به نام زیبایی

پاسخ تمرینات سری دوازدهم سیگنال ها و سیستم ها

سوال ۱)

الف)

$$X(z) = z^{-1} + 2z^{-2}$$

این تبدیل، دارای ناحیه همگرایی کل صفحه مختلط به جز صفر است و بنابراین تبدیل فوریه دارد.

ب)

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n u[n] z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^{-n} \\ &= \frac{1}{1+z} \quad , \quad |z| > 1 \end{aligned}$$

چون ناحیه همگرایی خارج دایره واحد است، در نتیجه دایره واحد را شامل نمی شود و این سیگنال تبدیل فوریه ندارد (ولی می توان هم چنان برای آن تبدیل فوریه تعمیم یافته تعریف کرد؛ زیرا قطب های آن روی دایره واحدند).

پ) سیگنال $(1/3)^n u[n]$ دارای تبدیل z ای برابر با $\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$ با ناحیه همگرایی $\frac{1}{3} < |z|$ است و در نتیجه سیگنال این بخش، از شیفت $(1/3)^n u[n]$ به اندازه ۲ واحد به راست به دست می آید؛ پس تبدیل z آن خواهد بود:

$$X(z) = \frac{z^{-2}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \quad , \quad |z| > \frac{1}{3}$$

چون ناحیه همگرایی شامل دایره واحد است، این سیگنال تبدیل فوریه دارد.

سوال ۲) در هر دو بخش، تعریف می کنیم $u \triangleq z^{-1}$.

الف)

$$\begin{aligned}X(z) &= \frac{۲-u}{۱-\frac{۱}{۴}u^۲}\\ &= \frac{۴(۲-u)}{۴-u^۲}\\ &= \frac{۴(۲-u)}{(۲-u)(۲+u)}\\ &= \frac{۴}{۲+u}\\ &= \frac{۴}{۲+z^{-۱}}\\ &= \frac{۲}{۱+\frac{۱}{۲}z^{-۱}}\end{aligned}$$

بنابراین

$$x[n] = ۲(-\frac{۱}{۲})^n u[n]$$

ب)

$$\begin{aligned}X(z) &= \frac{u-\frac{۱}{۲}}{(۱-\frac{۱}{۲}u)^۲}\\ &= \frac{۴u-۲}{(u-۲)^۲}\\ &= \frac{A}{u-۲}+\frac{B}{(u-۲)^۲}\\ &= \frac{۴}{u-۲}+\frac{۶}{(u-۲)^۲}\\ &= \frac{۴}{z^{-۱}-۲}+\frac{۶}{(z^{-۱}-۲)^۲}\\ &= -\frac{۲}{۱-\frac{۱}{۲}z^{-۱}}+\frac{۱/۵}{(۱-\frac{۱}{۲}z^{-۱})^۲}\end{aligned}$$

بنابراین:

$$x[n] = ۲(\frac{۱}{۲})^n u[-n-۱] - ۳(n+۱)(\frac{۱}{۲})^{n+۱}u[-n-۲]$$

پ)

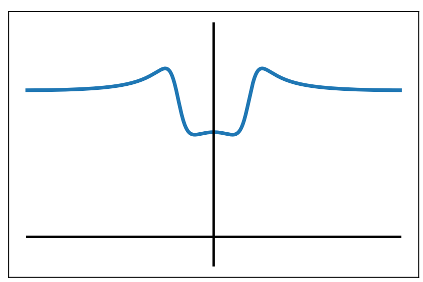
$$
\begin{aligned}
X(z) &= \frac{۳}{u^{-۱} - \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۸}u} \\
&= \frac{۳}{u^{-۱} - \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۸}u} \\
&= \frac{۲۴u}{۸ - ۲u - u^{۲}} \\
&= \frac{۲۴u}{-(u-۲)(u+۴)} \\
&= \frac{A}{u-۲} + \frac{B}{u+۴} \\
&= \frac{-۸}{u-۲} + \frac{-۱۶}{u+۴} \\
&= \frac{-۸}{z^{-۱}-۲} + \frac{-۱۶}{z^{-۱}+۴} \\
&= \frac{۴}{۱-\frac{۱}{۲}z^{-۱}} + \frac{-۴}{۱+\frac{۱}{۴}z^{-۱}}
\end{aligned}
$$

چون باید ناحیه همگرایی شامل دایره واحد باشد، در اینصورت $|z| > \frac{۱}{۲}$ و داریم:

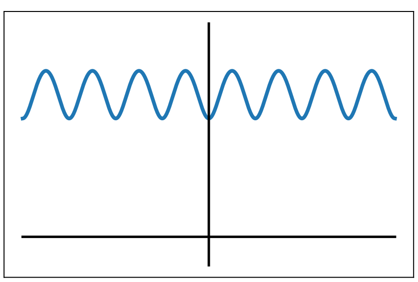
$$x[n] = ۴(\frac{۱}{۲})^n u[n] - ۴(-\frac{۱}{۴})^n u[n]$$

سوال ۳)

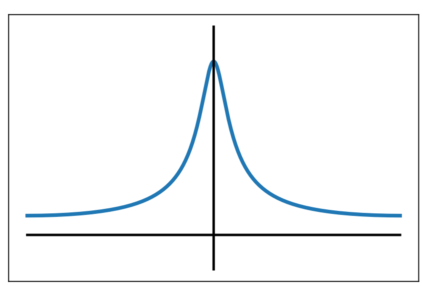
بازه ی فرکانسی در هر یک از قسمت های زیر، $[-\pi, \pi]$ است.



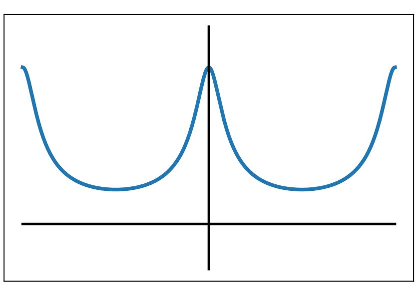
(آ) قسمت الف



(ب) قسمت ب



(ج) قسمت ج



(د) قسمت د

سوال ۴)

از شرط ۲ نتیجه می شود:

$$X(z) = \frac{P(z)}{(z-a)(z-b)}$$

چون $x[n]$ حقیقی است و یک قطب در $\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}$ دارد، قطب دیگر آن در $\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}$ است؛ بنابراین:

$$X(z) = \frac{P(z)}{(z-\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}})(z-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}})} = \frac{P(z)}{z^2-\frac{1}{2}z+\frac{1}{4}}$$

همچنین از شرط ۳ داریم

$$X(z) = \frac{kz^2}{z^2-\frac{1}{2}z+\frac{1}{4}}$$

و در نهایت شرط ۵ به ما $k = 2$ می دهد؛ پس به دلیل دست راستی بودن $x[n]$:

$$X(z) = \frac{2z^2}{z^2-\frac{1}{2}z+\frac{1}{4}} \quad , \quad |z| > \frac{1}{2}$$

سوال ۵)

الف) از شرط ۲ داریم:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1+\frac{a}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}}{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}} = 1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{a(1-\frac{1}{2}z^{-1})}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

همچنین طبق شرط ۱، ۲− در ناحیه همگرایی $X(z)$ می افتد؛ در نتیجه:

$$H(-2) = 0 \implies a = -\frac{9}{8}$$

ب) ناحیه همگرایی $X(z)$ به صورت $|z| > \frac{1}{4}$ است که نتیجه می دهد که ۱ در این ناحیه همگرایی می افتد؛ پس

$$x[n] = 1 = 1^n \implies y[n] = H(1)\cdot 1^n = -\frac{1}{4}$$

پ) از آنجا که مقدار $-\frac{1}{6}$ در ناحیه همگرایی $X(z)$ قرار نمی گیرد، در نتیجه

$$H(-\frac{1}{6}) = \infty$$

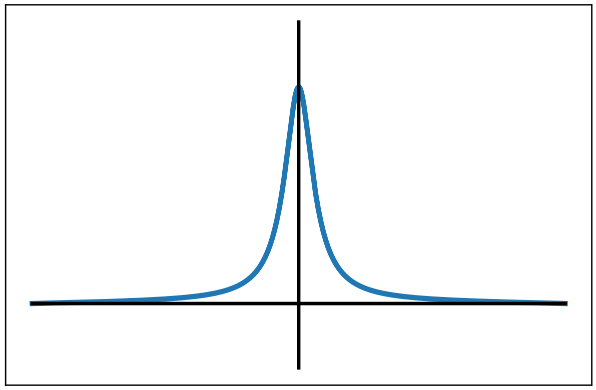
و خروجی نامحدود است.

سوال ۶)

الف) چون سیستم ۱ پایدار است، در نتیجه ناحیه همگرایی آن به صورت $0/8 < |z| < 1/2$ خواهد بود؛ در نتیجه این سیستم غیرعلی و دوطرفه است.

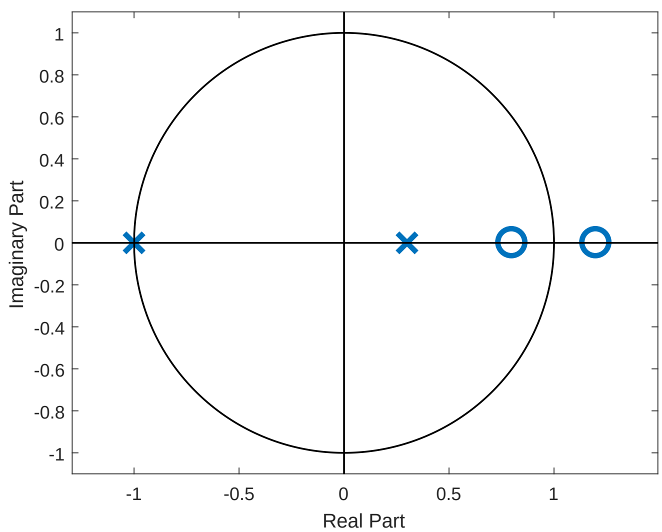
ب) سیستم ۲ علی است؛ پس ناحیه همگرایی آن $|z| > 1$ بوده که شامل دایره واحد نمی شود؛ در نتیجه سیستم ناپایدار است.

پ) تنها صفر واقع در ۱− از $X(z)$، روی دایره واحد افتاده و صفری از $X(e^{j\omega})$ نیز هست؛ پس $X(e^{j\omega})$ تنها در $\omega = \pi$ صفر می شود (همچنین مضارب فرد π به دلیل متناوب بودن $X(e^{j\omega})$).



ت) شکل پاسخ فرکانسی سیستم ۱، به شکل بالاست؛ بنابراین، این سیستم یک فیلتر پایین گذر است.

ث) در سیستم معکوس، جای صفر و قطب های سیستم اصلی عوض می شوند؛ بنابراین نمودار صفر–قطب سیستم معکوس به صورت زیر است:



از طرفی باید ناحیه همگرایی سیستم معکوس، با ناحیه همگرایی سیستم اصلی اشتراک داشته باشد. سه ناحیه همگرایی ممکن برای سیستم معکوس عبارتند از:

$$(۱) : |z| < ۰٫۳$$
$$(۲) : ۰٫۳ < |z| < ۱$$
$$(۳) : |z| > ۱$$

که از این بین، فقط نواحی ۲ و ۳ دارای اشتراک با $۰٫۸ < |z| < ۱٫۲$ هستند که نتیجه می شود سیستم اصلی دو معکوس دارد (این امر تناقضی محسوب نمی شود؛ زیرا دو معکوس ماهیتا متفاوتند؛ یکی ناپایدار و علی و دیگری ناپایدار و غیرعلی است).

سوال ۷)

الف) اگر $Y(z)$ تبدیل z سیگنال $a^n x[n]$ باشد، آنگاه:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x[n] z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] (a^{-1} z)^{-n} \\ &= X(a^{-1} z) \end{aligned}$$

از آنجا که باید $a^{-1}z$ در ناحیه همگرایی $X(z)$ بیفتد، در نتیجه ناحیه همگرایی $Y(z)$ عبارتست از:

$$\mathrm{ROC}_Y = \{az : z \in \mathrm{ROC}_X\}$$

ب)

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n] z^{-n} \\ &= \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] (z^*)^{-n}\right]^* \\ &= [X(z^*)]^* \\ &= X^*(z^*) \end{aligned}$$

ناحیه همگرایی تغییر نمی کند؛ زیرا $|z^*| = |z|$.

پ)

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n] z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] (z^{-1})^{-n} \\ &= X(z^{-1}) \end{aligned}$$

$$\mathrm{ROC}_Y = \{z^{-1} : z \in \mathrm{ROC}_X\}$$

ت)

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \implies \\ \frac{d}{dz} X(z) &= -\sum_{n=-\infty}^{\infty} n x[n] z^{-n-1} \implies \\ -z \frac{d}{dz} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} n x[n] z^{-n} \implies \end{aligned}$$

ناحیه همگرایی تعییری نمی کند.

ث) می توان گفت $\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ پاسخ سیستمی با پاسخ ضربه‌ی $h[n] = u[n]$ به ورودی $x[n]$ است. از طرفی:

$$u[n] \iff \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

بنابراین:

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{X(z)}{1 - z^{-1}}$$

تبدیل فوق می تواند ۱ را از ناحیه همگرایی حذف کند (ولی الزامی نیست زیرا ممکن است با صفری در صورت حذف شود).