

سوال ۱) دو کیسه در اختیار داریم. کیسه اول شامل ۲۰ گلوله قرمز و ۳۰ گلوله آبی و دومی شامل ۲۰ گلوله زرد، ۳۰ گلوله آبی و ۵۰ گلوله قرمز است. ابتدا یکی از کیسه ها را به تصادف انتخاب کرده و سپس گلوله‌ای را از داخل آن به تصادف بر می داریم. با چه احتمالی گلوله انتخاب شده قرمز و از کیسه‌ی ۲ است؟

سوال ۲) تاس سالمی را ۳ بار پرتاب می کنیم و اعداد رو آمده در سه پرتاب را در نظر می گیریم. احتمال آن که جمع اعداد رو آمده برابر ۵ باشد چقدر است؟

سوال ۳) برای تابع چگالی احتمال داده شده‌ی زیر:

$$f_X(x) = \begin{cases} k\delta(x+1) & , \quad x = -1 \\ x - x^2 & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

الف) مقدار k را بیابید.

ب) تابع توزیع تجمعی را بیابید.

پ) مقدار احتمال $\Pr\{X^2 \leq 4\}$ را به دست آورید.

سوال ۱) دو کیسه در اختیار داریم. کیسه اول شامل ۲۰ گلوله قرمز و ۳۰ گلوله آبی و دومی شامل ۲۰ گلوله زرد، ۳۰ گلوله آبی و ۵۰ گلوله قرمز است. ابتدا یکی از کیسه ها را به تصادف انتخاب کرده و سپس گلوله‌ای را از داخل آن به تصادف بر می داریم. اگر گلوله از کیسه ۱ انتخاب شده باشد، با چه احتمالی آبی است؟

سوال ۲) تاس سالمی را ۳ بار پرتاب می کنیم و اعداد رو آمده در سه پرتاب را در نظر می گیریم. اگر عدد رو آمده‌ی اول برابر ۴ باشد، احتمال آن که جمع اعداد پرتاب ها برابر ۷ باشد چقدر است؟

سوال ۳) برای تابع چگالی احتمال داده شده‌ی زیر:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\delta(x) & , \quad x = 0 \\ \frac{3}{44}\sqrt{x-1} & , \quad 1 \leq x \leq k \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

الف) مقدار k را بیابید.

ب) تابع توزیع تجمعی را بیابید.

پ) مقدار احتمال $\Pr\{X^2 \leq 4\}$ را به دست آورید.

سوال ۱) دو کیسه در اختیار داریم. کیسه اول شامل ۲۰ گلوله قرمز و ۳۰ گلوله آبی و دومی شامل ۲۰ گلوله زرد، ۳۰ گلوله آبی و ۵۰ گلوله قرمز است. ابتدا یکی از کیسه ها را به تصادف انتخاب کرده و سپس گلوله‌ای را از داخل آن به تصادف بر می داریم. اگر گلوله زرد نباشد با چه احتمالی قرمز است؟

سوال ۲) تاس سالمی را ۳ بار پرتاب می کنیم و اعداد رو آمده در سه پرتاب را در نظر می گیریم. احتمال آن که جمع اعداد تاس در پرتاب های فرد، برابر ۵ باشد چقدر است؟

سوال ۳) برای تابع چگالی احتمال داده شده ی زیر:

$$f_X(x) = \begin{cases} k\delta(x+1) & , \quad x = -1 \\ \frac{1}{4}e^{-x+1} & , \quad x \geq 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

الف) مقدار k را بیابید.

ب) تابع توزیع تجمعی را بیابید.

پ) مقدار احتمال $\Pr\{X^2 \leq 4\}$ را به دست آورید.

سوال ۱) دو کیسه در اختیار داریم. کیسه اول شامل ۲۰ گلوله قرمز و ۳۰ گلوله آبی و دومی شامل ۲۰ گلوله زرد، ۳۰ گلوله آبی و ۵۰ گلوله قرمز است. ابتدا یکی از کیسه ها را به تصادف انتخاب کرده و سپس گلوله‌ای را از داخل آن به تصادف بر می داریم. اگر گلوله آبی نباشد، با چه احتمالی از کیسه ی ۲ انتخاب شده است؟

سوال ۲) تاس سالمی را ۴ بار پرتاب می کنیم و اعداد رو آمده در چهار پرتاب را در نظر می گیریم. اگر در دو پرتاب این تاس عدد ۲ ظاهر شده باشد، احتمال آنکه در دو پرتاب دیگر عدد فردی ظاهر شده باشد چقدر است؟

سوال ۳) برای تابع چگالی احتمال داده شده ی زیر:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \delta(x + 3) & , \quad x = -3 \\ \frac{1}{\pi} \sin x & , \quad 0 \leq x \leq k \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

الف) مقدار k را بیابید.

ب) تابع توزیع تجمعی را بیابید.

پ) مقدار احتمال $\Pr\{X^2 \leq 4\}$ را به دست آورید.

سوال ۱)

دو کیسه در اختیار داریم. کیسه اول شامل ۲۰ گلوله قرمز و ۳۰ گلوله آبی و دومی شامل ۲۰ گلوله زرد، ۳۰ گلوله آبی و ۵۰ گلوله قرمز است. ابتدا یکی از کیسه ها را به تصادف انتخاب کرده و سپس گلوله ای را از داخل آن به تصادف بر می داریم. اگر گلوله قرمز یا زرد نباشد، با چه احتمالی از کیسه ۲ انتخاب شده است؟

سوال ۲) تاس سالمی را ۴ بار پرتاب می کنیم و اعداد رو آمده در چهار پرتاب را در نظر می گیریم. با چه احتمالی، جمع اعداد در پرتاب های زوج، ۵ برابر جمع اعداد در پرتاب های فرد است؟

سوال ۳) برای تابع چگالی احتمال داده شده ی زیر:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \delta(x + 1) & , \quad x = -1 \\ \frac{1}{x^2} & , \quad x \geq k \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

الف) مقدار k را بیابید.

ب) تابع توزیع تجمعی را بیابید.

پ) مقدار احتمال $\Pr\{X^2 \leq 4\}$ را به دست آورید.

سوال ۱) تابع چگالی احتمال توام دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر است:

$$f(x, y) = \begin{cases} k(4 - x - y) & , \quad 1 < x < 2, \quad 0 < y < 2 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

الف) مقدار مناسب k را بیابید.

ب) با مقدار k به دست آمده در قسمت قبل، مقدار $\mathbb{E}\{XY\}$ را به دست آورید.

سوال ۲) فرض کنید دنباله‌ی متغیرهای تصادفی $\{X_n\}$ ، از توزیع یکنواخت بین $-\frac{1}{\sqrt{n}}$ و $\frac{1}{\sqrt{n}}$ و به طور مستقل پیروی می‌کند. به کمک قضیه‌ی حد مرکزی، توزیع متغیر تصادفی Y را به دست آورید که

$$Y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}$$

و میانگین و واریانس آن را بیابید.

سوال ۳) فرض کنید متغیر تصادفی X ، یکنواخت در بازه‌ی $[0, 1]$ است. متغیر تصادفی Y را به صورت $Y = g(X)$ می‌سازیم. تابع g را به گونه‌ای تعیین کنید که Y :

الف) یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر ۱ باشد؛ یعنی

$$f(y) = \begin{cases} e^{-y} & , \quad y > 0 \\ 0 & , \quad y \leq 0 \end{cases}$$

ب) یک متغیر تصادفی کوشی با پارامتر π باشد؛ یعنی

$$f(y) = \frac{1}{y^2 + \pi^2} \quad , \quad y \in \mathbb{R}$$

سوال ۴) تابع چگالی احتمال توام دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر است:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & , \quad |x| + 2|y| < 1 \\ 0 & , \quad |x| + 2|y| \geq 1 \end{cases}$$

الف) چگالی های احتمال حاشیه ای X و Y را به دست آورید. همچنین ناهمبستگی، استقلال و تعامد این دو متغیر تصادفی را تحقیق کنید.

ب) چگالی احتمال $X + Y$ را به دست آورید.

سوال ۵) یک قطار و اتوبوس به طور تصادفی و مستقل از هم بین ساعات ۵ تا ۶ وارد یک ایستگاه می شوند. فردی نیز به طور تصادفی بین ساعت ۵ تا ۳۰ : ۵ وارد همان ایستگاه می شود.

الف) احتمال آن که فرد بیش از ۱۰ دقیقه منتظر قطار و اتوبوس شود چقدر است؟

ب) اگر قطار و اتوبوس هر یک ۱۰ دقیقه در ایستگاه تاخیر داشته باشند، احتمال با هم بودن آنها در ایستگاه چقدر است؟

پ) اگر فرد پس از ساعت ۱۵ : ۵ به ایستگاه برسد، با چه احتمالی به هیچ یک نمی رسد؟

سوال ۶) متغیر تصادفی و گسسته N دارای چگالی احتمال زیر است:

$$f(n) = \begin{cases} n \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} & , \quad n \in \mathbb{N} \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

الف) تابع مولد گشتاور آن را به دست آورید.

ب) از روی تابع مولد گشتاور، مقادیر میانگین و واریانس این متغیر تصادفی را محاسبه کنید.

(راهنمایی:

$$\sum_{n=1}^{\infty} na^n = \frac{a}{(1-a)^2} \quad , \quad |a| < 1$$

)

سوال ۷) اگر X و Y ، دو متغیر تصادفی نرمال با میانگین ۰ و واریانس ۱ باشند به گونه ای که $\text{cov}(X, Y) = 0.5$ ، در این صورت مقدار a را به گونه ای بیابید که $X + aY$ و $X + 2Y$ مستقل از هم باشند و در این صورت، واریانس هر یک را بیابید.

سوال ۸) تاس سالمی را ۹ بار پرتاب می کنیم. اگر متغیر تصادفی X ، تعداد اعداد زوج رو آمده به شرط دانستن این باشد که در سه پرتاب اول، حداقل یک عدد فرد آمده است،

الف) چگالی احتمال X را محاسبه کنید.

ب) اگر متغیر تصادفی Y ، تعداد اعداد اول رو آمده باشد، مقدار $\Pr\{X = x|Y = \circ\}$ چقدر است؟

(سوال ۹)

الف) تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی پواسون با پارامتر λ را به دست آورید.

ب) اگر دنباله‌ی متغیرهای تصادفی مستقل $\{X_n\}$ ، از نوع پواسون با پارامتر λ باشد، نشان دهید متغیر تصادفی

$$Y = \sum_{i=1}^N X_i$$

، پواسون با پارامتر $N\lambda$ است.

پ) نشان دهید اگر دنباله‌ی متغیرهای تصادفی مستقل $\{X_n\}$ ، برنولی با پارامتر p و N از نوع پواسون با پارامتر λ باشد، متغیر تصادفی

$$Y = \sum_{n=\circ}^{N-1} X_n$$

دارای توزیع پواسون با پارامتر λp است.

(سوال ۱۰) نشان دهید دنباله‌ی متغیرهای تصادفی $X_n = X + \frac{1}{n}$ که n عدد طبیعی و X دارای توزیع یکنواخت بین \circ و 1 است، در احتمال به X میل می کند.

(سوال ۱۱) فرض کنید برای یک متغیر تصادفی با چگالی توزیع $f(x)$ داشته باشیم

$$\exists a \in \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = f(a - x)$$

نشان دهید میانگین و میانه‌ی این متغیر تصادفی برابر a است.

(سوال ۱) تابع چگالی احتمال توام دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر است:

$$f(x, y) = \begin{cases} k(4 - x - y) & , \quad 1 < x < 2 \quad , \quad \circ < y < 2 \\ \circ & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

الف) مقدار مناسب k را بیابید.

ب) با مقدار k به دست آمده در قسمت قبل، مقدار $\mathbb{E}\{XY\}$ را به دست آورید.

سوال ۲) فرض کنید دنباله‌ی متغیرهای تصادفی $\{X_n\}$ ، از توزیع یکنواخت بین $-\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{4}$ و به طور مستقل پیروی می‌کند. به کمک قضیه‌ی حد مرکزی، توزیع متغیر تصادفی Y را به دست آورید که

$$Y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}$$

و میانگین و واریانس آن را بیابید.

سوال ۳) فرض کنید متغیر تصادفی X ، یکنواخت در بازه‌ی $[0, 1]$ است. متغیر تصادفی Y را به صورت $Y = g(X)$ می‌سازیم. تابع g را به گونه‌ای تعیین کنید که Y :

الف) یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر ۱ باشد؛ یعنی

$$f(y) = \begin{cases} e^{-y} & , \quad y > 0 \\ 0 & , \quad y \leq 0 \end{cases}$$

ب) یک متغیر تصادفی کوشی با پارامتر π باشد؛ یعنی

$$f(y) = \frac{1}{y^2 + \pi^2} \quad , \quad y \in \mathbb{R}$$

سوال ۴) تابع چگالی احتمال توام دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر است:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & , \quad |x| + 2|y| < 1 \\ 0 & , \quad |x| + 2|y| \geq 1 \end{cases}$$

الف) چگالی‌های احتمال حاشیه‌ی X و Y را به دست آورید. همچنین ناهمبستگی، استقلال و تعامد این دو متغیر تصادفی را تحقیق کنید.

ب) چگالی احتمال $X + Y$ را به دست آورید.

سوال ۵) یک قطار و اتوبوس به طور تصادفی و مستقل از هم بین ساعات ۵ تا ۶ وارد یک ایستگاه می‌شوند. فردی نیز به طور تصادفی بین ساعت ۵ تا ۳۰ : ۵ وارد همان ایستگاه می‌شود.

الف) احتمال آن که فرد بیش از ۱۰ دقیقه منتظر قطار و اتوبوس شود چقدر است؟

ب) اگر قطار واتوبوس هر یک ۱۰ دقیقه در ایستگاه تاخیر داشته باشند، احتمال با هم بودن آنها در ایستگاه چقدر است؟

پ) اگر فرد پس از ساعت ۱۵ : ۵ به ایستگاه برسد، با چه احتمالی به هیچ یک نمی رسد؟

سوال ۶) متغیر تصادفی و گسسته ی N دارای چگالی احتمال زیر است:

$$f(n) = \begin{cases} n \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} & , \quad n \in \mathbb{N} \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

الف) تابع مولد گشتاور آن را به دست آورید.

ب) از روی تابع مولد گشتاور، مقادیر میانگین و واریانس این متغیر تصادفی را محاسبه کنید.

(راهنمایی:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a^n = \frac{a}{(1-a)^2} \quad , \quad |a| < 1$$

)

سوال ۷) اگر X و Y ، دو متغیر تصادفی نرمال با میانگین ۰ و واریانس ۱ باشند به گونه ای که $\text{cov}(X, Y) = 0.5$ ، در این صورت مقدار a را به گونه ای بیابید که $X + aY$ و $X + 2Y$ مستقل از هم باشند و در این صورت، واریانس هر یک را بیابید.

سوال ۸) تاس سالمی را ۹ بار پرتاب می کنیم. اگر متغیر تصادفی X ، تعداد اعداد زوج رو آمده به شرط دانستن این باشد که در سه پرتاب اول، حداقل یک عدد فرد آمده است،

الف) چگالی احتمال X را محاسبه کنید.

ب) اگر متغیر تصادفی Y ، تعداد اعداد اول رو آمده باشد، مقدار $\Pr\{X = x | Y = 0\}$ چقدر است؟

سوال ۹)

الف) تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی پواسون با پارامتر λ را به دست آورید.

ب) اگر دنباله ی متغیرهای تصادفی مستقل $\{X_n\}$ ، از نوع پواسون با پارامتر λ باشد، نشان دهید

متغیر تصادفی

$$Y = \sum_{i=1}^N X_i$$

، بواسون با پارامتر $N\lambda$ است.

پ) نشان دهید اگر دنباله‌ی متغیرهای تصادفی مستقل $\{X_n\}$ ، برنولی با پارامتر p و N از نوع بواسون با پارامتر λ باشد، متغیر تصادفی

$$Y = \sum_{n=0}^{N-1} X_n$$

دارای توزیع بواسون با پارامتر λp است.

سوال ۱۰) نشان دهید دنباله‌ی متغیرهای تصادفی $X_n = X + \frac{1}{n}$ که n عدد طبیعی و X دارای توزیع یکنواخت بین ۰ و ۱ است، در احتمال به X میل می کند.

سوال ۱۱) فرض کنید برای یک متغیر تصادفی با چگالی توزیع $f(x)$ داشته باشیم

$$\exists a \in \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = f(a - x)$$

نشان دهید میانگین و میانه‌ی این متغیر تصادفی برابر a است.

سوال ۱) استانی دارای دو شهر است. شهر ۱ دارای ۱۲۰ مرد و ۸۰ زن و شهر ۲ دارای ۱۰۰۰ زن و ۸۰۰ مرد است. در شهر ۱، ۵۰ مرد و ۳۰ زن و در شهر ۲، ۱۰۰ مرد و ۱۵۰ زن به بیماری X مبتلا هستند. فردی را از این استان به تصادف انتخاب می کنیم.

الف) با چه احتمالی این فرد، زن سالمی از شهر ۱ است؟

ب) اگر فردی که انتخاب می کنیم بیمار باشد، با چه احتمالی مردی از شهر ۲ است؟

سوال ۲) یک قطار و اتوبوس به طور تصادفی و مستقل از هم بین ساعات ۶ تا ۷ صبح وارد ایستگاهی می شوند. فردی نیز به طور تصادفی بین ساعات ۵:۵۰ تا ۶:۵۰ وارد همان ایستگاه می شود.

الف) احتمال اینکه فرد بیش از ۱۰ دقیقه منتظر قطار و یا اتوبوس بماند چقدر است؟

ب) احتمال اینکه این فرد به هیچ یک از قطار یا اتوبوس نرسد چقدر است؟

سوال ۳) متغیر تصادفی X با تابع توزیع تجمعی زیر داده شده است:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x+1}{2}e^{-x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

در این صورت

الف) تابع مولد گشتاور آن را به دست آورید.

ب) میانگین و واریانس این متغیر تصادفی را بیابید.

سوال ۴) سکه ای را ۱۰ بار پرتاب می کنیم. متغیر تصادفی X برابر تعداد دفعات رو آمدن در پرتاب های دوم و چهارم و متغیر تصادفی Y برابر تعداد دفعات پشت آمدن در ۲ پرتاب اول است.

الف) چگالی احتمال شرطی $f_{X|Y}(X = x|Y = y)$ را به دست آورید (می توانید از روش جدول نویسی برای چگالی احتمال استفاده کنید که سطر جدول $X = x$ و ستون جدول $Y = y$ است).

ب) مقدار $E\{XY\}$ را بیابید.

سوال ۵) تابع چگالی احتمال توأم دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر است:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k & , \quad x-1 < y < x, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < y < 1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که k ثابت است.

الف) مقدار k را به دست آورید.

ب) نشان دهید Y و $X - Y$ از هم مستقل هستند.

سوال ۱) یک سکه سالم را برداشته، آن را سه بار پرتاب می کنیم و نتیجه ی سه بار پرتاب را در نظر می گیریم. اگر رو آمدن سکه را با H و پشت آمدن را با T نمایش دهیم:

الف) فضای نمونه را بیابید.

ب) این مسئله ی احتمال، چند واقعه ی محتمل دارد؟ (واقعه طبق تعریف یک زیر مجموعه از فضای نمونه است).

پ) طبق تعریف کلاسیک احتمال، واقعه ی اینکه در پرتاب اول و دوم سکه نتیجه یکسان باشد (در پرتاب سوم نتیجه دلخواه است)، با چه احتمالی رخ می دهد؟

سوال ۲) دو مجموعه ی $A = \{1, 4, 5\}$ و $B = \{2, 3, 4\}$ را در نظر بگیرید. مجموعه های زیر را به دست آورید.

الف) $A \cap B$

ب) $A - B$

پ) $A \times B$ (ضرب دکارتی)

ت) اگر $C = \{2, 5, 6\}$ ، با محاسبه ی مجموعه های $(A \cup B) \cap C$ و $(A \cap C) \cup (B \cap C)$ نشان دهید:

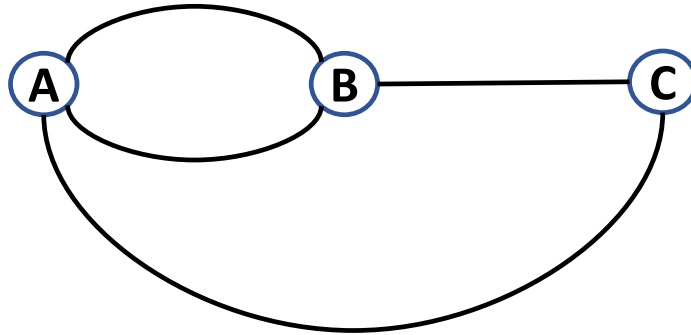
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

سوال ۳) به کمک تعریف اصولی احتمال (و با بهره گیری از اصول کولموگروف)، برای هر دو مجموعه ی A و B نتیجه بگیرید:

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$$

سوال ۱) در یک کیسه، ۵ گلوله‌ی آبی و ۳ گلوله‌ی سفید وجود دارد. دو عدد گلوله بر می‌داریم. احتمال این را که یکی از گلوله‌ها آبی و دیگری سفید باشد در حالت
 الف) با جایگذاری
 ب) بدون جایگذاری
 به دست آورید (جایگذاری حالتی است که گلوله‌ای را پس از بیرون آوردن از کیسه و مشاهده‌ی رنگ آن، به کیسه باز گردانیم).

سوال ۲) در نقشه‌ی زیر، از شهر A به شهر B دو مسیر و از B به C یا از A به C یک مسیر وجود دارد. اگر احتمال قطع شدن هر مسیر مستقل از سایرین برابر p باشد، احتمال آن که شخصی بتواند از شهر A به C برود چقدر است؟



سوال ۳) در مبحث مدولاسیون دیجیتال، می‌توان هر سمبل مخابراتی را با تعدادی بیت کد نموده و پس از شکل دهی پالس روی کانال ارسال کرد. فرض کنید یک سمبل مخابراتی از n بیت تشکیل شده باشد. به طور مثال

$$S_k \equiv (1010001101)_2$$

که k اندیس سمبل است و در اینجا سمبل از ۱۰ بیت تشکیل شده است. این سمبل از یک کانال مخابراتی ارسال و در انتهای کانال دریافت می‌شود. اگر احتمال خرابی هر بیت مستقل از سایرین برابر p باشد، با چه احتمالی سمبل به درستی آشکار نمی‌شود؟

سوال ۴) دو تاس را پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه دو عدد رو آمده نسبت به هم اول باشند چقدر است؟

سوال ۵) از یک مجموعه‌ی n عضوی، یک زیر مجموعه به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که این زیر مجموعه k عضوی باشد چقدر است؟

سوال ۶) به کمک سوال قبل ثابت کنید

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

سوال ۱) یک سکه‌ی سالم و یک تاس سالم را با هم پرتاب می‌کنیم.

الف) احتمال اینکه سکه به رو بیفتد و تاس عدد فرد شود را به دست آورید.

ب) احتمال اینکه سکه به رو بیفتد یا تاس عدد فرد شود را به دست آورید (هر دو باهم نیز می‌توانند رخ دهند!)

سوال ۲) یک تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر مضرب ۳ ظاهر شد، نتیجه را یادداشت می‌کنیم و در غیر این صورت سکه‌ای را می‌اندازیم و نتیجه‌ی سکه (پشت یا رو) را می‌نویسیم.

الف) فضای شدنی این مسئله را بیابید.

ب) با چه احتمالی واقعه‌ی رو آمدن سکه اتفاق می‌افتد؟

پ) احتمال واقعه‌ی اینکه تاس عدد ۱ بیاید یا سکه به پشت ظاهر شود را به دست آورید.

سوال ۳) نقطه‌ای را از داخل مربع زیر بر می‌گزینیم (طول ضلع مربع برابر ۲ است). احتمال اینکه:

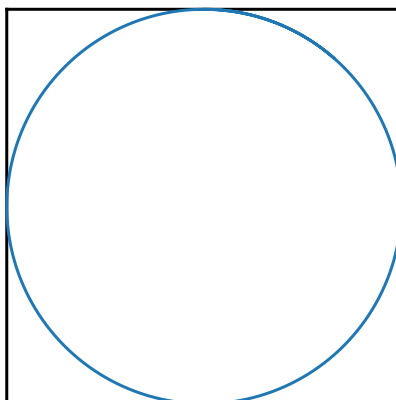
الف) نقطه، داخل دایره‌ی واحد (نشان داده شده در شکل) بیفتد چقدر است؟

ب) نقطه، روی یکی از دو قطر مربع بیفتد چقدر است؟

پ) فاصله‌ی نقطه از هریک از رأس‌های مربع بیش از $\frac{5}{8}$ باشد چقدر است؟

سوال ۴) از بین اعداد سه رقمی‌ای که با ترکیب رقم‌های ۰، ۱ و ۲ می‌توان ساخت (تکرار مجاز است):

الف) چند عدد به ۳ بخش پذیرند؟



ب) اگر عددی را به تصادف برگزینیم، با چه احتمالی زوج خواهد بود؟

سوال ۱) در یک جامعه‌ی آماری، نسبت جمعیت زنان بزرگسال، مردان بزرگسال و کودکان به کل جمعیت جامعه به ترتیب برابر $\frac{37}{100}$ ، $\frac{43}{100}$ و $\frac{2}{100}$ است. در این جامعه، $\frac{15}{100}$ مردان بزرگسال و $\frac{25}{100}$ زنان بزرگسال به نوعی بیماری مبتلا شده‌اند. فرد بزرگسالی را به تصادف از این جامعه انتخاب می‌کنیم، احتمال بیمار بودن او چقدر است؟

سوال ۲) فرض کنید مجموعه‌های B و C مستقل و دارای احتمال مثبت باشند. در چه حالتی داریم

$$P(A|B \cap C) = P(A|B)P(A|C)$$

؟

سوال ۳) (کران بالا و پایین برای احتمال اجتماع) برای هر دو مجموعه‌ی A و B ثابت کنید:

$$P(A) + P(B) - \frac{1}{4 \max\{1 - P(A), 1 - P(B)\}} \leq P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

سوال ۱۳) نشان دهید که اگر به ازای هر t_0 و t_1 مثبتی داشته باشیم

$$\Pr\{t_0 \leq t \leq t_0 + t_1 | t \geq t_0\} = \Pr\{t \leq t_1\}$$

آنگاه

$$\Pr\{t \leq t_1\} = 1 - e^{-ct_1}$$

سوال ۲۲) نشان دهید که برای استقلال n رخداد باید $1 - n - 2^n$ معادله برقرار باشد.

سوال ۲۴) جعبه‌ی ۱ حاوی ۱۰۰۰ لامپ است که ۱۰ درصد آنها خراب هستند. جعبه‌ی ۲ نیز حاوی ۲۰۰۰ لامپ است که ۵ درصد آنها خراب هستند. از یک جعبه که به طور تصادفی انتخاب شده، دو لامپ بیرون آورده می‌شوند.

الف) احتمال خرابی هر دو چقدر است؟

ب) اگر هر دو لامپ خراب باشند، با چه احتمالی جعبه‌ی ۱ انتخاب شده است؟

سوال ۲۵) یک قطار و یک اتوبوس بین ساعت ۹ و ۱۰ در زمانی تصادفی وارد ایستگاه می‌شوند. قطار ۱۰ دقیقه و اتوبوس x دقیقه توقف دارند. x را طوری تعیین کنید که احتمال با هم بودن قطار و اتوبوس برابر $5/10$ باشد.

سوال ۱) در یک کیسه، ۵ گلوله ی آبی و ۳ گلوله ی سفید وجود دارد. دو عدد گلوله بر می‌داریم. احتمال این را که یکی از گلوله‌ها آبی و دیگری سفید باشد در حالت

الف) با جایگذاری

ب) بدون جایگذاری

به دست آورید (جایگذاری حالتی است که گلوله‌ای را پس از بیرون آوردن از کیسه و مشاهده ی رنگ آن، به کیسه باز گردانیم).

سوال ۲) سکه‌ی سالمی را ۱۰ بار پرتاب می‌کنیم. مطلوبست احتمال آن که

الف) در این ۱۰ پرتاب، حداقل دوبار رو بیاید.

ب) در سه پرتاب اول حداکثر یک بار پشت بیاید.

پ) در پرتاب‌های زوج، نتیجه یکسان باشد (همگی رو یا همگی پشت باشند).

سوال ۳) در یک گل فروشی، ۱۰ گل لاله، ۵ نسترن، ۳ بنفشه و ۲ افاقیا وجود دارد. می‌خواهیم دسته گلی شامل ۵ گل که همگی به تصادف انتخاب شده باشند، برگزینیم. با چه احتمالی

الف) دسته گل شامل ۲ نسترن و ۲ بنفشه است؟

ب) دسته گل شامل هیچ گل لاله و بنفشه‌ای نیست؟

پ) دسته گل شامل حداقل یک گل از هر یک از ۴ نوع گل است؟
(دقت کنید گل های هر نوع با هم فرقی نمی کنند!)

(سوال ۴)

الف) از یک مجموعه ی n عضوی، یک زیر مجموعه به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال آن که این زیر مجموعه k عضوی باشد چقدر است؟
ب) به کمک قسمت قبل ثابت کنید:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

(سوال ۵)

الف) اگر یک رشته لامپ متوالی شامل n لامپ که هر لامپ به احتمال p خراب است، به ولتاژ برق وصل شود، با چه احتمالی روشن می شود؟ (در رشته متوالی لامپ ها، لامپ ها به صورت پشت سر هم به یکدیگر وصل شده اند)

ب) اگر رشته لامپ موازی باشد، مسئله را حل کنید. (در رشته ی موازی لامپ ها، یکی از سرهای همه ی لامپ ها به یک نقطه و سر دیگر تمام لامپ ها به نقطه ی دیگر وصل شده اند)

(سوال ۱) (امتیازی)

الف) قضیه ی دموآو-لاپلاس در چه حالتی برای تکرر توزیع برنولی به تعداد n بار برقرار است؟

ب) توزیع دوجمله ای را با پارامترهای $n = 1000$ و $p = 0.5$ در نظر بگیرید. به کمک ماشین حساب یا کامپیوتر، خطای نسبی تقریب قضیه ی دموآو-لاپلاس را برای $k = 1, 300, 490$ محاسبه کنید.

(سوال ۲)

از یک جعبه که دارای M گلوله ی سفید و $N - M$ گلوله ی سیاه است، n گلوله برداشته می شود.

الف) احتمال آنکه m گلوله از گلوله های برداشته شده سفید باشند در حالت با جایگذاری چقدر است؟

ب) احتمال آنکه m گلوله از گلوله های برداشته شده سفید باشند در حالت بدون جایگذاری چقدر است؟

ج) اگر بدانیم تمام گلوله های سفید برداشته شده اند، احتمال آنکه دقیقا ۲ گلوله ی سیاه نیز برداشته شده باشند چقدر است؟

سوال ۳) (قدم زدن تصادفی)

فردی از نقطه ی صفر روی محور اعداد حقیقی با احتمال p یک متر به سمت راست و با احتمال $1-p$ یک متر به سمت چپ می رود. اگر این فرد این نوع قدم زدن را n بار و هربار از روی نقطه ای که روی آن ایستاده تکرار کند، با چه احتمالی پس از k بار قدم زدن به مبدا باز می گردد؟

سوال ۴)

از مجموعه ی $S = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ دو زیر مجموعه به تصادف و به طور مستقل بر می گزینیم به گونه ای که احتمال آن که هر عضو S داخل هر یکی از زیر مجموعه ها باشد، مستقل از دیگر اعضا برابر p است. با چه احتمالی این دو زیر مجموعه ناسازگار هستند؟

سوال ۵)

دو تیم ورزشی A و B در یک بازی در ۹ دست با هم روبرو می شوند و نتیجه ی هر دست فقط برد یکی از دو تیم می تواند باشد. فرض کنید تیم A با احتمال p در هر دست پیروز می شود و نتیجه ی دست ها مستقل از هم است. برنده ی بازی کسی است که بیشتر بازی ها را برده باشد.

الف) با چه احتمالی تیم A پس از ۶ بازی موفق به بردن بازی می شود؟

ب) اگر بدانیم تیم A در نهایت بازی را برده است، با چه احتمالی در حداقل یک دست به تیم B باخته است؟

ج) به ازای $p = 0.5$ ، اگر بدانیم تیم A دست اول را برده، با چه احتمالی بازی را می برد؟

سوال ۶)

در یک امتحان، احتمال درست پاسخ دادن به یک سوال دو گزینه ای برابر p است. پس از امتحان، n دانشجو پاسخ های خود را با هم مقایسه می کنند و متوجه می شوند که همگی به آن سوال پاسخ یکسانی داده اند. با چه احتمالی تمام این n دانشجوها به پاسخ درست رسیده اند؟

سوال ۱) احتمال اینکه فردی به covid-19 مبتلا شود، در صورتی که ماسک نزنند برابر 70% و

در صورتی که ماسک بزند برابر ۱۵٪ است. اگر این فرد به طور متوسط ۵٪ مواقع ماسک بزند، احتمال کرونا گرفتن او چقدر است؟

سوال ۲) دو تاس می اندازیم و جمع دو عدد رو آمده را یادداشت می کنیم.

الف) احتمال اینکه عدد رو آمده، زوج باشد چقدر است؟

ب) اگر جمع دو عدد رو آمده زوج باشد، با چه احتمالی بیشتر از ۸ است؟

سوال ۳) از بین 2^n زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی $S = \{1, 2, \dots, n\}$ ، دو زیرمجموعه به تصادف و مستقل از هم بر می داریم. اگر این دو زیرمجموعه، دارای اشتراک $\{1, 2\}$ باشند، احتمال آن که یکی از زیرمجموعه‌ها شامل عضوهای ۳، ۴ و ۵ باشد چقدر است؟ ($n \geq 5$)

سوال ۴) سه جعبه در اختیار داریم. در جعبه‌ی ۱، ۱۰۰۰ لامپ موجود است که ۳ تای آنها معیوبند. جعبه‌ی ۲ شامل ۱۰ لامپ است که ۳ تای آنها معیوبند و در جعبه‌ی سوم هم ۳۰۰۰ لامپ وجود دارد که همگی سالمند. اگر یکی از این جعبه‌ها را به تصادف برگزیده و از داخل آن لامپی انتخاب کنیم،

الف) با چه احتمالی لامپ معیوب است؟

ب) اگر لامپ معیوب باشد، با چه احتمالی از جعبه‌ی ۲ انتخاب شده است؟

پ) اگر لامپ سالم باشد، با چه احتمالی از یکی از جعبه‌های ۱ یا ۲ انتخاب شده است؟

سوال ۵) کشوری شامل دو استان ۱ و ۲ است. استان ۱، شامل ۶۰ مرد و ۴۰ زن و استان ۲ شامل ۶۵۰ زن و ۳۵۰ مرد است. در استان ۱، ۱۰ مرد و ۱۰ زن چشم آبی و در استان ۲، ۳۰ مرد و ۲۰ زن چشم آبی هستند. فردی را به تصادف از این کشور انتخاب می کنیم.

الف) اگر این فرد چشم آبی باشد، با چه احتمالی از استان ۱ انتخاب شده است؟

ب) اگر این فرد زن باشد، با چه احتمالی از استان ۲ انتخاب شده و چشم آبی نیست؟

پ) اگر فرد انتخاب شده مرد باشد، با چه احتمالی چشم آبی است؟

سوال ۱) فرض کنید تابع توزیع تجمعی یک متغیر تصادفی گسسته به صورت های زیر داده شده باشد:

$$F(n) = \Pr\{X \leq n\} = \begin{cases} 1 & , \quad n > b \\ \frac{n-a+1}{b-a+1} & , \quad a \leq n \leq b \\ 0 & , \quad n < a \end{cases} \quad \text{(الف) زمانی که } b \geq a$$

$$F(n) = \begin{cases} 1 - A^{n+1} & , \quad n \geq 0 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad \text{(ب) زمانی که } 0 < A < 1$$

کمیت $f(n) = F(n) - F(n-1)$ را محاسبه کرده و سپس $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n f(n)$ را برای این دو توزیع به دست آورید.

سوال ۲) تابع توزیع های تجمعی و پیوسته ی زیر را در نظر بگیرید:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad \text{(الف) زمانی که } \lambda > 0$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \geq b \\ \frac{x-a}{b-a} & , \quad a < x < b \\ 0 & , \quad x \leq a \end{cases} \quad \text{(ب) زمانی که } b > a$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \quad \text{(ج) که } \mu \text{ و } \sigma^2 \text{ دو مقدار حقیقی هستند و } \sigma^2 \neq 0$$

کمیت $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ را محاسبه کرده و از روی آن، $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ را برای این سه توزیع به دست آورید.

سوال ۳) فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل برنولی به ترتیب با پارامترهای $\frac{1}{4}$ و p باشند. ثابت کنید متغیر تصادفی $Z = X \oplus Y \pmod{2}$ دارای توزیع برنولی با پارامتر $\frac{1}{4}$ است.

سوال ۴) فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل برنولی به ترتیب با پارامترهای $\frac{1}{4}$ و p باشند. ثابت کنید متغیر تصادفی $Z = XY$ دارای توزیع برنولی با پارامتر $\frac{1}{4}p$ است.

سوال ۵) اگر X و Y دو توزیع چندجمله ای به ترتیب با پارامترهای (n_1, p) و (n_2, p) باشند، ثابت کنید توزیع $X + Y$ دوجمله ای با پارامترهای $(n_1 + n_2, p)$ است.

سوال ۱) یک سکه ی سالم را ۷ بار پرتاب می کنیم.

الف) احتمال اینکه نتیجه‌ی پرتاب اول و آخر برابر باشد چقدر است؟

ب) با چه احتمالی حداقل دو رو و سه پشت در این ۷ پرتاب خواهیم داشت؟

پ) اگر نتیجه پرتاب سکه در سه پرتاب اول یکسان باشد، با چه احتمالی در این ۷ پرتاب، در مجموع دقیقاً ۴ بار سکه رو می‌آید؟

سوال ۲) یک تاس سالم را ۵ بار پرتاب می‌کنیم.

الف) اگر جمع پنج عدد رو آمده در این پنج پرتاب را در نظر بگیریم، با چه احتمالی این مجموع برابر ۷ است؟

ب) با چه احتمالی عدد رو آمده در پرتاب پنجم برابر جمع اعداد رو آمده در ۴ پرتاب قبلی خواهد بود؟

سوال ۳) بزرگراه ۸ بانده ای را در نظر بگیرید که از هر باند آن در هر لحظه حداکثر یک ماشین می‌تواند عبور کند. اگر ۹ ماشین هر یک با احتمال p وارد بزرگراه شوند،

الف) با چه احتمالی همه‌ی ماشین‌های وارد شده به بزرگراه بدون مشکل از آن رد می‌شوند؟

ب) p چقدر باشد تا احتمال قسمت الف بیشتر از 0.99 باشد؟

سوال ۴) دو تیم ورزشی A و B در یک بازی در ۹ دست با هم روبرو می‌شوند و نتیجه‌ی هر دست فقط برد یکی از دو تیم می‌تواند باشد. فرض کنید تیم A با احتمال p در هر دست پیروز می‌شود و نتیجه‌ی دست‌ها مستقل از هم است. برنده‌ی بازی کسی است که بیشتر بازی‌ها را برده باشد.

الف) با چه احتمالی تیم A پس از ۶ دست موفق به بردن بازی می‌شود؟

ب) اگر بدانیم تیم A در نهایت بازی را برده است، با چه احتمالی در حداقل یک دست به تیم B باخت است؟

ج) به ازای $p = 0.5$ ، اگر بدانیم تیم A دست اول را برده، با چه احتمالی بازی را می‌برد؟

سوال ۵) یک سکه‌ی سالم n بار پرتاب شده و k بار رو آمده است. کوچکترین مقدار n را بیابید به گونه‌ای که

$$P \left\{ 0.49 \leq \frac{k}{n} \leq 0.51 \right\} > 0.95$$

سوال ۱) سکه ای را پرتاب می‌کنیم. اگر رو آمد، دو تاس را پرتاب کرده، جمع دو عدد روی تاس را یادداشت می‌کنیم. اگر سکه پشت آمد، یک تاس را پرتاب کرده و عدد آنرا یادداشت می‌کنیم. با چه احتمالی

الف) عدد یادداشت شده برابر ۳ است؟

ب) عدد یادداشت شده برابر ۸ است؟

سوال ۲) کدام یک از توابع زیر می‌توانند تابع توزیع تجمعی یه متغیر تصادفی پیوسته باشند؟ در این حالت، محدوده‌ی مقادیر مناسب k را معین کنید.

$$F(x) = \begin{cases} \frac{kx}{1+x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases} \quad \text{الف)}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x > 0 \\ k & , \quad x = 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases} \quad \text{ب)}$$

$$F(x) = \frac{e^x + k}{e^x + 1} \quad \text{پ)}$$

$$F(x) = \begin{cases} k + xe^{-x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases} \quad \text{ت)}$$

سوال ۳) اگر تابع توزیع تجمعی یک متغیر تصادفی به صورت

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

باشد، مقدار میانه (Median) را محاسبه کنید.

سوال ۴) برای هر یک از توابع توزیع تجمعی زیر، مقدار $P(X = 1)$ چقدر است؟

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3-x} & , \quad x < 1 \\ \frac{2x}{3x+1} & , \quad x \geq 1 \end{cases} \quad \text{الف)}$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3-x} & , \quad x < 1 \\ \frac{x}{x+1} & , \quad x \geq 1 \end{cases} \quad (\text{ب})$$

سوال ۵) اگر متغیر تصادفی X دارای چگالی احتمال $f(x)$ و تابع توزیع تجمعی $F(x)$ باشد، چگالی احتمال و توزیع تجمعی هریک از متغیرهای تصادفی زیر چه خواهد بود؟

الف) $X + 1$

ب) $2X$

پ) $-X$

ت) X^2

(سوالات زیر امتیازی هستند)

سوال ۶) بزرگراه ۸ بانده ای را در نظر بگیرید که از هر باند آن در هر لحظه حداکثر یک ماشین می تواند عبور کند. اگر ۹ ماشین هریک دارای احتمال ورود به بزرگراه p باشند،

الف) با چه احتمالی همه ی ماشین های وارد شده به بزرگراه بدون مشکل از آن رد می شوند؟

ب) p چقدر باشد تا احتمال قسمت الف کمتر از 0.002 باشد؟

سوال ۷) یک سکه ی سالم n بار پرتاب شده و k بار رو آمده است. کوچکترین مقدار n را بیابید به گونه ای که

$$P \left\{ 0.49 \leq \frac{k}{n} \leq 0.51 \right\} > 0.95$$

سوال ۱) دایره ی واحد را با مرکز مبدا مختصات در نظر بگیرید.

الف) نقطه ای به تصادف از داخل این دایره انتخاب می شود. اعداد $0 < r_0 < 1$ و $0 < \phi_0 < 2\pi$ را در نظر بگیرید. اگر مختصات قطبی این نقطه را با (r, ϕ) نشان دهیم، با چه احتمالی داریم $r_0 < r < r_0 + \Delta r$ و $\phi_0 < \phi < \phi_0 + \Delta \phi$ ؟

ب) ابتدا قطری از دایره را به تصادف انتخاب کرده و سپس نقطه ای از این قطر را به تصادف بر می گزینیم. اگر مختصات قطبی این نقطه را با (r, ϕ) نشان دهیم، با چه احتمالی داریم $r_0 < r < r + \Delta r$ و $\phi_0 < \phi < \phi_0 + \Delta \phi$ ؟

پ) تابع چگالی احتمال نقطه را در هر دو حالت قسمت های الف و ب به دست آورید.

سوال ۲) (بی حافظگی توزیع نمایی) طول عمر یک یخچال از توزیع نمایی زیر پیروی می کند:

$$f_X(x) = \frac{1}{\tau_0} e^{-\frac{1}{\tau_0} x}$$

که x طول عمر یخچال بر حسب سال است. یخچال دست دومی که پس از ۱۵ سال کارکرد، همچنان سالم است به همراه یخچال نویی که از بازار خریداری شده مفروضند. احتمال خرابی هر یک از آنها دقیقاً در ۱۰ سال آینده چقدر است؟

سوال ۳) منحنی تابع $y = Ax^2 + 2Bx + C$ را در نظر بگیرید که در آن A, B, C متغیرهای تصادفی مستقل و دارای توزیع زیر هستند:

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & , \quad 1 < x < e \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

الف) با چه احتمالی این منحنی از سه ربع از چهار ربع مختصات می گذرد؟

ب) با چه احتمالی این منحنی از هر چهار ربع مختصات می گذرد؟

سوال ۴) (ناوردایی متغیرهای تصادفی گوسی تحت عمل جمع)

الف) فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی با توابع چگالی احتمال زیر باشند:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_X^2}\right)$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_Y^2}\right)$$

ثابت کنید متغیر تصادفی $X + Y$ از توزیع زیر پیروی می کند:

$$f_{X+Y}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi[\sigma_X^2 + \sigma_Y^2]}} \exp\left(-\frac{u^2}{2\pi[\sigma_X^2 + \sigma_Y^2]}\right)$$

(ب) (امتیازی) رابطه‌ی کلی تری را که می توان از تعمیم قسمت الف استنتاج کرد، بنویسید.

سوال ۱) به کمک یک ماشین حساب یا کامپیوتر، مقادیر $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ و $e^{-np} \frac{(np)^k}{k!}$ را به ازای حالت های مختلف n و p محاسبه کرده و خطای تقریب پواسون را به دست آورید.

(الف) $n = 10$, $p = 0.7$, $k = 7$

(ب) $n = 30$, $p = 0.3$, $k = 9$

(پ) $n = 50$, $p = 0.02$, $k = 1$

در کدام حالت تقریب پواسون، خطای کمتری دارد و چرا؟

سوال ۲) در پرتاب دو تاس سالم، اگر متغیر تصادفی X را برابر تعداد اعداد زوج رو آمده در هر دو تاس در نظر بگیریم:

(الف) فضای شدنی مسئله (Ω) را بیابید.

(ب) مقدار $\Pr\{X \leq 1/5\} - \Pr\{X \leq 0.5\}$ را بیابید و با $\Pr\{X = 1\}$ مقایسه کنید. میزان تفاوت دو مقدار فوق را توضیح دهید.

(پ) pmf این متغیر تصادفی را به دست آورید.

سوال ۳) فرض کنید یک سکه سالم را n بار پرتاب کرده ایم. در اینصورت pmf متغیر تصادفی X را در حالت های زیر بیابید.

(الف) متغیر تصادفی X برابر تعداد روها در پرتاب های زوج است.

(ب) متغیر تصادفی X برابر جمع تعداد روها در ۲ پرتاب اول و تعداد پشت ها در ۲ پرتاب آخر است ($n > 4$).

(پ) متغیر تصادفی X دو مقدار ۰ و ۱ را اختیار می کند و مقدار آن ۱ است هنگامی که تعداد روها و پشت ها با هم برابر باشد و ۰ در غیر اینصورت.

سوال ۱) برای هر یک از توزیع های زیر، میانگین و واریانس را به دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , \quad a < x < b \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (\text{ب})$$

$$f(n) = \begin{cases} p & , \quad n = 0 \\ 1-p & , \quad n = 1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (\text{پ})$$

$$f(n) = \begin{cases} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} & , \quad n \geq 0 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (\text{ت})$$

سوال ۲) آزمایشی را که احتمال موفقیت آن p و احتمال شکست آن $1-p$ است، آنقدر تکرار می کنیم تا به k -امین موفقیت برسیم. متوسط تعداد آزمایش ها را تا حصول k -امین موفقیت به ازای

$$k = 1 \quad (\text{الف})$$

$$k = 2 \quad (\text{ب})$$

به دست آورید.

سوال ۳) از دو جامعه ی آماری بزرگ، یک آزمون علمی ۱۰۰ نمره ای گرفته شده است. مشاهده شده که نمرات افراد این دو جامعه، به ترتیب از دو توزیع گوسی با میانگین های ۵۹ و ۷۳ و واریانس های ۹ و ۱۶ پیروی می کند.

الف) کدام یک از این دو جامعه به طور متوسط دارای سطح علمی بالاتری است؟ چرا؟

ب) افراد کدام جامعه دارای سطح علمی نزدیک تری به یکدیگر هستند؟ (یا به عبارت دیگر، هم سطح ترند؟) چرا؟

سوال ۴) الف) آیا چگالی احتمال یک متغیر تصادفی می تواند فرد باشد؟ توضیح دهید.

ب) گشتاور مرتبه n -ام یک متغیر تصادفی یکنواخت در بازه $[a, b]$ را به دست آورید.

سوال ۵)

الف) برای هر متغیر تصادفی X و $s > 0$ تحقیق کنید

$$\Pr\{X \geq a\} = \Pr\{e^{sX} \geq e^{sa}\}$$

ب) به کمک نامساوی مارکوف ثابت کنید:

$$\Pr\{X \geq x\} \leq e^{-sx} \Phi_X(s)$$

سوال ۱)

تعیین کنید به ازای چه مقادیری از k هر یک از توابع زیر می تواند CDF یک متغیر تصادفی باشد.

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-kx^2} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases} \quad \text{الف)}$$

$$F(x) = \begin{cases} kx & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & , \quad x > 1 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases} \quad \text{ب)}$$

$$F(x) = \begin{cases} k - e^{x-x^2} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases} \quad \text{پ)}$$

$$F(x) = \frac{e^x}{e^x + k} \quad \text{ت)}$$

$$F(x) = \cos \frac{\pi}{e^x + k} \quad \text{ث) (امتیازی)}$$

سوال ۲) اگر $F(x)$ تابع توزیع تجمعی یک متغیر تصادفی پیوسته باشد، کدام یک از توابع زیر می توانند تابع توزیع تجمعی یک متغیر تصادفی باشند؟ (راهنمایی: از خواص CDF بهره بگیرید.)

$$F(x^2) \quad \text{الف)}$$

$$F(x^2) \text{ (ب)}$$

$$1 - F(-x) \text{ (پ)}$$

$$F^n(x) \text{ برای هر مقدار طبیعی از } n \text{ (ت)}$$

$$\sin \left[\frac{\pi}{2} F(x) \right] \text{ (ث)}$$

سوال ۳) برای هر یک از CDF های سوال ۱، مقدار $\Pr\{1 < X \leq 2\}$ را بیابید (پاسخ می تواند شامل ثابت k نیز باشد. بخش ث) نیز امتیازی است).

سوال ۱) کدام یک از توابع زیر می توانند PDF توام متغیرهای تصادفی باشند؟ برای هر کدام از PDF ها، ثابت مناسب k را بیابید.

$$f(x, y) = \frac{k}{1+x^2+y^2} \text{ (الف)}$$

$$f(x, y) = e^{a(x^2+y^2)} \text{ (ب)}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} k & , \quad x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases} \text{ (پ)}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} k - k\sqrt{x^2 + y^2} & , \quad x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases} \text{ (ت)}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} xy & , \quad 0 < x < k, \quad 0 < y < k \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases} \text{ (ث)}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & , \quad x > 0, \quad y > 0, \quad x + y < a \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases} \text{ (ج)}$$

سوال ۲) برای هر یک از PDF های سوال ۱، مقادیر زیر را به دست آورید.

$$\Pr\{X > 0\} \text{ (الف)}$$

$$\Pr\{X + Y > 0\} \text{ (ب)}$$

(راهنمایی: ابتدا تحقیق کنید اگر $f(x, y)$ تابعی از $x^2 + y^2$ باشد، داریم

$$\Pr\{aX + bY > 0\} = \Pr\{X > 0\}, \quad \text{زمانی که حداقل یکی از } a \text{ یا } b \text{ غیر صفر است}$$

(

سوال ۳) برای قسمت های ث) و ج)، PDF متغیر تصادفی X را به دست آورید.

سوال ۴) جدول زیر را برای متغیرهای تصادفی X و Y در نظر بگیرید: الف) توابع توزیع احتمال

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{1}{2} - \theta$	θ
1	θ	$\frac{1}{2} - \theta$

متغیرهای X و Y را به دست آورید.

ب) به ازای چه مقدار θ داریم

$$P(X = Y) = 1$$

؟

پ) به ازای چه مقدار θ داریم

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

؟

سوال ۱)

تعیین کنید به ازای چه مقادیری از k هر یک از توابع زیر می تواند pdf یک متغیر تصادفی باشد.

$$f(x) = \begin{cases} 1/x^k, & x \geq 1 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad \text{الف)}$$

$$f(x) = \begin{cases} kxe^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad \text{ب)}$$

$$(k > 0) \quad f(x) = \begin{cases} \sin x & , 0 \leq x \leq k \\ 0 & , \text{سایر جاها} \end{cases} \quad (\text{پ})$$

$$f(x) = \begin{cases} k\delta(x-1) & , x=1 \\ x & , 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{سایر جاها} \end{cases} \quad (\text{ت})$$

دارای ضربه‌ای به مساحت k است

$$f(x) = k\delta(x-1) + (1-k)\delta(x) \quad (\text{ث})$$

سوال ۲) یک سامانه دارای ۷۰ قطعه است. پیشامد اینکه هر قطعه پس از شروع به کار در زمان ۰، در بازه‌ی $(0, x)$ دچار خرابی گردد، یک متغیر تصادفی با pdf زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{T}e^{-\frac{x}{T}} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

احتمال آن را بیابید که بیش از ۶۵ قطعه از این سیستم در بازه‌ی $(0, \frac{T}{4})$ دچار خرابی نشوند.

سوال ۳) برای هر یک از pdf های سوال ۱، مقادیرهای $\Pr\{X = 1\}$ و $\Pr\{X < \frac{1}{4}\}$ را بیابید (پاسخ می تواند شامل ثابت k باشد).

سوال ۴) اگر x_u ، صدک- u متغیر تصادفی X باشد، در این صورت مقدار x_u را به ازای $u = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ برای حالت های زیر به دست آورید.

الف) X یک متغیر تصادفی با pdf زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \text{سایر جاها} \end{cases}$$

ب) X یک متغیر تصادفی با pdf زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & , x \geq 0 \\ 0 & , \text{سایر جاها} \end{cases}$$

سوال ۱) در پرتاب دو تاس سالم و متمایز، متغیر تصادفی X را مجموع اعداد رو آمده و Y را

تعداد ۶ های رو آمده در نظر بگیرید.

الف) مقدار $\Pr\{X = ۱, Y = ۷\}$ را به دست آورید.

ب) مقدار $E\{XY\}$ چقدر است؟

پ) (امتیازی) آیا این دو متغیر تصادفی ناهمبسته اند؟

سوال ۲) در جدول زیر که توزیع احتمال را برای متغیرهای تصادفی X و Y نشان می دهد،

X \ Y	0	1
0	p_1	p_2
1	p_3	p_4

الف) مقدار $\text{cov}(X, Y)$ را به دست آورید و تحقیق کنید که زمانی داریم $\text{cov}(X, Y) = ۰$ ؟

ب) آیا برای این دو متغیر تصادفی، ناهمبستگی، استقلال را نتیجه می دهد؟ اگر چنین است، نشان دهید و اگر چنین نیست، مثالی برای مقادیر p_1, p_2, p_3, p_4 بزنید که ناهمبستگی، استقلال را نتیجه نمی دهد (دقت داشته باشید که جمع احتمالات برابر یک است و احتمالات نامنفی اند).

سوال ۳) چگالی احتمال زیر را در نظر بگیرید:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} ۱ + \alpha \sin[۲\pi(x + y)] & , \quad ۰ \leq x \leq ۱, ۰ \leq y \leq ۱ \\ ۰ & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که α مقدار مناسبی است.

الف) کوواریانس این دو متغیر تصادفی را به دست آورید. آیا این دو متغیر تصادفی ناهمبسته هستند؟

ب) مقادیری از α را بیابید که این دو متغیر تصادفی مستقل باشند.

سوال ۴) تابع چگالی احتمال توام زیر را در نظر بگیرید:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{۱}{۲\pi\sqrt{۱-\rho^2}} \exp \left[-\frac{۱}{۲} \cdot \frac{۱}{۱-\rho^2} (x^2 + y^2 - ۲\rho xy) \right]$$

الف) ثابت کنبند X (و مشابهها همچنین Y) دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس ۱ است.

ب) ثابت کنید اگر $\rho = 0$ ، در این صورت متغیرهای تصادفی X و Y مستقل هستند.

پ) (امتیازی) ثابت کنید اگر متغیرهای تصادفی X و Y مستقل باشند آنگاه $\rho = 0$.

ت) (امتیازی تحقیقی) تابع چگالی احتمالی که در صورت این سوال تعریف شد، حالت خاصی از چگالی احتمال چند متغیره‌ی نرمال است.

ضریب همبستگی ρ در حالت دو متغیره، میزان همبستگی دو متغیر تصادفی را نشان می‌دهد. ابتدا تحقیق کنید به ازای چه مقداری از ρ ، این چگالی احتمال، دایروی-مقارن خواهد بود. چگالی احتمال دو متغیره را به ازای مقادیر $\rho = 0.5$ ، $\rho = 0$ ، $\rho = -0.5$ ترسیم کنید. به طور شهودی چگونه می‌توان از روی نمودارها، به میزان همبستگی این دو متغیر تصادفی پی برد؟

این تابع چگالی را به صورت دیگری نیز می‌توان نوشت:

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \det(\Sigma)}} \exp \left[-\frac{1}{2} \cdot ([x, y] \Sigma^{-1} [x, y]^T) \right]$$

که بردار $[x, y]$ یک بردار سطری دوتایی است و

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس Σ در متغیرهای تصادفی نرمال توأم، مفهوم مهمی است و ماتریس کوواریانس نام دارد.

به ازای هر یک از مقادیر $\rho = 0.5$ ، $\rho = 0$ ، $\rho = -0.5$ و به کمک دستور `mvnrnd()` در متلب، ۱۰۰۰ جفت داده‌ی تصادفی تولید و آنها را در یک نمودار پراکندگی ترسیم کنید (پس از اجرای دستور فوق در متلب به شیوه‌ی مناسب، ۱۰۰۰ داده‌ی تصادفی برای X و ۱۰۰۰ داده‌ی تصادفی برای Y خواهید داشت. کافی است Y را برحسب X رسم کنید تا به نمودار پراکندگی برسید. همچنین می‌توانید از Help متلب برای توضیحات بیشتر در مورد `mvnrnd()` بهره ببرید). چگونه از روی نمودار پراکندگی می‌توان میزان همبستگی دو متغیر تصادفی را نشان داد؟ چه شهودی در آن نهفته است؟

(این کار تحقیقی، امتیاز ویژه‌ای دارد و مهلت آن تا پایان امتحان نهایی خواهد بود؛ بنابراین زمان، محدودکننده نخواهد بود. بسیار مهم است که در این تحقیق، تحلیل و دیدگاه خود را نیز ذکر بفرمایید.)

هنگامی که $\rho = 1$ ، توضیح دهید چه اتفاقی می افتد؟ تفاوت آن با حالت $\rho = -1$ چیست؟ آیا همچنان می توان از چگالی احتمال داده شده استفاده کرد؟ چرا؟

سوال ۱) زمان خرابی یک لامپ، یک متغیر تصادفی با pdf زیر است:

$$f_X(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}, \quad x > 0$$

الف) احتمال آن که این لامپ، به مدت حداکثر 2λ عمر کند، چقدر است؟

ب) احتمال آن که این لامپ بیش از 3λ و کمتر از $3/5\lambda$ عمر کند چقدر است؟

سوال ۲) یک متغیر تصادفی دارای چگالی احتمال زیر است:

$$f_X(x) = \begin{cases} 6x^2(1-x) & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ k\delta(x+1) & , \quad x = -1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

به عبارت دیگر، pdf دارای ضربه ای به اندازه k در $x = -1$ است.

الف) مقدار k را بیابید.

ب) CDF را به دست آورید و آن را رسم کنید.

پ) مقدار احتمال های $\Pr\{-2 < X \leq \frac{1}{4}\}$ و $\Pr\{0 < X \leq \frac{1}{4}\}$ چقدر است؟

سوال ۳) فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع یکنواخت بین 0 و 1 است. در این صورت، CDF و pdf هریک از متغیرهای تصادفی زیر را بیابید.

الف) $Y = X^2$

ب) $Y = -\ln(1-X)$

پ) $Y = \tan \pi(X - \frac{1}{4})$

سوال ۴) برای قسمت پ سوال پیش، مقدار احتمال های $\Pr\{X \leq \frac{2}{3}\}$ و $\Pr\{Y \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\}$ را از روی pdf های X و Y بیابید و با هم مقایسه کنید. نتیجه مقایسه را توضیح دهید.

سوال ۵) اگر CDF متغیر تصادفی X را با $F(x)$ نشان دهیم، CDF متغیرهای تصادفی زیر را

برحسب $F(x)$ دست آورید.

$$\begin{aligned} \text{الف) } Y &= |X| \\ \text{ب) } Y &= \begin{cases} 0, & X \leq 0 \\ 1, & X > 0 \end{cases} \\ \text{پ) } Y &= X^2 - 2X \end{aligned}$$

سوال ۱) ابتدا فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای توزیع یکنواخت در بازه‌ی $[0, 1]$ و مستقل هستند. توزیع احتمال متغیرهای تصادفی

الف) XY

ب) $X + Y$

پ) $\frac{X}{Y}$

ت) $\max\{X, Y\}$

ج) $\min\{X, Y\}$

را به دست آورید.

حال فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی نمایی و مستقل با پارامتر ۱ باشند. توزیع احتمال هر یک از متغیرهای تصادفی قسمت ب) و پ) را بیابید.

سوال ۲) توزیع مشترک دو متغیر تصادفی به صورت زیر است:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\rho^2} (x^2 + y^2 - 2\rho xy) \right]$$

ثابت کنید متغیر تصادفی $X + Y$ یک متغیر تصادفی نرمال است و سپس واریانس آن را به دست آورید. چه زمانی این واریانس بیشینه است و چرا؟ در شرایطی که واریانس بیشینه باشد، متغیرهای تصادفی X و Y چه رابطه‌ای دارند؟

سوال ۱) برای هر یک از متغیرهای تصادفی زیر، واریانس را به دست آورید.

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 1 \\ 0, & x \leq 1 \end{cases} \quad \text{الف)}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \sin x & , \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases} \quad (\text{ب})$$

$$\begin{cases} \frac{2}{x^3} & , \quad x > 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases} \quad (\text{پ})$$

(ت) X یک متغیر تصادفی گسسته است و $\Pr\{X = i\} = 2\left(\frac{1}{3}\right)^i$ برای $i \in \mathbb{N}$

سوال ۲) برای قسمت های الف و ت سوال ۱، ابتدا تابع مولد گشتاور را محاسبه نموده و سپس از روی آن، میانگین و واریانس را به دست آورید.

سوال ۳) برای قسمت های الف و ب سوال ۱، میانگین متغیر تصادفی e^{-X} را بیابید.

سوال ۴) برای هر یک از جفت متغیرهای تصادفی X و Y ، ابتدا مقدار مناسب k و سپس مقدار $\Pr\{X + 3Y < \frac{1}{4}\}$ را بیابید. در هر بخش آیا X و Y مستقلند؟ $f_{X,Y}(x, y)$ چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی پیوسته ی X و Y است.

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} k \sin(x + 3y) & , \quad 0 < x < \frac{\pi}{4}, 0 < y < \frac{\pi}{6} \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} kxy(1 - y) & , \quad 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases} \quad (\text{ب})$$

سوال ۵) جدول زیر را برای متغیرهای تصادفی X و Y در نظر بگیرید:

		Y	
		0	1
X	0	$\frac{1}{2} - \theta$	θ
	1	θ	$\frac{1}{2} - \theta$

(الف) توابع توزیع احتمال حاشیه ای متغیرهای X و Y را به دست آورید.

ب) به ازای چه مقدار θ داریم

$$P(X = Y) = 1$$

؟

پ) به ازای چه مقدار θ داریم

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

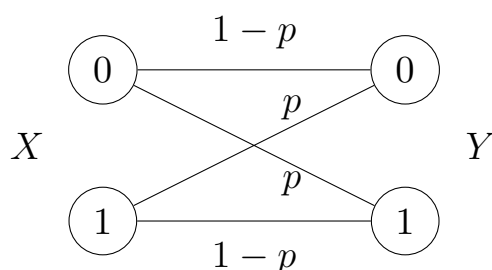
؟

سوال ۱) در پرتاب ۱۰ بار سکه‌ی سالم به طور مستقل،

الف) توزیع احتمال متغیر تصادفی تعداد سکه‌های شیر آمده را به شرط آن که بدانیم سه پرتاب اول خط بوده اند به دست آورید.

ب) توزیع احتمال متغیر تصادفی تعداد سکه‌های شیر آمده را به شرط آن که بدانیم دو پرتاب از سه پرتاب اول خط بوده اند به دست آورید.

سوال ۲) کانال مخابراتی زیر را در نظر بگیرید:



که در آن، پیکان‌ها احتمالات گذار را از متغیر تصادفی X به متغیر تصادفی Y نشان می‌دهند. به طور مثال

$$\Pr\{Y = 0 | X = 1\} = p$$

الف) اگر $\Pr\{X = 0\} = q$ که $0 \leq q \leq 1$ ، در اینصورت توزیع توام X و Y را محاسبه کنید.

ب) احتمال خطا ($\Pr\{X \neq Y\}$) را محاسبه کنید. اگر مقدار p ثابت باشد، آیا احتمال خطا بر حسب q نقطه‌ی بهینه دارد؟ اگر دارد آنرا بیابید و در غیر این صورت، علت را بیان کنید.

سوال ۳) فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع احتمال نمایی با پارامتر λ باشد. ثابت کنید

$$E\{X|X > a\} = E\{X\} + a$$

سوال ۴) اگر توزیع تجمعی یک متغیر تصادفی ترکیبی به صورت

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \frac{x+2}{4} & , \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

باشد، چگالی احتمال متغیر تصادفی ($X \neq 0$ یا $X \neq 1$) را به دست آورید.

سوال ۱) برای هر یک از pdf های توام داده شده‌ی زیر، موارد $f_X(x)$ ، $E\{X\}$ و $E\{XY\}$ را به دست آورید.

الف) $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi} e^{-x^2-y^2}$

ب) $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{9}(1 - |x-1| - |y-1|) & , \quad |x-1| + |y-1| < 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$

پ) $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{1-x} & , \quad 0 < x < y < 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$

ت) X و Y دو متغیر تصادفی گسسته (با مقادیر صحیح) اند و pmf آنها به صورت زیر است:

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{16} & , \quad x^2 + y^2 \leq 10, \quad x \geq y \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

سوال ۲) در جدول زیر که توزیع احتمال را برای متغیرهای تصادفی X و Y نشان می دهد،

		Y	
		0	1
X	0	P_1	P_2
	1	P_3	P_4

الف) مقدار $\text{cov}(X, Y)$ را به دست آورید و تحقیق کنید که چه زمانی داریم $\text{cov}(X, Y) = 0$ ؟

ب) آیا برای این دو متغیر تصادفی، ناهمبستگی، استقلال را نتیجه می دهد؟ اگر چنین است، نشان دهید و اگر چنین نیست، مثالی برای مقادیر p_1, p_2, p_3, p_4 بزنید که ناهمبستگی، استقلال را نتیجه نمی دهد (دقت داشته باشید که جمع احتمالات برابر یک است و احتمالات نامنفی اند).

سوال ۳) چگالی احتمال زیر را در نظر بگیرید:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 1 + \alpha \sin[2\pi(x + y)] & , \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که α مقدار مناسبی است.

الف) کوواریانس این دو متغیر تصادفی را به دست آورید. به ازای چه مقادیری از α ، این دو متغیر تصادفی ناهمبسته هستند؟

ب) مقادیری از α را بیابید که این دو متغیر تصادفی مستقل باشند.

سوال ۴) ابتدا فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای توزیع یکنواخت در بازه $[0, 1]$ و مستقل هستند. توزیع احتمال متغیرهای تصادفی

الف) XY

ب) $X + Y$

پ) $\frac{X}{Y}$ (امتیازی)

ت) $\max\{X, Y\}$ (امتیازی)

ث) $\min\{X, Y\}$ (امتیازی)

را به دست آورید.

حال فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی نمایی و مستقل با پارامتر ۱ باشند. توزیع احتمال هر یک از متغیرهای تصادفی قسمت ب و پ را بیابید (بخش پ همچنان امتیازی است!).

(توزیع احتمال یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر λ به صورت زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases}$$

توزیع احتمال یک متغیر تصادفی یکنواخت در بازه‌ی $[a, b]$ به صورت زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , \quad a < x < b \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

(

سوال ۱) تابع چگالی احتمال توام دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر است:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} k & , \quad |x| + |y| < 1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

الف) مقدار مناسب k را بیابید.

ب) کوواریانس و ضریب همبستگی X و Y را بیابید.

پ) ثابت کنید متغیرهای تصادفی $X + Y$ و $X - Y$ مستقل هستند و توزیع توام آنها را به دست آورید.

ت) توزیع X و میانگین و واریانس آن را به دست آورید.

سوال ۲) برای متغیر تصادفی X که دارای توزیع زیر است

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & , \quad |x| < \frac{1}{2} \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

تابع مولد گشتاور را به دست آورده و از روی آن، $E\{X^4\}$ را محاسبه نمایید.

سوال ۳) ثابت کنید اگر X, Y ، دو متغیر تصادفی نرمال مستقل با میانگین ۰ و واریانس ۱ باشند، آنگاه توزیع $\tan^{-1} \frac{Y}{X}$ ، یکنواخت بین $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ خواهد بود.

سوال ۴) اگر برای متغیرهای تصادفی X و Y ، چگالی احتمال زیر را داشته باشیم

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} e^{-x(y+1)^2} & , \quad x, y > 0 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در این صورت توزیع $X|Y$ را به دست آورید.

سوال ۵) (امتیازی) تحقیق کنید هر یک از دنباله‌ی متغیرهای تصادفی زیر، با چه مفهومی به یک متغیر تصادفی حدی میل می کنند. برای هر یک دلیل بیاورید.

(الف) $X_n = X + \frac{1}{n}$ که X ، یک متغیر تصادفی یکنواخت در بازه‌ی $[0, 1]$ است.

(ب) متغیر تصادفی نمایی با پارامتر $\frac{n+1}{n}$

(پ) متوسط تعداد شیرها در n بار پرتاب مستقل یک سکه‌ی سالم

سوال ۱) اگر متغیر تصادفی X را دارای چگالی احتمال زیر در نظر بگیریم

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \quad 0 < x < 2 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

موارد (۱) $F(x|X < 1)$ (cdf)، (۱) $f(x|X > 1)$ (pdf) و $\mathbb{E}\{X|0.5 < X < 1.5\}$ را بیابید.

سوال ۲) فرض کنید متغیر تصادفی X دارای چگالی احتمال زیر باشد

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases} , \quad \lambda > 0$$

در این صورت مقادیر $\mathbb{E}\{X|X > a\}$ و $\mathbb{E}\{X\} + a$ را بیابید و با هم مقایسه کنید.

(امتیازی: نتیجه را تفسیر کنید و ببینید آیا با شهود سازگار است. این چه ویژگی ای از متغیرهای تصادفی نمایی را نشان می دهد؟)

سوال ۳) برای متغیر تصادفی X با توزیع زیر

$$\Pr\{X = i\} = (1 - p)^i \cdot p \quad , \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

الف) مقدار $\text{var}\{X|X \geq 4\}$ را به دست آورید.

ب) pmf شرطی $\{X \text{ زوج است} | X = x\}$ را پیدا کنید.

سوال ۴) فرض کنید متغیر تصادفی X ، نتیجه پرتاب یک تاس سالم باشد ($X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$). سپس با توجه به رخداد X ، متغیر تصادفی پیوسته‌ی Y را به صورت شرطی با چگالی احتمال زیر تعریف می‌کنیم:

$$f_{Y|X}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \quad 0 < y < x \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

الف) احتمال $\Pr\{Y \geq 3\}$ را بیابید.

ب) چگالی احتمال $f_Y(y)$ را به دست آورید.

پ) مقادیر $\mathbb{E}\{Y\}$ و $\text{var}(Y)$ را از روی چگالی احتمال Y محاسبه کنید.

سوال ۱)

از کیسه‌ای که شامل ۵ مهره سیاه، ۸ مهره سفید و ۱ مهره قرمز است، دو توپ به تصادف بیرون می‌آوریم. احتمال آنکه هر دو توپ هم‌رنگ باشند چقدر است؟

سوال ۲)

دو جعبه از لامپ‌ها در اختیار داریم. جعبه‌ی اول، دارای ۱۰۰۰ لامپ است که ۱٪ آنها سالمند. جعبه‌ی دوم، دارای ۱۰۰۰۰ لامپ است که ۹۵٪ آنها سالم اند. یکی از جعبه‌ها را به تصادف انتخاب کرده و دو لامپ بیرون می‌کشیم. احتمال آن که هر دو لامپ از جعبه‌ی ۱ انتخاب شده باشند چقدر است اگر

الف) هر دو لامپ خراب باشند.

ب) اگر یکی از لامپ‌ها سالم و دیگری خراب باشد.

سوال ۳)

سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر رو آمد، آن را ۹ بار دیگر پرتاب می‌کنیم و نتایج ۱۰ پرتاب را در نظر می‌گیریم. اگر پشت آمد، آن را ۵ بار دیگر پرتاب می‌کنیم و نتایج ۶ پرتاب را در نظر می‌گیریم. احتمال آن که در تمام پرتاب‌های سکه، دقیقاً ۶ بار رو بیاید چقدر است؟

سوال ۴)

یک آزمایش برنولی را که احتمال موفقیت در آن برابر 40% است، n بار تکرار می‌کنیم. اگر k ، برابر تعداد موفقیت‌ها در این پرتاب‌ها باشد، n حداقل چقدر باشد تا احتمال رخداد $\{38\% < \frac{k}{n} < 42\%\}$ بیش از 70% باشد؟

(راهنمایی: از قضیه‌ی دموآور-لاپلاس استفاده نمایید.)

(جدول مربوط به محاسبه‌ی تابع $G^{-1}(x)$ در صفحه‌ی بعد آمده است.)

x	$G^{-1}(x)$	x	$G^{-1}(x)$	x	$G^{-1}(x)$	x	$G^{-1}(x)$
0.01	-2.3263	0.26	-0.6433	0.51	0.0251	0.76	0.7063
0.02	-2.0537	0.27	-0.6128	0.52	0.0502	0.77	0.7388
0.03	-1.8808	0.28	-0.5828	0.53	0.0753	0.78	0.7722
0.04	-1.7507	0.29	-0.5534	0.54	0.1004	0.79	0.8064
0.05	-1.6449	0.30	-0.5244	0.55	0.1257	0.80	0.8416
0.06	-1.5548	0.31	-0.4959	0.56	0.1510	0.81	0.8779
0.07	-1.4758	0.32	-0.4677	0.57	0.1764	0.82	0.9154
0.08	-1.4051	0.33	-0.4399	0.58	0.2019	0.83	0.9542
0.09	-1.3408	0.34	-0.4125	0.59	0.2275	0.84	0.9945
0.10	-1.2816	0.35	-0.3853	0.60	0.2533	0.85	1.0364
0.11	-1.2265	0.36	-0.3585	0.61	0.2793	0.86	1.0803
0.12	-1.1750	0.37	-0.3319	0.62	0.3055	0.87	1.1264
0.13	-1.1264	0.38	-0.3055	0.63	0.3319	0.88	1.1750
0.14	-1.0803	0.39	-0.2793	0.64	0.3585	0.89	1.2265
0.15	-1.0364	0.40	-0.2533	0.65	0.3853	0.90	1.2816
0.16	-0.9945	0.41	-0.2275	0.66	0.4125	0.91	1.3408
0.17	-0.9542	0.42	-0.2019	0.67	0.4399	0.92	1.4051
0.18	-0.9154	0.43	-0.1764	0.68	0.4677	0.93	1.4758
0.19	-0.8779	0.44	-0.1510	0.69	0.4959	0.94	1.5548
0.20	-0.8416	0.45	-0.1257	0.70	0.5244	0.95	1.6449
0.21	-0.8064	0.46	-0.1004	0.71	0.5534	0.96	1.7507
0.22	-0.7722	0.47	-0.0753	0.72	0.5828	0.97	1.8808
0.23	-0.7388	0.48	-0.0502	0.73	0.6128	0.98	2.0537
0.24	-0.7063	0.49	-0.0251	0.74	0.6433	0.99	2.3263
0.25	-0.6745	0.50	0.0000	0.75	0.6745	0.9999	3.7190