

به نام او

امتحان پایان ترم درس احتمال مهندسی

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

سوال ۱) برای متغیر تصادفی X با چگالی احتمال زیر، ابتدا تابع مولد گشتاور را یافته و سپس از روی آن، مقادیر میانگین و واریانس را بیابید.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\delta(x-1) & , \quad x=1 \\ x & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

سوال ۲) برای متغیرهای تصادفی X و Y با چگالی احتمال توام زیر،

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k(1+x+y) & , \quad 1 < x < 2, \quad 0 < y < 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

الف) مقدار مناسب k را بیابید.

ب) توزیع حاشیه ای $f_X(x)$ را پیدا کنید.

ت) مقدار $\text{cov}(X, Y)$ را محاسبه کنید.

سوال ۳) برای متغیرهای تصادفی X و Y با چگالی احتمال توام زیر،

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} kx & , \quad 0 < y < 1, \quad 0 < y < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

الف) مقدار مناسب k را بیابید.

ب) استقلال دو متغیر تصادفی را بررسی کنید.

پ) چگالی احتمال $X + Y$ را بیابید.

سوال ۴) اگر X یک متغیر تصادفی با چگالی احتمال زیر باشد،

$$f_X(x) = \begin{cases} xe^{-x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

مقدار $\text{var}\{X|X > 1\}$ را به دست آورید.

سوال ۵) سکه سالمی را ۵ بار می اندازیم. اگر X تعداد پشت آمدن ها در پرتاب های زوج و Y تعداد پشت آمدن ها در سه پرتاب آخر باشد،

الف) تابع مولد گشتاور مشترک X و Y را محاسبه کنید.

ب) مقدار $\mathbb{E}\{X + Y | X = ۱\}$ را به دست آورید.

سوال ۶) یک امتحان احتمال مهندسی به صورت آنلاین (و با رعایت پروتکل ها!) به مدت ۲ ساعت برگزار می شود. فرهاد و آرش، هریک مستقل از دیگری و به تصادف در ۱۰ دقیقه ی اول (با توزیع یکنواخت) وارد جلسه امتحان می شوند. اگر این دو نفر مستقل از هم در بازه ی ۱ تا ۱/۵ ساعت از شروع و با توزیع یکنواخت، امتحان خود را به پایان رسانده و از جلسه خارج شوند،

الف) اگر آرش از جلسه امتحان خارج شده باشد، با چه احتمالی فرهاد حداکثر ۲۰ دقیقه پس از او از جلسه خارج می شود؟

ب) اگر فرهاد دیرتر از آرش از جلسه خارج شود، با چه احتمالی زودتر از او وارد جلسه شده است؟
(یادآوری: اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع یکنواخت در بازه (a, b) باشد آنگاه:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , \quad a < x < b \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

(

موفق باشید!