

به نام خدا
تمرینات سری سوم درس آمار و احتمال
مهلت تحویل : ۲ آبان ماه ۹۸

سوال (۱) (امتیازی)

الف) قضیه‌ی دموآو-لاپلاس در چه حالتی برای تکرر توزیع برنولی به تعداد n بار برقرار است؟
ب) توزیع دوجمله‌ای را با پارامترهای $n = 1000$ و $p = 0.5$ در نظر بگیرید. به کمک ماشین حساب یا کامپیوتر، خطای نسبی تقریب قضیه‌ی دموآو-لاپلاس را برای $k = 1, 300, 490$ محاسبه کنید.
سوال (۲)

از یک جعبه که دارای M گلوله‌ی سفید و $N - M$ گلوله‌ی سیاه است، n گلوله برداشته می‌شود.
الف) احتمال آنکه m گلوله از گلوله‌های برداشته شده سفید باشند در حالت با جایگذاری چقدر است؟
ب) احتمال آنکه m گلوله از گلوله‌های برداشته شده سفید باشند در حالت بدون جایگذاری چقدر است؟
ج) اگر بدانیم تمام گلوله‌های سفید برداشته شده اند، احتمال آنکه دقیقاً ۲ گلوله‌ی سیاه نیز برداشته شده باشند چقدر است؟

سوال (۳) (قدم زدن تصادفی)

فردی از نقطه‌ی صفر روی محور اعداد حقیقی با احتمال p یک متر به سمت راست و با احتمال $1 - p$ یک متر به سمت چپ می‌رود. اگر این فرد این نوع قدم زدن را n بار و هربار از روی نقطه‌ای که روی آن ایستاده تکرار کند، با چه احتمالی پس از k بار قدم زدن به مبدا باز می‌گردد؟
سوال (۴)

از مجموعه‌ی $S = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ دو زیر مجموعه به تصادف و به طور مستقل بر می‌گزینیم به گونه‌ای که احتمال آن که هر عضو S داخل هر یکی از زیر مجموعه‌ها باشد، مستقل از دیگر اعضا برابر p است. با چه احتمالی این دو زیرمجموعه ناسازگار هستند؟

سوال (۵)

دو تیم ورزشی A و B در یک بازی در ۹ دست با هم روبرو می‌شوند و نتیجه‌ی هر دست فقط برد یکی از دو تیم می‌تواند باشد. فرض کنید تیم A با احتمال p در هر دست پیروز می‌شود و نتیجه‌ی دست‌ها مستقل از هم است. برنده‌ی بازی کسی است که بیشتر بازی‌ها را برده باشد.
الف) با چه احتمالی تیم A پس از ۶ بازی موفق به بردن بازی می‌شود؟
ب) اگر بدانیم تیم A در نهایت بازی را برده است، با چه احتمالی در حداقل یک دست به تیم B باخته است؟

ج) به ازای $p = 0.5$ ، اگر بدانیم تیم A دست اول را برده، با چه احتمالی بازی را می‌برد؟

سوال (۶)

در یک امتحان، احتمال درست پاسخ دادن به یک سوال دو گزینه‌ای برابر p است. پس از امتحان، n دانشجو پاسخ‌های خود را با هم مقایسه می‌کنند و متوجه می‌شوند که همگی به آن سوال پاسخ یکسانی داده‌اند. با چه احتمالی تمام این n دانشجوها به پاسخ درست رسیده‌اند؟