نمونه سوالات

مصطفی ایاز

۱۶اردیبهشت ۱۴۰۲

فهرست مطالب

فصل ۱

مبانی احتمال و جبر مجموعه ها

سوال ۱) نشان دهید احتمال هر مجموعه، کمتر از یا مساوی ۱ است.

سوال ۲) فرض کنید که برنامه ي نوشته اید که اعداد ۱ تا ۹ را به صورت کاملا تصادفی در هر بار اجرا در ۳ جایگاه (سه رقم) چاپ می کند. احتمال ظاهر شده اعداد با هر سه رقم فرد را محاسبه کنید.

سوال ۳) از کیسه‌ای که دارای ۴۰ مهره سیاه و ۶۰ مهره قرمز است، ۲۰ مهره بر می‌داریم. با چه احتمالی، از این ۲۰ مهره، ۵ مهره سیاه و ۱۵ مهره قرمزند؟

سوال ۴) دو کیسه در اختیار داریم. کیسه اول شامل ۲۰ گلوله قرمز و ۳۰ گلوله آبی و دومی شامل ۲۰ گلوله زرد، ۳۰ گلوله آبی و ۵۰ گلوله قرمز است. ابتدا یکی از کیسه ها را به تصادف انتخاب کرده و سپس گلوله‌ای را از داخل آن به تصادف بر می داریم.

الف) با چه احتمالی گلوله انتخاب شده قرمز و از کیسه‌ی ۲ است؟

ب) اگر گلوله از کیسه ۱ انتخاب شده باشد، با چه احتمالی آبی است؟

پ) اگر گلوله زرد نباشد با چه احتمالی قرمز است؟

ت) اگر گلوله آبی نباشد، با چه احتمالی از کیسه‌ی ۲ انتخاب شده است؟

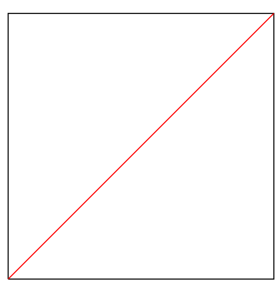
ث) اگر گلوله قرمز یا زرد نباشد، با چه احتمالی از کیسه ۲ انتخاب شده است؟

سوال ۵) سه جعبه در اختیار داریم. جعبه‌ی ۱ شامل ۷ توپ آبی و ۳ توپ قرمز، جعبه‌ی ۲ شامل ۱ توپ آبی، ۳ توپ قرمز و ۶توپ زرد و جعبه‌ی ۳ شامل ۷ توپ آبی و ۳ توپ زرد هستند. ابتدا یکی از جعبه ها را به تصادف برداشته و سپس توپی از آن جعبه به تصادف بر می‌داریم. اگر توپ بیرون آمده آبی نباشد، با چه احتمالی قرمز است و از جعبه‌ی ۱ یا از جعبه‌ی ۲ بیرون آمده است؟

سوال ۶) یک عدد دو رقمی را به این صورت می سازیم که هر رقم آن، به صورت تصادفی از بین ارقام ۱ تا ۹ انتخاب شده باشد. با چه احتمالی، عدد ساخته شده بر ۹ بخش پذیر است؟

سوال ۷) سه جعبه داریم که هر یک شامل ۱۰ توپ هستند. در جعبه اول، ۳ توپ آبی و ۷ توپ قرمز، در جعبه دوم، ۳ توپ سفید و ۵ توپ آبی و در جعبه سوم، ۱ توپ قرمز و ۹ توپ سفید هستند. ابتدا یکی از جعبه ها را به تصادف انتخاب کرده و سپس توپی از آن جعبه بیرون می‌کشیم. اگر توپ مورد نظر سفید باشد، با چه احتمالی از جعبه دوم <u>نیست</u>؟

سوال ۸) دو نقطه را به تصادف از داخل مربع زیر با طول ضلع ۱ انتخاب می کنیم:



احتمال اینکه این دو نقطه در دو طرف متفاوت قطر مربع انتخاب شوند و فاصله‌ی هر یک از آنها از قطر نشان داده شده‌ی مربع (قطر قرمز رنگ در شکل) بیش از ۰.۵ باشد چقدر است؟

سوال ۹) دو جعبه در اختیار داریم. جعبه ۱ شامل ۱۰ توپ سفید و ۱۰ توپ آبی و جعبه دوم شامل ۲۰ توپ سفید و ۳۰ توپ قرمز است. ابتدا یکی از جعبه ها را به تصادف انتخاب کرده و سپس از داخل جعبه انتخاب شده، گلوله ای را به تصادف بر می داریم.

الف) اگر گلوله سفید باشد، با چه احتمالی از جعبه‌ی ۲ انتخاب شده است؟

ب) اگر گلوله سفید نباشد، با چه احتمالی قرمز است؟

سوال ۱۰) یک تاس سالم (که احتمال رخداد هر وجه آن $\frac{1}{6}$ است) را دوبار پرتاب می‌کنیم و نتیجه دوبار پرتاب را در نظر می‌گیریم. اگر واقعه‌ی A معادل حالت هایی باشد که مجموع دو عدد رو آمده کمتر از ۵ باشد، و واقعه‌ی B به گونه‌ای باشد که

$$B = \{(1,4),(2,3),(2,2),(1,2),(3,1)\},$$

در این صورت مقدار احتمال $P(A-B)$ را با بهره گیری از تعریف اصل موضوعی احتمال (کولموگروف) بیابید.

سوال ۱۱) یک سکه سالم را می اندازیم. اگر رو آمد، تاس سالمی را می اندازیم و عدد رو آمده را یادداشت می‌کنیم و در غیر این صورت، سه تاس را پرتاب کرده و مجموع سه عدد را یادداشت می کنیم. با چه احتمالی، عدد یادداشت شده برابر ۴ است؟

سوال ۱۲) از مجموعه‌ی تمام اعداد دو رقمی بدون ارقام تکراری ای که می‌توان از ارقام ۱، ۵، ۷ و ۹ ساخت، عددی را به تصادف بر می گزینیم. با چه احتمالی عدد انتخاب شده، بر ۳ بخش پذیر است؟

سوال ۱۳) کشوری شامل دو استان ۱ و ۲ است. استان ۱، شامل ۶۰ مرد و ۴۰ زن و استان ۲ شامل ۶۵۰ زن و ۳۵۰ مرد است. در استان ۱، ۱۰ مرد و ۱۰ زن چشم آبی و در استان ۲، ۳۰ مرد و ۲۰ زن چشم آبی هستند. فردی را به تصادف از این کشور انتخاب می‌کنیم.

الف) اگر این فرد چشم آبی باشد، با چه احتمالی از استان ۱ انتخاب شده است؟

ب) اگر این فرد زن باشد، با چه احتمالی از استان ۲ انتخاب شده و چشم آبی نیست؟

پ) اگر فرد انتخاب شده مرد باشد، با چه احتمالی چشم آبی است؟

سوال ۱۴) استانی دارای دو شهر است. شهر۱ دارای ۱۲۰ مرد و ۸۰ زن و شهر ۲ دارای ۱۰۰۰ زن و ۸۰۰ مرد است. در شهر۱، ۵۰ مرد و ۳۰ زن و در شهر ۲، ۱۰۰ مرد و ۱۵۰ زن به تب کریمه کنگو مبتلا هستند. فردی را از این استان به تصادف انتخاب می‌کنیم.

الف) با چه احتمالی این فرد، زن سالمی از شهر۱ است؟

ب) اگر فردی که انتخاب می‌کنیم بیمار باشد، با چه احتمالی مردی از شهر ۲ است؟

پ) اگر فرد انتخاب شده سالم باشد، احتمال زن بودن او چقدر است؟

سوال ۱۵) یک سکه سالم را برداشته، آن را سه بار پرتاب می کنیم و نتیجه‌ی سه بار پرتاب را در نظر می‌گیریم. اگر رو آمدن سکه را با H و پشت آمدن را با T نمایش دهیم:

الف) فضای نمونه را بیابید.

ب) این مسئله‌ی احتمال، چند واقعه‌ی محتمل دارد؟ (واقعه طبق تعریف یک زیر مجموعه از فضای نمونه است).

پ) طبق تعریف کلاسیک احتمال، واقعه‌ی اینکه در پرتاب اول و دوم سکه نتیجه یکسان باشد (در پرتاب سوم نتیجه دلخواه است)، با چه احتمالی رخ می دهد؟

سوال ۱۶) دو مجموعه‌ی $A=\{1,4,5\}$ و $B=\{2,3,4\}$ را در نظر بگیرید. مجموعه های زیر را به دست آورید.

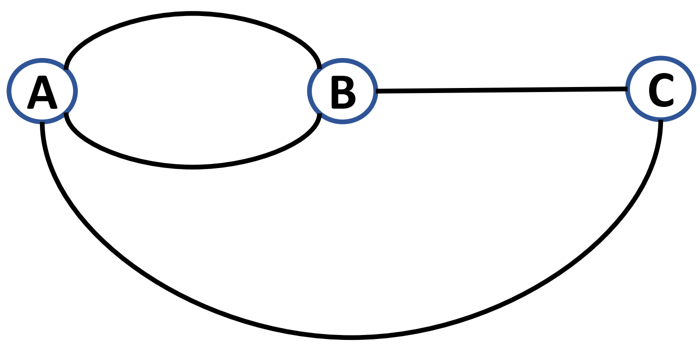
الف) $A\cap B$ ، ب) $A-B$ ، پ) $A\times B$ (ضرب دکارتی)

ت) اگر $C=\{2,5,6\}$، با محاسبه‌ی مجموعه های $(A\cup B)\cap C$ و $(A\cap C)\cup(B\cap C)$ نشان دهید $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

سوال ۱۷) به کمک تعریف اصولی احتمال (و با بهره گیری از اصول کولموگروف)، برای هر دو مجموعه‌ی A و B نتیجه بگیرید $P(A) = P(A-B) + P(A\cap B)$.

سوال ۱۸) در یک کیسه، ۵ گلوله‌ی آبی و ۳ گلوله‌ی سفید وجود دارد. دو عدد گلوله بر می‌داریم. احتمال این را که یکی از گلوله ها آبی و دیگری سفید باشد، در دو حالت با جایگذاری و بدون جایگذاری به دست آورید (جایگذاری حالتی است که گلوله ای را پس از بیرون آوردن از کیسه و مشاهده‌ی رنگ آن، به کیسه باز گردانیم).

سوال ۱۹) در نقشه‌ی زیر، از شهر A به شهر B دو مسیر و از B به C یا از A به C یک مسیر وجود دارد. اگر احتمال قطع شدن هر مسیر مستقل از سایرین برابر p باشد، احتمال آن که شخصی بتواند از شهر A به C برود چقدر است؟



سوال ۲۰) در مبحث مدولاسیون دیجیتال، می‌توان هر سمبل مخابراتی را با تعدادی بیت کد نموده و پس از شکل دهی پالس روی کانال ارسال کرد. فرض کنید یک سمبل مخابراتی از n بیت تشکیل شده باشد. به طور مثال

$$S_k \equiv (1010001101)_2$$

که k اندیس سمبل است و در اینجا سمبل از 10 بیت تشکیل شده است. این سمبل از یک کانال مخابراتی ارسال و در انتهای کانال دریافت می‌شود. اگر احتمال خرابی هر بیت

مستقل از سایرین برابر p باشد، با چه احتمالی سمبل به درستی آشکار نمی‌شود؟

سوال ۲۱) دو تاس را پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه دو عدد روآمده نسبت به هم اول باشند چقدر است؟

سوال ۲۲) یک سکه‌ی سالم و یک تاس سالم را با هم پرتاب می کنیم.

الف) احتمال اینکه سکه به رو بیفتد و تاس عدد فرد شود را به دست آورید.

ب) احتمال اینکه سکه به رو بیفتد یا تاس عدد فرد شود را به دست آورید (هر دو باهم نیز می‌توانند رخ دهند!)

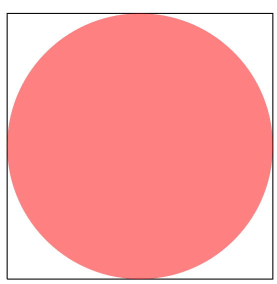
سوال ۲۳) یک تاس را پرتاب می کنیم. اگر مضرب ۳ ظاهر شد، نتیجه را یادداشت می کنیم و در غیر این صورت سکه ای را می اندازیم و نتیجه‌ی سکه (پشت یا رو) را می نویسیم.

الف) فضای شدنی این مسئله را بیابید.

ب) با چه احتمالی واقعه‌ی رو آمدن سکه رخ می‌دهد؟

پ) احتمال واقعه‌ی اینکه تاس عدد ۱ بیاید یا سکه به پشت ظاهر شود را به دست آورید.

سوال ۲۴) نقطه‌ای را از داخل مربع زیر بر می‌گزینیم (طول ضلع مربع برابر ۲ است).



احتمال اینکه،

الف) نقطه داخل دایره‌ی واحد (نشان داده شده در شکل) بیفتد چقدر است؟

ب) نقطه روی یکی از دو قطر مربع بیفتد چقدر است؟

پ) فاصله‌ی نقطه از هر یک از رأس های مربع بیش از 0.5 باشد چقدر است؟

سوال ۲۵) از بین اعداد سه رقمی‌ای که با ترکیب رقم های ۰، ۱ و ۲ می‌توان ساخت (تکرار مجاز است):

الف) چند عدد به ۳ بخش پذیرند؟

ب) اگر عددی را به تصادف برگزینیم، با چه احتمالی زوج خواهد بود؟

سوال ۲۶) در یک جامعه‌ی آماری، نسبت جمعیت زنان بزرگسال، مردان بزرگسال و کودکان به کل جمعیت جامعه به ترتیب برابر 0.37، 0.43 و 0.2 است. در این جامعه، 0.15 مردان بزرگسال و 0.25 زنان بزرگسال به نوعی بیماری مبتلا شده اند. فرد بزرگسالی را به تصادف از این جامعه انتخاب می‌کنیم، احتمال بیمار بودن او چقدر است؟

سوال ۲۷) فرض کنید مجموعه های B و C مستقل و دارای احتمال مثبت باشند. در چه حالتی داریم $P(A|B \cap C) = P(A|B)P(A|C)$ ؟

سوال ۲۸) (کران پایین برای احتمال اجتماع) برای هر دو مجموعه‌ی A و B ثابت کنید

$$P(A) + P(B) - \frac{1}{4\max\{1 - P(A), 1 - P(B)\}} \leq P(A \cup B).$$

سوال ۲۹) جعبه‌ی ۱ حاوی ۱۰۰۰ لامپ است که ۱۰ درصد آنها خراب هستند. جعبه‌ی ۲ نیز حاوی ۲۰۰۰ لامپ است که ۵ درصد آنها خراب هستند. از یک جعبه که به طور تصادفی انتخاب شده، دو لامپ بیرون آورده می شوند.

الف) احتمال خرابی هر دو چقدر است؟

ب) اگر هر دو لامپ خراب باشند، با چه احتمالی جعبه‌ی ۱ انتخاب شده است؟

سوال ۳۰) نشان دهید که برای استقلال n رخداد باید $2^n - n - 1$ معادله برقرار باشد.

سوال ۳۱) در یک گل فروشی، ۱۰ گل لاله، ۵ نسترن، ۳ بنفشه، ۲ اقاقیا و ۱ رز هلندی وجود دارد. می‌خواهیم دسته گلی شامل ۵ گل که همگی به تصادف انتخاب شده باشند، برگزینیم. با چه احتمالی

الف) دسته گل شامل ۲ نسترن و ۲ بنفشه است؟

ب) دسته گل شامل هیچ گل لاله و بنفشه ای نیست؟

پ) دسته گل شامل حداقل یک گل از هر یک از ۴ نوع گل است؟

ت) تمام گلها، از نظر نوع متمایزند؟

(دقت کنید گل های هر نوع با هم فرقی نمی کنند!)

سوال ۳۲) الف) از یک مجموعه‌ی n عضوي، یک زیر مجموعه به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال آن که این زیر مجموعه k عضوي باشد چقدر است؟

ب) به کمک قسمت قبل ثابت کنید $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$.

سوال ۳۳) احتمال اینکه فردی به covid-19 مبتلا شود، در صورتی که ماسک نزند برابر 70% و در صورتی که ماسک بزند برابر 15% است. اگر این فرد به طور متوسط 5% مواقع ماسک بزند، احتمال کرونا گرفتن او چقدر است؟

سوال ۳۴) دو تاس می اندازیم و جمع دو عدد رو آمده را یادداشت می کنیم.

الف) احتمال اینکه عدد رو آمده، زوج باشد چقدر است؟

ب) اگر جمع دو عدد رو آمده زوج باشد، با چه احتمالی بیشتر از ۸ است؟

سوال ۳۵) از بین 2^n زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی $S=\{1,2,\cdots,n\}$، دو زیر مجموعه به تصادف و مستقل از هم بر می داریم. اگر این دو زیر مجموعه، دارای اشتراک $\{1,2\}$ باشند،

احتمال آن که یکی از زیرمجموعه‌ها شامل عضوهای ۳، ۴ و ۵ باشد چقدر است؟ ($n \geq 5$)

سوال ۳۶) سه جعبه در اختیار داریم. در جعبه‌ی ۱، ۱۰۰۰ لامپ موجود است که ۳تای آنها معیوبند. جعبه‌ی ۲ شامل ۱۰ لامپ است که ۳ تای آنها معیوبند و در جعبه‌ی سوم هم ۳۰۰۰ لامپ وجود دارد که همگی سالمند. اگر یکی از این جعبه ها را به تصادف برگزیده و از داخل آن لامپی انتخاب کنیم،

الف) با چه احتمالی لامپ معیوب است؟

ب) اگر لامپ معیوب باشد، با چه احتمالی از جعبه‌ی ۲ انتخاب شده است؟

پ) اگر لامپ سالم باشد، با چه احتمالی از یکی از جعبه‌های ۱ یا ۲ انتخاب شده است؟

سوال ۳۷) از یک جعبه که دارای M گلوله‌ی سفید و $N-M$ گلوله‌ی سیاه است، n گلوله برداشته می‌شود.

الف) احتمال آنکه m گلوله از گلوله های برداشته شده سفید باشند در حالت با جایگذاری چقدر است؟

ب) احتمال آنکه m گلوله از گلوله های برداشته شده سفید باشند در حالت بدون جایگذاری چقدر است؟

ج) اگر بدانیم تمام گلوله های سفید برداشته شده اند، احتمال آنکه دقیقا ۲ گلوله‌ی سیاه نیز برداشته شده باشند چقدر است؟

سوال ۳۸) سکه ای را پرتاب می‌کنیم. اگر رو آمد، دو تاس را پرتاب کرده، جمع دو عدد روی تاس را یادداشت می کنیم. اگر سکه پشت آمد، یک تاس را پرتاب کرده و عدد آنرا یادداشت می کنیم. با چه احتمالی

الف) عدد یادداشت شده برابر ۳ است؟ ، ب) عدد یادداشت شده برابر ۸ است؟

سوال ۳۹) موارد زیر را در یک مسئله‌ی احتمالاتی تعریف کنید:

الف) فضای نمونه   ،   ب) پیشامد (واقعه)   ،   پ) پیشامد (واقعه‌ی) ساده

سوال ۴۰) آیا فضای نمونه در یک مسئله‌ی احتمالاتی، تنها مجموعه با احتمال یک است؟ پاسخ را برای هر دو حالتی که فضای نمونه متناهی یا نامتناهی باشد شرح دهید و در صورت لزوم، مثال بزنید.

سوال ۴۱) اگر A فضای نمونه‌ی آزمایش پرتاب سکه با رخدادهای پشت و رو و B فضای نمونه‌ی پرتاب تاس با اعداد طبیعی ۱ تا ۶ باشد،

الف) حاصلضرب دکارتی A و B ($A \times B$) را به دست آورید. این مجموعه، فضای نمونه‌ی چه آزمایشی است؟

ب) دو زیر مجموعه‌ی ۳ عضوی از مجموعه‌ی $A \times B$ برگزینید که با یکدیگر ناسازگار باشند. آیا می‌توانید همین کار را برای زیرمجموعه‌های ۷ عضوی تکرار کنید؟ چرا؟

سوال ۴۲) با بهره گیری از جبر مجموعه ها و اصول کولموگروف احتمال، نشان دهید اگر A، B و C سه مجموعه باشند به طوری که $P(B \cap C) = 0$ ، در این صورت

$$P\{A \cap (B \cup C)\} = P\{A \cap B\} + P\{A \cap C\}.$$

سوال ۴۳) در یک جامعه، احتمال اینکه فردی به کرونا مبتلا باشد 0.07 و احتمال آن که به آنفلوآنزا مبتلا باشد 0.19 است. اگر ۲۰ درصد افراد این جامعه مبتلا به حداقل یکی از این دو بیماری باشند،

الف) چند درصد افراد به هر دو بیماری مبتلا هستند؟

ب) چند درصد افراد <u>فقط</u> به کرونا مبتلا هستند؟

سوال ۴۴) یک عدد از مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$ به تصادف بر می‌گزینیم. اگر تمام وقایع ساده هم شانس باشند و تعریف کنیم $A = \{2, 3, 5, 7\}$ و $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$،

الف) مقدار $P(A)$ را بیابید.

ب) مجموعه‌های $A-B$ و $A\cap B$ را به دست آورده و مقادیر $P(A-B)$ و $P(A\cap B)$ را بیابید.

پ) تحقیق کنید $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$. چه توجیهی برای پاسخ شما وجود دارد؟

سوال ۴۵) در یک کتابخانه، سه کتاب فیزیک، دو کتاب رمان و چهار کتاب روان شناسی موجود است. مطلوبست تعداد حالات چیدن این کتاب ها در یک قفسه کنار هم چنانچه:

الف) تمام کتابهای هم نوع متمایز باشند (مثلا ترتیب دو کتاب رمان نسبت به هم مهم باشد).

ب) تمام کتابهای هم نوع نامتمایز باشند (مثلا ترتیب دو کتاب رمان نسبت به هم مهم نباشد).

سوال ۴۶) اعضای یک شرکت شامل ۱ مدیرعامل، ۲ منشی، ۱ حسابدار و ۵ نفر از سایر اعضای هیئت مدیره در یک میزگرد دارای ۱۱ صندلی می‌نشینند. مطلوبست تعداد حالاتی که

الف) هر دو منشی کنار هم باشند.

ب) هیچ یک از اعضای هیئت مدیره (به جز مدیرعامل)، مجاور مدیرعامل نباشد.

پ) حسابدار کنار مدیرعامل بنشیند و تمام اعضای هیئت مدیره (به جز مدیرعامل) کنار هم باشند.

(راهنمایی: برای حل این سوال، به تمایز یا عدم تمایز اعضای هیئت مدیره یا منشی ها دقت کنید. آیا منطقی است متمایز باشند یا نباشند؟ همچنین دقت کنید که همواره دو صندلی از میزگرد خالی می مانند و باید در شمارش حالات محاسبه شوند.)

سوال ۴۷) در کیسه ای، ۱۰ توپ آبی و ۷ توپ قرمز موجود است. دو توپ به تصادف و بدون جایگذاری بر می‌داریم.

الف) اگر توپهای همرنگ نامتمایز باشند، تعداد حالات برداشتن دو توپ غیرهمرنگ چقدر است؟

ب) اگر توپهای همرنگ نامتمایز باشند، احتمال برداشتن دو توپ غیرهمرنگ چقدر است؟

پ) اگر توپهای آبی را از ۱ تا ۱۰ و توپهای قرمز را از ۱ تا ۷ شماره گذاری کنیم، احتمال آنکه توپ آبی شماره ۴ و توپ آبی شماره ۳ برداشته شود چقدر است؟

ت) اگر توپهای آبی را از ۱ تا ۱۰ و توپهای قرمز را از ۱ تا ۷ شماره گذاری کنیم، آیا احتمال برداشتن دو توپ غیرهمرنگ، با مقدار بدست آمده در قسمت الف تفاوت می‌کند؟ توضیح دهید.

سوال ۴۸) قسمتهای ب)، پ) و ت) مسئله‌ی پیش را با فرض داشتن جایگذاری حل کنید؛ یعنی زمانی که توپ اول را برداشتیم، رنگ آن را یادداشت کرده، آنرا به کیسه بازگردانده و سپس توپ دوم را بر می‌داریم.

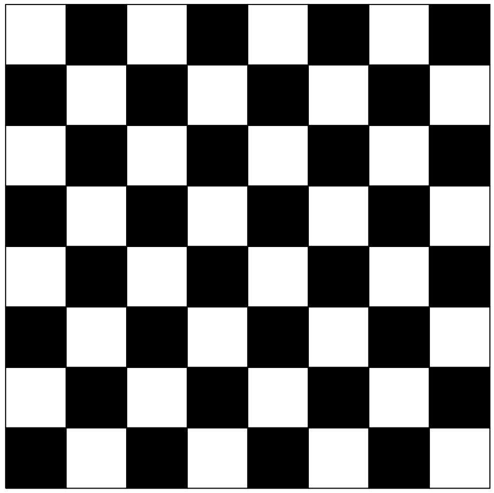
سوال ۴۹) نقطه‌ای را از داخل مربع به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه فاصله‌ی این نقطه تا مرکز مربع، از فاصله‌ی این نقطه تا هر یک از رئوس مربع بیشتر باشد چقدر است؟

سوال ۵۰) از مجموعه‌ی زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$، دو زیرمجموعه‌ی متمایز به تصادف انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی، این دو زیرمجموعه ناسازگارند؟

سوال ۵۱) الف) در یک صفحه‌ی شطرنجی ۸ در ۸، یک مهره‌ی رخ سفید به تصادف در یکی از خانه‌های این صفحه قرار می‌گیرد. سپس، یک مهره‌ی رخ سیاه را به تصادف در یکی از خانه‌های این صفحه قرار می‌دهیم. با چه احتمالی، رخ سیاه در معرض حمله‌ی رخ سفید قرار می‌گیرد؟ (حرکت رخ، به صورت افقی یا عمودی در صفحه است)

ب) یک مهره‌ی شاه سفید، در یکی از گوشه‌های یک صفحه‌ی شطرنجی ۸ در ۸ قرار دارد. دو رخ سیاه به تصادف در دو خانه‌ی این صفحه قرار می‌گیرند. با چه احتمالی، شاه سفید مات

می‌شود؟ (مات شدن شاه، زمانی اتفاق می‌افتد که نوبت حرکت شاه بوده و با هر حرکت، در معرض حمله‌ی یکی از مهره‌های دشمن قرار گیرد)

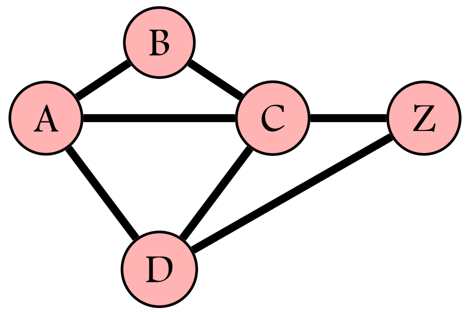


سوال ۵۲) یک سکه‌ی سالم را پرتاب می‌کنیم. اگر رو بیاید، یک تاس را پرتاب کرده و عدد روی آن را یادداشت می‌کنیم. اگر سکه پشت بیاید، دو تاس را پرتاب کرده و جمع اعداد دو تاس را یادداشت می‌کنیم. احتمال آنکه عدد رو آمده برابر n باشد چقدر است؟ ($2 \le n \le 12$)

سوال ۵۳) از کیسه‌ای که شامل ۷ توپ سیاه و ۱۰ توپ سفید است، ۳ توپ به تصادف بیرون می‌آوریم. سپس از بین ۳ توپ بیرون آمده، یکی را به تصادف برمی‌گزینیم. اگر بدانیم حداقل یک توپ از ۳ توپ بیرون آمده سیاه است، احتمال آنکه توپ انتخابی از بین این ۳ توپ، سفید باشد چقدر است؟

سوال ۵۴) دو کیسه در اختیار داریم. کیسه‌ی ۱ شامل ۷ توپ سیاه و ۱۰ توپ سفید و کیسه‌ی ۲ شامل ۴ توپ سیاه، ۲ توپ سفید و ۳ توپ قرمز است. ابتدا یکی از کیسه‌ها را به تصادف انتخاب کرده و سپس، توپی از آن به تصادف بیرون می‌آوریم. اگر بدانیم توپ انتخابی سفید نیست، با چه احتمالی از کیسه‌ی ۲ انتخاب شده است؟

سوال ۵۵) فرض کنید در نقشه‌ی زیر قصد داریم از شهر A به شهر Z برویم. هر یک از ۷ لینک نقشه‌ی زیر، با احتمال p مستقل از سایر لینک ها سالم هستند. احتمال آن که مسیر سالمی از A تا Z وجود داشته باشد چقدر است؟



سوال ۵۶) از کیسه‌ای که شامل ۵ مهره سیاه، ۸ مهره سفید و ۱ مهره قرمز است، دو توپ به تصادف بیرون می‌آوریم. احتمال آنکه هر دو توپ همرنگ باشند چقدر است؟

سوال ۵۷) دو جعبه از لامپ‌ها در اختیار داریم. جعبه‌ی اول، دارای ۱۰۰۰ لامپ است که 1% آنها سالمند. جعبه‌ی دوم، دارای ۱۰۰۰۰ لامپ است که 95% آنها سالم اند. یکی از جعبه‌ها را به تصادف انتخاب کرده و دو لامپ بیرون می‌کشیم. احتمال آن که هر دو لامپ از جعبه‌ی ۱ انتخاب شده باشند چقدر است اگر

الف) هر دو لامپ خراب باشند.

ب) اگر یکی از لامپ ها سالم و دیگری خراب باشد.

فصل ۲

آزمایش های تکراری

سوال ۵۸) تاس سالمی را ۳ بار پرتاب می‌کنیم و اعداد رو آمده در سه پرتاب را در نظر می‌گیریم.

الف) احتمال آن که جمع اعداد رو آمده برابر ۵ باشد چقدر است؟

ب) اگر عدد رو آمده‌ی اول برابر ۴ باشد، احتمال آن که جمع اعداد پرتاب ها برابر ۷ باشد چقدر است؟

پ) احتمال آن که جمع اعداد تاس در پرتاب‌های فرد، برابر ۵ باشد چقدر است؟

ت) احتمال آنکه از این ۳ بار، حداقل ۲ بار عدد زوج بیاید چقدر است؟

ث) احتمال رو آمدن مضرب ۳ در پرتاب اول چقدر است؟

سوال ۵۹) سکه ای را پرتاب می‌کنیم. اگر رو آمد، تاسی را ۳ بار پرتاب کرده و جمع اعداد رو آمده در ۳ پرتاب را در نظر می‌گیریم. اگر پشت آمد، تاسی را ۴ بار پرتاب کرده و جمع اعداد رو آمده در ۴ پرتاب را در نظر می‌گیریم. اگر جمع اعداد روآمده‌ی تاس برابر ۵ باشد، با چه احتمالی سکه پشت آمده است؟

سوال ۶۰) تاس سالمی را ۴ بار پرتاب می کنیم و اعداد رو آمده در چهار پرتاب را در نظر می‌گیریم.

الف) اگر در دو پرتاب این تاس عدد ۲ ظاهر شده باشد، احتمال آنکه در دو پرتاب دیگر عدد فردی ظاهر شده باشد چقدر است؟

ب) با چه احتمالی، جمع اعداد در پرتاب های زوج، ۵ برابر جمع اعداد در پرتاب‌های فرد است؟

سوال ۶۱) سکه‌ی سالمی را ۱۰ بار پرتاب می کنیم. مطلوبست احتمال آن که

الف) در این ۱۰ پرتاب، حداقل دوبار رو بیاید.

ب) در سه پرتاب اول حداکثر یک بار پشت بیاید.

پ) در پرتاب های زوج، نتیجه یکسان باشد (همگی رو یا همگی پشت باشند).

الف) دقیقا ۳ بار شیر بیاید.

ب) دست کم ۲ بار خط بیاید.

پ) در مجموع، دقیقا ۷ بار خط آمده باشد، اگر بدانیم در ۵ پرتاب اول خط آمده است.

سوال ۶۲) الف) اگر یک رشته لامپ متوالی شامل n لامپ که هر لامپ به احتمال p خراب است، به ولتاژ برق وصل شود، با چه احتمالی روشن می شود؟ (در رشته متوالی لامپ ها، لامپ ها به صورت پشت سر هم به یکدیگر وصل شده اند.)

ب) اگر رشته لامپ موازی باشد، مسئله را حل کنید. (در رشته‌ی موازی لامپ ها، یکی از سرهای همه‌ی لامپ ها به یک نقطه و سر دیگر تمام لامپ ها به نقطه‌ی دیگر وصل شده اند.)

سوال ۶۳) در یک امتحان، احتمال درست پاسخ دادن به یک سوال دو گزینه ای برابر p است. پس از امتحان، n دانشجو پاسخ های خود را با هم مقایسه می کنند و متوجه می‌شوند که

همگی به آن سوال پاسخ یکسانی داده اند. با چه احتمالی تمام این n دانشجو به پاسخ درست رسیده اند؟

سوال ۶۴) یک سکه‌ی سالم را ۷بار پرتاب می کنیم.

الف) احتمال اینکه نتیجه‌ی پرتاب اول و آخر برابر باشد چقدر است؟

ب) با چه احتمالی حداقل دو رو و سه پشت در این ۷ پرتاب خواهیم داشت؟

پ) اگر نتیجه پرتاب سکه در سه پرتاب اول یکسان باشد، با چه احتمالی در این ۷ پرتاب، در مجموع دقیقا ۴ بار سکه رو می آید؟

سوال ۶۵) یک تاس سالم را ۵ بار پرتاب می کنیم.

الف) اگر جمع پنج عدد رو آمده در این پنج پرتاب را در نظر بگیریم، با چه احتمالی این مجموع برابر ۷ است؟

ب) با چه احتمالی عدد رو آمده در پرتاب پنجم برابر جمع اعداد رو آمده در ۴ پرتاب قبلی خواهد بود؟

سوال ۶۶) بزرگراه ۸ بانده ای را در نظر بگیرید که از هر باند آن در هر لحظه حداکثر یک ماشین می‌تواند عبور کند. اگر ۹ ماشین هر یک با احتمال p وارد بزرگراه شوند،

الف) با چه احتمالی همه‌ی ماشین های وارد شده به بزرگراه بدون مشکل از آن رد می‌شوند؟

ب) p چقدر باشد تا احتمال قسمت الف بیشتر از 0.99 باشد؟

سوال ۶۷) دو تیم ورزشی A و B در یک بازی در ۹ دست با هم روبرو می‌شوند و نتیجه‌ی هر دست فقط برد یکی از دو تیم می‌تواند باشد. فرض کنید تیم A با احتمال p در هر دست پیروز می‌شود و نتیجه‌ی دست‌ها مستقل از هم است. برنده‌ی بازی کسی است که بیشتر بازی ها را برده باشد.

الف) با چه احتمالی تیم A پس از ۶ دست موفق به بردن بازی می‌شود؟

ب) اگر بدانیم تیم A در نهایت بازی را برده است، با چه احتمالی در حداقل یک دست به تیم B باخته است؟

ج) به ازای $p = 0.5$، اگر بدانیم تیم A دست اول را برده، با چه احتمالی بازی را می‌برد؟

سوال ۶۸) یک سکه‌ی سالم n بار پرتاب شده و k بار رو آمده است. کوچکترین مقدار n را بیابید به گونه‌ای که

$$P\left\{0.49 \leq \frac{k}{n} \leq 0.51\right\} > 0.95$$

سوال ۶۹) قضیه‌ی دموآو–لاپلاس در چه حالتی برای تکرر توزیع برنولی به تعداد n بار برقرار است؟ به کمک یک ماشین حساب یا کامپیوتر، مقادیر $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ و $e^{-np}\frac{(np)^k}{k!}$ را به ازای حالت های مختلف n و p محاسبه کرده و خطای تقریب پواسون را به دست آورید.

الف) $n = 10 \quad , \quad p = 0.7 \quad , \quad k = 7$

ب) $n = 30 \quad , \quad p = 0.3 \quad , \quad k = 9$

پ) $n = 50 \quad , \quad p = 0.02 \quad , \quad k = 1$

ت) $n = 300 \quad , \quad p = 0.01 \quad , \quad k = 3$

ث) $n = 30 \quad , \quad p = 0.8 \quad , \quad k = 24$

ج) $n = 1000 \quad , \quad p = 0.5 \quad , \quad k = 1$

چ) $n = 1000 \quad , \quad p = 0.5 \quad , \quad k = 300$

ح) $n = 1000 \quad , \quad p = 0.5 \quad , \quad k = 490$

در کدام حالت تقریب پواسون، خطای کمتری دارد و چرا؟

سوال ۷۰) سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر پشت آمد، آن را ۹ بار دیگر پرتاب می‌کنیم و نتایج ۱۰ پرتاب را در نظر می‌گیریم. اگر رو آمد، آن را ۵ بار دیگر پرتاب می‌کنیم و نتایج ۶ پرتاب را در

نظر می‌گیریم. احتمال آن که در تمام پرتاب های سکه، دقیقاً ۶ بار رو بیاید چقدر است؟

سوال ۷۱) یک آزمایش برنولی را که احتمال موفقیت در آن برابر 40% است، n بار تکرار می‌کنیم. اگر k، برابر تعداد موفقیت‌ها در این پرتاب ها باشد، n حداقل چقدر باشد تا احتمال رخداد $\{38\% < \frac{k}{n} < 42\%\}$ بیش از 70% باشد؟

(راهنمایی: از قضیه‌ی دموآور–لاپلاس استفاده نمایید.)

(جدول مربوط به محاسبه‌ی تابع $G^{-1}(x)$ در صفحه‌ی بعد آمده است.)

$G^{-1}(x)$	x	$G^{-1}(x)$	x	$G^{-1}(x)$	x	$G^{-1}(x)$	x
0.7063	0.76	0.0251	0.51	-0.6433	0.26	-2.3263	0.01
0.7388	0.77	0.0502	0.52	-0.6128	0.27	-2.0537	0.02
0.7722	0.78	0.0753	0.53	-0.5828	0.28	-1.8808	0.03
0.8064	0.79	0.1004	0.54	-0.5534	0.29	-1.7507	0.04
0.8416	0.80	0.1257	0.55	-0.5244	0.30	-1.6449	0.05
0.8779	0.81	0.1510	0.56	-0.4959	0.31	-1.5548	0.06
0.9154	0.82	0.1764	0.57	-0.4677	0.32	-1.4758	0.07
0.9542	0.83	0.2019	0.58	-0.4399	0.33	-1.4051	0.08
0.9945	0.84	0.2275	0.59	-0.4125	0.34	-1.3408	0.09
1.0364	0.85	0.2533	0.60	-0.3853	0.35	-1.2816	0.10
1.0803	0.86	0.2793	0.61	-0.3585	0.36	-1.2265	0.11
1.1264	0.87	0.3055	0.62	-0.3319	0.37	-1.1750	0.12
1.1750	0.88	0.3319	0.63	-0.3055	0.38	-1.1264	0.13
1.2265	0.89	0.3585	0.64	-0.2793	0.39	-1.0803	0.14
1.2816	0.90	0.3853	0.65	-0.2533	0.40	-1.0364	0.15
1.3408	0.91	0.4125	0.66	-0.2275	0.41	-0.9945	0.16
1.4051	0.92	0.4399	0.67	-0.2019	0.42	-0.9542	0.17
1.4758	0.93	0.4677	0.68	-0.1764	0.43	-0.9154	0.18
1.5548	0.94	0.4959	0.69	-0.1510	0.44	-0.8779	0.19
1.6449	0.95	0.5244	0.70	-0.1257	0.45	-0.8416	0.20
1.7507	0.96	0.5534	0.71	-0.1004	0.46	-0.8064	0.21
1.8808	0.97	0.5828	0.72	-0.0753	0.47	-0.7722	0.22
2.0537	0.98	0.6128	0.73	-0.0502	0.48	-0.7388	0.23
2.3263	0.99	0.6433	0.74	-0.0251	0.49	-0.7063	0.24
3.7190	0.9999	0.6745	0.75	0.0000	0.50	-0.6745	0.25

سوال ۷۲) یک تاس سالم را ۶ بار پرتاب می‌کنیم.

الف) احتمال آن که جمع اعداد رو آمده در ۶ پرتاب برابر ۸ باشد چقدر است؟

ب) احتمال آن که در این ۶ پرتاب، تمام اعداد ۱ تا ۶ ظاهر شوند چقدر است؟

سوال ۷۳) از کیسه‌ای که شامل ۷ توپ آبی و ۳ توپ سفید است، ۱ توپ به تصادف برداشته، رنگ آن را یادداشت کرده و دوباره به کیسه بر می‌گردانیم. اگر این کار را ۱۱ بار انجام دهیم، احتمال آن که از این ۱۱ بار دقیقاً در ۷ مرتبه، توپ آبی بیرون آمده باشد چقدر است؟

سوال ۷۴) یک کانال مخابراتی دارای ظرفیت ۲۵ گیگابیت بر ثانیه است. در مجموع، ۱۲ کاربر قصد استفاده از این کانال برای ارسال داده‌ی خود را دارند که هر کاربر، 2.5 گیگابیت بر ثانیه از کانال را اشغال می‌کند و احتمال فعال بودن او، مستقل از سایرین برابر $p = 0.6$ است. با چه احتمالی، برای تخصیص کانال به کاربران فعال، دچار کمبود ظرفیت کانال نخواهیم شد؟

سوال ۷۵) یک آزمایش برنولی را که احتمال موفقیت در آن برابر $\frac{1}{3}$ است، n بار تکرار می‌کنیم. اگر k تعداد موفقیت ها در n آزمایش باشد، n حداقل چقدر باشد تا احتمال رخداد $\{\frac{97}{300} < \frac{k}{n} < \frac{103}{300}\}$ برابر 99% باشد؟

سوال ۷۶) آزمایشی را که احتمال موفقیت آن p و احتمال شکست آن $1-p$ است، آنقدر تکرار می‌کنیم تا به k-امین موفقیت برسیم. متوسط تعداد آزمایش ها را تا حصول k-امین موفقیت به ازای $k=1$ و $k=2$ به دست آورید.

فصل ۳

متغیرهای تصادفی

سوال ۷۷) برای هریک از توابع چگالی احتمال داده شده‌ی زیر،

$$f(x)=\begin{cases} k\delta(x+1) & , \quad x=-1 \\ x-x^2 & , \quad 0<x<1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}, \quad f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}\delta(x) & , \quad x=0 \\ \frac{3}{32}\sqrt{x-1} & , \quad 1\leq x\leq k \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$f_X(x)=\begin{cases} k\delta(x+1) & , \quad x=-1 \\ \frac{1}{2}e^{-x+1} & , \quad x\geq 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}, \quad f_X(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}\delta(x+3) & , \quad x=-3 \\ \frac{1}{2}\sin x & , \quad 0\leq x\leq k \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$f_X(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}\delta(x+1) & , \quad x=-1 \\ \frac{1}{x^3} & , \quad x\geq k \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

الف) مقدار k را بیابید.

ب) تابع توزیع تجمعی را بیابید.

پ) مقدار احتمال $\Pr\{X^2\leq 4\}$ را به دست آورید.

سوال ۷۸) فرض کنید متغیر تصادفی X، یکنواخت در بازه‌ی $[0,1]$ است. متغیر تصادفی Y را به صورت $Y = g(X)$ می سازیم. تابع g را به گونه ای تعیین کنید که Y:

الف) یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر ۱ باشد؛ یعنی

$$f(y) = \begin{cases} e^{-y} & , \quad y > 0 \\ 0 & , \quad y \leq 0 \end{cases}$$

ب) یک متغیر تصادفی کوشی با پارامتر π باشد؛ یعنی

$$f(y) = \frac{1}{y^2 + \pi^2} \quad , \quad y \in \mathbb{R}$$

سوال ۷۹) متغیر تصادفی و گسسته‌ی N دارای چگالی احتمال زیر است:

$$f(n) = \begin{cases} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} & , \quad n \in \mathbb{N} \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

الف) تابع مولد گشتاور آن را به دست آورید.

ب) از روی تابع مولد گشتاور، مقادیر میانگین و واریانس این متغیر تصادفی را محاسبه کنید.
(راهنمایی:

$$\sum_{n=1}^{\infty} na^n = \frac{a}{(1-a)^2} \quad , \quad |a| < 1$$

)

سوال ۸۰) فرض کنید برای یک متغیر تصادفی با چگالی توزیع $f(x)$ داشته باشیم

$$\exists a \in \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = f(a-x).$$

میانگین و میانه‌ی این متغیر تصادفی را به دست آورید.

سوال ۸۱) متغیر تصادفی X با تابع توزیع تجمعی زیر داده شده است،

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x+1}{2}e^{-x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}.$$

در این صورت

الف) تابع مولد گشتاور آن را به دست آورید.

ب) میانگین و واریانس این متغیر تصادفی را بیابید.

سوال ۸۲) برای متغیر تصادفی با چگالی احتمال زیر، مقادیر میانگین و واریانس را به دست آورید.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2} & , \quad 1 < x < 2 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

سوال ۸۳) نشان دهید که اگر به ازای هر t_0 و t_1 مثبتی داشته باشیم

$$\Pr\{t_0 \leq t \leq t_0 + t_1 | t \geq t_0\} = \Pr\{t \leq t_1\},$$

آنگاه

$$\Pr\{t \leq t_1\} = 1 - e^{-ct_1}.$$

سوال ۸۴) کدام یک از توابع زیر می توانند تابع توزیع تجمعی یه متغیر تصادفی پیوسته باشند؟ در این حالت، محدوده‌ی مقادیر مناسب k را معین کنید.

الف) $F(x) = \begin{cases} \frac{kx}{1+x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$ ، ب) $F(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x > 0 \\ k & , \quad x = 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$

پ) $F(x) = \frac{e^x+k}{e^x+1}$ ، ت) $F(x) = \begin{cases} k + xe^{-x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$

سوال ۸۵) اگر تابع توزیع تجمعی یک متغیر تصادفی به صورت

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

باشد، مقدار میانه را محاسبه کنید.

سوال ۸۶) برای هر یک از توابع توزیع تجمعی زیر، مقدار $P(X = 1)$ چقدر است؟

الف) $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3-x} & , \quad x < 1 \\ \frac{3x}{3x+1} & , \quad x \geq 1 \end{cases}$ ، ب) $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3-x} & , \quad x < 1 \\ \frac{x}{x+1} & , \quad x \geq 1 \end{cases}$

سوال ۸۷) اگر متغیر تصادفی X دارای چگالی احتمال $f(x)$ و تابع توزیع تجمعی $F(x)$ باشد، چگالی احتمال و توزیع تجمعی هر یک از متغیر های تصادفی زیر چه خواهد بود؟

الف) $X + 1$ ، ب) $2X$ ، پ) $-X$ ، ت) X^2

سوال ۸۸) فرض کنید تابع توزیع تجمعی یک متغیر تصادفی گسسته به صورت های زیر داده شده باشد:

الف) $F(n) = \Pr\{X \leq n\} = \begin{cases} 1 & , \quad n > b \\ \frac{n-a+1}{b-a+1} & , \quad a \leq n \leq b \\ 0 & , \quad n < a \end{cases}$; زمانی که $b \geq a$

ب) $F(n) = \begin{cases} 1 - A^{n+1} & , \quad n \geq 0 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$; زمانی که $0 < A < 1$

کمیت $f(n) = F(n) - F(n-1)$ را محاسبه کرده و سپس $\sum_{n=-\infty}^{\infty} nf(n)$ را برای این دو توزیع به دست آورید.

سوال ۸۹) توابع توزیع تجمعی و پیوسته‌ی زیر را در نظر بگیرید:

الف) $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{\lambda}x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$ زمانی که $\lambda > 0$

ب) $F(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \geq b \\ \frac{x-a}{b-a} & , \quad a < x < b \\ 0 & , \quad x \leq a \end{cases}$ زمانی که $b > a$

ج) $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$ که μ و σ^2 دو مقدار حقیقی هستند و $\sigma^2 \neq 0$

کمیت $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ را محاسبه کرده و از روی آن، $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ را برای این سه توزیع به دست آورید.

سوال ۹۰) (بی حافظگی توزیع نمایی) طول عمر یک یخچال از توزیع نمایی زیر پیروی می کند:

$$f_X(x) = \frac{1}{20} e^{-\frac{1}{20}x}$$

که x طول عمر یخچال بر حسب سال است. یخچال دست دومی که پس از ۱۵ سال کارکرد، همچنان سالم است به همراه یخچال نویی که از بازار خریداری شده مفروضند. احتمال خرابی هر یک از آنها دقیقا در ۱۰ سال آینده چقدر است؟

سوال ۹۱) منحنی تابع $y = Ax^2 + 2Bx + C$ را در نظر بگیرید که در آن A، B و C متغیرهای تصادفی مستقل و دارای توزیع زیر هستند:

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & , \quad 1 < x < e \\ 0 & , \quad \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

الف) با چه احتمالی این منحنی از سه ربع از چهار ربع مختصات می گذرد؟

ب) با چه احتمالی این منحنی از هر چهار ربع مختصات می گذرد؟

سوال ۹۲) در پرتاب دو تاس سالم، اگر متغیر تصادفی X را برابر تعداد اعداد زوج رو آمده

در هر دو تاس در نظر بگیریم:

الف) فضای شدنی مسئله (Ω) را بیابید.

ب) مقدار $\Pr\{X \leq 1.5\} - \Pr\{X \leq 0.5\}$ را بیابید و با $\Pr\{X = 1\}$ مقایسه کنید. میزان تفاوت دو مقدار فوق را توضیح دهید.

پ) تابع جرم احتمال این متغیر تصادفی را به دست آورید.

سوال ۹۳) فرض کنید یک سکه سالم را n بار پرتاب کرده ایم. در اینصورت تابع جرم احتمال متغیر تصادفی X را در حالت های زیر بیابید.

الف) متغیر تصادفی X برابر تعداد روها در پرتاب های زوج است.

ب) متغیر تصادفی X برابر جمع تعداد روها در ۲ پرتاب اول و تعداد پشت ها در ۲ پرتاب آخر است $(n > 4)$.

پ) متغیر تصادفی X دو مقدار ۰ و ۱ را اختیار می کند و مقدار آن ۱ است هنگامی که تعداد روها و پشت ها با هم برابر باشد و ۰ در غیر اینصورت.

سوال ۹۴) در هر مورد، در صورت امکان مقدار k را به گونه‌ای معین کنید که تابع، چگالی احتمال شود.

الف) $$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{2} & , \quad 0 < x < k \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

ب) $f(x) = ke^{-|x|}$

سوال ۹۵) میانه را برای تابع چگالی احتمال $f(x) = \frac{1}{x^2-2\pi x+2\pi^2}$ به دست آورید.

سوال ۹۶) فرض کنید تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی پیوسته‌ی X به صورت زیر باشد:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \frac{x}{2} & , \quad 0 \geq x < 1 \\ 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

در این صورت:

الف) مقدار $P(X=1)$ چقدر است؟

ب) تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی $Y = X^2$ را به دست آورید.

سوال ۹۷) برای متغیر تصادفی گسسته‌ی X با جرم احتمال زیر، تابع مولد گشتاور را یافته و سپس از روی آن، میانگین و واریانس را بیابید.

$$\Pr\{X=x\} = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \quad x=1 \\ \frac{1}{4} & , \quad x=2 \\ \frac{1}{12} & , \quad x=3 \\ \frac{1}{12} & , \quad x=4 \\ \frac{1}{12} & , \quad x=5 \end{cases}$$

سوال ۹۸) برای هر یک از توزیع های زیر، میانگین و واریانس را به دست آورید.

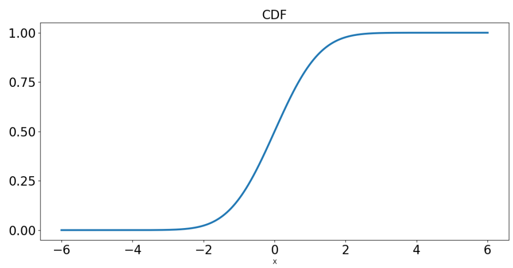
الف) $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , \quad a < x < b \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

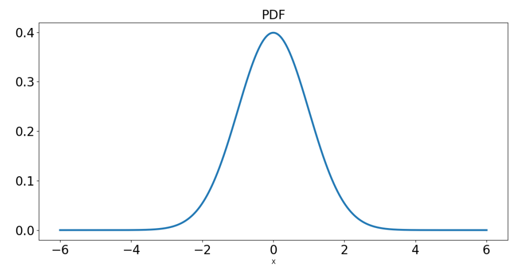
ب) $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

پ) $$f(n) = \begin{cases} p & , \quad n=0 \\ 1-p & , \quad n=1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

ت) $f(n) = \begin{cases} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} & , \quad n \geq 0 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$

سوال ۹۹) متغیر تصادفی X دارای توزیع گوسی با میانگین صفر و واریانس ۱ است. نمودار چگالی احتمال این متغیر گوسی به صورت زیر است:





اگر چگالی احتمال و توزیع تجمعی متغیر $Y = 2 - X$ را بر حسب چگالی احتمال و توزیع تجمعی متغیر X بیابید و آنها را رسم کنید.

سوال ۱۰۰) از دو جامعه ی آماری بزرگ، یک آزمون علمی ۱۰۰ نمره ای گرفته شده است. مشاهده شده که نمرات افراد این دو جامعه، به ترتیب از دو توزیع گوسی با میانگین های ۵۹ و ۷۳ و واریانس های ۹ و ۱۶ پیروی می کنند.

الف) کدام یک از این دو جامعه به طور متوسط دارای سطح علمی بالاتری است؟ چرا؟

ب) افراد کدام جامعه دارای سطح علمی نزدیک تری به یکدیگر هستند؟ (یا به عبارت دیگر، هم سطح ترند؟) چرا؟

سوال ۱۰۱) الف) آیا چگالی احتمال یک متغیر تصادفی می تواند تابعی فرد باشد؟ توضیح دهید.

ب) گشتاور مرتبه n–ام یک متغیر تصادفی یکنواخت در بازه‌ی $[a, b]$ را به دست آورید.

سوال ۱۰۲) الف) برای هر متغیر تصادفی X و $s > 0$ تحقیق کنید

$$\Pr\{X \geq a\} = \Pr\{e^{sX} \geq e^{sa}\}$$

ب) به کمک نامساوی مارکوف ثابت کنید:

$$\Pr\{X \geq x\} \leq e^{-sx}\Phi_X(s)$$

سوال ۱۰۳) تعیین کنید به ازای چه مقادیری از k، هر یک از توابع زیر می تواند تابع توزیع تجمعی یک متغیر تصادفی باشد.

الف) $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-kx^2} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$ ، ب) $F(x) = \frac{e^x}{e^x + k}$

پ) $F(x) = \begin{cases} kx & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & , \quad x > 1 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$ ، ت) $F(x) = \cos\frac{\pi}{e^x + k}$

ث) $F(x) = \begin{cases} k - e^{x - x^2} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$

سوال ۱۰۴) اگر $F(x)$ تابع توزیع تجمعی یک متغیر تصادفی پیوسته باشد، کدام یک از توابع زیر می‌توانند تابع توزیع تجمعی یک متغیر تصادفی باشند؟ سپس برای هر تابع توزیع تجمعی، مقدار $\Pr\{1 < X \leq 2\}$ را بیابید (راهنمایی: از خواص تابع توزیع تجمعی بهره بگیرید).

الف) $F(x^2)$ ، ب) $F(x^3)$ ، پ) $1 - F(-x)$ ، ت) $F^n(x)$ برای هر مقدار طبیعی از n ، ث) $\sin\left[\frac{\pi}{2}F(x)\right]$

سوال ۱۰۵) تعیین کنید به ازای چه مقادیری از k، هر یک از توابع زیر می تواند چگالی احتمال یک متغیر تصادفی باشد. سپس برای هر چگالی احتمال، مقادیر $\Pr\{X = 1\}$ و $\Pr\left\{X < \frac{1}{2}\right\}$ را بیابید.

الف) $f(x) = \begin{cases} 1/x^k & , \quad x \geq 1 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$ ، ب) $f(x) = \begin{cases} kxe^{-x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$

پ) $f(x) = \begin{cases} \sin x & , 0 \leq x \leq k \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$ ، ت) $f(x) = k\delta(x-1)+(1-k)\delta(x)$

ث) $f(x) = \begin{cases} k\delta(x-1) & , \quad x = 1 \\ x & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$ (به عبارت دیگر، تابع در نقطه‌ی $x = 1$ دارای ضربه‌ای به مساحت k است)

سوال ۱۰۶) یک سامانه دارای ۷۰ قطعه است. پیشامد اینکه هر قطعه پس از شروع به کار در زمان ۰، در بازه‌ی $(0, x)$ دچار خرابی گردد، یک متغیر تصادفی با چگالی احتمال زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{T}e^{-\frac{x}{T}} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

احتمال آن را بیابید که بیش از ۶۵ قطعه از این سیستم در بازه‌ی $\left(0, \frac{T}{4}\right)$ دچار خرابی نشوند.

سوال ۱۰۷) اگر x_u، صدک-u متغیر تصادفی X باشد، در این صورت مقدار x_u را به ازای $u = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ برای توابع چگالی احتمال زیر به دست آورید.

الف) $f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$ ، ب) $f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$

سوال ۱۰۸) زمان خرابی یک لامپ، یک متغیر تصادفی با چگالی احتمال زیر است،

$$f_X(x) = \frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}} \quad , \quad x > 0$$

الف) احتمال آن که این لامپ، به مدت حداکثر 2λ عمر کند، چقدر است؟

ب) احتمال آن که این لامپ بیش از 3λ و کمتر از 3.5λ عمر کند چقدر است؟

سوال ۱۰۹) یک متغیر تصادفی دارای چگالی احتمال زیر است،

$$f_X(x) = \begin{cases} 6x^2(1-x) & , \quad 0 \le x \le 1 \\ k\delta(x+1) & , \quad x = -1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

به عبارت دیگر، چگالی احتمال دارای ضربه ای به اندازه k در $x = -1$ است.

الف) مقدار k را بیابید.

ب) تابع توزیع تجمعی را به دست آورید و آن را رسم کنید.

پ) مقدار احتمال های $\Pr\{-2 < X \le \frac{1}{2}\}$ و $\Pr\{0 < X \le \frac{1}{2}\}$ چقدر است؟

سوال ۱۱۰) فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع یکنواخت بین ۰ و ۱ است. در این صورت، تابع توزیع تجمعی و چگالی احتمال هر یک از متغیرهای تصادفی زیر را بیابید. سپس، مقادیر احتمال های $\Pr\{X \le \frac{2}{3}\}$ و $\Pr\{Y \le \frac{1}{\sqrt{3}}\}$ را از روی چگالی‌های احتمال X و Y بیابید و با هم مقایسه کنید. نتیجه مقایسه را توضیح دهید.

الف) $Y = X^2$ ، ب) $Y = -\ln(1-X)$ ، پ) $Y = \tan \pi(X - \frac{1}{2})$

سوال ۱۱۱) اگر تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی X را با $F(x)$ نشان دهیم، توابع توزیع تجمعی متغیرهای تصادفی زیر را برحسب $F(x)$ دست آورید.

الف) $Y = |X|$ ، ب) $Y = \begin{cases} 0 & , \quad X \le 0 \\ 1 & , \quad X > 0 \end{cases}$ ، پ) $Y = X^2 - 2X$

سوال ۱۱۲) تابع جرم احتمال متغیر تصادفی X دارای خاصیت زیر است:

$$6\Pr\{X = k+2\} - 5\Pr\{X = k+1\} + \Pr\{X = k\} = 0 \quad , \quad k = 1, 2, \cdots$$

همچنین $\Pr\{X = 1\} = \frac{7}{12}$. در این صورت، چگالی جرم احتمال متغیر X را بیابید.

سوال ۱۱۳) متغیر تصادفی X دارای چگالی احتمال زیر است:

$$f(x) = \frac{a}{2}e^{-ax} + \frac{1}{2}e^{-x} \quad , \quad x > 0.$$

مقدار a را به گونه ای بیابید به طوری که $\mathbb{E}\{X\} = 5$.

سوال ۱۱۴) برای هر یک از توابع زیر، محدوده مقادیر k را به گونه ای تعیین کنید که تابع مورد نظر، یک تابع توزیع انباشته باشد. سپس، چگالی احتمال را بیابید.

الف) $F(x) = \frac{1}{e^{-kx}+1}$ ، ب) $F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1 - e^{-x-k\sin x} & , \quad x \geq 0 \end{cases}$

پ) $F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1 + xe^{-kx} & , \quad x \geq 0 \end{cases}$

ت) $F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \frac{1}{2} & , \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{k-kx} & , \quad x \geq 1 \end{cases}$

سوال ۱۱۵) برای بخش های الف و ت سوال پیش، مقادیر میانه، صدکهای ۲۵ام و ۷۵ام و همچنین احتمال‌های $\Pr\{X = 0\}$ و $\Pr\{0 < X \leq 2\}$ را بیابید.

سوال ۱۱۶) یک تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر زوج آمد، عدد آن را یادداشت می‌کنیم و اگر فرد آمد، عددی را به تصادف از بازه‌ی $[1, 6]$ انتخاب کرده و آن را یادداشت می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی X، نشان دهنده‌ی عدد یادداشت شده باشد، چگالی احتمال و تابع توزیع انباشته‌ی آن را به دست آورده و رسم کنید. سپس، مقدار $\Pr\{1 \leq X \leq 3\}$ را بیابید.

سوال ۱۱۷) فرض کنید متغیر تصادفی X، از توزیع نمایی با پارامتر $\lambda = 1$ پیروی کند. در این صورت، چگالی احتمال متغیر تصادفی Y را در حالت های زیر بیابید.

الف) $Y = e^X$ ، ب) $Y = X^\alpha$ که α عدد ثابت مثبتی است.

پ) $Y = \lfloor X \rfloor$

سوال ۱۱۸) فرض کنید X، یک متغیر تصادفی باشد که از توزیع زیر پیروی می‌کند:

$$f_X(x) = \begin{cases} kx & , \quad 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}\delta(x) & , \quad x = 1 \\ 0 & , \quad \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

الف) مقدار مناسب k را بیابید. ، ب) مقدار $\mathbb{E}\{X\}$ را محاسبه کنید.

پ) مقدار $\mathbb{E}\{e^{aX}\}$ را به دست آورید که a عدد حقیقی دلخواهی است.

سوال ۱۱۹) متغیر تصادفی X از توزیع زیر پیروی می‌کند:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

متغیر تصادفی $Y = X^2$ مفروض است.

الف) چگالی احتمال Y را به دست آورید. ، ب) امید ریاضی X را بیابید.

پ) امید ریاضی Y را از روی چگالی احتمال آن و مقدار $\mathbb{E}\{X^2\}$ را از قضیه‌ی اساسی امید ریاضی محاسبه کرده و با هم مقایسه کنید.

ت) مقادیر $\Pr\{X < \frac{1}{2}\}$ و $\Pr\{Y < \frac{1}{4}\}$ را به ترتیب از روی چگالی های احتمال X و Y به دست آورده و با هم مقایسه کنید.

سوال ۱۲۰) برای هر یک از توزیع های زیر، مقدار $\Pr\{X \geq \alpha\}$ را به دست آورده و همچنین، یک کران بالا برای این احتمال برای هر توزیع با کمک نامساوی مارکوف به دست آورید. سپس مقدار دقیق احتمال و کران آن را مقایسه کنید.

الف) $x > 0$ ، $f(x) = e^{-x}$ ، ب) $x > 0$ ، $f(x) = \frac{1}{\ln 2}\frac{1}{1+e^x}$

پ) $x > 0$ ، $f(x) = xe^{-x}$

سوال ۱۲۱) برای توزیع های بخش های الف و پ سوال پیش، مقدار واریانس را به دست آورید.

سوال ۱۲۲) برای هر یک از توزیع های زیر، تابع مولد گشتاور را یافته و سپس از روی آن، مقدار $\mathbb{E}\{X^2\}$ را بیابید.

الف)
$$f(x) = \begin{cases} 1-x & , \quad 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}\delta(x-1) & , \quad x = 1 \end{cases}$$

ب)
$$f(x) = \begin{cases} \cos x & , \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & , \quad \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

پ)
$$\Pr\{X = x\} = \begin{cases} \frac{n}{2^{n+1}} & , \quad n \in \mathbb{N} \\ 0 & , \quad \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

ت) X متغیر تصادفی حاصل ضرب دو عدد رو آمده در پرتاب دو تاس به طور مستقل است.

سوال ۱۲۳) برای هر یک از متغیرهای تصادفی زیر، واریانس را به دست آورید.

الف)
$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & , \quad x > 1 \\ 0 & , \quad x \leq 1 \end{cases}$$

ب)
$$f_X(x) = \begin{cases} \sin x & , \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

پ)
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} & , \quad x > 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

ت) X یک متغیر تصادفی گسسته است و $\Pr\{X = i\} = 2(\frac{1}{3})^i$ برای $i \in \mathbb{N}$

سوال ۱۲۴) برای قسمت های الف و ت سوال ۱، ابتدا تابع مولد گشتاور را محاسبه نموده و سپس از روی آن، میانگین و واریانس را به دست آورید.

سوال ۱۲۵) برای قسمت های الف و ب سوال ۱، میانگین متغیر تصادفی e^{-X} را بیابید.

سوال ۱۲۶) برای متغیر تصادفی X با چگالی‌های احتمال زیر، ابتدا تابع مولد گشتاور را یافته و سپس از روی آن، مقادیر میانگین، واریانس و $\operatorname{var}\left\{X|X>\frac{1}{2}\right\}$ را بیابید.

الف) $$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin x & , \quad 0<x<\pi \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها}\end{cases}$$

ب) $$f_X(x)=\begin{cases}\cos x & , \quad 0<x<\frac{\pi}{2} \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها}\end{cases}$$

پ) $$f_X(x)=\begin{cases}xe^{-x} & , \quad x>0 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها}\end{cases}$$

ت) $$f_X(x)=\begin{cases}\frac{3}{7}x^2 & , \quad 1<x<2 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها}\end{cases}$$

ث) $$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\delta(x-1) & , \quad x=1 \\ x & , \quad 0<x<1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها}\end{cases}$$

فصل ۴

متغیرهای تصادفی توأم

سوال ۱۲۷) فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل برنولی به ترتیب با پارامترهای $\frac{1}{2}$ و p باشند. ثابت کنید $Z = X \oplus Y \mod 2$ و $Z = XY$ دارای توزیع برنولی با پارامتر $\frac{1}{2}p$ هستند.

سوال ۱۲۸) اگر X و Y دو توزیع چندجمله ای به ترتیب با پارامترهای (n_1, p) و (n_2, p) باشند، ثابت کنید توزیع $X + Y$ دوجمله ای با پارامترهای $(n_1 + n_2, p)$ است.

سوال ۱۲۹) تابع چگالی احتمال توام دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر است:

$$f(x,y) = \begin{cases} k(4-x-y) & , \quad 1 < x < 2 \ , \ 0 < y < 2 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

الف) مقدار مناسب k را بیابید.

ب) با مقدار k به دست آمده در قسمت قبل، مقدار $\mathbb{E}\{XY\}$ را به دست آورید.

سوال ۱۳۰) تابع چگالی احتمال توام دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر است:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & , \quad |x| + 2|y| < 1 \\ 0 & , \quad |x| + 2|y| \geq 1 \end{cases}$$

الف) چگالی های احتمال حاشیه‌ای X و Y را به دست آورید. همچنین ناهمبستگی، استقلال و تعامد این دو متغیر تصادفی را تحقیق کنید.

ب) چگالی احتمال $X+Y$ را به دست آورید.

سوال ۱۳۱) یک قطار و اتوبوس به طور تصادفی و مستقل از هم بین ساعات ۵ تا ۶ وارد یک ایستگاه می‌شوند. فردی نیز به طور تصادفی بین ساعت ۵ تا $5:30$ وارد همان ایستگاه می‌شود.

الف) احتمال آن که فرد بیش از ۱۰ دقیقه منتظر قطار و اتوبوس شود چقدر است؟

ب) اگر قطار و اتوبوس هر یک ۱۰ دقیقه در ایستگاه تاخیر داشته باشند، احتمال با هم بودن آنها در ایستگاه چقدر است؟

پ) اگر فرد پس از ساعت $5:15$ به ایستگاه برسد، با چه احتمالی به هیچ یک نمی‌رسد؟

سوال ۱۳۲) یک قطار و اتوبوس به طور تصادفی و مستقل از هم بین ساعات ۶ تا ۷ صبح وارد ایستگاهی می شوند. فردي نیز به طور تصادفی بین ساعات ۵:۵۰ تا ۶:۵۰ وارد همان ایستگاه می شود.

الف) احتمال اینکه فرد بیش از ۱۰ دقیقه منتظر قطار ویا اتوبوس بماند چقدر است؟

ب) احتمال اینکه این فرد به هیچ یک از قطار یا اتوبوس نرسد چقدر است؟

سوال ۱۳۳) اگر X و Y، دو متغیر تصادفی نرمال با میانگین ۰ و واریانس ۱ باشند به گونه ای که $\mathrm{cov}(X,Y)=0.5$ ، در این صورت مقدار a را به گونه ای بیابید که $X+aY$ و $X+2Y$ مستقل از هم باشند و در این صورت، واریانس هر یک را بیابید.

سوال ۱۳۴) تابع چگالی احتمال توام دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر است:

$$f(x,y)=\begin{cases} k(4-x-y) & , \quad 1<x<2\ ,\ 0<y<2 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

الف) مقدار مناسب k را بیابید.

ب) با مقدار k به دست آمده در قسمت قبل، مقدار $\mathbb{E}\{XY\}$ را به دست آورید.

سوال ۱۳۵) تابع چگالی احتمال توأم دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر است:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} k & , \quad x-1<y<x\ ,\ 0<x<2\ ,\ 0<y<1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که k ثابت است.

الف) مقدار k را به دست آورید.

ب) نشان دهید Y و $X-Y$ از هم مستقل هستند.

سوال ۱۳۶) یک قطار و یک اتوبوس بین ساعت ۹ و ۱۰ در زمانی تصادفی وارد ایستگاه می‌شوند. قطار ۱۰ دقیقه و اتوبوس x دقیقه توقف دارند. x را طوری تعیین کنید که احتمال با هم بودن قطار و اتوبوس برابر 0.5 باشد.

سوال ۱۳۷) دایره‌ی واحد را با مرکز مبدا مختصات در نظر بگیرید.

الف) نقطه ای به تصادف از داخل این دایره انتخاب می شود. اعداد $0<r_0<1$ و $0<\phi_0<2\pi$ را در نظر بگیرید. اگر مختصات قطبی این نقطه را با (r,ϕ) نشان دهیم، با چه احتمالی داریم $r_0<r<r+\Delta r_0$ و $\phi_0<\phi<\phi_0+\Delta\phi_0$؟

ب) ابتدا قطری از دایره را به تصادف انتخاب کرده و سپس نقطه ای از این قطر را به تصادف بر می‌گزینیم. اگر مختصات قطبی این نقطه را با (r,ϕ) نشان دهیم، با چه احتمالی داریم $r_0<r<r+\Delta r_0$ و $\phi_0<\phi<\phi_0+\Delta\phi_0$؟

پ) تابع چگالی احتمال نقطه را در هر دو حالت قسمت های الف و ب به دست آورید.

سوال ۱۳۸) (ناوردایی متغیرهای تصادفی گوسی تحت عمل جمع)

الف) فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی با توابع چگالی احتمال زیر باشند:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_X^2}\right)$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_Y^2}\right)$$

ثابت کنید متغیر تصادفی $X+Y$ از توزیع زیر پیروی می کند:

$$f_{X+Y}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi[\sigma_X^2+\sigma_Y^2]}} \exp\left(-\frac{u^2}{2\pi[\sigma_X^2+\sigma_Y^2]}\right)$$

ب) رابطه‌ی کلی تری را که می‌توان از تعمیم قسمت الف استنتاج کرد، بنویسید.

سوال ۱۳۹) برای هر کدام از توابع زیر که می‌توانند چگالی احتمال مشترک دو متغیر تصادفی باشند، ثابت مناسب k و مقادیر $\Pr\{X>0\}$ و $\Pr\{X+Y>0\}$ را بیابید. همچنین برای قسمت های ث) و ج)، چگالی احتمال متغیر تصادفی X را به دست آورید.

الف) $f(x,y) = \frac{k}{1+x^2+y^2}$

ب) $f(x,y) = e^{a(x^2+y^2)}$

پ) $$f(x,y) = \begin{cases} k & , \quad x^2+y^2<1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

ت) $$f(x,y) = \begin{cases} k-k\sqrt{x^2+y^2} & , \quad x^2+y^2<1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

ث) $$f(x,y) = \begin{cases} xy & , \quad 0 < x < k \quad , \quad 0 < y < k \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

ج) $$f(x,y) = \begin{cases} 1 & , \quad x > 0 \ , \ y > 0 \ , \ x + y < a \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

(راهنمایی: ابتدا تحقیق کنید اگر $f(x,y)$ تابعی از $x^2 + y^2$ باشد، داریم

$$\Pr\{aX + bY > 0\} = \Pr\{X > 0\} \quad , \quad a^2 + b^2 \neq 0$$

)

سوال ۱۴۰) دو متغیر تصادفی X و Y با چگالی احتمال توأم زیر مفروضند. در این صورت، مقدار α را به گونه ای بیابید که این دو متغیر تصادفی ناهمبسته شوند.

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 + \alpha xy & , \quad -1 < x < 1 \ , \ -1 < y < 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

سوال ۱۴۱) دو متغیر تصادفی X و Y با چگالی احتمال توأم زیر مفروضند. در این صورت، تابع توزیع تجمعی توأم این دو متغیر تصادفی را بیابید.

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} ye^{1-xy} & , \quad x > 1 \ , \ y > 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

سوال ۱۴۲) دو نفر به طور مستقل از هم و کاملا تصادفی بین ساعت ۴ و ۵ وارد فروشگاهی می شوند و هر یک پس از ۱۰ دقیقه، از آن خارج می شوند. احتمال آن که این دو نفر یکدیگر را در فروشگاه ملاقات کنند چقدر است؟

سوال ۱۴۳) جدول زیر را برای متغیرهای تصادفی X و Y در نظر بگیرید:

الف) توابع توزیع احتمال حاشیه‌ای متغیرهای X و Y را به دست آورید.

1	0	Y \ X
θ	$\frac{1}{2}-\theta$	0
$\frac{1}{2}-\theta$	θ	1

ب) به ازای چه مقدار θ داریم $P(X=Y)=1$ ؟

پ) به ازای چه مقدار θ داریم $P(X=x, Y=y)=P(X=x)P(Y=y)$ ؟

سوال ۱۴۴) در پرتاب دو تاس سالم و متمایز، متغیر تصادفی X را مجموع اعداد رو آمده و Y را تعداد ۶ های رو آمده در نظر بگیرید.

الف) مقادیر $\Pr\{X=1, Y=7\}$ و $\mathbb{E}\{XY\}$ چقدر است؟

ب) آیا این دو متغیر تصادفی ناهمبسته اند؟

سوال ۱۴۵) در جدول زیر که توزیع احتمال را برای متغیر های تصادفی X و Y نشان می دهد،

1	0	Y \ X
p_2	p_1	0
p_4	p_3	1

الف) مقدار $\operatorname{cov}(X,Y)$ را به دست آورید و تحقیق کنید چه زمانی این کمیت صفر است.

ب) آیا برای این دو متغیر تصادفی، ناهمبستگی، استقلال را نتیجه می دهد؟ اگر چنین است، نشان دهید و اگر چنین نیست، مثالی برای مقادیر p_1, p_2, p_3, p_4 بزنید که ناهمبستگی، استقلال را نتیجه نمی‌دهد (دقت داشته باشید که جمع احتمالات برابر یک است و احتمالات نامنفی اند).

سوال ۱۴۶) چگالی احتمال زیر را در نظر بگیرید:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1+\alpha\sin[2\pi(x+y)] & , \quad 0\le x\le 1, 0\le y\le 1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که α مقدار مناسبی است.

الف) کوواریانس این دو متغیر تصادفی را به دست آورید. آیا این دو متغیر تصادفی ناهمبسته هستند؟

ب) مقادیری از α را بیابید که این دو متغیر تصادفی مستقل باشند.

سوال ۱۴۷) تابع چگالی احتمال توام زیر را در نظر بگیرید:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\rho^2}(x^2+y^2-2\rho xy)\right]$$

الف) ثابت کنید X (و مشابها همچنین Y) دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس 1 است.

ب) ثابت کنید اگر $\rho=0$، در این صورت متغیرهای تصادفی X و Y مستقل هستند.

پ) ثابت کنید اگر متغیرهای تصادفی X و Y مستقل باشند آنگاه $\rho=0$.

ت) تابع چگالی احتمالی که در صورت این سوال تعریف شد، حالت خاصی از چگالی احتمال چند متغیره‌ی نرمال است.

ضریب همبستگی ρ در حالت دو متغیره، میزان همبستگی دو متغیر تصادفی را نشان می دهد. ابتدا تحقیق کنید به ازای چه مقداری از ρ، این چگالی احتمال، دایروی-متقارن خواهد بود. چگالی احتمال دو متغیره را به ازای مقادیر $\rho=-0.5, \rho=0, \rho=0.5$ ترسیم کنید. به طور شهودی چگونه می توان از روی نمودارها، به میزان همبستگی این دو متغیر تصادفی پی برد؟

این تابع چگالی را به صورت دیگری نیز می توان نوشت:

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2\det(\Sigma)}}\exp\left[-\frac{1}{2}\cdot([x,y]\Sigma^{-1}[x,y]^T)\right]$$

که بردار $[x,y]$ یک بردار سطری دوتایی است و $\Sigma = \begin{bmatrix}1 & \rho\\ \rho & 1\end{bmatrix}$. ماتریس Σ در متغیرهای تصادفی نرمال توأم، مفهوم مهمی است و ماتریس کوواریانس نام دارد.

به ازای هر یک از مقادیر $\rho=-0.5, \rho=0, \rho=0.5$ و به کمک دستور mvnrnd() در متلب، ۱۰۰۰ جفت داده‌ی تصادفی تولید و آنها را در یک نمودار پراکندگی ترسیم کنید (پس از اجرای دستور فوق در متلب به شیوه ی مناسب، ۱۰۰۰ داده‌ی تصادفی برای X و ۱۰۰۰ داده‌ی تصادفی برای Y خواهید داشت. کافی است Y را برحسب X رسم کنید تا به نمودار پراکندگی برسید. همچنین می توانید از Help متلب برای توضیحات بیشتر در مورد mvnrnd() بهره ببرید). چگونه از روی نمودار پراکندگی می توان میزان همبستگی دو متغیر تصادفی را نشان داد؟ چه شهودی در آن نهفته است؟ (بسیار مهم است که در این تحقیق، تحلیل و دیدگاه خود را نیز ذکر بفرمایید.)

هنگامی که $\rho=1$، توضیح دهید چه اتفاقی می افتد؟ تفاوت آن با حالت $\rho=-1$ چیست؟ آیا همچنان می‌توان از چگالی احتمال داده شده استفاده کرد؟ چرا؟

سوال ۱۴۸) برای هر یک از چگالی احتمال های توام داده شده‌ی زیر، موارد $f_X(x)$ ، $\mathbb{E}\{X\}$ و $\mathbb{E}\{XY\}$ را به دست آورید.

الف) $f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{\pi}e^{-x^2-y^2}$

ب)
$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{2}(1-|x-1|-|y-1|) & , \quad |x-1|+|y-1|<1\\ 0 & , \quad \text{سایر جاها}\end{cases}$$

پ)
$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}e^{1-x} & , \quad 0<x<y<1\\ 0 & , \quad \text{سایر جاها}\end{cases}$$

ت) X و Y ، دو متغیر تصادفی گسسته (با مقادیر صحیح) اند و تابع جرم احتمال آنها به صورت زیر است،

$$\Pr\{X=x,Y=y\}=\begin{cases}\frac{1}{16} & , \quad x^2+y^2\leq 10\ ,\ x\geq y\\ 0 & , \quad \text{سایر جاها}\end{cases}.$$

سوال ۱۴۹) ابتدا فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای توزیع یکنواخت در بازه‌ی $[0,1]$ و مستقل هستند. توزیع احتمال متغیرهای تصادفی

الف) XY ، ب) $X+Y$ ، پ) $\frac{X}{Y}$ ، ت) $\max\{X,Y\}$

ث) $\min\{X,Y\}$

را به دست آورید. سپس فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی نمایی و مستقل با پارامتر ا باشند. توزیع احتمال هر یک از متغیرهای تصادفی قسمت ب و پ را بیابید.

سوال ۱۵۰) تابع چگالی احتمال توام دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر است:

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}k & , \quad |x|+|y|<1\\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

الف) مقدار مناسب k را بیابید. ، ب) کوواریانس و ضریب همبستگی X و Y را بیابید.

پ) ثابت کنید متغیرهای تصادفی $X+Y$ و $X-Y$ مستقل هستند و توزیع توام آنها را به دست آورید. ، ت) توزیع X و میانگین و واریانس آن را به دست آورید.

سوال ۱۵۱) برای متغیر تصادفی X که دارای توزیع زیر است

$$f_X(x)=\begin{cases}1 & , \quad |x|<\frac{1}{2}\\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

تابع مولد گشتاور را به دست آورده و از روی آن، $\mathbb{E}\{X^4\}$ را محاسبه نمایید.

سوال ۱۵۲) توزیع مشترک دو متغیرتصادفی به صورت زیر است،

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\rho^2}(x^2+y^2-2\rho xy)\right]$$

الف) ثابت کنید متغیر تصادفی $X+Y$ یک متغیر تصادفی نرمال است و سپس واریانس آن را به دست آورید. چه زمانی این واریانس بیشینه است و چرا؟ در شرایطی که واریانس بیشینه باشد، متغیرهای تصادفی X و Y چه رابطه‌ای دارند؟

ب) ثابت کنید به ازای $\rho = 0$، متغیر تصادفی $\tan^{-1}\frac{Y}{X}$ دارای توزیع یکنواخت در بازه‌ی $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ خواهد بود.

سوال ۱۵۳) برای هر یک از توابع دومتغیره‌ی زیر، محدوده مقادیر k را به گونه ای بیابید که تابع مورد نظر، چگالی احتمال توأم دو متغیر تصادفی باشد و سپس، توزیع تجمعی توأم و مقدار $\Pr\left\{X+3Y<\frac{1}{3}\right\}$ را (در صورت وجود) بیابید. به ازای هر تابع توزیع تجمعی، آیا X و Y مستقلند؟

الف) $$f(x,y)=\begin{cases}xy+kx+ky & , \quad 0<x<1, 0<y<1\\ 0 & , \quad \text{سایر جاها}\end{cases}$$

ب) $$f(x,y)=\begin{cases}k\sin(x+3y) & , \quad 0<x<\frac{\pi}{2}, 0<y<\frac{\pi}{6}\\ 0 & , \quad \text{سایر جاها}\end{cases}$$

پ) $$f(x,y)=\begin{cases}kxy(1-y) & , \quad 0<x<1, 0<y<1\\ 0 & , \quad \text{سایر جاها}\end{cases}$$

سوال ۱۵۴) برای هر یک از چگالی های احتمال زیر، مقادیر $\Pr\{X\leq 4, Y\leq -2\}$، $\Pr\{X+Y\leq 2\}$ و $\Pr\{X=4Y\}$ را بیابید.

الف) $$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin(x+y) & , \quad 0<x<\frac{\pi}{2}, 0<y<\frac{\pi}{2}\\ 0 & , \quad \text{سایر جاها}\end{cases}$$

ب)
$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\delta\left(\sqrt{(x+4)^2+(y+1)^2}\right) & , \quad x=-4, y=-1\\ \frac{1}{2} & , \quad 0<x<1, 0<y<1\\ 0 & , \quad \text{سایر جاها}\end{cases}$$

(دقت شود که همانگونه که $\delta(x-x_0)$ نشان دهنده‌ی ضربه ای در $x=x_0$ است، $\delta(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2})$ نیز نشان دهنده‌ی ضربه ای در $x=x_0, y=y_0$ در دو بعد و دارای سطح زیر یک است.)

سوال ۱۵۵) برای چگالی احتمال توأم زیر، مقادیر σ_X^2، σ_Y^2، $\Phi_X(s)$، $\Phi_Y(s)$ و چگالی احتمال متغیرهای تصادفی XY و $\max\{X,Y\}$ را محاسبه کنید.

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}(xy-1)e^{1-xy} & , \quad x\geq 1, y\geq 1\\ 0 & , \quad \text{سایر جاها}\end{cases}$$

سوال ۱۵۶) چگالی احتمال توأم زیر برای دو متغیر تصادفی X و Y داده شده است:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\alpha+2(\frac{1}{\pi}-\alpha)(x^2+y^2) & , \quad x^2+y^2\leq 1\\ 0 & , \quad \text{سایر جاها}\end{cases}$$

الف) محدوده‌ی مقادیر مجاز α را بیابید.

ب) به ازای چه مقدار از α ، دو متغیر تصادفی X و Y مستقل اند؟ ناهمبسته اند؟

پ) احتمال های $\Pr\{aX+bY\geq 0\}$ و $\Pr\{XY\geq 0\}$ را بیابید.

سوال ۱۵۷) اگر چگالی احتمال مشترک دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر باشد

$$f(x,y)=\begin{cases}12x^2 & , \quad 0<x<y<1\\ 0 & , \quad \text{سایر جاها}\end{cases}$$

در این صورت مقدار $\mathrm{cov}(X,Y)$ را بیابید.

سوال ۱۵۸) سکه ای را ۱۰ بار پرتاب می‌کنیم. متغیر تصادفی X، تعداد دفعات رو آمدن سکه در ۵ پرتاب اول و متغیر تصادفی Y، تعداد دفعات رو آمدن سکه در پرتاب های زوج است. احتمال $\Pr\{X = 5Y\}$ را بیابید.

سوال ۱۵۹) متغیر تصادفی X، دارای تابع جرم احتمال زیر است:

2	1	0	-1	x
0.4	0.3	0.2	0.1	$\Pr\{X = x\}$

اگر داشته باشیم $Y = X^2 - 1$، در اینصورت مقدار $\text{cov}(X, Y)$ را بیابید.

سوال ۱۶۰) برای متغیرهای تصادفی X و Y با چگالی‌های احتمال توأم زیر،

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x + ky & , \quad 0 < x < 1 \ , \ 0 < y < 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} kx & , \quad 0 < x < 1 \ , \ 0 < x < y < 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} kx & , \quad 0 < y < 1 \ , \ 0 < y < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} kx & , \quad x + y < 1 \ , \ x > 0 \ , \ y > 0 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k(1 + x + y) & , \quad 1 < x < 2 \ , \ 0 < y < 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

الف) مقدار مناسب k را بیابید.

ب) توزیع حاشیه ای $f_X(x)$ را پیدا کنید.

پ) مقدار $\mathrm{cov}(X,Y)$ را محاسبه کنید.

ت) استقلال دو متغیر تصادفی را بررسی کنید.

ث) چگالی احتمال $X+Y$ را بیابید.

سوال ۱۶۱) سکه سالمی را ۵ بار می اندازیم. تابع مولد گشتاور مشترک X و Y و مقدار $\mathbb{E}\{X+Y|X=1\}$ را محاسبه کنید، اگر:

الف) X تعداد رو آمدن ها در سه پرتاب اول و Y تعداد پشت آمدن ها در سه پرتاب آخر باشد.

ب) X تعداد روها در پرتاب های فرد و Y تعداد پشت ها در سه پرتاب آخر باشد.

پ) X تعداد پشت ها در پرتاب های زوج و Y تعداد پشت ها در سه پرتاب آخر باشد.

ت) X تعداد پشت ها و Y تعداد رو ها در سه پرتاب آخر باشد.

ث) X تعداد پشت ها و Y تعداد رو ها در دو پرتاب اول باشد.

سوال ۱۶۲) یک امتحان احتمال مهندسی به صورت آنلاین (و با رعایت پروتکل های بهداشتی!) به مدت ۲ ساعت برگزار می‌شود. فرهاد و آرش، هر یک مستقل از دیگری و به تصادف در ۱۰ دقیقه‌ی اول (با توزیع یکنواخت) وارد جلسه امتحان می‌شوند. اگر این دو نفر مستقل از هم در بازه‌ی ۱ تا 1.5 ساعت از شروع و با توزیع یکنواخت، امتحان خود را به پایان رسانده و از جلسه خارج شوند،

الف) با چه احتمالی فرهاد زودتر از آرش از جلسه امتحان خارج می شود؟

ب) اگر آرش زودتر از فرهاد به جلسه آمده باشد، با چه احتمالی حداکثر ۱۵ دقیقه دیرتر از از جلسه خارج می‌شود؟

پ) با چه احتمالی آرش حداکثر ۱۰ دقیقه پس از فرهاد از جلسه خارج می شود؟

ت) احتمال آن که فرهاد زودتر از آرش به جلسه آمده و زودتر از او خارج شود چقدر است؟

ث) اگر آرش از جلسه امتحان خارج شده باشد، با چه احتمالی فرهاد حداکثر ۲۰ دقیقه پس از او از جلسه خارج می‌شود؟

ج) اگر فرهاد دیرتر از آرش از جلسه خارج شود، با چه احتمالی زودتر از او وارد جلسه شده است؟

چ) احتمال آن که فرهاد زودتر از آرش به جلسه آمده ولی دیرتر از او خارج شود چقدر است؟

ح) اگر آرش از جلسه امتحان خارج شده باشد، با چه احتمالی فرهاد حداقل ۲۰ دقیقه پیش از او از جلسه خارج شده است؟

خ) اگر آرش زودتر از فرهاد به جلسه آمده باشد، با چه احتمالی دیرتر از او از جلسه خارج می‌شود؟

د) احتمال آن که زمان مورد نیاز آرش برای حل سوالات، ۱۰ دقیقه بیشتر از فرهاد باشد چقدر است؟

فصل ۵

احتمال شرطی در متغیرهای تصادفی

سوال ۱۶۳) اگر متغیر تصادفی X را دارای چگالی احتمال زیر در نظر بگیریم

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \quad 0 < x < 2 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

موارد $F(x|X < 1)$ (توزیع تجمعی)، $f(x|X > 1)$ (چگالی احتمال) و $\mathbb{E}\{X|0.5 < X < 1.5\}$ را بیابید.

سوال ۱۶۴) فرض کنید متغیر تصادفی X دارای چگالی احتمال زیر باشد

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases} \quad , \quad \lambda > 0$$

در این صورت مقادیر $\mathbb{E}\{X|X > a\}$ و $\mathbb{E}\{X\} + a$ را بیابید و با هم مقایسه کنید. نتیجه را تفسیر کنید و ببینید آیا با شهود سازگار است. این چه ویژگی ای از متغیرهای تصادفی نمایی را نشان می دهد؟

سوال ۱۶۵) برای متغیر تصادفی X با توزیع زیر

$$\Pr\{X = i\} = (1-p)^i \cdot p \quad , \quad i = 0, 1, 2, \cdots$$

الف) مقدار $\mathrm{var}\{X|X \geq 4\}$ را به دست آورید.

ب) تابع جرم احتمال شرطی $\Pr\{X = x|\text{X زوج است}\}$ را پیدا کنید.

سوال ۱۶۶) تاس سالمی را ۹ بار پرتاب می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی X، تعداد اعداد زوج رو آمده به شرط دانستن این باشد که در سه پرتاب اول، حداقل یک عدد فرد آمده است،

الف) چگالی احتمال X را محاسبه کنید.

ب) اگر متغیر تصادفی Y، تعداد اعداد اول رو آمده باشد، مقدار $\Pr\{X = x|Y = 0\}$ چقدر است؟

سوال ۱۶۷) سکه ای را ۱۰ بار پرتاب می کنیم. متغیر تصادفی X برابر تعداد دفعات رو آمدن در پرتاب های دوم و چهارم و متغیر تصادفی Y برابر تعداد دفعات پشت آمدن در ۲ پرتاب اول است. مقدار $\mathbb{E}\{XY\}$ و چگالی احتمال شرطی $f_{X|Y}(X = x|Y = y)$ را به دست آورید (می توانید از روش جدول نویسی برای چگالی احتمال استفاده کنید که سطر جدول $X = x$ و ستون جدول $Y = y$ است).

سوال ۱۶۸) در پرتاب ۱۰ بار سکه‌ی سالم به طور مستقل،

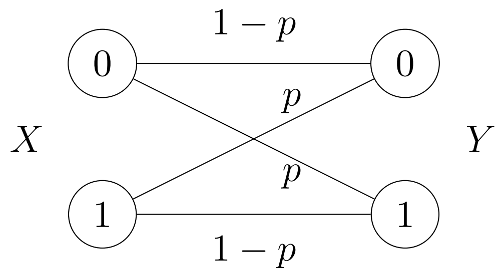
الف) توزیع احتمال متغیر تصادفی تعداد سکه های شیر آمده را به شرط آن که بدانیم سه پرتاب اول خط بوده اند به دست آورید.

ب) توزیع احتمال متغیر تصادفی تعداد سکه های شیر آمده را به شرط آن که بدانیم دست کم دو پرتاب از سه پرتاب اول خط بوده اند به دست آورید.

سوال ۱۶۹) کانال مخابراتی زیر را در نظر بگیرید:

که در آن، پیکان ها احتمالات گذار را از متغیر تصادفی X به متغیر تصادفی Y نشان می دهند؛ به طور مثال $\Pr\{Y = 0|X = 1\} = p$.

الف) اگر $\Pr\{X = 0\} = q$ که $0 \leq q \leq 1$ ، در اینصورت توزیع توام X و Y را محاسبه



کنید.

ب) احتمال خطا ($\Pr\{X \neq Y\}$) را محاسبه کنید. اگر مقدار p ثابت باشد، آیا احتمال خطا بر حسب q نقطه‌ی بهینه دارد؟ اگر دارد آنرا بیابید و در غیر این صورت، علت را بیان کنید.

سوال ۱۷۰) اگر توزیع تجمعی یک متغیر تصادفی ترکیبی به صورت

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \frac{x+2}{4} & , \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

باشد، چگالی احتمال متغیر تصادفی $X|(X \neq 0$ یا $X \neq 1)$ را به دست آورید.

سوال ۱۷۱) اگر برای متغیرهای تصادفی X و Y، چگالی احتمال زیر را داشته باشیم

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} e^{-x(y+1)^2} & , \quad x,y > 0 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در این صورت توزیع $X|Y=y$ را به دست آورید.

سوال ۱۷۲) فرض کنید متغیر تصادفی X، نتیجه پرتاب یک تاس سالم باشد. سپس با توجه به رخداد X ، متغیر تصادفی پیوسته‌ی Y را به صورت شرطی با چگالی احتمال زیر تعریف

می‌کنیم:

$$f_{Y|X}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{x} & , \quad 0<y<x\\ 0 & , \quad \text{سایر جاها}\end{cases}$$

الف) احتمال $\Pr\{Y\geq 3\}$ را بیابید.

ب) چگالی احتمال $f_Y(y)$ را به دست آورید.

پ) مقادیر $\mathbb{E}\{Y\}$ و $\mathrm{var}(Y)$ را از روی چگالی احتمال Y محاسبه کنید.

سوال ۱۷۳) برای چگالی احتمال زیر، مقادیر $\mathbb{E}\{X|X>1\}$ و $\sigma_X^2(X|X>1)$ و چگالی های احتمال شرطی $f(x|X\neq 1)$ و $f(x|X<\frac{1}{2})$ را محاسبه کنید.

$$f_X(x)=\begin{cases}3x(1-x) & , \quad 0<x<1\\ \frac{1}{2}\delta(x-1) & , \quad x=1\\ 0 & , \quad \text{سایر جاها}\end{cases}$$

سوال ۱۷۴) چگالی احتمال توأم زیر برای دو متغیر تصادفی X و Y داده شده است:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi} & , \quad x^2+y^2\leq 1\\ 0 & , \quad \text{سایر جاها}\end{cases}$$

الف) چگالی احتمال شرطی $f_{\max\{X,Y\}}(u|X\leq\frac{1}{2})$ را بیابید (ابتدا $\Pr\{\max\{X,Y\}\leq u|X\leq\frac{1}{2}\}$ را محاسبه کنید).

ب) مقدار $\mathbb{E}\{\sqrt{X^2+Y^2}|X+Y\leq 1\}$ را بیابید.

سوال ۱۷۵) اطلاعات زیر در مورد دو متغیر تصادفی X و Y داده شده است:

$$\Pr\{X=-1\}=\Pr\{X=1\}=\frac{1}{2}$$

$$f_Y(y|X=x)=\frac{a}{2}\exp(-a|x-y|)$$

که a، عدد ثابت مثبتی است.

الف) احتمال های $\Pr\{Y \leq 0|X = 1\}$ و $\Pr\{Y \geq 0|X = -1\}$ را بیابید. با افزایش a، مقادیر احتمالهای فوق چه تغییر می‌کنند؟

ب) نتیجه‌ی قسمت الف را با دیدگاه احتمال خطا توجیه کنید.

فصل ۶

دنباله‌ی متغیرهای تصادفی

سوال ۱۷۶) (قدم زدن تصادفی) فردی از نقطه‌ی صفر روی محور اعداد حقیقی با احتمال p یک متر به سمت راست و با احتمال $1-p$ یک متر به سمت چپ می رود. اگر این فرد این نوع قدم زدن را n بار و هربار از روی نقطه ای که روی آن ایستاده تکرار کند، با چه احتمالی پس از k بار قدم زدن به مبدا باز می گردد؟

سوال ۱۷۷) فرض کنید دنباله‌ی متغیرهای تصادفی $\{X_n\}$، از توزیع یکنواخت بین $-\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$ به طور مستقل پیروی می‌کند. به کمک قضیه‌ی حد مرکزی، توزیع متغیر تصادفی Y و میانگین و واریانس آن را به دست آورید؛ اگر

$$Y = \lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}.$$

سوال ۱۷۸) الف) تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی پواسون با پارامتر λ را به دست آورید.

ب) اگر دنباله‌ی متغیرهای تصادفی مستقل $\{X_n\}$، از نوع پواسون با پارامتر λ باشد، نشان دهید متغیر تصادفی

$$Y = \sum_{i=1}^{N} X_i,$$

دارای توزیع پواسون با پارامتر $N\lambda$ است.

پ) نشان دهید اگر دنباله‌ی متغیرهای تصادفی مستقل $\{X_n\}$، برنولی با پارامتر p و N از نوع پواسون با پارامتر λ باشد، متغیر تصادفی $Y = \sum_{n=0}^{N-1} X_n$ دارای توزیع پواسون با پارامتر λp است.

سوال ۱۷۹) تحقیق کنید هر یک از دنباله‌ی متغیرهای تصادفی زیر، با چه مفهومی به یک متغیر تصادفی میل می‌کنند. برای هر یک دلیل بیاورید.

الف) $X_n = X + \frac{1}{n}$ که X، یک متغیر تصادفی یکنواخت در بازه‌ی $[0, 1]$ است.

ب) متغیر تصادفی نمایی با پارامتر $\frac{n+1}{n}$

پ) متوسط تعداد شیرها در n بار پرتاب مستقل یک سکه‌ی سالم

فصل ۷

شبیه سازی ها

سوال ۱۸۰) سکه‌ی سالمی را (که احتمال پشت و رو برابر $\frac{1}{2}$ است) به تعداد n بار پرتاب می کنیم.

الف) منحنی تعداد دفعات رو آمدن سکه را به تعداد کل دفعات پرتاب سکه بر حسب n به ازای $1 \leq n \leq 100$ رسم کنید.

ب) رفتار این نمودار را با افزایش n توصیف کرده و بیان کنید به چه عددی همگرا می شود. مشاهدات خود را توضیح دهید.

پ) همین نمودار را برای سکه غیر سالم که احتمال رو آمدن آن $\frac{2}{3}$ است، رسم کرده و بیان کنید به چه عددی همگرا می‌گردد. مشاهدات خود را توضیح دهید.

راهنمایی: ابتدا به کمک تابع randi() در متلب، یک آرایه 1×100 از اعداد تصادفی ۰ یا ۱ بسازید (به عنوان مثال ۰ را شیر و ۱ را خط در نظر بگیرید). سپس هر بار، به ازای هر n که $1 \leq n \leq 100$ ، میانگین n مقدار اول آرایه فوق را حساب کرده و آرایه‌ی 1×100 جدید بسازید. آرایه‌ی جدید، پاسخ مسئله است که باید بر حسب n از ۱ تا ۱۰۰ رسم گردد.

سوال ۱۸۱) سکه ای با احتمال p رو و با احتمال $1-p$ پشت می آید. آزمایشی را در نظر

بگیرید که در آن، این سکه ۱۰۰ بار پرتاب شده و نسبت تعداد رو آمدن ها به تعداد کل پرتاب ها (=۱۰۰) به عنوان نتیجه آزمایش در نظر گرفته می شود.

اگر آزمایش فوق را m بار تکرار کرده و نتیجه این m آزمایش را در یک آرایه‌ی $m \times 1$ ذخیره کنیم،

الف) با فرض $p = 0.5$ و $m = 100$ ، این آرایه را رسم کنید (مشابه بند الف سوال ۱). سپس به کمک قضیه دموآو-لاپلاس، منحنی گوسی را به عنوان تقریبی از توزیع دو جمله ای به همراه نمودار قبل رسم نموده و مشاهدات خود را توضیح دهید.

ب) بند الف را به ازای $m = 1000$ تکرار کنید. چه تفاوتی مشاهده می شود؟

پ) بند الف را یک بار برای حالت $p = 0.2$ و $m = 1000$ و بار دیگر برای حالت $p = 0.1$ و $m = 1000$ شبیه سازی کنید و مشاهدات خود را توصیف کنید. چه تفاوتی با بند های پیشین مشاهده می شود؟

(یادآوری: توزیع دوجمله ای با پارامترهای n و p را می توان به صورت زیر با منحنی گوسی تقریب زد:

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}$$

که $q = 1 - p$.)

سوال ۱۸۲) سوال ۱) (تعبیر تجربی چگالی احتمال) می دانید که تابع چگالی احتمال دارای شهود تجربی است؛ به این معنا که مقدار چگالی احتمال در هر نقطه از دامنه‌ی متغیر تصادفی، نشان دهنده‌ی وزن احتمالاتی آن نقطه است. برای به تصویر کشیدن این شهود، متغیر تصادفی گوسی با میانگین صفر و واریانس ۱ را در نظر بگیرید. تابع `randn()` در متلب، تحققی از چنین متغیر تصادفی ای را برآورده می کند. به کمک این تابع، ۱۰۰۰۰۰ تحقق مستقل از این متغیر تصادفی را تولید کرده و به کمک دستور `histogram()` آرایه‌ی ۱۰۰۰۰۰ تایی را رسم

کنید. سپس با حفظ این نمودار، نمودار منحنی گوسی با میانگین صفر و واریانس ۱ را رسم کرده و دو نمودار را با هم مقایسه کنید. مشاهدات خود را توضیح دهید.

نکته مهم!

پارامتر `Normalization' را روی مقدار `pdf' تنظیم کنید. برای این کار، دستور `histogram()` را به صورت `histogram(.....,'Normalization','pdf')` استفاده کنید.

سوال ۱۸۳) در مبحث توابعی از یک متغیر تصادفی آموختید که اگر متغیر تصادفی X دارای چگالی احتمال مشخص باشد، آنگاه می توان چگالی احتمال متغیر تصادفی $Y = g(X)$ را با تنظیم تابع $g(\cdot)$ روی هر تابع دلخواهی تنظیم کرد. ثابت می‌شود که اگر X متغیر تصادفی یکنواخت در بازه‌ی $[0,1]$ باشد، متغیر تصادفی $Y = -\ln(1-X)$ دارای توزیع نمایی با پارامتر $\lambda = 1$ و توزیع $f_Y(y) = e^{-y}$ است. برای اثبات این امر،

الف) ۱۰۰۰۰۰ تحقق از متغیر تصادفی یکنواخت در بازه‌ی $[0,1]$ را به کمک دستور `rand()` تولید کرده و هیستوگرام آن را رسم کنید. اسم بردار ۱۰۰۰۰۰ تایی را X بگذارید.

ب) از روی بردار X، بردار ۱۰۰۰۰۰ تایی $Y = -\ln(1-x)$ را محاسبه کرده و هیستوگرام آن را رسم کنید. سپس چگالی احتمال متغیر تصادفی نمایی با پارامتر $\lambda = 1$ را به همراه این هیستوگرام در یک نمودار نشان دهید. رابطه‌ی بین هیستوگرام و چگالی احتمال توزیع نمایی را توجیه کنید.

برای رسم دو نمودار در یک شکل، از دستور hold on استفاده کنید.

سوال ۱۸۴) در این شبیه سازی، قصد داریم پرتاب سکه را با جزئیات بیشتر مطالعه کنیم.

می‌دانیم در n بار پرتاب سکه‌ی سالم، احتمال k بار رو آمدن برابر است با

$$\binom{n}{k}(\frac{1}{2})^n.$$

جهت تجربه‌ی عملی فرمول اخیر، آزمایشی را که در آن سکه 1000 بار پرتاب می‌شود، 1000 بار تکرار می‌کنیم (مشابه اینکه سکه ای را ۱۰۰۰۰۰۰ بار پرتاب کرده و هر ۱۰۰۰ نتیجه‌ی پشت سر هم را خوشه‌بندی کنیم).

گامها:

گام ۱) به کمک یک حلقه‌ی for، ۱۰۰۰ عدد تصادفی ۰ یا ۱ تولید کرده و تعداد دفعاتی را که این رشته‌ی ۱۰۰۰تایی برابر۱ می‌شود (سکه رو می‌آید) را حساب کنید.

گام ۲) گام۱ را ۱۰۰۰ بار تکرار کرده و هر بار نتیجه را در یک آرایه‌ی ۱۰۰۰تایی ذخیره کنید.

گام ۳) هیستوگرام نتایج را رسم نموده و آن را توجیه کنید (تعداد binهای هیستوگرام را برابر 40 قرار دهید).

سوال ۲)

الف) می‌دانیم که چگالی احتمال یک متغیر تصادفی، میانگین تجربی تعداد دفعات رخداد مقادیر آن متغیر تصادفی را نشان می‌دهد؛ به طور مثال در توزیع یکنواخت در بازه‌ی $[0,1]$، تمام اعداد این بازه، دارای میانگین تجربی یکسان رخداد هستند. جهت تحقیق این امر، ۱۰۰۰۰ تحقق از توزیع یکنواخت در بازه‌ی $[0,1]$ را تولید کرده و هیستوگرام آن را رسم کنید. نتیجه را توجیه کنید.

ب) می‌دانیم که اگر X از توزیع یکنواخت در بازه‌ی $[0,1]$ پیروی کند، $Y = -\ln X$ از توزیع نمایی با پارامتر $\lambda = 1$ پیروی می‌کند و چگالی احتمال آن به صورت زیر است:

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & , \quad y > 0 \\ 0 & , \quad y \leq 0 \end{cases}.$$

به کمک دستور هیستوگرام، ۱۰۰۰۰ تحقق از توزیع یکنواخت در بازه‌ی $[0,1]$ تولید کرده و در آرایه‌ای به نام X ذخیره کنید. سپس آرایه‌ی Y را از روی آرایه‌ی X به صورت $Y = -\ln X$ بسازید. سپس هیستوگرام Y را با تعداد bin برابر ۱۰۰ رسم کنید. جهت مشاهده‌ی رفتار چگالی احتمال، تابع e^{-y} را در بازه‌ی $(0,10)$ روی همان نمودار هیستوگرام رسم شده بکشید و نتیجه را توجیه کنید.

(فرض کنید میخواهید هیستوگرام آرایه‌ی x را رسم کنید. جهت رسم هیستوگرام در این سوال، از دستورهای زیر استفاده کنید:

)

فصل ۸

پاسخ سوالات

پاسخ سوال ۱) از اصل سوم احتمال، برای هر دو مجموعه‌ی ناسازگار A و B داریم

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

از آنجا که A و A' طبق تعریف ناسازگارند، بنابراین

$$P(A \cup A') = P(A) + P(A').$$

از طرفی طبق تعریف،

$$A \cup A' = S$$

که S فضای نمونه است. در نتیجه

$$P(A) + P(A') = 1.$$

بر اساس اصل اول احتمال، احتمال هر مجموعه مقداری نامنفی است؛ در نتیجه

$$P(A) = 1 - P(A') \leq 1$$

و اثبات کامل است ■

پاسخ سوال ۲) طبق اصل ضرب، تعداد تمام اعداد سه رقمی متمایزی که می توان به این روش ساخت، برابر است با $9^3 = 729$. تعداد ارقام فرد از بین اعداد ۱ تا ۹، برابر ۵ است

(ارقام ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹). در نتیجه، تعداد اعداد سه رقمی ای که تمام ارقام آن فرد هستند را می توان دوباره طبق اصل ضرب به $5^3 = 125$ طریق ممکن ساخت. بنابراین احتمال مطلوب عبارتست از

$$p = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{125}{729}$$

پاسخ سوال ۳) تعداد حالات برداشتن ۲۰ توپ، برابر $\binom{100}{20}$ بوده و تعداد حالات مطلوب، برابر $\binom{40}{5}\binom{60}{15}$ است؛ لذا احتمال مطلوب برابر $\frac{\binom{40}{5}\binom{60}{15}}{\binom{100}{20}}$ خواهد بود.

پاسخ سوال ۴)

ابتدا پیشامدهای زیر را تعریف می‌کنیم:

$B =$ پیشامد آبی بودن توپ

$R =$ پیشامد قرمز بودن توپ

$Y =$ پیشامد زرد بودن توپ

$U_1 =$ پیشامد انتخاب کیسه‌ی ۱

$U_2 =$ پیشامد انتخاب کیسه‌ی ۲.

در این صورت،

الف)

$$P(R \cap A_5) = P(R|A_5)P(A_5) = \frac{20}{50} \times \frac{1}{2} = 20\%.$$

ب)

$$P(B|U_1) = \frac{30}{50} = 60\%.$$

پ)

$$
\begin{aligned}
P(R|Y') &= \frac{P(R\cap Y')}{P(Y')} = \frac{P(R)}{1-P(Y)} \\
&= \frac{P(R|U_1)P(U_1)+P(R|U_2)P(U_2)}{1-P(Y|U_1)P(U_1)-P(Y|U_2)P(U_2)} \\
&= \frac{\frac{20}{50}\times\frac{1}{2}+\frac{50}{100}\times\frac{1}{2}}{1-0\times\frac{1}{2}-\frac{20}{100}\times\frac{1}{2}} = 50\%.
\end{aligned}
$$

ت)

$$
\begin{aligned}
P(U_2|B') &= \frac{P(U_2\cap B')}{P(B')} = \frac{P(B'|U_2)P(U_2)}{P(B'|U_1)P(U_1)+P(B'|U_2)P(U_2)} \\
&= \frac{\frac{70}{100}\times\frac{1}{2}}{\frac{20}{50}\times\frac{1}{2}+\frac{70}{100}\times\frac{1}{2}} \approx 63.64\%.
\end{aligned}
$$

ث)

$$
\begin{aligned}
P(U_2|R'\cap Y') &= \frac{P(U_2\cap R'\cap Y')}{P(R'\cap Y')} \\
&= \frac{P(R'\cap Y'|U_2)P(U_2)}{P(R'\cap Y'|U_1)P(U_1)+P(R'\cap Y'|U_2)P(U_2)} \\
&= \frac{\frac{30}{50}\times\frac{1}{2}}{\frac{30}{100}\times\frac{1}{2}+\frac{30}{50}\times\frac{1}{2}} \approx 66.67\%.
\end{aligned}
$$