به نام زیبایی
پاسخ تمرینات سری هشتم سیگنال ها و سیستم ها

سوال ۱)

فرکانس زاویه ای نمونه برداری برابر است با:

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = 20000\pi$$

طبق قضیه ی نایکوییست، این مقدار باید حداقل دوبرابر پهنای باند یکطرفه‌ی سیگنال باشد؛ به طور مثال در مورد الف که پهنای باند یکطرفه برابر 5000π است، دوبرابر این مقدار از فرکانس نمونه برداری کمتر بوده و تداخل رخ نمی دهد؛ در حالی که در مورد ب، پهنای باند یک طرفه برابر 15000π است که در این مورد، شرط نایکوییست رعایت نشده و تداخل خواهیم داشت.

پ) چون شرطی روی $\Im$ سیگنال گذاشته نشده است، تداخل می تواند رخ دهد.

ت) به دلیل تقارن هرمیتیک $X(j\omega)$، می توان گفت تبدیل فوریه‌ی سیگنال آنالوگ در $\omega < -5000\pi$ هم برابر صفر است؛ در نتیجه تداخل مانند قسمت الف رخ نمی دهد.

ث) به دلیل تقارن هرمیتیک $X(j\omega)$، می توان گفت تبدیل فوریه‌ی سیگنال آنالوگ در $\omega < -15000\pi$ هم برابر صفر است؛ در نتیجه تداخل مانند قسمت ب رخ می دهد.

ج) چون پهنای باند یک طرفه‌ی $X(j\omega)$ برابر نصف $X(j\omega) * X(j\omega)$ است، در حقیقت پهنای باند یک طرفه برابر $\frac{15000\pi}{2}$ خواهد بود که شرط نایکوییست را ارضا می کند.

چ) طبق نتیجه گیری

$$|X(j\omega)| = 0 \iff X(j\omega) = 0$$

و مشابه قسمت الف، تداخل رخ نمی دهد.

سوال ۲)

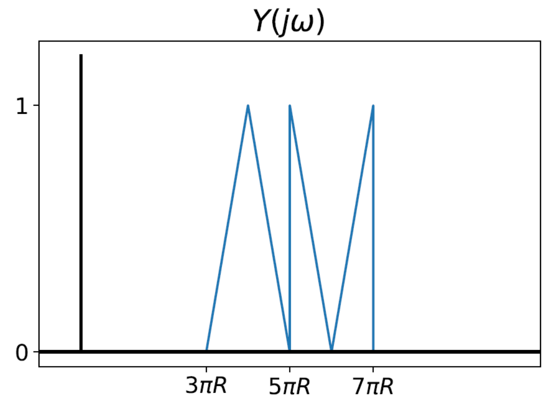
الف)

اگر تبدیل فوریه‌ی $s_1(t)$ و $s_2(t)$ را به ترتیب $S_1(j\omega)$ و $S_2(j\omega)$ بنامیم، آنگاه:

$$Y(j\omega) = S_1(j(\omega - 4\pi R)) + S_2(j(\omega - 6\pi R))$$

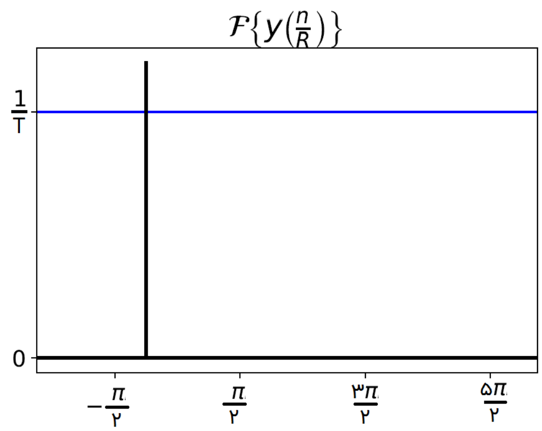
در اینصورت، تبدیل فوریه‌ی آن، مانند شکل ۱ است.

ب) از آنجا که پهنای باند طیفی (دو طرفه‌ی) سیگنال $y(t)$، برابر $4\pi R$ است، نرخ نایکوییست نیز باید همین مقدار باشد. اگر نمونه برداری را با فرکانس $2\pi R$ انجام دهیم، در واقع تبدیل فوریه‌ی $y(t)$



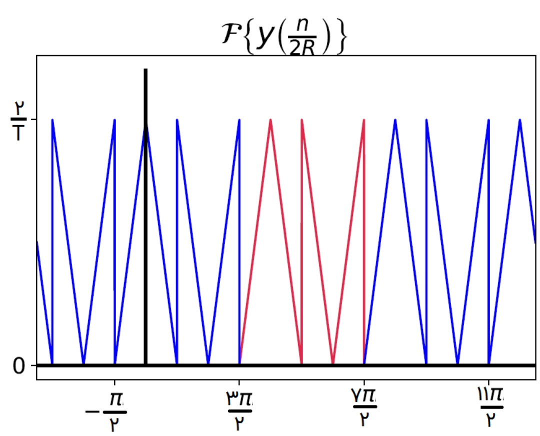
شکل ۱: تبدیل فوریه ی $y(t)$

را با دوره تناوب ۲πR در حوزه ی فرکانس شیفت متوالی داده، با خودش جمع کرده و سپس مقیاس فرکانسی را عوض کرده ایم؛ در این صورت: به وضوح، رعایت نکردن شرط نایکوئیست، باعث از بین

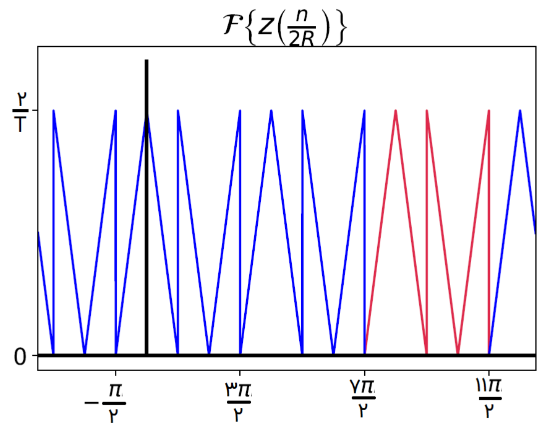


رفتن اطلاعات طیفی شده است.

پ) مشابه قسمت قبل: معادل گسسته‌ی تبدیل فوریه‌ی $y(t)$ با قرمز نشان داده شده است.



ت) تبدیل فوریه‌ی $\hat{z}[n]$ عبارتست از:



که برابر با تبدیل فوریه‌ی $\hat{y}[n]$ است؛ بنابراین آشکارسازی سیگنال در گیرنده بدون اطلاعات اضافی امکان ناپذیر است. دوباره، معادل گسسته‌ی تبدیل فوریه‌ی $z(t)$ با قرمز نشان داده شده است.

سوال ۳)

از تساوی پارسوال در هر دو حوزه‌ی گسسته و پیوسته بهره می گیریم؛ در این صورت:

$$E_۱ = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X(e^{j\Omega})|^۲ d\Omega$$
$$E_۲ = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|^۲ d\omega = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-R}^{R}|X(j\omega)|^۲ d\omega$$

از طرفی

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{۱}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{\Omega - ۲\pi k}{T_s}\right)$$

چون تداخل رخ نمی دهد، می توان نوشت:

$$|X(e^{j\Omega})|^۲ = \frac{۱}{T_s^۲}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|X\left(\frac{\Omega - ۲\pi k}{T_s}\right)\right|^۲$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} E_۱ &= \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X(e^{j\Omega})|^۲ d\Omega \\ &= \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{۱}{T_s^۲}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|X\left(\frac{\Omega - ۲\pi k}{T_s}\right)\right|^۲ d\Omega \\ &= \frac{۱}{۲\pi T_s^۲}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|X\left(\frac{\Omega - ۲\pi k}{T_s}\right)\right|^۲ d\Omega \end{aligned}$$

چون فقط یک تناوب از انتگرال بالا در بازه‌ی $[-\pi, \pi]$ می افتد، می توان نوشت:

$$\begin{aligned} E_۱ &= \frac{۱}{۲\pi T_s^۲} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| X\left(\frac{\Omega - ۲\pi k}{T_s}\right) \right|^۲ d\Omega \\ &= \frac{۱}{۲\pi T_s^۲} \int_{-\pi}^{\pi} \left| X\left(\frac{\Omega}{T_s}\right) \right|^۲ d\Omega \\ &= \frac{۱}{۲\pi T_s} \int_{-\frac{\pi}{T_s}}^{\frac{\pi}{T_s}} \left| X(\Omega_۱) \right|^۲ d\Omega_۱ \\ &= \frac{۱}{۲\pi T_s} \int_{-\frac{\pi}{T_s}}^{\frac{\pi}{T_s}} \left| X(\Omega_۱) \right|^۲ d\Omega_۱ \\ &= \frac{۱}{۲\pi T_s} \int_{-R}^{R} \left| X(\Omega_۱) \right|^۲ d\Omega_۱ \\ &= E_۲ \pi T_s \end{aligned}$$

تساوی آخر به دلیل برقرار بودن شرط نایکوئیست رخ می دهد.

سوال ۴)

طبق خواص تبدیل فوریه می دانیم:

$$x[n] = \cos(\frac{\pi}{۴}n + \phi_\circ) \iff \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} [e^{j\phi_\circ}\delta(\omega - \frac{\pi}{۴} - ۲\pi k) + e^{-j\phi_\circ}\delta(\omega + \frac{\pi}{۴} - ۲\pi k)]$$

و

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - ۴k] \iff \frac{\pi}{۲} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{\pi}{۲}k)$$

بنابراین تبدیل فوریه‌ی $y[n] = x[n] \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - ۴k]$ برابر است با:

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) H(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \\ &= \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \pi [e^{j\phi_\circ}\delta(\theta - \frac{\pi}{۴}) + e^{-j\phi_\circ}\delta(\theta + \frac{\pi}{۴})] \\ &\times \frac{\pi}{۲} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \theta - \frac{\pi}{۲}k) d\theta \\ &= \frac{\pi}{۴} \int_{-\pi}^{\pi} [e^{j\phi_\circ}\delta(\theta - \frac{\pi}{۴}) + e^{-j\phi_\circ}\delta(\theta + \frac{\pi}{۴})] \\ &\times \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \theta - \frac{\pi}{۲}k) d\theta \\ &= \frac{\pi}{۴} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[e^{j\phi_\circ}\delta(\omega - \frac{\pi}{۴} - \frac{\pi}{۲}k) + e^{-j\phi_\circ}\delta(\omega + \frac{\pi}{۴} - \frac{\pi}{۲}k) \right] \end{aligned}$$

از طرفی تبدیل فوریه‌ی $\frac{\sin \frac{\pi}{۴}n}{\frac{\pi}{۴}n}$ متناوب با ۲π و در بازه‌ی $[-\pi, \pi]$ دارای پالسی در بازه‌ی $[-\frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۴}]$ و دامنه ی ۴ است. با اعمال این فیلتر به تبدیل فوریه‌ی اخیر، در بازه‌ی $[-\pi, \pi]$ فقط دو ضربه در

$\{-\frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۴}\}$ خواهیم داشت؛ بنابراین:

$$\mathcal{F}\left\{g[n] * \frac{\sin\frac{\pi}{۴}n}{\frac{\pi}{۴}n}\right\} = \pi\big(e^{j\phi_\circ} + e^{-j\phi_\circ}\big)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\delta(\omega - \frac{\pi}{۴} - ۲\pi k) + \delta(\omega + \frac{\pi}{۴} - ۲\pi k)\right]$$

بنابراین باید داشته باشیم

$$e^{j\phi_\circ} + e^{-j\phi_\circ} = ۲e^{j\phi_\circ} \implies \phi_\circ = \circ, \pi$$