تجزیه به کسرهای جزئی

سیگنال ها و سیستم ها

تجزیه به کسرهای جزئی

- تعریف: تجزیه کردن یک کسر شامل نسبت دو چندجمله ای گویا به مجموع کسرهای ساده‌تر (جزئی)
- به زبان ریاضی، میخواهیم طرف چپ تساوی زیر را به صورت طرف راست بنویسیم:

$$F(s)=\frac{a_m s^m+a_{m-1}s^{m-1}+\cdots+a_1 s+a_0}{b_n s^n+b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_1 s+b_0}=P(s)+\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{(s-r_i)^{k_i}}$$

- در معادله فوق، N تعداد ریشه های مخرج (با احتساب تکرر) و r_i ریشه های مخرج می باشند.
- هدف، یافتن ضرایب A_i و k_i و چندجمله ای $P(s)$ است؛ به شرط آن که ضرایب a_i ها و b_i ها داده شده باشند.

چند نکته

- در کسر$\frac{a_m s^m+a_{m-1}s^{m-1}+\cdots+a_1 s+a_0}{b_n s^n+b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_1 s+b_0}$، درجه‌ی صورت برابر m و درجه‌ی مخرج برابر n است.

✓در صورتی که $n > m$، خواهیم داشت $P(s) = 0$ و در غیر اینصورت $P(s) \neq 0$

✓ضرایب r_i ریشه های چند جمله ای مخرج یعنی $b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0$ با احتساب تکرر هستند (یعنی ریشه های تکراری به تعداد تکررشان شمرده می شوند)؛ مثلا:

$$s^3 - 4s^2 + 5s - 2 = (s-1)^2(s-2) \rightarrow \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = 1 \\ r_3 = 2 \end{cases}$$

در ادامه ابتدا به بررسی حالاتی که درجه‌ی مخرج از صورت بیشتر است می‌پردازیم و چند مثال حل می کنیم. سپس حالاتی را که درجه‌ی صورت می‌تواند مساوی یا بیشتر از درجه مخرج باشد مورد بررسی قرار می‌دهیم.

ریشه های ساده

- اگر تمام ریشه های مخرج $F(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}$ ساده باشند و درجه مخرج از صورت بیشتر باشد، خواهیم داشت:

$$F(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0} = \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i}{s - r_i}$$

- که در رابطه فوق

$$A_i = \lim_{s \to r_i} (s - r_i) F(s)$$

یک مثال: پیدا کردن ضرایب برای ریشه های ساده

هدف: تجزیه‌ی $\frac{1}{s^3-6s^2+11s-6}=\frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)}$

ریشه های مخرج عبارتند از $r_1=1$، $r_2=2$، $r_3=3$ ؛ همچنین درجه‌ی صورت از مخرج کمتر است؛ بنابراین تجزیه‌ی ما به فرم زیر خواهد بود:

$$F(s)=\frac{1}{s^3-6s^2+11s-6}=\frac{A_1}{s-1}+\frac{A_2}{s-2}+\frac{A_3}{s-3}$$

که در رابطه‌ی فوق:

$$A_1 = \lim_{s\to 1}(s-1)F(s) = \lim_{s\to 1}\frac{s-1}{s^3-6s^2+11s-6} = \frac{1}{2}$$

$$A_2 = \lim_{s\to 3}(s-2)F(s) = \lim_{s\to 1}\frac{s-2}{s^3-6s^2+11s-6} = -1$$

$$A_3 = \lim_{s\to 3}(s-3)F(s) = \lim_{s\to 1}\frac{s-3}{s^3-6s^2+11s-6} = \frac{1}{2}$$

بنابراین

$$F(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)} = \frac{\frac{1}{2}}{s-1} + \frac{-1}{s-2} + \frac{\frac{1}{2}}{s-3}$$

ریشه های مکرر (غیرساده‌ی) مخرج

- اگر مخرج، ریشه ی مکرر r_i از درجه تکرار k داشته باشد، آنگاه در تجزیه‌ی آن، فرم زیر ظاهر می شود:

$$F(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0} = \cdots + \sum_{j=1}^{k} \frac{B_{ij}}{(s - r_i)^j} + \cdots$$

در اینصورت، ضرایب B_{ij} از رابطه‌ی زیر به دست می آیند:

$$B_{ij} = \frac{1}{(k-j)!} \lim_{s \to r_i} \frac{d^{k-j}}{ds^{k-j}} (s - r_i)^k F(s)$$

یک مثال از ریشه های غیر ساده

هدف: تجزیه‌ی $\frac{1}{(s-1)(s-2)^2}$

مخرج یک ریشه ساده در $s = 1$ و یک ریشه مکرر مرتبه ۲ در $s = 2$ دارد؛ بنابراین تجزیه‌ی ما به صورت زیر خواهد بود:

$$F(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)^2} = \frac{A_1}{s-1} + \frac{B_{21}}{s-2} + \frac{B_{22}}{(s-2)^2}$$

برای ریشه‌ی ساده‌ی $s = 1$ خواهیم داشت:

$$A_1 = \lim_{s\to 1}(s-1)F(s) = \lim_{s\to 1}\frac{1}{(s-2)^2} = 1$$

همچنین:

$$(s-2)^2F(s)=\frac{1}{s-1}$$

در نتیجه:

$$B_{21}=\lim_{s\to 2}\frac{d}{ds}(s-2)^2F(s)=\lim_{s\to 2}\frac{d}{ds}\ \frac{1}{s-1}=\lim_{s\to 2}\frac{-1}{(s-1)^2}=-1$$

$$B_{22}=\lim_{s\to 2}(s-2)^2F(s)=\lim_{s\to 2}\frac{1}{s-1}=1$$

بنابراین

$$F(s)=\frac{1}{(s-1)(s-2)^2}=\frac{1}{s-1}+\frac{-1}{s-2}+\frac{1}{(s-2)^2}$$

نکته: چنانچه درجه‌ی صورت از مخرج بیشتر یا مساوی باشد، ابتدا یک چند جمله‌ای $P(s)$ استخراج کنید به گونه ای که در کسر باقیمانده، درجه‌ی صورت از مخرج کمتر باشد؛ مثلا

$$\frac{s^3+4s^2+3s+7}{s^2+3s+2}=\frac{(s+1)(s^2+3s+2)-2s+5}{s^2+3s+2}=s+1+\frac{-2s+5}{s^2+3s+2}$$

و سپس کسر باقیمانده $\frac{-2s+5}{s^2+3s+2}$ را به روش قبل تجزیه کنید. در این مثال، مخرج کسر $\frac{-2s+5}{s^2+3s+2}$ دارای دو ریشه‌ی ساده در $s=-1$ و $s=-2$ است و تجزیه آن به صورت زیر خواهد بود:

$$F(s)=\frac{-2s+5}{s^2+3s+2}=\frac{A_1}{s+1}+\frac{A_2}{s+2}$$

که در رابطه‌ی بالا

$$A_1=\lim_{s\to 1}(s+1)F(s)=7$$
$$A_2=\lim_{s\to 2}(s+2)F(s)=-9$$

بنابراین:

$$\frac{-2s+5}{s^2+3s+2} = \frac{7}{s+1} + \frac{-9}{s+2}$$

و نهايتاً

$$\frac{s^3+4s^2+3s+7}{s^2+3s+2} = s+1+\frac{7}{s+1} + \frac{-9}{s+2}$$