pr\{X = 1\} = \frac{1}{2}$$

ث)

$$\Pr\left\{X < \frac{1}{2}\right\} = 1 - k \quad , \quad \Pr\{X = 1\} = k$$

سوال ۴) طبق تعریف، برای صدک-u داریم:

$$x_u = \inf\{x \mid F(x) = y\}$$

که $F(x)$ تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی است. به طور ساده تر، باید معادله‌ی $F(x_u) = u$ را حل کنیم. بنابراین:

الف)

$$F(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ x & , \quad x > 1 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

و در نتیجه $x_u = u$.

ب)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1 - e^{-2x} & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

پس $x_u = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{1-u}$

نکته مهم:

$$\int_a^b \delta(x-c)dx = \begin{cases} 1 & , \quad a < c < b \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

سوال ۱) الف)

$$P = \int_0^{2\lambda} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} dx = \int_0^2 e^{-x} dx = 1 - e^{-2} \approx 0.86$$

ب)

$$P = \int_{3\lambda}^{3.5\lambda} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} dx = \int_3^{3.5} e^{-x} dx = e^{-3} - e^{-3.5} \approx 0.02$$

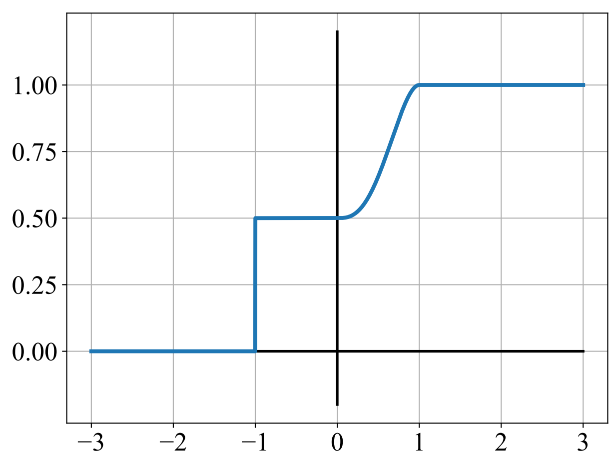
سوال ۲) الف)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \int_0^1 6x^2(1-x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} k\delta(x+1) dx = \frac{1}{2} + k = 1$$

پس $k = \frac{1}{2}$.

ب)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u) du = \begin{cases} 0 & , \quad x < -1 \\ \frac{1}{2} & , \quad -1 \le x < 0 \\ \frac{1}{2} + 2x^3 - \frac{3}{2}x^4 & , \quad 0 \le x < 1 \\ 1 & , \quad 1 \le x \end{cases}$$



پ)

$$\Pr\{-2 < X \le \frac{1}{2}\} = F(0.5) - F(-2) = \frac{21}{32} \approx 0.66$$

و

$$\Pr\{0 < X \le \frac{1}{2}\} = F(0.5) - F(0) = \frac{5}{32} \approx 0.16$$

سوال ۳) الف) اگر $y < 0$، در اینصورت مقدار $\Pr\{Y \le y\}$ همواره برابر صفر است؛ زیرا $Y = X^2$ نمی تواند منفی باشد. به ازای $y \ge 0$:

$$\begin{aligned}\Pr\{Y \le y\} &= \Pr\{X^2 \le y\} = \Pr\{-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}\}\\ &= \Pr\{0 \le X \le \sqrt{y}\} = \begin{cases}\sqrt{y} & , \quad y < 1\\ 1 & , \quad y \ge 1\end{cases}\end{aligned}$$

در نتیجه

$$F_Y(y) = \begin{cases}0 & , \quad y < 0\\ \sqrt{y} & , \quad 0 \le y < 1\\ 1 & , \quad y \ge 1\end{cases}$$

و

$$f_Y(y) = \begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{y}} & , \quad 0 < y < 1\\ 0 & , \quad \text{سایر جاها}\end{cases}$$

ب)

$$\begin{aligned}&\Pr\{Y \le y\} = \Pr\{-\ln(1-X) \le y\} = \Pr\{\ln(1-X) \ge -y\}\\ &= \Pr\{1 - X \ge e^{-y}\} = \Pr\{X \le 1 - e^{-y}\} = \begin{cases}0 & , \quad 1 - e^{-y} \le 0\\ 1 - e^{-y} & , \quad 0 < 1 - e^{-y} < 1\\ 1 & , \quad 1 - e^{-y} \ge 1\end{cases}\\ &= \begin{cases}0 & , \quad y \le 0\\ 1 - e^{-y} & , \quad 0 < y\\ 1 & , \quad e^{-y} \le 0 \text{(هرگز رخ نمی دهد)}\end{cases} = \begin{cases}0 & , \quad y \le 0\\ 1 - e^{-y} & , \quad 0 < y\end{cases}\end{aligned}$$

عبارت فوق، رابطه‌ی CDF بوده و PDF از مشتق CDF به صورت زیر به دست می آید:

$$f_Y(y) = \begin{cases}0 & , \quad y \le 0\\ e^{-y} & , \quad 0 < y\end{cases}$$

پ)

$$
\begin{aligned}
\Pr\{Y \le y\} &= \Pr\{\tan \pi(X - \frac{1}{2}) \le y\} = \Pr\{\pi(X - 0.5) \le \tan^{-1} y\} \\
&= \Pr\{X - 0.5 \le \frac{1}{\pi}\tan^{-1} y\} = \Pr\{X \le \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\tan^{-1} y\} \\
&= \begin{cases} 0 & , \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\tan^{-1} y \le 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\tan^{-1} y & , \quad 0 < \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\tan^{-1} y < 1 \\ 1 & , \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\tan^{-1} y \ge 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & , \quad y \le -\infty \text{(هرگز رخ نمی دهد)} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\tan^{-1} y & , \quad -\infty < y < \infty \\ 1 & , \quad y \ge \infty \text{(هرگز رخ نمی دهد)} \end{cases}
\end{aligned}
$$

پس

$$
F_y(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\tan^{-1} y \quad , \quad f_Y(y) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y^2}
$$

سوال ۴)

$$
\Pr\{X < \frac{2}{3}\} = F_X(\frac{2}{3}) = \frac{2}{3}
$$

و

$$
\Pr\{Y < \frac{1}{\sqrt{3}}\} = F_X(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \times \frac{\pi}{6} = \frac{2}{3}
$$

دو مقدار احتمال با هم برابرند؛ زیرا تابعی که بین دو متغیر تصادفی برقرار است ($Y = \tan \pi(X - \frac{1}{2})$)، مقدار $\frac{2}{3}$ را به $\frac{1}{\sqrt{3}}$ نگاشت می دهد. از دیدگاه دیگر، ما دو برداشت متفاوت از یک احتمال را محاسبه کرده ایم.

سوال ۵) الف)

$$
\begin{aligned}
\Pr\{Y \le y\} &= \Pr\{|X| \le y\} \\
&= \begin{cases} 0 & , \quad y < 0 \\ \Pr\{-y \le X \le y\} & , \quad y \ge 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & , \quad y < 0 \\ \Pr\{X \le y\} - \Pr\{X < -y\} & , \quad y \ge 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & , \quad y < 0 \\ F(y) - F(-y^-) & , \quad y \ge 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

ب)

$$\Pr\{Y=0\} = 1-\Pr\{Y=1\} = \Pr\{X\leq 0\} = F(0)$$

بنابراین

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , \quad y<0 \\ F(0) & , \quad 0\leq y<1 \\ 1 & , \quad y\geq 1 \end{cases}$$

پ)

$$\begin{aligned}
\Pr\{Y\leq y\} &= \Pr\{X^2-2X\leq y\} \\
&= \Pr\{X^2-2X+1\leq y+1\} \\
&= \Pr\{(X-1)^2\leq y+1\} \\
&= \begin{cases} 0 & , \quad y+1<0 \\ \Pr\{|X-1|\leq\sqrt{y+1}\} & , \quad y+1\geq 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & , \quad y<-1 \\ \Pr\{1-\sqrt{y+1}\leq X\leq 1+\sqrt{y+1}\} & , \quad y\geq -1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & , \quad y<-1 \\ \Pr\{X\leq 1+\sqrt{y+1}\}-\Pr\{X<1-\sqrt{y+1}\} & , \quad y\geq -1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & , \quad y<-1 \\ F(1+\sqrt{y+1})-F(1-\sqrt{y+1})^- & , \quad y\geq -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

سوال ۱) طبق تعریف، واریانس برابر است با:

$$\sigma^2 = \mathbb{E}\{X^2\}-\mathbb{E}^2\{X\}$$

بنابراین برای هر یک از متغیرهای تصادفی زیر، باید مقادیر $\mathbb{E}\{X\}$ و $\mathbb{E}\{X^2\}$ را بیابیم.

الف) (صورت سوال تصحیح شده و به جای e^{-x} ، e^{1-x} قرار گرفته است.)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{X\} &= \int xf(x)dx = \int_1^\infty xe^{1-x}dx \\
&= e\int_1^\infty xe^{-x}dx = e[-(x+1)e^{-x}]|_1^\infty = 2
\end{aligned} \tag{۱.۳}$$

$$\mathbb{E}\{X^2\} = \int x^2 f(x)dx = \int_1^{\infty} x^2 e^{1-x}dx$$
$$= e\int_1^{\infty} x^2 e^{-x}dx = e[-(x^2+2x+2)e^{-x}]|_1^{\infty} = 5 \qquad (۲.۳)$$

در نتیجه

$$\sigma^2 = 1$$

ب)

$$\mathbb{E}\{X\} = \int xf(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$$
$$= (\sin x - x\cos x)|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \qquad (۳.۳)$$

$$\mathbb{E}\{X^2\} = \int x^2 f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$$
$$= (2x\sin x - (x^2-2)\cos x)|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2 \qquad (۴.۳)$$

در نتیجه

$$\sigma^2 = \pi - 3$$

پ)

$$\mathbb{E}\{X\} = \int xf(x)dx = \int_1^{\infty} x \times \frac{2}{x^3}dx$$
$$= \int_1^{\infty} \frac{2}{x^2}dx = -\frac{2}{x}|_1^{\infty} = 2 \qquad (۵.۳)$$

$$\mathbb{E}\{X^2\} = \int x^2 f(x)dx = \int_1^{\infty} x^2 \times \frac{2}{x^3}dx$$
$$= 2\ln|x|\Big|_1^{\infty} = \infty \qquad (۶.۳)$$

در نتیجه

$$\sigma^2 = \infty$$

ت)

$$\mathbb{E}\{X\} = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \Pr\{X=i\} = 2\sum_{i=1}^{\infty} i(\frac{1}{3})^i$$
$$\mathbb{E}\{X^2\} = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \cdot \Pr\{X=i\} = 2\sum_{i=1}^{\infty} i^2(\frac{1}{3})^i \qquad (۷.۳)$$

برای محاسبه‌ی $\sum_{i=1}^{\infty} iu^i$ و $\sum_{i=1}^{\infty} i^2u^i$ ، از تساوی $\sum_{i=1}^{\infty} u^i = \frac{u}{1-u}$ مشتق می‌گیریم؛ در این صورت

$$\frac{d}{du}\sum_{i=1}^{\infty} u^i = \sum_{i=1}^{\infty} iu^{i-1} = \frac{1}{(1-u)^2} \implies \sum_{i=1}^{\infty} iu^i = \frac{u}{(1-u)^2} \tag{۸.۳}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{du}\sum_{i=1}^{\infty} iu^i &= \sum_{i=1}^{\infty} i^2u^{i-1} = -\frac{1}{(1-u)^2} + \frac{2}{(1-u)^3} \\ \implies \sum_{i=1}^{\infty} i^2u^i &= -\frac{u}{(1-u)^2} + \frac{2u}{(1-u)^3} \end{aligned} \tag{۹.۳}$$

بنابراین

$$\mathbb{E}\{X\} = \frac{3}{2} \quad , \quad \mathbb{E}\{X^2\} = -\frac{3}{2} + \frac{9}{2} = 3$$

و

$$\sigma^2 = \frac{3}{4}$$

سوال ۲) الف)

$$\begin{aligned} \phi_X(s) &= \mathbb{E}\{e^{sX}\} = \int e^{sx} f(x)dx = \int_1^{\infty} e^{sx}e^{1-x}dx \\ &= e\int_1^{\infty} e^{(s-1)x}dx = e\frac{e^{(s-1)x}}{s-1}\Big|_1^{\infty} = \frac{e^s}{1-s} \end{aligned} \tag{۱۰.۳}$$

بنابراین

$$\mathbb{E}\{X\} = \phi'_X(0) = \frac{e^s(1-s)+e^s}{(1-s)^2}|_{s=0} = 2$$

و

$$\mathbb{E}\{X^2\} = \phi''_X(0) = \frac{e^s(2-s)(1-s)^2 - e^s(1-s)^2 + 2e^s(2-s)(1-s)}{(1-s)^4}|_{s=0} = 5$$

بنابراین

$$\sigma^2 = 5 - 2^2 = 1$$

ت)

$$\phi_X(s) = \mathbb{E}\{e^{sX}\} = 2\sum_{x=1}^{\infty} e^{sx}(\frac{1}{3})^x = 2\sum_{x=1}^{\infty}(\frac{e^s}{3})^x = 2\frac{\frac{e^s}{3}}{1-\frac{e^s}{3}} \tag{۱۱.۳}$$

در نتیجه

$$\phi'_X(s) = \frac{2}{(1-\frac{e^s}{3})^2}\frac{e^s}{3}$$

و

$$\phi''_X(s) = \frac{2}{(1-\frac{e^s}{3})^2}\frac{e^s}{3} + \frac{4}{(1-\frac{e^s}{3})^3}\frac{e^{2s}}{9}$$

بنابراین

$$\mathbb{E}\{X\} = \frac{3}{2} \quad , \quad \mathbb{E}\{X^2\} = 3$$

و

$$\sigma^2 = \frac{3}{4}$$

سوال ۳) الف)

$$\mathbb{E}\{e^{-X}\} = \int e^{-x}f(x)dx = \int_1^{\infty} e^{-x}e^{1-x}dx = -\frac{e^{1-2x}}{2}|_1^{\infty} = \frac{1}{2e} \tag{۱۲.۳}$$

ب)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{e^{-X}\} &= \int e^{-x}f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}dx \\ &= \frac{1}{2i}\frac{e^{x(i-1)}}{i-1}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2i}\frac{e^{-x(i+1)}}{i+1}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2i}\frac{e^{\frac{-\pi}{2}}i}{i-1} - \frac{1}{2i}\frac{e^{\frac{-\pi}{2}}i}{i+1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1-e^{-\frac{\pi}{2}})\end{aligned} \tag{۱۳.۳}$$

سوال ۴) الف)

$$\begin{aligned}&\int_D f(x,y)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} k\sin(x+3y)dxdy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} -k\cos(x+3y)|_0^{\frac{\pi}{2}}dy \\ &= -k\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(\frac{\pi}{2}+3y) - \cos(3y)dy \\ &= -\frac{k}{3}[\sin(\frac{\pi}{2}+3y) - \sin(3y)]\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{2k}{3} = 1 \implies k = \frac{3}{2}\end{aligned} \tag{۱۴.۳}$$

$$
\begin{aligned}
\Pr\{X+3Y \leq \frac{1}{3}\} &= \frac{3}{2}\int_0^{\frac{1}{9}} \int_0^{\frac{1}{3}-3y} \sin(x+3y)dxdy \\
&= -\frac{3}{2}\int_0^{\frac{1}{9}} \cos(x+3y)|_0^{\frac{1}{3}-3y} dy \\
&= -\frac{3}{2}\int_0^{\frac{1}{9}} \cos(\frac{1}{3}) - \cos(3y)dy \\
&= \frac{\sin\frac{1}{3}}{2} - \frac{1}{6}\cos\frac{1}{3}
\end{aligned} \tag{۱۵.۳}
$$

ب)

$$
\begin{aligned}
k &= 12 \\
\Pr\{X+3Y \leq \frac{1}{3}\} &= 12\int_0^{\frac{1}{9}} \int_0^{\frac{1}{3}-3y} xy(1-y)dxdy \\
&= 6\int_0^{\frac{1}{9}} (\frac{1}{3}-3y)^2 y(1-y)dy = \frac{43}{65610}
\end{aligned} \tag{۱۶.۳}
$$

سوال ۵) الف)

$$\Pr\{X=0\} = \Pr\{X=0, Y=0\} + \Pr\{X=0, Y=1\} = \frac{1}{2} - \theta + \theta = \frac{1}{2}$$

$$\Pr\{X=1\} = 1 - \Pr\{X=0\} = \frac{1}{2}$$

به طریق مشابه

$$\Pr\{Y=0\} = \Pr\{Y=1\} = \frac{1}{2}$$

ب)

$$P(X=Y) = P(X=Y=0) + P(X=Y=1) = 1 - 2\theta = 1 \implies \theta = 0$$

پ) باید به ازای هر $x \in \{0,1\}$ و هر $y \in \{0,1\}$ داشته باشیم

$$\Pr\{X=x, Y=y\} = \Pr\{X=x\}\Pr\{Y=y\}$$

که به چهار معادله زیر منجر می شود

$$\begin{aligned}
\Pr\{X=0,Y=0\} &= \Pr\{X=0\}\Pr\{Y=0\} = \frac{1}{4}\\
\Pr\{X=1,Y=0\} &= \Pr\{X=1\}\Pr\{Y=0\} = \frac{1}{4}\\
\Pr\{X=0,Y=1\} &= \Pr\{X=0\}\Pr\{Y=1\} = \frac{1}{4}\\
\Pr\{X=1,Y=1\} &= \Pr\{X=1\}\Pr\{Y=1\} = \frac{1}{4}
\end{aligned} \tag{۱۷.۳}$$

از معادله اول داریم

$$\frac{1}{2}-\theta=\frac{1}{4}$$

که نتیجه می دهد

$$\theta=\frac{1}{4}$$

سایر معادلات نیز به پاسخ $\theta = \frac{1}{4}$ می رسند که نشان می دهد که به ازای این مقدار از θ ، متغیرهای تصادفی X و Y مستقل خواهند بود.

پاسخ سوال ۴۱)

الف)

$$\begin{aligned}
&\text{Exact} = 0.2252\\
&\text{Approx.} = 0.2240\\
&\text{Error Rel.} = 0.53\%
\end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned}
&\text{Exact} = 0.1795\\
&\text{Approx} = 0.0812\\
&\text{Error Rel.} = 54.76\%
\end{aligned}$$

از مقایسه‌ی خطاهای نسبی نتیجه می‌شود که در حالاتی که شرایط قضیه‌ی تقریب پواسون برقرار است، خطای تقریب بسیار کوچک می‌شود.

پاسخ سوال ۴۲)

تابع توزیع انباشته باید صعودی، در $-\infty$ برابر صفر و در ∞ برابر یک باشد. در این صورت:

الف) $\frac{dF(x)}{dx} = \frac{ke^{-kx}}{(e^{-kx}+1)^2}$ برای نامنفی بودن مشتق باید داشته باشیم $k \geq 0$. از طرفی، به ازای $k = 0$ خواهیم داشت $F(x) = 1$ که نمی‌تواند یک توزیع انباشته باشد. در نتیجه $k > 0$ و

$$f(x) = \frac{ke^{-kx}}{(e^{-kx}+1)^2}.$$

ب)

$$f_X(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ (1 + k\cos x)e^{-x-k\sin x} & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

در نتیجه باید به ازای هر x داشته باشیم $1 + k\cos x \geq 0$ که معادل است با $-1 \leq k \leq 1$. از طرفی، به ازای این مقادیر از k، داریم $F(-\infty) = 0$ و $F(\infty) = 1$؛ در نتیجه $-1 \leq k \leq 1$.

پ) داریم $F(1) = 1 + e^{-k} > 1$ ؛ پس این تابع هرگز نمی‌تواند یک توزیع انباشته باشد.

ت) از $F(\infty) = 1$ نتیجه می‌شود که $k > 0$. از طرفی به ازای هر مقدار مثبت از k، تابع زیر نامنفی است:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \begin{cases} \frac{1}{2}\delta(x) & , \quad x = 0 \\ \frac{1}{2}ke^{k-kx} & , \quad x \geq 1 \end{cases} ،$$

پس محدوده مقادیر مجاز k، مقادیر مثبت خواهند بود.

پاسخ سوال ۴۳)

میانه، صدک ۵۰ام است.

$$\text{صدک } a \text{ ام} = \sup\{x : F(x) \leq a\}$$

الف)

$$\text{صدک } a \text{ ام}:$$
$$F(x) = \frac{a}{100} \implies \frac{1}{1+\exp(-kx)} = \frac{a}{100} \implies \exp(-kx) = \frac{100}{a} - 1$$
$$\implies x = -\frac{1}{k}\ln(\frac{100}{a} - 1) \implies$$
$$x_{25} = -\frac{1}{k}\ln 3 \quad , \quad x_{50} = 0 \quad , \quad x_{75} = \frac{1}{k}\ln 3 = -x_{25}$$

$$\Pr\{X=0\} = F(0) - \lim_{x\to 0^-} F(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$
$$\Pr\{0 < X \le 2\} = F(2) - F(0) = \frac{1}{1+e^{-2k}} - \frac{1}{2} = \frac{\tanh k}{2}$$

ت)

صدک a ام:

$$F(x) \le \frac{a}{100} \implies \begin{cases} 0 & , \quad x<0 \\ \frac{1}{2} & , \quad 0 \le x < 1 \le \frac{a}{100} \\ 1 - \frac{1}{2}e^{k-kx} & , \quad x \ge 1 \end{cases}$$
$$\implies \begin{cases} x < 0 & , \quad a = 0 \\ x \le 0 & , \quad 0 < a < 50 \\ x \le 1 & , \quad a = 50 \\ x = 1 - \frac{1}{k}\ln(2 - \frac{a}{50}) & , \quad 50 < a < 100 \end{cases}$$
$$\implies x_{25} = 0 \quad , \quad x_{50} = 1 \quad , \quad x_{75} = 1 + \frac{1}{k}\ln 2$$

$$\Pr\{X=0\} = F(0) - \lim_{x\to 0^-} F(x) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$
$$\Pr\{0 < X \le 2\} = F(2) - F(0) = 1 - \frac{1}{2}e^{-k} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1 - e^{-k})$$

پاسخ سوال ۴۴)

برای این متغیر تصادفی داریم

$$\begin{aligned} \Pr\{X=2\} &= \Pr\{X=2 | \text{۲ آمدن تاس}\}\Pr\{\text{۲ آمدن تاس}\} \\ &+ \Pr\{X=2 | \text{۲ نیامدن تاس}\}\Pr\{\text{۲ نیامدن تاس}\} \\ &= 1 \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{5}{6} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

به طریق مشابه $\Pr\{X=4\} = \Pr\{X=6\} = \frac{1}{6}$. اکنون، توزیع انباشته‌ی X را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}\Pr\{X \le x\} &= \Pr\{X \le x | \text{زوج آمدن تاس}\} \Pr\{\text{زوج آمدن تاس}\} \\ &+ \Pr\{X \le x | \text{زوج نیامدن تاس}\} \Pr\{\text{زوج نیامدن تاس}\} \\ &= \frac{1}{2} \Pr\{X \le x | \text{زوج آمدن تاس}\} + \frac{1}{2} \Pr\{X \le x | \text{زوج نیامدن تاس}\}\end{aligned}$$

به ازای $x < 2$ ،

$$\begin{aligned}\Pr\{X \le x\} &= \frac{1}{2} \Pr\{\emptyset | \text{زوج آمدن تاس}\} + \frac{1}{2} \Pr\{1 \le X \le x | \text{زوج نیامدن تاس}\} \\ &= \frac{x-1}{10}.\end{aligned}$$

به ازای $2 \le x < 4$ ،

$$\begin{aligned}\Pr\{X \le x\} &= \frac{1}{2} \Pr\{X = 2 | \text{زوج آمدن تاس}\} + \frac{1}{2} \Pr\{1 \le X \le x | \text{زوج نیامدن تاس}\} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{x-1}{10}.\end{aligned}$$

به ازای $4 \le x < 6$ ،

$$\begin{aligned}\Pr\{X \le x\} &= \frac{1}{2} \Pr\{X = 2 \text{ یا } X = 4 | \text{زوج آمدن تاس}\} + \frac{1}{2} \Pr\{1 \le X \le x | \text{زوج نیامدن تاس}\} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{x-1}{10}.\end{aligned}$$

به ازای $x = 6$،

$$\Pr\{X \le x\} = 1$$

در نتیجه

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 1 \\ \frac{x-1}{10} & , \quad 1 \le x < 2 \\ \frac{1}{6} + \frac{x-1}{10} & , \quad 2 \le x < 4 \\ \frac{1}{3} + \frac{x-1}{10} & , \quad 4 \le x < 6 \\ 1 & , \quad x \ge 6 \end{cases}$$

و متعاقباً

$$f_X(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \begin{cases} \frac{1}{10} & , \quad 1 < x < 6 \\ \frac{1}{6}\delta(x-2) & , \quad x = 2 \\ \frac{1}{6}\delta(x-4) & , \quad x = 4 \\ \frac{1}{6}\delta(x-6) & , \quad x = 6 \end{cases} ،$$

در نتیجه

$$\Pr\{1 \leq X \leq 3\} = \Pr\{X \leq 3\} - \Pr\{X < 1\} = F(3) - \lim_{x \to 1^-} F(x) = \frac{1}{6} + \frac{1}{5} = \frac{11}{30}$$

پاسخ سوال ۴۵)

الف) $Y = e^X$ به ازای $y > 1$،

$$\Pr\{Y \leq y\} = \Pr\{e^X \leq y\} = \Pr\{X \leq \ln y\} = 1 - e^{-\ln y} = 1 - \frac{1}{y}$$

و به ازای $y \leq 1$،

$$\Pr\{Y \leq y\} = \Pr\{e^X \leq y\} = 0$$

در این صورت

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2} & , \quad y > 1 \\ 0 & , \quad y \leq 1 \end{cases}$$

ب) به ازای $y > 0$،

$$\Pr\{Y \leq y\} = \Pr\{X^\alpha \leq y\} = \Pr\{X \leq \sqrt[\alpha]{y}\} = 1 - e^{-\sqrt[\alpha]{y}}$$

و به ازای $y \leq 0$،

$$\Pr\{Y \leq y\} = 0$$

در این صورت

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} y^{\frac{1}{\alpha} - 1} e^{-\sqrt[\alpha]{y}} & , \quad y > 0 \\ 0 & , \quad y \leq 0 \end{cases}$$

البته به ازای $\alpha = 0$ داریم $\Pr\{Y = 1\} = 1$.

پ) به ازای $y > 0$،

$$\Pr\{Y \leq y\} = \Pr\{\lfloor X \rfloor \leq y\} = \Pr\{\lfloor X \rfloor \leq \lfloor y \rfloor\} = \Pr\{X < \lfloor y \rfloor + 1\} = 1 - e^{-\lfloor y \rfloor - 1}$$

و به ازای $y \leq 0$،

$$\Pr\{Y \leq y\} = 0$$

در نتیجه، توزیع تجمعی Y دارای پرشهایی در نقاط صحیح نامنفی Y بوده و چگالی احتمال آن عبارتست از

$$f_Y(y) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k}(1-e^{-1})\delta(y-k)$$

پاسخ سوال ۴۶)

الف)

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1 \implies \\
&\int_0^1 kxdx + \int_{1^-}^{1^+} \frac{1}{2}\delta(x-1)dx = 1 \implies \\
&\frac{k}{2} + \frac{1}{2} = 1 \implies k = 1
\end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{X\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx \\
&= \int_0^1 x^2dx + \int_{1^-}^{1^+} \frac{1}{2}x\delta(x-1)dx \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}
\end{aligned}$$

پ)

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\{e^{aX}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ax} f_X(x)dx \\
&= \int_0^1 xe^{ax}dx + \int_{1^-}^{1^+} \frac{1}{2}e^{ax}\delta(x-1)dx \\
&= (x-\frac{1}{a})e^{ax}\Big|_0^1 + \int_{1^-}^{1^+} \frac{1}{2}e^{a}\delta(x-1)dx \\
&= (\frac{3}{2}-\frac{1}{a})e^{a} + \frac{1}{a}
\end{aligned}$$

پاسخ سوال ۴۷)

الف) به ازای $y > 0$

$$\Pr\{Y \le y\} = \Pr\{-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}\} = \Pr\{X \le \sqrt{y}\}$$
$$= \int_0^{\sqrt{y}} 2x\exp(-x^2)dx = 1 - \exp(-y)$$

در نتیجه

$$f_Y(y) = \exp(-y) \quad , \quad y > 0$$

ب)

$$\mathbb{E}\{X\} = \int_0^\infty 2x^2\exp(-x^2)dx = -x\exp(-x^2)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \exp(-x^2)dx$$
$$= \int_0^\infty \exp(-x^2)dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \exp(-x^2)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^\infty \exp(-x^2)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

پ)

$$\mathbb{E}\{X^2\} = \int_0^\infty 2x^3\exp(-x^2)dx = \int_0^\infty u\exp(-u)du = 1$$
$$\mathbb{E}\{Y\} = \int_0^\infty y\exp(-y)dy = 1 \implies \mathbb{E}\{X^2\} = \mathbb{E}\{Y\}$$

همانگونه که انتظار می‌رفت، $Y = X^2$ تساوی $\mathbb{E}\{X^2\} = \mathbb{E}\{Y\}$ را نتیجه می‌دهد.

ت)

$$\Pr\{X < \frac{1}{2}\} = \int_0^{\frac{1}{2}} 2x\exp(-x^2)dx$$
$$= -\exp(-x^2)|_0^{\frac{1}{2}} = 1 - \exp(-\frac{1}{4})$$

$$\Pr\{Y < \frac{1}{4}\} = \int_0^{\frac{1}{4}} \exp(-y)dx$$
$$= -\exp(-y)|_0^{\frac{1}{4}} = 1 - \exp(-\frac{1}{4})$$

همانگونه که انتظار می‌رفت، $Y = X^2$ به نتیجه‌ی زیر منجر می‌شود:

$$\{X \le \frac{1}{2}\} \equiv \{X^2 \le \frac{1}{4}\} \equiv \{Y \le \frac{1}{4}\}.$$

پاسخ سوال ۴۸)

الف)

$$\Pr\{X \geq \alpha\} = \int_{\alpha}^{\infty} \exp(-x)dx = \exp(-\alpha)$$
$$\text{Markov's Bound} = \frac{\mathbb{E}\{X\}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$$

ب)

$$\Pr\{X \geq \alpha\} = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{1}{\ln 2}\frac{1}{1+e^{x}}dx = \log_2(1+e^{-\alpha})$$
$$\text{Markov's Bound} = \frac{\mathbb{E}\{X\}}{\alpha} \approx \frac{1.1866}{\alpha}$$

پ)

$$\Pr\{X \geq \alpha\} = \int_{\alpha}^{\infty} x\exp(-x)dx = (\alpha+1)\exp(-\alpha)$$
$$\text{Markov's Bound} = \frac{\mathbb{E}\{X\}}{\alpha} = \frac{2}{\alpha}$$

پاسخ سوال ۴۹)

الف)

$$\mathbb{E}\{X\} = \int_{0}^{\infty} xe^{-x}dx = -(x+1)e^{-x}|_{0}^{\infty} = 1$$
$$\mathbb{E}\{X^2\} = \int_{0}^{\infty} x^2e^{-x}dx = -(x^2+2x+2)e^{-x}|_{0}^{\infty} = 2$$
$$\implies \sigma_X^2 = 1$$

پ)

$$\mathbb{E}\{X\} = \int_{0}^{\infty} x^2e^{-x}dx = -(x^2+2x+2)e^{-x}|_{0}^{\infty} = 2$$
$$\mathbb{E}\{X^2\} = \int_{0}^{\infty} x^3e^{-x}dx = -(x^3+3x^2+6x+6)e^{-x}|_{0}^{\infty} = 6$$
$$\implies \sigma_X^2 = 2$$

پاسخ سوال ۵۰)

الف)

$$\phi_X(s)=\mathbb{E}\{e^{sX}\}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{sx}f_X(x)dx=\int_0^1(1-x)e^{sx}dx+\int_{1^-}^{1^+}\frac{1}{2}\delta(x-1)e^{sx}dx$$
$$=e^{sx}(\frac{1-x}{s}+\frac{1}{s^2})|_0^1+\frac{e^s}{2}=\frac{e^s-s-1}{s^2}+\frac{e^s}{2}=\frac{e^s}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^n}{(n+2)!}\implies$$
$$\mathbb{E}\{X^2\}=\frac{d^2\phi(s)}{ds^2}\Big|_{s=0}=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}=\frac{7}{12}$$

ب)

$$\phi_X(s)=\mathbb{E}\{e^{sX}\}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{sx}\cos x dx=\frac{e^{\frac{\pi}{2}s}}{s^2+1}\implies$$
$$\mathbb{E}\{X^2\}=\frac{d^2\phi(s)}{ds^2}\Big|_{s=0}=\frac{\pi^2}{4}-2$$

پ)

$$\phi_X(s)=\sum_x e^{sx}P(X=x)=\sum_{x=1}^{\infty}\frac{x}{2}(\frac{e^s}{2})^x=\frac{e^s}{(e^s-2)^2}\implies$$
$$\frac{d\phi(s)}{ds}=-e^s\frac{e^s+2}{(e^s-2)^3}\implies\frac{d^2\phi(s)}{ds^2}=\frac{e^{3s}+8e^{2s}+4e^s}{(e^s-2)^4}\implies$$
$$\mathbb{E}\{X^2\}=13$$

ت) ابتدا مقادیر تابع جرم احتمال X را می نویسیم:

$$\Pr\{X=1\}=\frac{1}{36}$$
$$\Pr\{X=2\}=\frac{2}{36}$$
$$\Pr\{X=3\}=\frac{2}{36}$$
$$\Pr\{X=4\}=\frac{3}{36}$$
$$\Pr\{X=5\}=\frac{2}{36}$$
$$\Pr\{X=6\}=\frac{4}{36}$$
$$\Pr\{X=8\}=\frac{2}{36}$$
$$\Pr\{X=9\}=\frac{1}{36}$$
$$\Pr\{X=10\}=\frac{2}{36}$$
$$\Pr\{X=12\}=\frac{4}{36}$$
$$\Pr\{X=15\}=\frac{2}{36}$$
$$\Pr\{X=16\}=\frac{1}{36}$$
$$\Pr\{X=18\}=\frac{2}{36}$$
$$\Pr\{X=20\}=\frac{2}{36}$$
$$\Pr\{X=24\}=\frac{2}{36}$$
$$\Pr\{X=25\}=\frac{1}{36}$$
$$\Pr\{X=30\}=\frac{2}{36}$$
$$\Pr\{X=36\}=\frac{1}{36}$$

بنابراین

$$\phi_X(s) = \frac{1}{36}[e^s + 2e^{2s} + 2e^{3s} + 3e^{4s} + 2e^{5s} + 4e^{6s} + 2e^{8s} + e^{9s} + 2e^{10s} + 4e^{12s} + 2e^{15s} + e^{16s} + 2e^{18s} + 2e^{20s} + 2e^{24s} + e^{25s} + 2e^{30s} + e^{36s}]$$

بنابراین

$$\mathbb{E}\{X^2\} = \frac{1}{36}[1 + 8 + 18 + 48 + 50 + 144 + 128 + 81 + 200 + 576 + 450 + 256 + 648 + 800 + 1152 + 625 + 1800 + 1296] = \frac{8281}{36}$$

فصل ۴

متغیرهای تصادفی توأم

سوال ۱) الف)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k}{1+x^2+y^2}dxdy$$
$$= \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{k}{1+r^2}rdrd\phi$$
$$= \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} k\ln 1+r^2|_0^{\infty}d\phi$$
$$= \infty \times k$$

واضح است که مقدار فوق هرگز نمی تواند برابر ۱ باشد، در نتیجه تابع این سوال هرگز یک PDF نیست.

ب) به وضوح مقدار k باید منفی باشد، زیرا در غیر اینصورت انتگرال توزیع احتمال نامحدود خواهد شد.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{k(x^2+y^2)}dxdy$$
$$= \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} re^{kr^2}drd\phi$$
$$= \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{2k}e^{kr^2}|_0^{\infty}d\phi$$
$$= \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} -\frac{1}{2k}d\phi$$
$$= -\frac{\pi}{k}$$

بنابراین بوضوح $k = -\pi$.

پ) تابع توزیع این بخش، یک استوانه با مساحت قاعده‌ی π و ارتفاع k را نشان می دهد. از آنجا که حجم این استوانه (یا همان انتگرال توزیع احتمال) برابر $k\pi$ است، باید داشته باشیم $k = \frac{1}{\pi}$.

ت) تابع توزیع این بخش، یک مخروط با مساحت قاعده‌ی π و ارتفاع k را نشان می دهد. از آنجا که حجم این مخروط برابر $\frac{k\pi}{3}$ است، باید داشته باشیم $k = \frac{3}{\pi}$.

ث)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy &= \int_0^k\int_0^k xydxdy\\ &= \int_0^k xdx \cdot \int_0^k ydy\\ &= \frac{k^4}{4} = 1\end{aligned}$$

بنابراین $k = \sqrt{2}$.

ج) تابع توزیع احتمال این بخش، یک منشور قائم با قاعده‌ی مثلثی (به صورت قائم الزاویه و با مساحت $\frac{k^2}{2}$) و ارتفاع ۱ را نشان می دهد. از آنجا که حجم این مخروط برابر $\frac{k^2}{2}$ است، باید داشته باشیم $k = \sqrt{2}$.

سوال ۲) (سوال ۱ بخش های ب، پ و ت) با توجه به راهنمایی سوال و با توجه به اینکه PDF داده شده، یک تابع دایروی-متقارن است، بنابراین نسبت به هردو محور $X = 0$ و $X + Y = 0$ تقارن خطی داشته و لذا احتمال نواحی مزبور، برابر $\frac{1}{2}$ است.

(سوال ۱ بخش ث و ج) برای این دو بخش، مقدار $X + Y$ همواره با احتمال ۱ مثبت است و در نتیجه مقدار این دو احتمال، همواره برابر یک خواهد بود.

سوال ۳) (سوال ۲ قسمت ث)

$$\begin{aligned}f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_0^{\sqrt{2}} xydy\\ &= x\end{aligned}$$

در نتیجه

$$f_X(x) = \begin{cases} x & , \quad 0 < x < \sqrt{2} \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

(سوال ۲ قسمت ج)

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_{0}^{\sqrt{2}-x} dy \\ &= \sqrt{2}-x \end{aligned}$$

در نتیجه

$$f_X(x) = \begin{cases} \sqrt{2}-x & , \quad 0 < x < \sqrt{2} \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

سوال ۴) الف)

$$\Pr\{X=Y\} = \Pr\{X=Y=0\} + \Pr\{X=Y=1\} = 2\theta = 0$$

در نتیجه $\theta = 0$

ب) با جمع سطری و ستونی نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} &\Pr\{X=x\} = \frac{1}{2} \\ &\Pr\{Y=y\} = \frac{1}{2} \\ &x, y \in \{0,1\} \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{4}, \quad x \neq y \\ \frac{1}{2} - \theta &= \frac{1}{4}, \quad x = y \end{aligned}$$

از هر دو حالت خواهیم داشت $\theta = \frac{1}{4}$.

سوال ۱) الف) از آنجا که مجموع اعداد دو تاس هرگز نمی تواند ۱ شود، در نتیجه احتمال مورد نظر برابر صفر است.

اگر $\Pr\{X=7, Y=1\}$ مورد نظر بود، مقدار این احتمال برابر با

$$\Pr\{X=7\} = \frac{1}{18}$$

است.

ب) ابتدا احتمالات غیر صفر را برای حالاتی که $X, Y \neq 0$ به دست می آوریم:

$$\Pr\{X=12, Y=2\} = \frac{1}{36}$$
$$\Pr\{X=x, Y=1\} = \frac{1}{18} \quad , \quad x \in \{7,8,9,10,11\}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} E\{XY\} &= \sum_{x=7}^{11}\sum_{y=1} xy \Pr\{X=x, Y=1\} \\ &+ 12 \times 2 \times \Pr\{X=12, Y=2\} \\ &= \frac{45}{18} + \frac{24}{36} \\ &= \frac{5}{2} + \frac{2}{3} \\ &= \frac{19}{6} \end{aligned}$$

پ) مشاهده می کنیم که

$$\Pr\{X=x\} = \Pr\{X=14-x\} \quad , \quad x \in \{2,3,4,5,6,7\}$$

بنابراین چون توزیع X حول $x=7$ متقارن است، خواهیم داشت

$$E\{X\} = 7$$

به علاوه

$$\Pr\{Y=2\} = \frac{1}{36}$$
$$\Pr\{Y=1\} = \frac{11}{36}$$

در نتیجه

$$E\{Y\} = \frac{13}{36}$$

به وضوح X و Y ناهمبسته نیستند؛ زیرا

$$E\{XY\} \neq E\{X\}E\{Y\}$$

سوال ۲) الف) به وضوح

$$\mu_X = E\{X\} = p_3 + p_4$$
$$\mu_Y = E\{Y\} = p_2 + p_4$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,Y) &= E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\}\\ &= E\{XY\} - \mu_X\mu_Y\\ &= p_4 - (p_2+p_4)(p_3+p_4)\end{aligned}$$

در نتیجه برای صفر بودن کوواریانس باید داشته باشیم $p_4 = (p_2+p_4)(p_3+p_4)$.

ب) شرط همبستگی که در قسمت قبلی به دست آمد. برای استقلال باید داشته باشیم:

$$p_1 = (p_1+p_3)(p_1+p_2)$$
$$p_2 = (p_1+p_2)(p_2+p_4)$$
$$p_3 = (p_1+p_3)(p_3+p_4)$$
$$p_4 = (p_2+p_4)(p_3+p_4)$$

نکته اینجاست که

۱. از معادله‌ی ۴، با کم کردن $p_2 + p_4$ به معادله‌ی ۲ می رسیم.

۲. از معادله‌ی ۴، با کم کردن $p_3 + p_4$ به معادله‌ی ۳ می رسیم.

۳. از جمع معادله‌های ۲، ۳ و ۴ به معادله‌ی ۱ می رسیم.

بنابراین در این سوال، ناهمبستگی و استقلال معادلند.

سوال ۳) الف) به سادگی و با انتگرال گیری می توان نتیجه گرفت:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < y < 1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در نتیجه

$$E\{X\} = E\{Y\} = \frac{1}{2}$$

هم چنین می دانیم

$$\begin{aligned} E\{XY\} &= \int_0^1 \int_0^1 xy + \alpha xy \sin[2\pi(x+y)]dxdy \\ &= \frac{1}{4} + \alpha \int_0^1 \int_0^1 xy \sin[2\pi(x+y)]dxdy \\ &= \frac{1}{4} + \alpha \int_0^1 y \int_0^1 x \sin[2\pi(x+y)]dxdy \end{aligned}$$

هم چنین

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \sin[2\pi(x+y)]dx &= \left[-\frac{x}{2\pi} \cos[2\pi(x+y)] + \frac{1}{4\pi^2} \sin[2\pi(x+y)] \right]_{x=0}^{x=1} \\ &= -\frac{\cos 2\pi y}{2\pi} \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} E\{XY\} &= \frac{1}{4} - \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 y \cos 2\pi y dy \\ &= \frac{1}{4} - \frac{\alpha}{2\pi} \left[\frac{y \sin 2\pi y}{2\pi} + \frac{\cos 2\pi y}{4\pi^2} \right]_{y=0}^{y=1} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

ازآنجاکه همواره $E\{XY\} = E\{X\}E\{Y\}$ ، در نتیجه همواره دو متغیر تصادفی X و Y ناهمبسته هستند.

ب) به سادگی دیده می شود که

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) \iff \alpha = 0$$

سوال ۴) الف)

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\rho^2}(x^2+y^2-2\rho xy)\right] dy \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\rho^2}(\rho^2x^2+y^2-2\rho xy+(1-\rho^2)x^2)\right] dy \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\rho^2}([\rho x-y]^2+(1-\rho^2)x^2)\right] dy \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}x^2\right] \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\rho^2}[\rho x-y]^2\right] dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}x^2\right] \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\rho^2}y^2\right] dy}_{1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}x^2\right]
\end{aligned}
$$

ب) با $\rho = 0$ خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{1}{2\pi} \exp\left[-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}x^2\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}y^2\right] \\
&= f_X(x)f_Y(y)
\end{aligned}
$$

پ) باید داشته باشیم

$$
\begin{aligned}
f(x)f(y) &= \frac{1}{2\pi} \exp\left[-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2\right] \\
&= f(x,y) \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\rho^2}(x^2+y^2-2\rho xy)\right]
\end{aligned}
$$

به طور مثال به ازای $x = y = 0$ نتیجه می شود $\rho = 0$ که پاسخ درستی است و اثبات را کامل می کند.

ت) (!)

سوال ۱) الف) با توجه به اینکه $\Pr\{XY > 1\} = 0$ ، برای $u < 1$ خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
&\Pr\{XY < u\} = \Pr\left\{X < \frac{u}{Y}\right\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Pr\left\{X < \frac{u}{y}|Y = y\right\} f_Y(y)dy \\
&= \int_0^1 \Pr\left\{X < \frac{u}{y}|Y = y\right\} dy \\
&= \int_0^u \Pr\left\{X < \frac{u}{y}\right\} dy \\
&+ \int_u^1 \Pr\left\{X < \frac{u}{y}\right\} dy \\
&= u + \int_u^1 \frac{u}{y} dy \\
&= u - u \ln u
\end{aligned}
$$

بنابراین

$$
f_{XY}(u) = \frac{d}{du} F_{XY}(u) = \begin{cases} -\ln u & , \quad 0 \leq u < 1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}
$$

ب) ابتدا، می دانیم

$$
\Pr\{X + Y < 0\} = 1 - \Pr\{X + Y < 2\} = 0
$$

بنابراین با فرض $0 < u < 2$ خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
&\Pr\{X + Y < u\} = \Pr\{X < u - Y\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Pr\{X < u - y|Y = y\} f_Y(y)dy \\
&= \int_0^1 \Pr\{X < u - y|Y = y\} dy
\end{aligned}
$$

به ازای $u < 1$:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \Pr\{X < u - y | Y = y\}\, dy \\
&= \int_0^u \Pr\{X < u - y | Y = y\}\, dy \\
&= \int_0^u u - y dy \\
&= \frac{u^2}{2}
\end{aligned}$$

به ازای $u > 1$:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \Pr\{X < u - y | Y = y\}\, dy \\
&= \int_{u-1}^1 \Pr\{X < u - y | Y = y\}\, dy \\
&+ \int_0^{u-1} \Pr\{X < u - y | Y = y\}\, dy \\
&= \int_{u-1}^1 u - y dy \\
&+ u - 1 \\
&= u(2-u) - \frac{1}{2} + \frac{(u-1)^2}{2} + u - 1 \\
&= 2u - \frac{u^2}{2}
\end{aligned}$$

بنابراین

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad 0 < x < 1 \\ 2 - x & , \quad 1 \le x < 2 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

پ) به ازای $u > 0$

$$\Pr\left\{\frac{X}{Y} < u\right\} = \Pr\left\{X < uY\right\}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Pr\left\{X < uy | Y = y\right\} f_Y(y) dy$$
$$= \int_{0}^{1} \Pr\left\{X < uy | Y = y\right\} dy$$

به ازای $u < 1$ با اندکی محاسبات

$$\Pr\left\{\frac{X}{Y} < u\right\} = \frac{u}{2}$$

به ازای $u > 1$ با اندکی محاسبات بیشتر

$$\Pr\left\{\frac{X}{Y} < u\right\} = 1 - \frac{1}{2u}$$

بنابراین

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \quad 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2x^2} & , \quad 1 \leq x \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

ت) با فرض $0 < u < 1$ خواهیم داشت:

$$\Pr\left\{\max\{X, Y\} < u\right\} = \Pr\left\{X < u, Y < u\right\}$$
$$= \Pr\left\{X < u\right\} \Pr\left\{Y < u\right\} = u^2$$

بنابراین

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

ث) با فرض $0 < u < 1$ خواهیم داشت:

$$\Pr\left\{\min\{X, Y\} < u\right\} = 1 - \Pr\left\{\min\{X, Y\} > u\right\}$$
$$= 1 - \Pr\left\{X > u, Y > u\right\}$$
$$= 1 - \Pr\left\{X > u\right\} \Pr\left\{Y > u\right\} = 1 - (1 - u)^2$$

بنابراین

$$f(x) = \begin{cases} 2-2x & , \quad 0<x<1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

اکنون اگر متغیرهای تصادفی X و Y، نمایی با پارامتر ۱ باشند، در این صورت با فرض $u>0$

ب)

$$\begin{aligned} &\Pr\{X+Y<u\} = \Pr\{X<u-Y\} \\ &= \int_0^\infty e^{-y}\Pr\{X<u-y\}\,dy \\ &= \int_0^u e^{-y}\Pr\{X<u-y\}\,dy \\ &= \int_0^u e^{-y}(1-e^{y-u})dy \\ &= \int_0^u e^{-y}-e^{-u}dy \\ &= 1-e^{-u}-ue^{-u} \end{aligned}$$

در نتیجه

$$f(x) = xe^{-x} \quad , \quad x>0$$

پ)

$$\begin{aligned} &\Pr\left\{\frac{X}{Y}<u\right\} = \Pr\{X<uY\} \\ &= \int_0^\infty e^{-y}\Pr\{X<uy\}\,dy \\ &= \int_0^\infty e^{-y}(1-e^{-yu})dy \\ &= \int_0^\infty e^{-y}-e^{-(1+u)y}dy \\ &= 1-\frac{1}{u+1} \end{aligned}$$

در نتیجه

$$f(u) = \frac{1}{(u+1)^2} \quad , \quad u>0$$

سوال ۲) در سوال ۴ سری پیشین، ثابت شد هردوی X و Y دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس ۱ هستند. همچنین به ازای هر $Y = y$، توزیع X دارای میانگین ρy و واریانس $1 - \rho^2$ است؛ بنابراین:

$$\begin{aligned}
&\Pr\{X + Y < u\} = \Pr\{X < u - Y\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{y^2}{2}\right] F_X(u-y) dy
\end{aligned}$$

که در آن $F_X(x)$ توزیع تجمعی متغیر تصادفی X به ازای هر $Y = y$ است. با مشتق گیری خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{du}\Pr\{X + Y < u\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{y^2}{2}\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left[-\frac{(u-y-\rho y)^2}{2(1-\rho^2)}\right] dy \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(u-y-\rho y)^2 + (1-\rho^2)y^2}{2(1-\rho^2)}\right] dy \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{u^2 - 2(1+\rho)uy + y^2(2+2\rho)}{2(1-\rho^2)}\right] dy \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{\frac{1-\rho}{2}u^2 + (2+2\rho)\left(y - \frac{u}{2}\right)^2}{2(1-\rho^2)}\right] dy \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{u^2}{4(1+\rho)}\right] \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{\left(y-\frac{u}{2}\right)^2}{1-\rho}\right] dy \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi(1+\rho)}} \exp\left[-\frac{u^2}{4(1+\rho)}\right]
\end{aligned}$$

بنابراین $X + Y$، یک توزیع گوسی با میانگین صفر و واریانس $2 + 2\rho$ است.

این واریانس زمانی بیشینه است که $\rho = 1$؛ به عبارت دیگر حالتی که تساوی $X = Y$ با احتمال ۱ برقرار باشد. علت شهودی آن جالب است؛ زیرا زمانی که تساوی اخیر با احتمال ۱ رخ دهد، تغییرات X و Y هم جهت یکدیگر است (به عبارت دیگر، هردو همزمان و به یک اندازه کم و زیاد می شوند).

سوال ۱) الف) می دانیم این چگالی توزیع، روی یک مربع دوران یافته با طول قطر ۲، مقدار ثابت k دارد و سایر جاها صفر است؛ بنابراین چون مساحت مربع برابر ۲ است، خواهیم داشت $k = \frac{1}{2}$.

ب)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{X\} &= \int_{-1}^{1}\int_{|y|-1}^{1-|y|} xf(x,y)dxdy \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{|y|-1}^{1-|y|} kxdxdy \\
&= 0
\end{aligned}$$

به طریق مشابه

$$\mathbb{E}\{Y\} = 0$$

می دانیم

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}(X,Y) &= \mathbb{E}\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\} \\
&= \mathbb{E}\{XY\} = \int_{-1}^{1}\int_{|y|-1}^{1-|y|} xyf(x,y)dxdy \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{|y|-1}^{1-|y|} xydxdy = 0
\end{aligned}$$

بنابراین کوواریانس و ضریب همبستگی هر دو برابر صفرند.

پ) دو متغیر تصادفی $X+Y$ و $X-Y$ از چرخش ۴۵ درجه‌ی متغیرهای تصادفی X و Y و سپس مقیاس کردن (تجانس) به اندازه‌ی $\sqrt{2}$ حاصل می شوند. بنابراین تابع توزیع توأم آنها نیز دچار چنین تبدیلی خواهد شد و خواهیم داشت

$$f_{X+Y,X-Y}(u,v) = \begin{cases} \frac{1}{4} & , \quad -1 < u,v < 1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در این صورت، براحتی دیده می شود که این دو متغیر تصادفی مستقلند و هریک دارای توزیع یکنواخت بین -1 و ۱ هستند.

ت) برای $|x| > 1$ داریم $f(x) = 0$ و برای $|x| < 1$

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy \\
&= \frac{1}{2}\int_{|x|-1}^{1-|x|} dy \\
&= 1-|x|
\end{aligned}$$

که میانگین آن صفر است و برای واریانس

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= \mathbb{E}\{X^2\} \\ &= \int_{-1}^{1} x^2 - x^2|x|dx \\ &= 2\int_0^1 x^2 - x^3 dx \\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

سوال ۲)

$$\begin{aligned}\Phi_X(s) &= \mathbb{E}\{e^{sX}\} \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)e^{sx}dx \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{sx}dx \\ &= \frac{1}{s}(e^{\frac{s}{2}} - e^{-\frac{s}{2}}) \\ &= \frac{2\sinh\frac{s}{2}}{s}\end{aligned}$$

سری تیلور $\sinh x$ برابر است با

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

بنابراین

$$\frac{\sinh x}{x} = 1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \cdots$$

و

$$\frac{\sinh\frac{s}{2}}{\frac{s}{2}} = 1 + \frac{s^2}{4\times 3!} + \frac{s^4}{16\times 5!} + \cdots$$

و در نتیجه

$$\frac{d^4}{ds^4}\Phi_X(s)\Big|_{x=0} = \frac{1}{80}$$

سوال ۳) برای هر $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned}
\Pr\left\{\tan^{-1}\frac{Y}{X} < u\right\} &= \Pr\left\{\frac{Y}{X} < \tan u\right\} \\
&= \Pr\left\{\frac{Y}{X} < \tan u, X > 0\right\} + \Pr\left\{\frac{Y}{X} < \tan u, X \leq 0\right\} \\
&= \Pr\{Y < X\tan u, X > 0\} + \Pr\{Y > X\tan u, X < 0\}
\end{aligned}$$

می دانیم

$$\Pr\{Y < X\tan u, X > 0\} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^{x\tan u} \exp(-\frac{y^2}{2})\exp(-\frac{x^2}{2})dydx$$

با تغییر متغیر $x \to -x$ و $y \to -y$، دیده می شود

$$\Pr\{Y < X\tan u, X > 0\} = \Pr\{Y > X\tan u, X < 0\}$$

بنابراین

$$\Pr\left\{\tan^{-1}\frac{Y}{X} < u\right\} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^{x\tan u} \exp(-\frac{y^2}{2})\exp(-\frac{x^2}{2})dydx$$

و با مشتق گیری خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
\frac{d}{du}\Pr\left\{\tan^{-1}\frac{Y}{X} < u\right\} &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty x(1+\tan^2 u)\exp(-\frac{x^2\tan^2 u}{2})\exp(-\frac{x^2}{2})dx \\
&= \frac{1}{\pi}\exp(-\frac{x^2(1+\tan^2 u)}{2})\Big|_{x=\infty}^{x=0} \\
&= \frac{1}{\pi}
\end{aligned}$$

که نشان می دهد چگالی احتمال، مقدار یکنواخت $\frac{1}{\pi}$ را در بازه‌ی $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ اختیار می کند.

سوال ۴) می دانیم برای هر $y > 0$

$$\begin{aligned}
f(y) &= \int_0^\infty f(x,y)dx \\
&= \int_0^\infty e^{-x(1+y)^2}dx \\
&= \frac{1}{(1+y)^2}e^{-x(1+y)^2}\Big|_\infty^0 \\
&= \frac{1}{(1+y)^2}
\end{aligned}$$

همچنین

$$f(x|y)f(y) = f(x,y)$$

بنابراین

$$f(x|y) = (1+y)^2 e^{-x(1+y)^2} \quad , \quad x,y>0$$

سوال ۵) الف) ثابت می کنیم همگرایی، از نوع در احتمال است.

$$\Pr\{|X_n - X| < \epsilon\} = \Pr\{\frac{1}{n} < \epsilon\}$$
$$= \begin{cases} 1 & , \quad n > \frac{1}{\epsilon} \\ 0 & , \quad n \leq \frac{1}{\epsilon} \end{cases}$$

که نشان می دهد برای هر $\epsilon > 0$، می توان n را چنان بزرگ انتخاب کرد که احتمال فوق برابر ا شود.

ب) همگرایی از نوع در توزیع است؛ زیرا

$$F_{X_n}(u) = 1 - e^{-\frac{n+1}{n}u} \quad , \quad u > 0$$

و در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(u) = F_X(u) \quad , \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

پ) طبق قضیه ی حد مرکزی، اگر X_i ها، یکنواخت بین $-\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$ باشند، دنباله‌ی $\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}$ ، در احتمال به یک متغیر گوسی با میانگین صفر و واریانس $\frac{1}{12}$ میل می کند. چون در اینجا به دنبال همگرایی $\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}$ هستیم، نتیجه می شود که دنباله‌ی فوق، در احتمال به یک توزیع گوسی با میانگین $\frac{1}{2}$ و واریانس صفر میل می کند (یعنی توزیعی که فقط مقدار $\frac{1}{2}$ را با احتمال ا می پذیرد).

پاسخ سوال ۵۱)

الف)

از $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = 1$ نتیجه می شود:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_0^1 xy + kx + kydxdy = 1 \implies \\
&\int_0^1 \frac{1}{2}y + k\frac{1}{2} + kydy = 1 \implies \\
&\frac{1}{4} + k\frac{1}{2} + k\frac{1}{2} = 1 \implies \\
&k = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

همچنین به ازای این مقدار k داریم $f(x,y) \geq 0$. برای محاسبه‌ی توزیع تجمعی توأم، توجه داریم که اگر $x < 0$ یا $y < 0$ یا هردو، در این صورت $F(x,y) = 0$. بنابراین $x > 0, y > 0$ و در نتیجه

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= \int_0^{\min(x,1)} \int_0^{\min(y,1)} uv + \frac{3u}{4} + \frac{3v}{4}dudv \\
&= \frac{\min(x,1)\cdot\min(y,1)}{4} + \frac{3\min(x,1)}{8} + \frac{3\min(y,1)}{8} \\
&= \begin{cases}
\frac{xy}{4} + \frac{3x+3y}{8} & , \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\
\frac{x}{4} + \frac{3x+3}{8} & , \quad 0 \leq x \leq 1, y \geq 1 \\
\frac{y}{4} + \frac{3y+3}{8} & , \quad x \geq 1, 0 \leq y \leq 1 \\
1 & , \quad x \geq 1, y \geq 1 \\
0 & , \quad \text{سایر جاها}
\end{cases}
\end{aligned}$$

ب)

از $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = 1$ نتیجه می شود:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} k\sin(x+3y)dxdy = 1 \implies \\
&\int_0^{\frac{\pi}{6}} k\cos(3y) + k\sin(3y)dy = 1 \implies \\
&k\frac{1}{3}\sin(3y)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} - k\frac{1}{3}\cos(3y)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = 1 \implies \\
&k = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

همچنین به ازای این مقدار k داریم $f(x,y) \geq 0$. برای محاسبه‌ی توزیع تجمعی توأم، توجه داریم که اگر $x < 0$

یا $y < 0$ یا هردو، دراین صورت $F(x,y) = 0$. بنابراین $x > 0, y > 0$ و در نتیجه

$$
\begin{aligned}
F(x,y) &= \int_0^{\min(y,\frac{\pi}{6})} \int_0^{\min(x,\frac{\pi}{2})} \frac{3}{2} \sin(u+3v) du dv \\
&= \int_0^{\min(y,\frac{\pi}{6})} \frac{3}{2} \cos(u+3v) \Big|_{\min(x,\frac{\pi}{2})}^{0} dv \\
&= \int_0^{\min(y,\frac{\pi}{6})} \frac{3}{2} \cos(3v) - \frac{3}{2} \cos\left[\min(x,\frac{\pi}{2}) + 3v\right] dv \\
&= \frac{1}{2} \sin(3v) \Big|_0^{\min(y,\frac{\pi}{6})} - \frac{1}{2} \sin\left[\min(x,\frac{\pi}{2}) + 3v\right] \Big|_0^{\min(y,\frac{\pi}{6})} \\
&= \frac{1}{2} \sin(\min(3y,\frac{\pi}{2})) - \frac{1}{2} \sin\left[\min(x,\frac{\pi}{2}) + \min(3y,\frac{\pi}{2})\right] + \frac{1}{2} \sin\left[\min(x,\frac{\pi}{2})\right] \\
&\begin{cases}
\frac{1}{2}\sin(x) + \frac{1}{2}\sin(3y) - \frac{1}{2}\sin(x+3y) & , \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \frac{\pi}{6} \\
\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x) & , \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, y \ge \frac{\pi}{6} \\
\frac{1}{2}\sin(3y) - \frac{1}{2}\cos(3y) + \frac{1}{2} & , \quad x \ge \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \frac{\pi}{6} \\
1 & , \quad x \ge \frac{\pi}{2}, y \ge \frac{\pi}{6} \\
0 & , \quad \text{سایر جاها}
\end{cases}
\end{aligned}
$$

پاسخ سوال ۵۲)

الف)

$$\Pr\{X \le 4, Y \le -2\} = 0$$

$$
\begin{aligned}
\Pr\{X+Y\le 2\} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\min(\frac{\pi}{2},2-y)} \frac{1}{2}\sin(x+y)dxdy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos(x+y)\Big|_{\min(\frac{\pi}{2},2-y)}^{0} dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos(y)-\frac{1}{2}\cos\left[\min(\frac{\pi}{2},2-y)+y\right]dy \\
&= \int_0^{2-\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos(y)-\frac{1}{2}\cos\left[\min(\frac{\pi}{2},2-y)+y\right]dy \\
&+ \int_{2-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos(y)-\frac{1}{2}\cos\left[\min(\frac{\pi}{2},2-y)+y\right]dy \\
&= \int_0^{2-\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos(y)-\frac{1}{2}\cos\left[\frac{\pi}{2}+y\right]dy \\
&+ \int_{2-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos(y)-\frac{1}{2}\cos\left[2-y+y\right]dy \\
&= \int_0^{2-\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos(y)+\frac{1}{2}\sin(y)dy \\
&+ \int_{2-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos(y)-\frac{1}{2}\cos(2)dy \\
&= \frac{1}{2}+\int_0^{2-\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin(y)dy \\
&+ \int_{2-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{2}\cos(2)dy \\
&= 1-\frac{1}{2}\sin 2-\frac{\pi-2}{2}\cos 2
\end{aligned}
$$

$$\Pr\{X=4Y\}=0$$

احتمال اخیر صفر است؛ زیرا دو متغیر تصادفی، پیوسته بوده و چگالی احتمال توأم آنها، شامل هیچ ضربه ای روی خط $X=4Y$ نیست.

ب)

$$\Pr\{X\le 4, Y\le -2\}=0$$

$$\Pr\{X+Y\le 2\}=1$$

$$
\begin{aligned}
&\Pr\{X = 4Y\} = \Pr\{X = 4Y = -4\} \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2}\delta\left(\sqrt{(x+4)^2 + (y+1)^2}\right) dxdy = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

پاسخ سوال ۵۳)

$$
\begin{aligned}
E\{X^n\} &= \int_1^\infty \int_1^\infty x^n (xy-1)\exp(1-xy)dxdy \\
&= \int_1^\infty x^n \int_1^\infty (xy-1)\exp(1-xy)dydx \\
&= \int_1^\infty x^n (-y)\exp(1-xy)\Big|_{y=1}^{y=\infty} dx \\
&= \int_1^\infty x^n \exp(1-x)dx
\end{aligned}
$$

در نتیجه

$$
\begin{aligned}
E\{X\} &= \int_1^\infty x\exp(1-x)dx = 2 \\
E\{X^2\} &= \int_1^\infty x^2\exp(1-x)dx = 5 \\
\implies \sigma_X^2 &= E\{X^2\} - E^2\{X\} = 1
\end{aligned}
$$

همچنین

$$
\begin{aligned}
\Phi_X(s) = E\{\exp(sX)\} &= \int_1^\infty \int_1^\infty \exp(sx)(xy-1)\exp(xy-1)dxdy \\
&= \int_1^\infty \exp(sx) \int_1^\infty (xy-1)\exp(xy-1)dydx \\
&= \int_1^\infty \exp(sx)(-y)\exp(1-xy)\Big|_{y=1}^{y=\infty} dx \\
&= \int_1^\infty \exp(sx)\exp(1-x)dx \\
&= \int_1^\infty \exp(1+(s-1)x)dx \\
&= \frac{1}{s-1}\exp(1+(s-1)x)\Big|_1^\infty \\
&= \frac{1}{1-s}\exp(s) \quad , \quad \Re\{s\} < 1
\end{aligned}
$$

و به دلیل تقارن

$$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \quad , \quad \Phi_X(s) = \Phi_Y(s).$$

$$\Pr\{XY \le a\} = \begin{cases} \int_1^a \int_1^{\frac{a}{y}} (xy-1)\exp(1-xy)dxdy & , \quad a \ge 1 \\ 0 & , \quad a \le 1 \end{cases}$$

بنابراین برای $a \ge 1$ داریم:

$$\begin{aligned} \Pr\{XY \le a\} &= \int_1^a \int_1^{\frac{a}{y}} (xy-1)\exp(1-xy)dxdy \\ &= \int_1^a (-x)\exp(1-xy)\Big|_{x=1}^{x=\frac{a}{y}} dy \\ &= \int_1^a \exp(1-y) - \frac{a}{y}\exp(1-a)dy \\ &= \int_1^a \exp(1-y) - \frac{a}{y}\exp(1-a)dy \\ &= 1 - \exp(1-a) - a\exp(1-a)\ln a \end{aligned}$$

در نتیجه برای $a \ge 1$:

$$f_{XY}(a) = \begin{cases} (a-1)e^{1-a}\ln a & , \quad a \ge 1 \\ 0 & , \quad a \le 1 \end{cases}.$$

$$\Pr\{\max\{X,Y\} \le a\} = \Pr\{X \le a, Y \le a\}.$$

برای $a \le 1$ احتمال فوق برابر صفر است و برای $a \ge 1$ داریم:

$$\begin{aligned} \Pr\{X \le a, Y \le a\} &= \int_1^a \int_1^a (xy-1)\exp(1-xy)dxdy \\ &= \int_1^a (-x)\exp(1-xy)\Big|_1^a dy \\ &= \int_1^a \exp(1-y) - a\exp(1-ay)dy \\ &= 1 - 2\exp(1-a) + \exp(1-a^2) \end{aligned}$$

در نتیجه

$$f_{\max\{X,Y\}}(a) = \begin{cases} 2\exp(1-a) - 2a\exp(1-a^2) & , \quad a \geq 1 \\ 0 & , \quad a \leq 1 \end{cases}.$$

پاسخ سوال ۵۴)

الف) حجم زیر چگالی احتمال باید ۱ باشد؛ پس:

$$\begin{aligned}
&\int_{x^2+y^2\leq 1} \alpha + 2(\frac{1}{\pi} - \alpha)(x^2+y^2)dxdy = 1 \implies \\
&\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left[\alpha + 2(\frac{1}{\pi} - \alpha)r^2\right] rdrd\phi = 1 \implies \\
&\int_0^{2\pi} \frac{\alpha}{2} + 2(\frac{1}{\pi} - \alpha)\frac{1}{4}d\phi = 1 \implies \\
&1 = 1.
\end{aligned}$$

در نتیجه، به ازای هر مقدار از α حجم زیر، واحد خواهد بود. از طرفی، باید چگالی احتمال همواره نامنفی باشد؛ پس:

$$\begin{aligned}
&\forall x, y \quad , \quad f(x,y) \geq 0 \iff \min_{x,y} f(x,y) \geq 0 \\
&\implies \begin{cases} \alpha + 2(\frac{1}{\pi} - \alpha) \geq 0 & , \quad \frac{1}{\pi} - \alpha \leq 0 \\ \alpha \geq 0 & , \quad \frac{1}{\pi} - \alpha \geq 0 \end{cases} \\
&\implies \begin{cases} \frac{2}{\pi} - \alpha \geq 0 & , \quad \frac{1}{\pi} - \alpha \leq 0 \\ \alpha \geq 0 & , \quad \frac{1}{\pi} - \alpha \geq 0 \end{cases} \\
&\implies \begin{cases} \frac{1}{\pi} \leq \alpha \leq \frac{2}{\pi} \\ 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{\pi} \end{cases}
\end{aligned}$$

در نتیجه، محدوده‌ی مقادیر مجاز α برابر $[0, \frac{2}{\pi}]$ خواهد بود.

ب) دو متغیر تصادفی X و Y مستقل اند؛ اگر و تنها اگر

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y).$$

از طرفی،

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \alpha + 2(\frac{1}{\pi} - \alpha)(x^2+y^2)dy \\
&= \sqrt{1-x^2}\left[\frac{8}{3}\left(\frac{1}{\pi}-\alpha\right)x^2 + \frac{4}{3\pi} + \frac{2}{3}\alpha\right] \quad , \quad |x| \leq 1.
\end{aligned}
$$

به دلیل تقارن،

$$
f_Y(y) = \sqrt{1-y^2}\left[\frac{8}{3}\left(\frac{1}{\pi}-\alpha\right)y^2 + \frac{4}{3\pi} + \frac{2}{3}\alpha\right] \quad , \quad |y| \leq 1
$$

در نتیجه به ازای هر مقدار α داریم $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$.

برای تحقیق ناهمبستگی، به دلیل تقارن مرکزی،

$$
E\{X\} = E\{Y\} = 0.
$$

از طرفی

$$
E\{XY\} = \int_{x^2+y^2 \leq 1} xy[\alpha + 2(\frac{1}{\pi} - \alpha)(x^2+y^2)]dxdy = 0
$$

پس این دو متغیر تصادفی همواره ناهمبسته اند.

پ) اگر $a=b=0$، در اینصورت $\Pr\{aX+bY \geq 0\} = 1$. در غیر اینصورت، به دلیل تقارن دایروی چگالی احتمال خواهیم داشت:

$$
\Pr\{aX+bY \geq 0\} = \Pr\{X \geq 0\} = \frac{1}{2}
$$

همچنین

$$
\begin{aligned}
\Pr\{XY \geq 0\} &= \Pr\{X \geq 0, Y \geq 0 \,\text{or}\, X \leq 0, Y \leq 0\} \\
&= \Pr\{X \geq 0, Y \geq 0\} + \Pr\{X \leq 0, Y \leq 0\} \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

تعریف ضریب همبستگی چنین است:

$$
\rho_{X,Y} = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sigma_X \sigma_Y}
$$

که در این سوال، با توجه به $Y = X^2$ خواهیم داشت:

$$cov(X,Y) = E(X^3) - E(X)E(X^2).$$

از طرفی

$$\begin{aligned} E(X^n) &= \sum_x x^n p(X=x) \\ &= (-1)^n \times 0.3 + (0)^n \times 0.4 + (1)^n \times 0.3 \\ &= 0.3[1 + (-1)^n] \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} &E(X^3) = E(X) = 0 \\ &E(X^2) = 0.6 \end{aligned}$$

پس خواهیم داشت

$$cov(X,Y) = 0.$$

از طرفی، برای محاسبه‌ی σ_X^2 و σ_Y^2 داریم:

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= E(X^2) - E^2(X) \\ &= 0.6 - 0^2 = 0.6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_Y^2 &= E(Y^2) - E^2(Y) \\ &= E(X^4) - E^2(X^2) \\ &= 0.6 - (0.6)^2 = 0.24 \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\rho_{X,Y} = \frac{0}{\sqrt{0.6 \times 0.24}} = 0.$$

کوئیز ۸)

ازآنجاکه pmf نرمالیزه است، باید داشته باشیم

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(a_n) + p(b_n) = 1 \implies$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2k}{(n+2)(n+3)} = 1 \implies$$
$$2k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} = 1 \implies k = 1$$

گزینه ۱

کوئیز۹)

pdf به طور خودکار نرمالیزه شده است. پس

$$E\{X\} = \int_0^{\frac{1}{c}} 2c^2x^2dx = \frac{2}{3c}$$
$$E\{X^2\} = \int_0^{\frac{1}{c}} 2c^2x^3dx = \frac{1}{2c^2}$$
$$\sigma_X^2 = E\{X^2\} - E^2\{X\} = \frac{1}{18c^2} = \frac{1}{2}$$

در نتیجه $c = \frac{1}{3}$.

سوال امتیازی)

$$\Pr\{|X| > 3\} = \Pr\{X^2 > 9\} < \frac{\mathbb{E}\{X^2\}}{9} = \frac{4}{9}$$

کوئیز۱۰) X می تواند مقادیر ۰ و ۱ و Y می تواند مقادیر ۰، ۲، ۴ و ۶ را اختیار کند. در نتیجه

$$\begin{aligned}\Pr\{X = 2Y\} &= \Pr\{X = 2Y = 0\} + \Pr\{X = 2Y = 1\}\\ &= \Pr\{X = 0, Y = 0\} + \Pr\{X = 1, Y = \frac{1}{2}\}\\ &= \Pr\{i < 4, i \in \{1, 3, 5\}\} + 0\\ &= \Pr\{i \in \{1, 3\}\} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

فصل ۵

احتمال شرطی در متغیرهای تصادفی

سوال ۱) پیشامد های A و B را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$A =$ (پیشامد رو آمدن دو خط در سه پرتاب اول (و شیر یا خط آمدن پرتاب دیگر

$B =$ پیشامد رو آمدن سه خط در سه پرتاب اول

الف) اگر متغیر تصادفی مورد نظر X باشد، مطلوب است

$$p(X = x|B) = \frac{p(X = x, B)}{p(B)}$$

می دانیم

$$p(B) = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

هم چنین

$p(X = x, B) = \Pr\{$ رو آمدن x شیر در ۱۰ پرتاب و سه خط در سه پرتاب اول $\}$

$$= \binom{7}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \quad , \quad 0 \le x \le 7$$

بنابراین

$$p(X = x|B) = \binom{7}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{7} \quad , \quad 0 \le x \le 7$$

ب) مشابه قسمت قبل، مطلوب است

$$p(X=x|A\cup B)=\frac{p\Big([X=x]\cap[A\cup B]\Big)}{p(A\cup B)}$$
$$=\frac{p\Big(\{[X=x]\cap A\}\cup\{[X=x]\cap B\}\Big)}{p(A)+p(B)}$$
$$=\frac{p\Big([X=x]\cap A\Big)+p\Big([X=x]\cap B\Big)}{p(A)+p(B)}$$

با توجه به بخش قبل

$$p(X=x,B)=\binom{7}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\quad,\quad 0\le x\le 7$$

همچنین

$$p(A)=\binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}$$

و

$$p(X=x,A)=\Pr\{\text{رو آمدن دو خط و یک شیر در سه پرتاب اول و رو آمدن } x-1 \text{ شیر در ۷ پرتاب بعدی}\}$$
$$=\binom{3}{1}\binom{7}{x-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\quad,\quad 1\le x\le 8$$

بنابراین

$$p(X=x|A\cup B)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{9} & ,\quad x=0\\ \left\{\binom{7}{x}+\binom{3}{1}\binom{7}{x-1}\right\}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{9} & ,\quad 1\le x\le 7\\ 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{9} & ,\quad x=8\end{cases}$$

سوال ۲) الف) می دانیم

$$p(X=x,Y=y)=p(X=x)p(Y=y|X=x)$$

چون احتمالاتی از جنس $p(Y=y|X=x)$ را می توان از روی کانال استخراج کرد، در نتیجه خواهیم داشت

$$p(X=0,Y=0)=q(1-p)$$
$$p(X=0,Y=1)=qp$$
$$p(X=1,Y=0)=(1-q)p$$
$$p(X=1,Y=1)=(1-q)(1-p)$$

ب)

$$p(X \neq Y) = p(X=0, Y=1) + p(X=1, Y=0) = p$$

بنابراین احتمال خطا بر حسب توزیع ورودی، مقدار ثابتی است و این امر شهودا به علت تقارن خطای کانال است. به این کانال در تئوری اطلاعات، کانال باینری متقارن (Binary Symmetric Channel) گفته می شود.

سوال ۳) به سادگی می توان به کمک انتگرال گیری جزء به جزء نتیجه گرفت

$$E\{X\} = \int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

همچنین به ازای $x > a$

$$\begin{aligned} \Pr\{X|X>a\} &= \Pr\{X<x|X>a\} \\ &= \frac{\Pr\{a<X<x\}}{\Pr\{X>a\}} \\ &= \frac{e^{-\lambda a} - e^{-\lambda x}}{e^{-\lambda a}} \\ &= 1 - e^{\lambda a - \lambda x} \end{aligned}$$

بنابراین

$$p(X|X>a) = \lambda e^{-\lambda(x-a)}$$

(با ترسیم،)دیده می شود که این توزیع، انتقال یافته‌ی توزیع نمایی به اندازه‌ی a به راست است؛ در نتیجه مقدار میانگین آن هم به همین اندازه افزایش خواهد داشت و اثبات کامل است (می توان مشابها از روی انتگرال جزء به جزء نیز به این نتیجه رسید).

سوال ۴) طبق تعریف

$$\Pr\{X=0\} = F(0) - F(0^-) = \frac{1}{2}$$
$$\Pr\{X=1\} = F(1) - F(1^-) = \frac{1}{4}$$

تابع توزیع داده شده در سوال، دارای دو ضربه در ۰ و ۱ و یک مقدار یکنواخت $\frac{1}{4}$ در بازه‌ی $(0,1)$ خواهد بود؛ در نتیجه با حذف این دو ضربه، توزیع شرطی، یکنواخت بین ۰ و ۱ خواهد بود.

سوال ۱)

بنا به تعریف و خواص چگالی های احتمال:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dy$$
$$E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{XY}(x,y)dxdy$$
$$E\{XY\} = \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{XY}(x,y)dxdy$$

الف)

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int \frac{1}{\pi} e^{-x^2-y^2} dy \\ &= \int \frac{1}{\pi} e^{-x^2} e^{-y^2} dy \\ &= \frac{1}{\pi} e^{-x^2} \int e^{-y^2} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int e^{-y^2} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \end{aligned}$$

$$E\{X\} = \int \frac{x}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx = 0$$

زیرا $\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ یک تابع فرد روی اعداد حقیقی است.

$$\begin{aligned} E\{XY\} &= \iint xy \frac{1}{\pi} e^{-x^2-y^2} dxdy \\ &= \iint xy \frac{1}{\pi} e^{-x^2} e^{-y^2} dxdy \\ &= \frac{1}{\pi} \int x e^{-x^2} dx \int y e^{-y^2} dy = 0 \end{aligned}$$

ب)

$$f_X(x) = \int_{|x-1|+|y-1|<1} \frac{3}{2}(1-|x-1|-|y-1|)dy$$

با تغییر متغیر $y \to y+1$ می توان نوشت:

$$f_X(x) = \int_{|x-1|+|y|<1} \frac{3}{2}(1-|x-1|-|y|)dy$$

از آنجا که ناحیه $|x-1|+|y|<1$ و تابع $\frac{3}{2}(1-|x-1|-|y|)$ هر دو نسبت به y زوج هستند، می توان انتگرال را تنها برای $y>0$ حساب نموده و مقدار آن را دو برابر کرد؛ به عبارت دیگر:

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= 2\int_{|x-1|+|y|<1,y>0} \frac{3}{2}(1-|x-1|-y)dy \\
&= 3\int_{y=0}^{1-|x-1|} 1-|x-1|-ydy \\
&= 3(1-|x-1|)y - 3\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{1-|x-1|} \\
&= \frac{3}{2}(1-|x-1|)^2 \quad , \quad 0<x<2
\end{aligned}$$

بنابراین

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1-|x-1|)^2 & , \quad 0<x<2 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

دو روش برای محاسبه امید ریاضی X وجود دارد. روش اول، روش مستقیم انتگرال گیری است. روش دوم این است که توجه کنیم که چگالی احتمال X حول $x=1$ متقارن است. به سادگی می توان گفت که امید ریاضی X باید برابر ۱ باشد.

$$\begin{aligned}
E\{XY\} &= \int_{|x-1|+|y-1|<1} xy\frac{3}{2}(1-|x-1|-|y-1|)dxdy \\
&= \int_{|u|+|w|<1} (u+1)(w+1)\frac{3}{2}(1-|u|-|w|)dudw \\
&= \int_{|u|+|w|<1} uw\frac{3}{2}(1-|u|-|w|)dudw \\
&+ \int_{|u|+|w|<1} u\frac{3}{2}(1-|u|-|w|)dudw \\
&+ \int_{|u|+|w|<1} w\frac{3}{2}(1-|u|-|w|)dudw \\
&+ \int_{|u|+|w|<1} \frac{3}{2}(1-|u|-|w|)dudw
\end{aligned}$$

از ۴ انتگرال آخر، سه انتگرال اول برابر صفرند زیرا تابع تحت انتگرال نسبت به u و w فرد بوده و بازه انتگرال گیری نیز متقارن است. در این صورت:

$$\begin{aligned}
E\{XY\} &= \int_{|u|+|w|<1} \frac{3}{2}(1-|u|-|w|)dudw \\
&= 4\int_{|u|+|w|<1, u>0, w>0} \frac{3}{2}(1-|u|-|w|)dudw \\
&= 6\int_{u+w<1, u>0, w>0} (1-u-w)dudw \\
&= 6\int_0^1 \int_0^{1-w} (1-u-w)dudw \\
&= 6\int_0^1 (1-w)u - \frac{u^2}{2}\Big|_0^{1-w} dw \\
&= 3\int_0^1 (1-w)^2 dw = 1
\end{aligned}$$

پ)

$$f_X(x) = \int_x^1 e^{1-x}dy = (1-x)e^{1-x}$$

بنابراین

$$f_X(x) = \begin{cases} (1-x)e^{1-x} & , \quad 0<x<1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

برای محاسبه امید ریاضی:

$$\begin{aligned}
E\{X\} &= \int_0^1 x(1-x)e^{1-x}dx \\
&= \int_0^1 u(1-u)e^u du \\
&= \int_0^1 (u-u^2)e^u du
\end{aligned}$$

برای محاسبه انتگرال فوق به روش جزء به جزء، ابتدا مشتقات متوالی $u-u^2$ و سپس انتگرال های متوالی e^u را محاسبه کرده و با علامت های مثبت و منفی متناوبا در هم ضرب می کنیم؛ به عبارت دیگر: بنابراین

$$
\begin{array}{ccc}
u-u^2 & & e^u \\
 & + & \\
1-2u & & e^u \\
 & - & \\
-2 & & e^u \\
 & + & \\
0 & & e^u
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
E\{X\} &= \int_0^1 (u-u^2)e^u du \\
&= (u-u^2)e^u - (1-2u)e^u + (-2)e^u \Big|_0^1 = 3-e
\end{aligned}
$$

همچنین

$$
\begin{aligned}
E\{XY\} &= \int_0^1 \int_x^1 xye^{1-x} dydx \\
&= \int_0^1 x(1-\frac{x^2}{2})e^{1-x} dx = 6-2e
\end{aligned}
$$

ت) X و Y، دو متغیر تصادفی گسسته (با مقادیر صحیح) اند و pmf آنها به صورت زیر است: $p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{16} & , \quad x^2+y^2 \le 10 \ , \ x \ge y \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$ (در صورت سوال، مقدار $\frac{1}{16}$ باید به $\frac{1}{21}$ تغییر پیدا کند!)

جدول pmf به صورت زیر است ($p=21$):

X \ Y	-3	-2	-1	0	1	2	3
-3							
-2		p					
-1	p	p	p				
0	p	p	p	p			
1	p	p	p	p	p		
2		p	p	p	p	p	
3			p	p	p		

در این صورت:

$$\Pr\{X=x\}=\begin{cases}\frac{1}{21} & , \quad x=-2\\ \frac{1}{7} & , \quad x=-1\\ \frac{4}{21} & , \quad x=0\\ \frac{5}{21} & , \quad x=1\\ \frac{5}{21} & , \quad x=2\\ \frac{1}{7} & , \quad x=3\end{cases}$$

همچنین

$$E\{X\}=\sum_x x\cdot\Pr\{X=x\}=\frac{13}{21}$$

$$E\{XY\}=\sum_{x,y} xy\,\Pr\{X=x,Y=y\}=\frac{5}{21}$$

سوال ۲) الف) به وضوح

$$\mu_X=E\{X\}=p_3+p_4$$
$$\mu_Y=E\{Y\}=p_2+p_4$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}&\operatorname{cov}(X,Y)=E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\}\\&=E\{XY\}-\mu_X\mu_Y\\&=p_4-(p_2+p_4)(p_3+p_4)\end{aligned}$$

در نتیجه برای صفر بودن کوواریانس باید داشته باشیم $p_4=(p_2+p_4)(p_3+p_4)$.

ب) شرط همبستگی که در قسمت قبلی به دست آمد. برای استقلال باید داشته باشیم:

$$p_1=(p_1+p_3)(p_1+p_2)$$
$$p_2=(p_1+p_2)(p_2+p_4)$$
$$p_3=(p_1+p_3)(p_3+p_4)$$
$$p_4=(p_2+p_4)(p_3+p_4)$$

نکته اینجاست که

۱. از معادله‌ی ۴، با کم کردن $p_2 + p_4$ به معادله‌ی ۲ می رسیم.

۲. از معادله‌ی ۴، با کم کردن $p_3 + p_4$ به معادله‌ی ۳ می رسیم.

۳. از جمع معادله‌های ۲، ۳ و ۴ به معادله‌ی ۱ می رسیم.

بنابراین در این سوال، ناهمبستگی و استقلال معادلند.

سوال ۳) الف) به سادگی و با انتگرال گیری می توان نتیجه گرفت:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < y < 1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در نتیجه

$$E\{X\} = E\{Y\} = \frac{1}{2}$$

هم چنین می دانیم

$$\begin{aligned} E\{XY\} &= \int_0^1 \int_0^1 xy + \alpha xy \sin[2\pi(x+y)] dx dy \\ &= \frac{1}{4} + \alpha \int_0^1 \int_0^1 xy \sin[2\pi(x+y)] dx dy \\ &= \frac{1}{4} + \alpha \int_0^1 y \int_0^1 x \sin[2\pi(x+y)] dx dy \end{aligned}$$

هم چنین

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \sin[2\pi(x+y)] dx &= \left[-\frac{x}{2\pi} \cos[2\pi(x+y)] + \frac{1}{4\pi^2} \sin[2\pi(x+y)] \right]_{x=0}^{x=1} \\ &= -\frac{\cos 2\pi y}{2\pi} \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} E\{XY\} &= \frac{1}{4} - \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 y\cos 2\pi y dy \\ &= \frac{1}{4} - \frac{\alpha}{2\pi}\left[\frac{y\sin 2\pi y}{2\pi} + \frac{\cos 2\pi y}{4\pi^2}\right]_{y=0}^{y=1} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

ازآنجا که همواره $E\{XY\} = E\{X\}E\{Y\}$ ، در نتیجه همواره دو متغیر تصادفی X و Y ناهمبسته هستند.

ب) به سادگی دیده می شود که

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) \iff \alpha = 0$$

سوال ۴) الف) با توجه به اینکه $\Pr\{XY > 1\} = 0$ ، برای $u < 1$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &\Pr\{XY < u\} = \Pr\left\{X < \frac{u}{Y}\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Pr\left\{X < \frac{u}{y}|Y = y\right\} f_Y(y)dy \\ &= \int_0^1 \Pr\left\{X < \frac{u}{y}|Y = y\right\} dy \\ &= \int_0^u \Pr\left\{X < \frac{u}{y}\right\} dy \\ &+ \int_u^1 \Pr\left\{X < \frac{u}{y}\right\} dy \\ &= u + \int_u^1 \frac{u}{y}dy \\ &= u - u\ln u \end{aligned}$$

بنابراین

$$f_{XY}(u) = \frac{d}{du}F_{XY}(u) = \begin{cases} -\ln u & , \quad 0 \le u < 1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

ب) ابتدا، می دانیم

$$\Pr\{X+Y < 0\} = 1 - \Pr\{X+Y < 2\} = 0$$

بنابراین با فرض $0 < u < 2$ خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
&\Pr\{X+Y<u\} = \Pr\left\{X<u-Y\right\}\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Pr\left\{X<u-y|Y=y\right\} f_Y(y)dy\\
&= \int_{0}^{1} \Pr\left\{X<u-y|Y=y\right\} dy
\end{aligned}
$$

به ازای $u<1$:

$$
\begin{aligned}
&\int_{0}^{1} \Pr\left\{X<u-y|Y=y\right\} dy\\
&= \int_{0}^{u} \Pr\left\{X<u-y|Y=y\right\} dy\\
&= \int_{0}^{u} u-ydy\\
&= \frac{u^2}{2}
\end{aligned}
$$

به ازای $u>1$:

$$
\begin{aligned}
&\int_{0}^{1} \Pr\left\{X<u-y|Y=y\right\} dy\\
&= \int_{u-1}^{1} \Pr\left\{X<u-y|Y=y\right\} dy\\
&+ \int_{0}^{u-1} \Pr\left\{X<u-y|Y=y\right\} dy\\
&= \int_{u-1}^{1} u-ydy\\
&+ u-1\\
&= u(2-u) - \frac{1}{2} + \frac{(u-1)^2}{2} + u - 1\\
&= 2u - \frac{u^2}{2}
\end{aligned}
$$

بنابراین

$$
f(x) = \begin{cases} x & , \quad 0<x<1\\ 2-x & , \quad 1\le x<2\\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}
$$

پ) به ازای $u > 0$

$$\Pr\left\{\frac{X}{Y} < u\right\} = \Pr\left\{X < uY\right\}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Pr\left\{X < uy | Y = y\right\} f_Y(y) dy$$
$$= \int_{0}^{1} \Pr\left\{X < uy | Y = y\right\} dy$$

به ازای $u < 1$ با اندکی محاسبات

$$\Pr\left\{\frac{X}{Y} < u\right\} = \frac{u}{2}$$

به ازای $u > 1$ با اندکی محاسبات بیشتر

$$\Pr\left\{\frac{X}{Y} < u\right\} = 1 - \frac{1}{2u}$$

بنابراین

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \quad 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2x^2} & , \quad 1 \leq x \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

ت) با فرض $0 < u < 1$ خواهیم داشت:

$$\Pr\left\{\max\{X, Y\} < u\right\} = \Pr\left\{X < u, Y < u\right\}$$
$$= \Pr\left\{X < u\right\} \Pr\left\{Y < u\right\} = u^2$$

بنابراین

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

ث) با فرض $0 < u < 1$ خواهیم داشت:

$$\Pr\left\{\min\{X, Y\} < u\right\} = 1 - \Pr\left\{\min\{X, Y\} > u\right\}$$
$$= 1 - \Pr\left\{X > u, Y > u\right\}$$
$$= 1 - \Pr\left\{X > u\right\} \Pr\left\{Y > u\right\} = 1 - (1 - u)^2$$

بنابراین

$$f(x) = \begin{cases} 2-2x & , \quad 0<x<1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

اکنون اگر متغیرهای تصادفی X و Y، نمایی با پارامتر ۱ باشند، در این صورت با فرض $u>0$

ب)

$$\begin{aligned}
&\Pr\{X+Y<u\} = \Pr\{X<u-Y\} \\
&= \int_0^\infty e^{-y}\Pr\{X<u-y\}\,dy \\
&= \int_0^u e^{-y}\Pr\{X<u-y\}\,dy \\
&= \int_0^u e^{-y}(1-e^{y-u})dy \\
&= \int_0^u e^{-y}-e^{-u}dy \\
&= 1-e^{-u}-ue^{-u}
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$f(x) = xe^{-x} \quad , \quad x>0$$

پ)

$$\begin{aligned}
&\Pr\left\{\frac{X}{Y}<u\right\} = \Pr\{X<uY\} \\
&= \int_0^\infty e^{-y}\Pr\{X<uy\}\,dy \\
&= \int_0^\infty e^{-y}(1-e^{-yu})dy \\
&= \int_0^\infty e^{-y}-e^{-(1+u)y}dy \\
&= 1-\frac{1}{u+1}
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$f(u) = \frac{1}{(u+1)^2} \quad , \quad u>0$$

سوال ۱)

$$
\begin{aligned}
F_X(x|X<1) &= \Pr\{X \le x|X<1\} \\
&= \frac{\Pr\{X \le x, x<1\}}{\Pr\{X<1\}} \\
&= \begin{cases} \frac{\Pr\{X \le x\}}{\Pr\{X<1\}} & , \quad 0<x<1 \\ \frac{\Pr\{X<1\}}{\Pr\{X<1\}} & , \quad x \ge 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} & , \quad 0<x<1 \\ 1 & , \quad x \ge 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} x & , \quad 0<x<1 \\ 1 & , \quad x \ge 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

همچنین

$$
\begin{aligned}
F_X(x|X>1) &= \Pr\{X \le x|X>1\} \\
&= \frac{\Pr\{X \le x, x>1\}}{\Pr\{X>1\}} \\
&= \begin{cases} 0 & , \quad 0<x<1 \\ \frac{\Pr\{1<X<x\}}{\Pr\{X>1\}} & , \quad x \ge 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & , \quad 0<x<1 \\ \frac{\frac{x-1}{2}}{\frac{1}{2}} & , \quad x \ge 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & , \quad 0<x<1 \\ x-1 & , \quad 1<x<2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

بنابراین

$$
\begin{aligned}
f_X(x|X>1) &= \frac{d}{dx} F_X(x|X>1) \\
&= \begin{cases} 1 & , \quad 1<x<2 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}
\end{aligned}
$$

بسادگی از محاسبات (و همچنین شهود) می توان نتیجه گرفت که چون X دارای توزیع یکنواخت بین ۰ و ۲ است، $X|0.5<X<1.5$ دارای توزیع یکنواخت بین 0.5 و 1.5 خواهد بود. بنابراین واضح است که مقدار متوسط این متغیر تصادفی برابر ۱ خواهد بود.

سوال ۲) توزیع $X|X > a$ عبارتست از

$$
\begin{aligned}
F(x|X > a) &= \Pr\{X \le x|X > a\} \\
&= \frac{\Pr\{X \le x, X > a\}}{\Pr\{X > a\}} \\
&= \begin{cases} \frac{\Pr\{X \le x, X > a\}}{\Pr\{X > a\}} & , \quad x > a \\ 0 & , \quad x < a \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{e^{-\lambda a} - e^{-\lambda x}}{e^{-\lambda a}} & , \quad x > a \\ 0 & , \quad x < a \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 - e^{-\lambda(x-a)} & , \quad x > a \\ 0 & , \quad x < a \end{cases}
\end{aligned}
$$

بنابراین

$$
f(x|X > a) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-a)} & , \quad x > a \\ 0 & , \quad x < a \end{cases}
$$

بنابراین

$$
\begin{aligned}
E\{X|X > a\} &= \int x f(X|X > a) dx \\
&= \int_a^\infty \lambda x e^{-\lambda(x-a)} dx \\
&= \int_a^\infty \lambda(x - a + a) e^{-\lambda(x-a)} dx \\
&= \int_0^\infty \lambda(u + a) e^{-\lambda u} du \\
&= \int_0^\infty (\lambda u + \lambda a) e^{-\lambda u} du \\
&= \int_0^\infty \lambda u e^{-\lambda u} du + \int_0^\infty \lambda a e^{-\lambda u} du \\
&= \frac{1}{\lambda} + a
\end{aligned}
$$

همچنین

$$\begin{aligned} E\{X\} &= \int xf(x)dx \\ &= \int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

این نشان می دهد

$$E\{X|X > a\} = E\{X\} + a$$

که همان خاصیت بی حافظه بودن متغیرهای نمایی است؛ به این معنا که تفاوتی نمیکند این متغیر از چه لحظه ای به بعد مشاهده شود. از هر لحظه ای به بعد، معادل با مشاهده آن در لحظه صفر خواهد بود.

سوال ۳) الف) ابتدا توزیع $X|X \geq 4$ را می یابیم. بدین منظور:

$$\begin{aligned} p(x|X \geq 4) &= \Pr\{X = x|X \geq 4\} \\ &= \frac{\Pr\{X = x, X \geq 4\}}{\Pr\{X \geq 4\}} \\ &= \begin{cases} \frac{\Pr\{X=x\}}{\Pr\{X\geq 4\}} & , \quad x \geq 4 \\ 0 & , \quad x < 4 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{\Pr\{X=x\}}{(1-p)^4} & , \quad x \geq 4 \\ 0 & , \quad x < 4 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{(1-p)^x p}{(1-p)^4} & , \quad x \geq 4 \\ 0 & , \quad x < 4 \end{cases} \\ &= \begin{cases} (1-p)^{x-4} p & , \quad x \geq 4 \\ 0 & , \quad x < 4 \end{cases} \end{aligned}$$

بنابراین داریم

$$
\begin{aligned}
E\{X|X \geq 4\} &= \sum_{x=4}^{\infty} x(1-p)^{x-4}p \\
&= \sum_{u+4=4}^{\infty} (u+4)(1-p)^{u}p \\
&= 4 + \sum_{u=0}^{\infty} u(1-p)^{u}p \\
&= \frac{1}{p} + 3
\end{aligned}
$$

و

$$
\begin{aligned}
E\{X^2|X \geq 4\} &= \sum_{x=4}^{\infty} x^2(1-p)^{x-4}p \\
&= \sum_{u+4=4}^{\infty} (u+4)^2(1-p)^{u}p \\
&= \sum_{u=0}^{\infty} (u^2+8u+16)(1-p)^{u}p \\
&= 16 + 8(\frac{1}{p} - 1) + \frac{(1-p)(2-p)}{p^2} \\
&= \frac{16p^2 + 8p(1-p) + (1-p)(2-p)}{p^2} \\
&= \frac{16p^2 + 8p - 8p^2 + p^2 - 3p + 2}{p^2} \\
&= \frac{9p^2 + 5p + 2}{p^2}
\end{aligned}
$$

و می توان نوشت

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(X|X \geq 4) &= E\{X^2|X \geq 4\} - E^2\{X|X \geq 4\} \\ &= \frac{9p^2+5p+2}{p^2} - \frac{9p^2+6p+1}{p^2} \\ &= \frac{1-p}{p^2}\end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned}\Pr\{X=x|\text{زوج است X}\} &= \frac{\Pr\{X=x, X=0,2,4,\cdots\}}{\Pr\{X=0,2,4,\cdots\}} \\ &= \begin{cases}\frac{\Pr\{X=x\}}{\Pr\{X=0,2,4,\cdots\}} & , \quad \text{x زوج} \\ 0 & , \quad \text{x فرد}\end{cases} \\ &= \begin{cases}\frac{(1-p)^x p}{\sum_{u=0}^{\infty}(1-p)^{2u}p} & , \quad \text{x زوج} \\ 0 & , \quad \text{x فرد}\end{cases} \\ &= \begin{cases}\frac{(1-p)^x}{\frac{1}{1-(1-p)^2}} & , \quad \text{x زوج} \\ 0 & , \quad \text{x فرد}\end{cases} \\ &= \begin{cases}(1-p)^x - (1-p)^{x+2} & , \quad \text{x زوج} \\ 0 & , \quad \text{x فرد}\end{cases} \\ &= \begin{cases}p(2-p)(1-p)^x & , \quad \text{x زوج} \\ 0 & , \quad \text{x فرد}\end{cases}\end{aligned}$$

سوال ۴) الف)

$$
\begin{aligned}
\Pr\{Y \geq 3\} &= \int_3^\infty f_Y(y)dy \\
&= \int_3^\infty \sum_{x=1}^{6} f_{X,Y}(x,y)dy \\
&= \int_3^\infty \sum_{x=1}^{6} f_x(x) f_{Y|X}(x,y)dy \\
&= \int_3^\infty \sum_{x=1}^{6} \frac{1}{6} f_{Y|X}(x,y)dy \\
&= \frac{1}{6}\int_3^\infty f_{Y|X}(1,y)dy \\
&+ \frac{1}{6}\int_3^\infty f_{Y|X}(2,y)dy \\
&+ \frac{1}{6}\int_3^\infty f_{Y|X}(3,y)dy \\
&+ \frac{1}{6}\int_3^\infty f_{Y|X}(4,y)dy \\
&+ \frac{1}{6}\int_3^\infty f_{Y|X}(5,y)dy \\
&+ \frac{1}{6}\int_3^\infty f_{Y|X}(6,y)dy \\
&= \frac{1}{6}(\frac{1}{4} + \frac{2}{5} + \frac{3}{6}) \\
&= \frac{23}{120}
\end{aligned}
$$

ب)

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \sum_x f_{X,Y}(x,y) \\
&= \sum_x f_x(x) f_{Y|X}(x,y) \\
&= \frac{1}{6}\sum_{x=1}^{6} f_{Y|X}(x,y) \\
&= \frac{1}{6}\times\begin{cases}
1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6} & , \quad 0<y<1 \\
\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6} & , \quad 1<y<2 \\
\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6} & , \quad 2<y<3 \\
\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6} & , \quad 3<y<4 \\
\frac{1}{5}+\frac{1}{6} & , \quad 4<y<5 \\
\frac{1}{6} & , \quad 5<y<6
\end{cases} \\
&= \begin{cases}
\frac{49}{120} & , \quad 0<y<1 \\
\frac{29}{120} & , \quad 1<y<2 \\
\frac{19}{120} & , \quad 2<y<3 \\
\frac{37}{360} & , \quad 3<y<4 \\
\frac{11}{180} & , \quad 4<y<5 \\
\frac{1}{36} & , \quad 5<y<6
\end{cases}
\end{aligned}
$$

بنابراین

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\{Y\} &= \int_0^6 y f_Y(y)dy \\
&= \cdots (!!!) \\
&= 1.75
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\{Y^2\} &= \int_0^6 y^2 f_Y(y)dy \\
&= \cdots (!!!) \\
&\approx 5.06
\end{aligned}
$$

بنابراین

$$
\mathrm{var}(Y) \approx 2
$$

پاسخ سوال ۵۵)

ابتدا باید $f_X(x|X\geq 1)$ را محاسبه کنیم. برای این منظور داریم:

$$\begin{aligned}\Pr\{X\leq x|X\geq 1\} &= \frac{\Pr\{1\leq X\leq x\}}{\Pr\{X\geq 1\}}\\ &= \frac{\Pr\{1\leq X\leq x\}}{\Pr\{X=1\}}\\ &= \frac{\Pr\{1\leq X\leq x\}}{\frac{1}{2}}\\ &= \begin{cases}1 & , \quad x\geq 1\\ 0 & , \quad x<1\end{cases}\end{aligned}$$

در این صورت

$$f_X(x|X\geq 1)=\delta(x-1)$$

و خواهیم داشت

$$\begin{aligned}E\{X|X\geq 1\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x|X\geq 1)dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x\delta(x-1)dx = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E\{X^2|X\geq 1\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x|X\geq 1)dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2\delta(x-1)dx = 1\end{aligned}$$

بنابراین

$$E\{X|X\geq 1\}=1 \quad , \quad \sigma^2(X|X\geq 1)=E\{X^2|X\geq 1\}-E^2\{X|X\geq 1\}=0$$

برای چگالی احتمال زیر، مقادیر $\mathbb{E}\{X|X>1\}$ و $\sigma_X^2(X|X>1)$ برای محاسبه‌ی $f(x|X\neq 1)$ داریم

$$\begin{aligned}
\Pr\{X\leq x|X\neq 1\} &= \frac{\Pr\{X\leq x, X\neq 1\}}{\Pr\{X\neq 1\}}\\
&= \frac{\Pr\{X\leq x, X\neq 1\}}{\frac{1}{2}}\\
&= \begin{cases}\frac{\Pr\{X<1\}}{\frac{1}{2}} & , \quad x\geq 1\\ \frac{\Pr\{X\leq x\}}{\frac{1}{2}} & , \quad x<1\end{cases}\\
&= \begin{cases}1 & , \quad x\geq 1\\ 3x^2-2x^3 & , \quad 0\leq x<1\\ 0 & , \quad x<0\end{cases}
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$f_X(x|X\neq 1) = \begin{cases}6x-6x^2 & , \quad 0<x<1\\ 0 & , \quad \text{سایر جاها}\end{cases}$$

در نهایت، برای محاسبه‌ی $f(x|X<\frac{1}{2})$ چنین می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}
\Pr\{X\leq x|X<\frac{1}{2}\} &= \frac{\Pr\{X\leq x, X<\frac{1}{2}\}}{\Pr\{X<\frac{1}{2}\}}\\
&= \begin{cases}\frac{\Pr\{X<\frac{1}{2}\}}{\Pr\{X<\frac{1}{2}\}} & , \quad x\geq \frac{1}{2}\\ \frac{\Pr\{X\leq x\}}{\Pr\{X<\frac{1}{2}\}} & , \quad x<\frac{1}{2}\end{cases}\\
&= \begin{cases}1 & , \quad x\geq \frac{1}{2}\\ 6x^2-4x^3 & , \quad 0\leq x<\frac{1}{2}\\ 0 & , \quad x<0\end{cases}
\end{aligned}$$

پس:

$$f_X(x|X<\frac{1}{2}) = \begin{cases}12x-12x^2 & , \quad 0<x<\frac{1}{2}\\ 0 & , \quad \text{سایر جاها}\end{cases}.$$

پاسخ سوال ۵۶)

الف)

$$
\begin{aligned}
\Pr\{\max\{X,Y\} \leq u | X \leq \frac{1}{2}\} &= \Pr\{X \leq u, Y \leq u | X \leq \frac{1}{2}\} \\
&= \frac{\Pr\{X \leq u, Y \leq u, X \leq \frac{1}{2}\}}{\Pr\{X \leq \frac{1}{2}\}} \\
&= \begin{cases} \frac{\Pr\{Y \leq u, X \leq \frac{1}{2}\}}{\Pr\{X \leq \frac{1}{2}\}} &, \quad u \geq \frac{1}{2} \\ \frac{\Pr\{X \leq u, Y \leq u\}}{\Pr\{X \leq \frac{1}{2}\}} &, \quad u < \frac{1}{2} \end{cases}
\end{aligned}
$$

از طرفی

$$
\begin{aligned}
\Pr\{X \leq \frac{1}{2}\} &= \int_{x^2+y^2 \leq 1, x \leq \frac{1}{2}} \frac{1}{\pi} dxdy \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{x^2+y^2 \leq 1, x \leq \frac{1}{2}} dxdy \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4\pi} + \frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

همچنین

$$
\begin{aligned}
\Pr\{X \leq \frac{1}{2}, Y \leq u\} &= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\min\{\sqrt{1-x^2}, u\}} \frac{1}{\pi} dydx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{x \in (-1, \frac{1}{2}), u \geq -\sqrt{1-x^2}} \min\{\sqrt{1-x^2}, u\} + \sqrt{1-x^2} dx \\
&= C_1 + \frac{1}{\pi} \int_{x \in (-1, \frac{1}{2}), u \geq -\sqrt{1-x^2}} \min\{\sqrt{1-x^2}, u\} dx
\end{aligned}
$$

که در رابطه بالا، $C_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} dx$ (تعیین مقدار دقیق آن اهمیت ندارد؛ زیرا همانطور که بعدا دیده می‌شود، در مشتق گیری حذف خواهد شد.)

با مشتق گیری خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}\Pr\{X \le \frac{1}{2}, Y \le u\} &= \frac{1}{\pi}\int_{x\in(-1,\frac{1}{2}),-\sqrt{1-x^2}\le u\le\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \begin{cases}\frac{1}{\pi}\int_{x\in(-1,\frac{1}{2}),-\sqrt{1-x^2}\le u} dx & , \quad u \le 0 \\ \frac{1}{\pi}\int_{x\in(-1,\frac{1}{2}),u\le\sqrt{1-x^2}} dx & , \quad u \ge 0\end{cases} \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{x\in(-1,\frac{1}{2}),-\sqrt{1-u^2}<x<\sqrt{1-u^2}} dx \\ &= \frac{1}{\pi}\min\left\{\sqrt{1-u^2}, \frac{1}{2}\right\} + \frac{1}{\pi}\min\{\sqrt{1-u^2}, 1\}\end{aligned}$$

به طریق مشابه

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}\Pr\{X \le u, Y \le u\} &= \frac{1}{\pi}\int_{x\in(-1,u),-\sqrt{1-x^2}\le u\le\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \begin{cases}\frac{1}{\pi}\int_{x\in(-1,u),-\sqrt{1-x^2}\le u} dx & , \quad u \le 0 \\ \frac{1}{\pi}\int_{x\in(-1,u),u\le\sqrt{1-x^2}} dx & , \quad u \ge 0\end{cases} \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{x\in(-1,u),-\sqrt{1-u^2}<x<\sqrt{1-u^2}} dx \\ &= \frac{1}{\pi}\min\left\{\sqrt{1-u^2}, u\right\} + \frac{1}{\pi}\min\{\sqrt{1-u^2}, 1\}\end{aligned}$$

بنابراین

$$f_{\max\{X,Y\}}(u|X \le \frac{1}{2}) = \begin{cases}\frac{1}{\pi}\min\left\{\sqrt{1-u^2}, \frac{1}{2}\right\} & \\ +\frac{1}{\pi}\min\left\{\sqrt{1-u^2}, u\right\} & \\ +\frac{2}{\pi}\min\{\sqrt{1-u^2}, 1\} & , \quad |u| \le 1 \\ 0 & , \quad |u| > 1\end{cases}$$

ب)

$$\Pr\{\sqrt{X^2+Y^2} \le u | X+Y \le 1\} = \frac{\Pr\{\sqrt{X^2+Y^2} \le u, X+Y \le 1\}}{\Pr\{X+Y \le 1\}}$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{4}+\frac{1}{2\pi}} \Pr\{\sqrt{X^2+Y^2} \le u, X+Y \le 1\}$$

$$= \begin{cases} 1 & , \quad u \ge 1 \\ \frac{1}{\frac{3}{4}+\frac{1}{2\pi}} \left[(1-\frac{1}{\pi}\cos^{-1}\frac{1}{u\sqrt{2}})u^2 + \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{u^2}{2}-\frac{1}{4}} \right] & , \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \le u < 1 \\ \frac{u^2}{\frac{3}{4}+\frac{1}{2\pi}} & , \quad 0 \le u < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & , \quad u \le 0 \end{cases}$$

درنتیجه

$$f_{\sqrt{X^2+Y^2}|X+Y\le 1}(u) = \begin{cases} \frac{2u}{\frac{3}{4}+\frac{1}{2\pi}}(1-\frac{1}{\pi}\cos^{-1}\frac{1}{u\sqrt{2}}) & , \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \le u < 1 \\ \frac{2u}{\frac{3}{4}+\frac{1}{2\pi}} & , \quad 0 \le u < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

درنتیجه

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\sqrt{X^2+Y^2}|X+Y \le 1\} &= \int_0^1 u f_{\sqrt{X^2+Y^2}|X+Y\le 1}(u) du \\ &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{2u^2}{\frac{3}{4}+\frac{1}{2\pi}} du \\ &+ \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{2u^2}{\frac{3}{4}+\frac{1}{2\pi}}(1-\frac{1}{\pi}\cos^{-1}\frac{1}{u\sqrt{2}}) du \\ &= \int_0^1 \frac{2u^2}{\frac{3}{4}+\frac{1}{2\pi}} du \\ &- \frac{2}{\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 u^2 \cos^{-1}\frac{1}{u\sqrt{2}} du \\ &= \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{9\pi+6}\ln(1+\sqrt{2}) \end{aligned}$$

پاسخ سوال ۵۷)

الف)

$$\begin{aligned}\Pr\{Y \leq 0|X=1\} &= \int_{-\infty}^{0} f(y|X=1)dy \\ &= \int_{-\infty}^{0} \frac{a}{2}\exp(-a|y-1|)dy \\ &= \int_{-\infty}^{0} \frac{a}{2}\exp(a(y-1))dy = \frac{e^{-a}}{2}\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\Pr\{Y \geq 0|X=-1\} &= \int_{-\infty}^{0} f(y|X=1)dy \\ &= \int_{0}^{\infty} \frac{a}{2}\exp(-a|y+1|)dy \\ &= \int_{0}^{\infty} \frac{a}{2}\exp(-a(y+1))dy = \frac{e^{-a}}{2}\end{aligned}$$

مشاهده می شود که هر دو احتمال، با افزایش مقدار a افت می‌کنند.

ب) صورت سوال، یک مسئله‌ی مخابراتی را نشان می دهد که در آن، مقادیر -1 و 1 روی کانال ارسال می‌شوند و نویزی با چگالی احتمال نمایی دوطرفه، با سیگنال ارسالی جمع می‌شود. هر چه a بیشتر باشد، واریانس (توان) نویز کاهش می‌یابد و انتظار می‌رود که احتمال خطا در آشکارسازی سمبلهای ارسالی در گیرنده نیز کاهش یابد. این امر، با محاسبه‌ی احتمالهای $\Pr\{Y \leq 0|X=1\}$ و $\Pr\{Y \geq 0|X=-1\}$ تحقیق شد.

فصل ۶

دنباله‌ی متغیرهای تصادفی