به نام زیبایی

پاسخ تمرینات سری پنجم سیگنال ها و سیستم ها

سوال ۱)

الف)

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{2}\int_0^2 x(t)e^{-jk\pi t}dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 x(t)\cos k\pi t dt \\
&- j\frac{1}{2}\int_0^2 x(t)\sin k\pi t dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 x(t)\cos k\pi t dt \\
&= \int_0^1 x(t)\cos k\pi t dt \\
&= \int_0^1 (1-t)\cos k\pi t dt \\
&= \frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi^2}
\end{aligned}
$$

ب)

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{3}\int_0^3 x(t)e^{-jk\frac{2\pi}{3}t}dt \\
&= \frac{1}{3}\int_0^1 2e^{-jk\frac{2\pi}{3}t}dt \\
&+ \frac{1}{3}\int_1^2 e^{-jk\frac{2\pi}{3}t}dt \\
&= -\frac{1}{\pi k}(e^{-jk\frac{2\pi}{3}} - 1) - \frac{1}{2\pi k}(e^{-jk\frac{4\pi}{3}} - e^{-jk\frac{2\pi}{3}})
\end{aligned}
$$

به ازای $k \neq 0$ و $a_0 = 1$.

پ)

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{n}\int_0^n e^{j2\pi\frac{m}{n}t}e^{-jk2\pi\frac{1}{n}t}dt \\
&= \frac{1}{n}\int_0^n e^{-j(k-1)2\pi\frac{m}{n}t}dt
\end{aligned}
$$

انتگرال فوق به ازای $k \neq 1$ برابر صفر و به ازای $k = 1$ برابر ۱ است؛ بنابراین

$$a_k = \delta[k-m]$$

ت)

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{۱}{۴}\int_۰^۴ y(t)e^{-j\frac{\pi}{۲}kt}dt \\ &= \frac{۱}{۴}\int_۰^۲ \sin \pi t e^{-j\frac{\pi}{۲}kt}dt \\ &= \frac{۱}{۴}\int_۰^۲ \frac{e^{j\pi t}-e^{-j\pi t}}{۲j}e^{-j\frac{\pi}{۲}kt}dt \\ &= \frac{۱-(-۱)^k}{\pi - \frac{\pi}{۴}k^۲} \end{aligned}$$

به ازای $k^۲ \neq ۴$ و $a_۲ = a_{-۲}^* = \frac{۱}{۴j}$.

ث) طبق خواص سری فوریه می دانیم:

$$\frac{d}{dt}x(t) \iff jk\omega_۰ a_k$$

در نتیجه:

$$a_k = \frac{۲}{۳j}(e^{-jk\frac{۲\pi}{۳}} - ۱) + \frac{۱}{۳j}(e^{-jk\frac{۴\pi}{۳}} - e^{-jk\frac{۲\pi}{۳}})$$

سوال ۲)

الف) از آنجا که سیستم LTI، فرکانس جدیدی به ورودی اضافه نمی کند، باید خروجی به صورت $A\cos ۲\pi t + B\sin ۲\pi t$ باشد. با جایگذاری خواهیم داشت:

$$(۴A + ۲\pi B)\cos ۲\pi t + (۴B - ۲\pi A)\sin ۲\pi t = \cos ۲\pi t$$

که نتیجه می دهد:

$$\begin{aligned} A &= \frac{۲}{۲\pi^۲ + ۸} \\ B &= \frac{\pi}{۲\pi^۲ + ۸} \end{aligned}$$

بنابراین ضرایب سری فوریه عبارتند از:

$$\begin{aligned} a_۱ &= \frac{A}{۲} + \frac{B}{۲j} \\ a_{-۱} &= \frac{A}{۲} - \frac{B}{۲j} \end{aligned}$$

ب) مشابه استدلال الف، خروجی باید به فرم زیر باشد:

$$y(t) = A_۱\cos ۴\pi t + A_۲\cos ۶\pi t + B_۱\sin ۴\pi t + B_۲\sin ۶\pi t$$

و با جایگذاری به مقادیر زیر می رسیم:

$$A_۱ = -\frac{\pi}{۴\pi^۲ + ۴}$$
$$A_۲ = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \frac{۱ - \frac{۳\pi}{۲}}{۹\pi^۲ + ۴}$$
$$B_۱ = \frac{۱}{۴\pi^۲ + ۴}$$
$$B_۲ = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \frac{۱ + \frac{۳\pi}{۲}}{۹\pi^۲ + ۴}$$

همچنین به شرایط اولیه نیاز نداریم؛ زیرا ورودی از $-\infty$ وجود دارد و در نتیجه خروجی نیز در تمام لحظات مقدار خواهد داشت.

سوال ۳)

الف)

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-|t-n|}$$

این سیگنال با دوره ی ۱ متناوب است؛ بنابراین

$$\begin{aligned}
a_k &= \int_۰^۱ y(t) e^{j۲\pi k t} dt \\
&= \int_۰^۱ \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-|t-n|} e^{j۲\pi k t} dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_۰^۱ e^{-|t-n|} e^{j۲\pi k t} dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_۰^۱ e^{-|t-n|} e^{j۲\pi k (t-n)} dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+۱} e^{-|t_۱|} e^{j۲\pi k t_۱} dt_۱ \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t_۱|} e^{j۲\pi k t_۱} dt_۱ \\
&= \int_۰^{\infty} e^{-t_۱} e^{j۲\pi k t_۱} dt_۱ \\
&+ \int_{-\infty}^{۰} e^{t_۱} e^{j۲\pi k t_۱} dt_۱ \\
&= \frac{۱}{۱ - j۲\pi k} + \frac{۱}{۱ + j۲\pi k} \\
&= \frac{۲}{۱ + ۴\pi^۲ k^۲}
\end{aligned}$$

ب)

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-۱)^n e^{-|t-n|}$$

این سیگنال با دوره ی ۲ متناوب و دارای خاصیت $y(t+۱) = -y(t)$ است (به چنین سیگنال هایی فرد هارمونیک گفته می شود)؛ بنابراین

$$a_k(-۱)^k = -a_k \implies a_k = ۰ \quad , \quad \text{زوج } k$$

و به ازای k فرد می توان نوشت:

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۲} y(t)e^{j\pi kt}dt \\
&= \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۲} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-۱)^n e^{-|t-n|}e^{j\pi kt}dt \\
&= \frac{۱}{۲}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{۰}^{۲} (-۱)^n e^{-|t-n|}e^{j\pi kt}dt \\
&= \frac{۱}{۲}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{۰}^{۲} e^{-|t-n|}e^{j\pi k(t-n)}dt \\
&= \frac{۱}{۲}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{n}^{n+۲} e^{-|t_۱|}e^{j\pi kt_۱}dt_۱ \\
&= \frac{۱}{۲}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t_۱|}e^{j\pi kt_۱}dt_۱ \\
&= \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{\infty} e^{-t_۱}e^{j۲\pi kt_۱}dt_۱ \\
&+ \frac{۱}{۲}\int_{-\infty}^{۰} e^{t_۱}e^{j۲\pi kt_۱}dt_۱ \\
&= \frac{۱}{۲}\frac{۱}{۱-j۲\pi k} + \frac{۱}{۲}\frac{۱}{۱+j۲\pi k} \\
&= \frac{۱}{۱+۴\pi^۲k^۲}
\end{aligned}$$

بنابراین

$$a_k = \begin{cases} ۰ & , \quad \text{زوج } k \\ \frac{۱}{۱+۴\pi^۲k^۲} & , \quad \text{فرد } k \end{cases}$$

سوال ۴)

شرط اول بیان می دارد:

$$x(t) = x(t)e^{-j\frac{۲\pi}{۳}۲t}$$

به عبارت دیگر، در نقاط $t = \frac{۳}{۲}k$ که مقدار $e^{-j\frac{۲\pi}{۳}۲t}$ برابر ۱ است، سیگنال مقدار دارد و در غیر این نقاط الزاما داریم $x(t) = ۰$. بنابراین چنین سیگنالی فقط می تواند شامل ضربه در نقاط $t = \frac{۳}{۲}k$ باشد.

چنین سیگنالی، دارای فرم کلی زیر است:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A\delta(t - ۳n) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} B\delta(t - ۳n - \frac{۳}{۲})$$

شرط ۳، الزام می دارد $A = ۱$؛ زیرا سطح زیر ضربه برابر ۱ است و به طریق مشابه $B = ۲$؛ در نتیجه

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - ۳n) + ۲ \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - ۳n - \frac{۳}{۲})$$

سوال ۵)

الف)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jkt\frac{۲\pi}{t}} \implies$$

$$x'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} jk\frac{۲\pi}{T} a_k e^{jkt\frac{۲\pi}{T}}$$

ب)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jkt\frac{۲\pi}{t}} \implies$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(u)du = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_{-\infty}^{t} e^{jku\frac{۲\pi}{T}} du$$

از آنجا که انتگرال تابع ثابت روی بازه‌ی نامحدود، بینهایت است باید داشته باشیم $a_۰ = ۰$. همچنین

$$e^{-j\infty\omega_۰} = ۰$$

بنابراین

$$\int_{-\infty}^{t} x(u)du = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_{-\infty}^{t} e^{jku\frac{۲\pi}{T}} du = \int_{-\infty}^{t} x(u)du = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \frac{T}{j۲\pi k} e^{jkt\frac{۲\pi}{T}}$$

پ) اگر $x(t)$ حقیقی باشد، آنگاه با توجه به $x(t) = x^*(t)$ داریم:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jkt\frac{۲\pi}{t}}$$

$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* e^{-jkt\frac{۲\pi}{t}}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k}^* e^{-j(-k)t\frac{۲\pi}{t}}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k}^* e^{jkt\frac{۲\pi}{t}}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jkt\frac{۲\pi}{t}}$$

بنابراین $a_k = a^*_{-k}$. این گزاره، معادل با تمام گزاره های این بخش است.
ت) طبق تعریف

$$x_e(t) = \frac{x(t)+x(-t)}{۲} = \frac{x(t)+x^*(-t)}{۲} = \Longleftrightarrow \frac{a_k+a^*_k}{۲} = \Re\{a_k\}$$

به طریق مشابه

$$x_o(t) = \frac{x(t)-x(-t)}{۲} = \frac{x(t)-x^*(-t)}{۲} = \Longleftrightarrow \frac{a_k-a^*_k}{۲} = j\Im\{a_k\}$$

سوال ۶)

اگر c_k ضرایب سری فوریه ی سیگنال $x(t)y(t)$ باشد، در این صورت:

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{۱}{T}\int_{۰}^{T} x(t)y^*(t)e^{-j۲\pi k\frac{۱}{T}t}dt \\
&= \frac{۱}{T}\int_{۰}^{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{j۲\pi m\frac{۱}{T}t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b^*_{-n} e^{j۲\pi n\frac{۱}{T}t} e^{-j۲\pi k\frac{۱}{T}t}dt \\
&= \frac{۱}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_m b^*_{-n}\int_{۰}^{T} e^{j۲\pi m\frac{۱}{T}t} e^{j۲\pi n\frac{۱}{T}t} e^{-j۲\pi k\frac{۱}{T}t}dt \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m b^*_{m-k}
\end{aligned}$$

از آنجا که برای سیگنال $z(t)$ با ضرایب سری فوریه‌ی d_k داریم

$$d_{۰} = \frac{۱}{T}\int_{۰}^{T} z(t)dt$$

در اینصورت

$$c_{۰} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m b^*_m = \frac{۱}{T}\int_{۰}^{T} x(t)y^*(t)dt = ۰$$

■