

نمونه سوالات

مصطفی اياز

۱۸ آبان ۱۴۰۲

فهرست مطالب

۲	۱ مبانی احتمال و جبر مجموعه ها
۱۶	۲ آزمایش های تکراری
۲۳	۳ متغیرهای تصادفی
۳۸	۴ متغیرهای تصادفی توأم
۵۲	۵ احتمال شرطی در متغیرهای تصادفی
۵۷	۶ دنباله ی متغیرهای تصادفی
۵۹	۷ شبیه سازی ها

فصل ۱

مبانی احتمال و جبر مجموعه ها

سوال ۱) نشان دهید احتمال هر مجموعه، کمتر از یا مساوی ۱ است.

سوال ۲) فرض کنید که برنامه ی نوشته اید که اعداد ۱ تا ۹ را به صورت کاملاً تصادفی در هر بار اجرا در ۳ جایگاه (سه رقم) چاپ می کند. احتمال ظاهر شده اعداد با هر سه رقم فرد را مناسبه کنید.

سوال ۳) از کیسه ای که دارای ۴۰ مهره سیاه و ۶۰ مهره قرمز است، ۲۰ مهره بر می داریم. با چه احتمالی، از این ۲۰ مهره، ۵ مهره سیاه و ۱۵ مهره قرمزند؟

سوال ۴) دو کیسه در اختیار داریم. کیسه اول شامل ۲۰ گلوله قرمز و ۳۰ گلوله آبی و دومی شامل ۲۰ گلوله زرد، ۳۰ گلوله آبی و ۵۰ گلوله قرمز است. ابتدا یکی از کیسه ها را به تصادف انتخاب کرده و سپس گلوله ای را از داخل آن به تصادف بر می داریم.

الف) با چه احتمالی گلوله انتخاب شده قرمز و از کیسه ی ۲ است؟

ب) اگر گلوله از کیسه ۱ انتخاب شده باشد، با چه احتمالی آبی است؟

پ) اگر گلوله زرد نباشد با چه احتمالی قرمز است؟

ت) اگر کلوله آبی نباشد، با چه احتمالی از کیسه ۲ انتخاب شده است؟

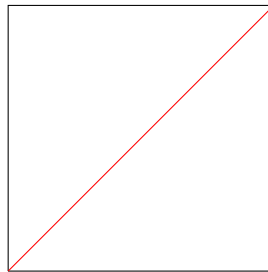
ث) اگر کلوله قرمز یا زرد نباشد، با چه احتمالی از کیسه ۲ انتخاب شده است؟

سوال ۵) سه جعبه در اختیار داریم. جعبه ۱ شامل ۷ توپ آبی و ۳ توپ قرمز، جعبه ۲ شامل ۱ توپ آبی، ۳ توپ قرمز و ۶ توپ زرد و جعبه ۳ شامل ۷ توپ آبی و ۳ توپ زرد هستند. ابتدا یکی از جعبه ها را به تصادف برداشته و سپس توپی از آن جعبه به تصادف بر می داریم. اگر توپ بیرون آمده آبی نباشد، با چه احتمالی قرمز است و از جعبه ۱ یا از جعبه ۲ بیرون آمده است؟

سوال ۶) یک عدد دو رقمی را به این صورت می سازیم که هر رقم آن، به صورت تصادفی از بین ارقام ۱ تا ۹ انتخاب شده باشد. با چه احتمالی، عدد ساخته شده بر ۹ بخش پذیر است؟

سوال ۷) سه جعبه داریم که هر یک شامل ۱۰ توپ هستند. در جعبه اول، ۳ توپ آبی و ۷ توپ قرمز، در جعبه دوم، ۳ توپ سفید و ۵ توپ آبی و در جعبه سوم، ۱ توپ قرمز و ۹ توپ سفید هستند. ابتدا یکی از جعبه ها را به تصادف انتخاب کرده و سپس توپی از آن جعبه بیرون می کشیم. اگر توپ مورد نظر سفید باشد، با چه احتمالی از جعبه دوم نیست؟

سوال ۸) دو نقطه را به تصادف از داخل مربع زیر با طول ضلع ۱ انتخاب می کنیم:



احتمال اینکه این دو نقطه در دو طرف متفاوت قطر مربع انتخاب شوند و فاصله ی هر یک از آنها از قطر نشان داده شده ی مربع (قطر قرمز رنگ در شکل) بیش از ۰.۵ باشد چقدر است؟

سوال ۹) دو جعبه در اختیار داریم. جعبه ۱ شامل ۱۰ توپ سفید و ۱۰ توپ آبی و جعبه دوم شامل ۲۰ توپ سفید و ۳۰ توپ قرمز است. ابتدا یکی از جعبه ها را به تصادف انتخاب کرده و سپس از داخل جعبه انتخاب شده، گلوله ای را به تصادف بر می داریم.

الف) اگر گلوله سفید باشد، با چه احتمالی از جعبه ی ۲ انتخاب شده است؟

ب) اگر گلوله سفید نباشد، با چه احتمالی قرمز است؟

سوال ۱۰) یک تاس سالم (که احتمال رخداد هر وجه آن $\frac{1}{6}$ است) را دوبار پرتاب می کنیم و نتیجه دوبار پرتاب را در نظر می گیریم. اگر واقعه ی A معادل حالت هایی باشد که مجموع دو عدد رو آمده کمتر از ۵ باشد، و واقعه ی B به گونه ای باشد که

$$B = \{(1, 4), (2, 3), (2, 2), (1, 2), (3, 1)\},$$

در این صورت مقدار احتمال $P(A - B)$ را با بهره گیری از تعریف اصل موضوعی احتمال (کولموگوروف) بیابید.

سوال ۱۱) یک سکه سالم را می اندازیم. اگر رو آمد، تاس سالمی را می اندازیم و عدد رو آمده را یادداشت می کنیم و در غیر این صورت، سه تاس را پرتاب کرده و مجموع سه عدد را یادداشت می کنیم. با چه احتمالی، عدد یادداشت شده برابر ۴ است؟

سوال ۱۲) از مجموعه ی تمام اعداد دو رقمی بدون ارقام تکراری ای که می توان از ارقام ۱، ۵، ۷ و ۹ ساخت، عددی را به تصادف بر می گزینیم. با چه احتمالی عدد انتخاب شده، بر ۳ بخش پذیر است؟

سوال ۱۳) کشوری شامل دو استان ۱ و ۲ است. استان ۱، شامل ۶۰ مرد و ۴۰ زن و استان ۲ شامل ۶۵۰ زن و ۳۵۰ مرد است. در استان ۱، ۱۰ مرد و ۱۰ زن چشم آبی و در استان ۲، ۳۰ مرد و ۲۰ زن چشم آبی هستند. فردی را به تصادف از این کشور انتخاب می کنیم.

الف) اگر این فرد چشم آبی باشد، با چه احتمالی از استان ۱ انتخاب شده است؟

ب) اگر این فرد زن باشد، با چه احتمالی از استان ۲ انتقاب شده و چشم آبی نیست؟

پ) اگر فرد انتقاب شده مرد باشد، با چه احتمالی چشم آبی است؟

سوال ۱۴) استانی دارای دو شهر است. شهر ۱ دارای ۱۲۰ مرد و ۸۰ زن و شهر ۲ دارای ۱۰۰۰ زن و ۸۰۰ مرد است. در شهر ۱، ۵۰ مرد و ۳۰ زن و در شهر ۲، ۱۰۰ مرد و ۱۵۰ زن به تب کریمه کنگو مبتلا هستند. فردی را از این استان به تصادف انتقاب می‌کنیم.

الف) با چه احتمالی این فرد، زن سالمی از شهر ۱ است؟

ب) اگر فردی که انتقاب می‌کنیم بیمار باشد، با چه احتمالی مردی از شهر ۲ است؟

پ) اگر فرد انتقاب شده سالم باشد، احتمال زن بودن او چقدر است؟

سوال ۱۵) یک سکه سالم را برداشته، آن را سه بار پرتاب می‌کنیم و نتیجه‌ی سه بار پرتاب را در نظر می‌گیریم. اگر رو آمدن سکه را با H و پشت آمدن را با T نمایش دهیم:

الف) فضای نمونه را بنویسید.

ب) این مسئله‌ی احتمال، چند واقعیه‌ی مفتمل دارد؟ (واقعیه طبق تعریف یک زیر مجموعه از فضای نمونه است).

پ) طبق تعریف کلاسیک احتمال، واقعیه‌ی اینکه در پرتاب اول و دوم سکه نتیجه یکسان باشد (در پرتاب سوم نتیجه دلفواه است)، با چه احتمالی رخ می‌دهد؟

سوال ۱۶) دو مجموعه‌ی $A = \{1, 4, 5\}$ و $B = \{2, 3, 4\}$ را در نظر بگیرید. مجموعه‌های زیر را به دست آورید.

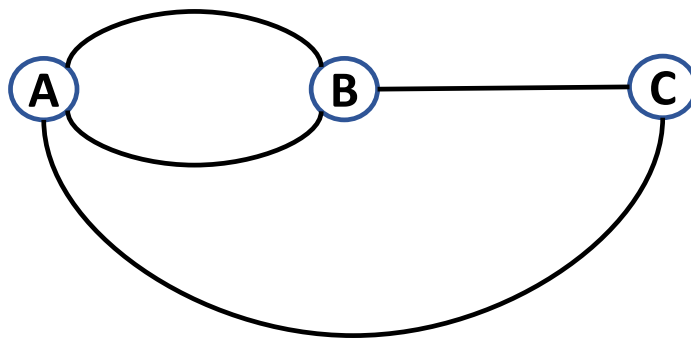
الف) $A \cap B$ ، $A - B$ ، $A \times B$ (ضرب دکارتی)

ت) اگر $C = \{2, 5, 6\}$ ، با معادله‌ی مجموعه‌های $(A \cup B) \cap C$ و $(A \cap C) \cup (B \cap C)$ نشان دهید $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

سوال ۱۷) به کمک تعریف اصولی احتمال (و با بهره‌گیری از اصول کولموگوروف)، برای هر دو مجموعه‌ی A و B نتیجه بگیرید $P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$.

سوال ۱۸) در یک کیسه، ۵ گلوله‌ی آبی و ۳ گلوله‌ی سفید وجود دارد. دو عدد گلوله برد می‌داریم. احتمال این را که یکی از گلوله‌ها آبی و دیگری سفید باشد، در دو حالت با جایگذاری و بدون جایگذاری به دست آورید (جایگذاری حالتی است که گلوله‌ای را پس از بیرون آوردن از کیسه و مشاهده‌ی رنگ آن، به کیسه بازگردانیم).

سوال ۱۹) در نقشه‌ی زیر، از شهر A به شهر B دو مسیر و از B به C یا از A به C یک مسیر وجود دارد. اگر احتمال قطع شدن هر مسیر مستقل از سایرین برابر p باشد، احتمال آن که شغلی بتواند از شهر A به C برود چقدر است؟



سوال ۲۰) در مبث مدرو لاسیون دییتال، می‌توان هر سمبل مقابراتی را با تعدادی بیت کد نموده و پس از شکل دهی پالس روی کانال ارسال کرد. فرض کنید یک سمبل مقابراتی از n بیت تشکیل شده باشد. به طور مثال

$$S_k \equiv (1010001101)_2$$

که k اندیس سمبل است و در اینجا سمبل از ۱۰ بیت تشکیل شده است. این سمبل از یک کانال مقابراتی ارسال و در انتهای کانال دریافت می‌شود. اگر احتمال خرابی هر بیت

مستقل از سایرین برابر p باشد، با چه احتمالی سمبل به درستی آشکار نمی شود؟

سوال ۲۱) دو تاس را پرتاب می کنیم. احتمال اینکه دو عدد رو آمده نسبت به هم اول باشند چقدر است؟

سوال ۲۲) یک سکه ی سالم و یک تاس سالم را با هم پرتاب می کنیم.

الف) احتمال اینکه سکه به رو بیفتد و تاس عدد فرد شود را به دست آورید.

ب) احتمال اینکه سکه به رو بیفتد یا تاس عدد فرد شود را به دست آورید (هر دو باهم نیز می توانند رخ دهند!)

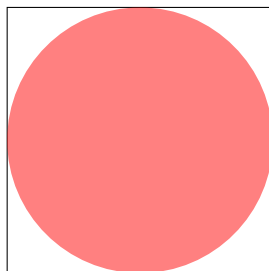
سوال ۲۳) یک تاس را پرتاب می کنیم. اگر مضرب ۳ ظاهر شد، نتیجه را یادداشت می کنیم و در غیر این صورت سکه ای را می اندازیم و نتیجه ی سکه (پشت یا رو) را می نویسیم.

الف) فضای شدنی این مسئله را بیابید.

ب) با چه احتمالی واقعه ی رو آمدن سکه رخ می دهد؟

پ) احتمال واقعه ی اینکه تاس عدد ۱ بیاید یا سکه به پشت ظاهر شود را به دست آورید.

سوال ۲۴) نقطه ای را از داخل مربع زیر بر می گزینیم (طول ضلع مربع برابر ۲ است).



احتمال اینکه،

الف) نقطه داخل دایره ی واحد (نشان داده شده در شکل) بیفتد چقدر است؟

ب) نقطه روی یکی از دو قطر مربع بیفتد چقدر است؟

پ) فاصله‌ی نقطه از هر یک از رأس‌های مربع بیش از 0.5 باشد چقدر است؟

سوال ۲۵) از بین اعداد سه رقمی‌ای که با ترکیب رقم‌های ۰، ۱ و ۲ می‌توان ساخت (تکرار مجاز است):

الف) چند عدد به ۳ بخش پذیرند؟

ب) اگر عددی را به تصادف برگزینیم، با چه احتمالی زوج خواهد بود؟

سوال ۲۶) در یک جامعه‌ی آماری، نسبت جمعیت زنان بزرگسال، مردان بزرگسال و کودکان به کل جمعیت جامعه به ترتیب برابر 0.37، 0.43 و 0.2 است. در این جامعه، 0.15 مردان بزرگسال و 0.25 زنان بزرگسال به نوعی بیماری مبتلا شده‌اند. فرد بزرگسالی را به تصادف از این جامعه انتخاب می‌کنیم، احتمال بیمار بودن او چقدر است؟

سوال ۲۷) فرض کنید مجموعه‌های B و C مستقل و دارای احتمال مثبت باشند. در چه حالتی داریم $P(A|B \cap C) = P(A|B)P(A|C)$ ؟

سوال ۲۸) (کمران پایین برای احتمال اجتماع) برای هر دو مجموعه‌ی A و B ثابت کنید

$$P(A) + P(B) - \frac{1}{4 \max\{1 - P(A), 1 - P(B)\}} \leq P(A \cup B).$$

سوال ۲۹) جعبه‌ی ۱ حاوی ۱۰۰۰ لامپ است که ۱۰ درصد آنها خراب هستند. جعبه‌ی ۲ نیز حاوی ۲۰۰۰ لامپ است که ۵ درصد آنها خراب هستند. از یک جعبه که به طور تصادفی انتخاب شده، دو لامپ بیرون آورده می‌شوند.

الف) احتمال خرابی هر دو چقدر است؟

ب) اگر هر دو لامپ خراب باشند، با چه احتمالی جعبه‌ی ۱ انتخاب شده است؟

سوال ۳۰) نشان دهید که برای استقلال n رخداد باید $2^n - n - 1$ معادله برقرار باشد.

سوال ۳۱) در یک گل فروشی، ۱۰ اکل لاله، ۵ نسترن، ۳ بنفشه، ۲ اقاقیا و ۱ رز هلندی وجود دارد. می‌خواهیم دسته‌کلی شامل ۵ گل که همگی به تصادف انتخاب شده باشند، برگزینیم. با چه احتمالی

الف) دسته گل شامل ۲ نسترن و ۲ بنفشه است؟

ب) دسته گل شامل هیچ گل لاله و بنفشه‌ای نیست؟

پ) دسته گل شامل حداقل یک گل از هر یک از ۴ نوع گل است؟

ت) تمام گلها، از نظر نوع متمایزند؟

دقت کنید گل‌های هر نوع با هم فرقی نمی‌کنند!

سوال ۳۲) الف) از یک مجموعه‌ی n عضوی، یک زیر مجموعه به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که این زیر مجموعه k عضوی باشد چقدر است؟

ب) به کمک قسمت قبل ثابت کنید $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

سوال ۳۳) احتمال اینکه فردی به covid-19 مبتلا شود، در صورتی که ماسک نزنند برابر 70% و در صورتی که ماسک بزنند برابر 15% است. اگر این فرد به طور متوسط 5% مواقع ماسک بزند، احتمال کرونا گرفتن او چقدر است؟

سوال ۳۴) دو تاس می‌اندازیم و جمع دو عدد رو آمده را یادداشت می‌کنیم.

الف) احتمال اینکه عدد رو آمده، زوج باشد چقدر است؟

ب) اگر جمع دو عدد رو آمده زوج باشد، با چه احتمالی بیشتر از ۸ است؟

سوال ۳۵) از بین 2^n زیر مجموعه‌ی مجموعه‌ی $S = \{1, 2, \dots, n\}$ ، دو زیر مجموعه به تصادف و مستقل از هم بر می‌داریم. اگر این دو زیر مجموعه، دارای اشتراک $\{1, 2\}$ باشند،

احتمال آن که یکی از زیرمجموعه‌ها شامل عضوهای ۳، ۴ و ۵ باشد چقدر است؟ ($n \geq 5$)
 سوال ۳۶) سه جعبه در اختیار داریم. در جعبه‌ی ۱، ۱۰۰۰ لامپ موجود است که ۳ تای آنها معیوبند. جعبه‌ی ۲ شامل ۱۰ لامپ است که ۳ تای آنها معیوبند و در جعبه‌ی سوم هم ۳۰۰۰ لامپ وجود دارد که همگی سالمند. اگر یکی از این جعبه‌ها را به تصادف برگزیده و از داخل آن لامپی انتخاب کنیم،

الف) با چه احتمالی لامپ معیوب است؟

ب) اگر لامپ معیوب باشد، با چه احتمالی از جعبه‌ی ۲ انتخاب شده است؟

پ) اگر لامپ سالم باشد، با چه احتمالی از یکی از جعبه‌های ۱ یا ۲ انتخاب شده است؟

سوال ۳۷) از یک جعبه که دارای M گلوله‌ی سفید و $N - M$ گلوله‌ی سیاه است، n گلوله برداشته می‌شود.

الف) احتمال آنکه m گلوله از گلوله‌های برداشته شده سفید باشند در حالت بایگناری چقدر است؟

ب) احتمال آنکه m گلوله از گلوله‌های برداشته شده سفید باشند در حالت بدون بایگناری چقدر است؟

ج) اگر بدانیم تمام گلوله‌های سفید برداشته شده‌اند، احتمال آنکه دقیقاً ۲ گلوله‌ی سیاه نیز برداشته شده باشند چقدر است؟

سوال ۳۸) سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر رو آمد، دو تاس را پرتاب کرده، جمع دو عدد روی تاس را یادداشت می‌کنیم. اگر سکه پشت آمد، یک تاس را پرتاب کرده و عدد آنرا یادداشت می‌کنیم. با چه احتمالی

الف) عدد یادداشت شده برابر ۳ است؟ ، ب) عدد یادداشت شده برابر ۸ است؟

سوال ۳۹) موارد زیر را در یک مسئله‌ی احتمالاتی تعریف کنید:

الف) فضای نمونه ، پیشامد (واقعه) ، پ) پیشامد (واقعه‌ی) ساده
 سوال ۱۴۰) آیا فضای نمونه در یک مسئله‌ی احتمالاتی، تنها مجموعه با احتمال یک است؟
 پاسخ را برای هر دو حالتی که فضای نمونه متناهی یا نامتناهی باشد شرح دهید و در صورت لزوم، مثال بزنید.

سوال ۱۴۱) اگر A فضای نمونه‌ی آزمایش پرتاب سکه با رخداد های پشت و رو و B فضای نمونه‌ی پرتاب تاس با اعداد طبیعی ۱ تا ۶ باشد،

الف) حاصلضرب دکارتی A و B ($A \times B$) را به دست آورید. این مجموعه، فضای نمونه‌ی چه آزمایشی است؟

ب) دو زیر مجموعه‌ی ۳ عضوی از مجموعه‌ی $A \times B$ برگزینید که با یکدیگر ناسازگار باشند. آیا می‌توانید همین کار را برای زیرمجموعه‌های ۷ عضوی تکرار کنید؟ چرا؟

سوال ۱۴۲) با بهره‌گیری از جبر مجموعه‌ها و اصول کولموگوروف احتمال، نشان دهید اگر A ، B و C سه مجموعه باشند به طوری که $P(B \cap C) = 0$ ، در این صورت

$$P\{A \cap (B \cup C)\} = P\{A \cap B\} + P\{A \cap C\}.$$

سوال ۱۴۳) در یک جامعه، احتمال اینکه فردی به کرونا مبتلا باشد ۰.۰۷ و احتمال آن که به آنفلوآنزا مبتلا باشد ۰.۱۹ است. اگر ۲۰ درصد افراد این جامعه مبتلا به حداقل یکی از این دو بیماری باشند،

الف) چند درصد افراد به هر دو بیماری مبتلا هستند؟

ب) چند درصد افراد فقط به کرونا مبتلا هستند؟

سوال ۱۴۴) یک عدد از مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ به تصادف برگزینیم. اگر تمام وقایع ساده هم شانس باشند و تعریف کنیم $A = \{2, 3, 5, 7\}$ و $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ،

الف) مقدار $P(A)$ را بیابید.

ب) مجموعه‌های $A - B$ و $A \cap B$ را به دست آورده و مقادیر $P(A - B)$ و $P(A \cap B)$ را بیابید.

پ) تمهیق کنید $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$. چه توجیهی برای پاسخ شما وجود دارد؟

سوال ۴۵) در یک کتابخانه، سه کتاب فیزیک، دو کتاب رمان و چهار کتاب روان شناسی موجود است. مطلوبست تعداد حالات پیدن این کتاب ها در یک قفسه کنار هم چنانچه:

الف) تمام کتابهای هم نوع متمایز باشند (مثلا ترتیب دو کتاب رمان نسبت به هم مهم باشد).

ب) تمام کتابهای هم نوع نامتمایز باشند (مثلا ترتیب دو کتاب رمان نسبت به هم مهم نباشد).

سوال ۴۶) اعضای یک شرکت شامل ۱ مدیرعامل، ۲ منشی، ۱ حسابدار و ۵ نفر از سایر اعضای هیئت مدیره در یک میزگرد دارای ۱۱ صندلی می نشینند. مطلوبست تعداد حالاتی که
الف) هر دو منشی کنار هم باشند.

ب) هیچ یک از اعضای هیئت مدیره (به جز مدیرعامل)، مجاور مدیرعامل نباشد.

پ) حسابدار کنار مدیرعامل بنشیند و تمام اعضای هیئت مدیره (به جز مدیرعامل) کنار هم باشند.

(راهنمایی: برای حل این سوال، به تمایز یا عدم تمایز اعضای هیئت مدیره یا منشی ها دقت کنید. آیا منطقی است متمایز باشند یا نباشند؟ همچنین دقت کنید که همواره دو صندلی از میزگرد خالی می مانند و باید در شمارش حالات مناسبه شوند.)

سوال ۴۷) در کیسه ای، ۱۰ توپ آبی و ۷ توپ قرمز موجود است. دو توپ به تصادف و بدون جایگذاری بر می داریم.

الف) اگر توپهای هم‌رنگ نامتمایز باشند، تعداد حالات برداشتن دو توپ غیر هم‌رنگ چقدر است؟

ب) اگر توپهای هم‌رنگ نامتمایز باشند، احتمال برداشتن دو توپ غیر هم‌رنگ چقدر است؟

پ) اگر توپهای آبی را از ۱ تا ۱۰ و توپهای قرمز را از ۱ تا ۷ شماره‌گذاری کنیم، احتمال آنکه توپ آبی شماره ۴ و توپ آبی شماره ۳ برداشته شود چقدر است؟

ت) اگر توپهای آبی را از ۱ تا ۱۰ و توپهای قرمز را از ۱ تا ۷ شماره‌گذاری کنیم، آیا احتمال برداشتن دو توپ غیر هم‌رنگ، با مقدار بدست آمده در قسمت الف تفاوت می‌کند؟ توضیح دهید.

سوال ۴۸) (قسمتهای ب، پ و ت) مسئله‌ی پیش را با فرض داشتن جایگذاری حل کنید؛ یعنی زمانی که توپ اول را برداشتیم، رنگ آن را یادداشت کرده، آنرا به کیسه بازگردانده و سپس توپ دوم را برمی‌داریم.

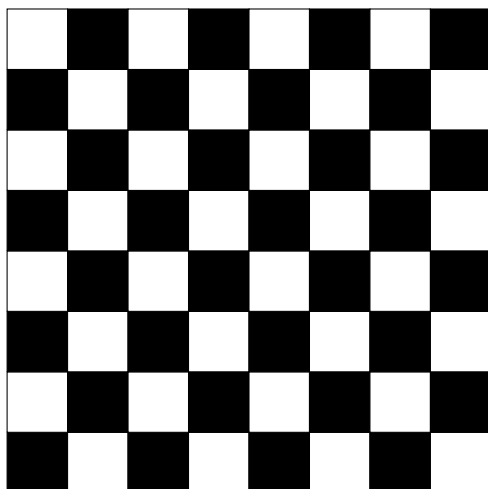
سوال ۴۹) نقطه‌ای را از داخل مربع به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه فاصله‌ی این نقطه تا مرکز مربع، از فاصله‌ی این نقطه تا هر یک از رئوس مربع بیشتر باشد چقدر است؟

سوال ۵۰) از مجموعه‌ی زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ ، دو زیرمجموعه‌ی متمایز به تصادف انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی، این دو زیرمجموعه ناسازگارند؟

سوال ۵۱) الف) در یک صفحه‌ی شطرنجی ۸ در ۸، یک مهره‌ی رخ سفید به تصادف در یکی از خانه‌های این صفحه قرار می‌گیرد. سپس، یک مهره‌ی رخ سیاه را به تصادف در یکی از خانه‌های این صفحه قرار می‌دهیم. با چه احتمالی، رخ سیاه در معرض حمله‌ی رخ سفید قرار می‌گیرد؟ (حرکت رخ، به صورت افقی یا عمودی در صفحه است)

ب) یک مهره‌ی شاه سفید، در یکی از گوشه‌های یک صفحه‌ی شطرنجی ۸ در ۸ قرار دارد. دو رخ سیاه به تصادف در دو خانه‌ی این صفحه قرار می‌گیرند. با چه احتمالی، شاه سفید مات

می‌شود؟ (مات شدن شاه، زمانی اتفاق می‌افتد که نوبت حرکت شاه بوده و با هر حرکت، در معرض حمله‌ی یکی از مهره‌های دشمن قرار گیرد)

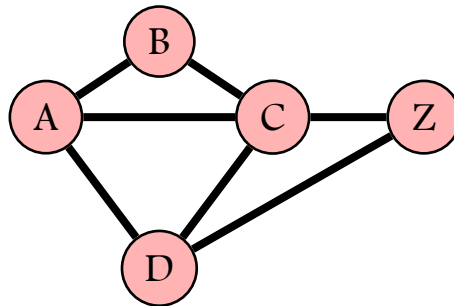


سوال ۵۲) یک سکه‌ی سالم را پرتاب می‌کنیم. اگر رو بیاید، یک تاس را پرتاب کرده و عدد روی آن را یادداشت می‌کنیم. اگر سکه پشت بیاید، دو تاس را پرتاب کرده و جمع اعداد دو تاس را یادداشت می‌کنیم. احتمال آنکه عدد رو آمده برابر n باشد چقدر است؟ ($2 \leq n \leq$) (12)

سوال ۵۳) از کیسه‌ای که شامل ۷ توپ سیاه و ۱۰ توپ سفید است، ۳ توپ به تصادف بیرون می‌آوریم. سپس از بین ۳ توپ بیرون آمده، یکی را به تصادف برمی‌گزینیم. اگر بدانیم حداقل یک توپ از ۳ توپ بیرون آمده سیاه است، احتمال آنکه توپ انتخابی از بین این ۳ توپ، سفید باشد چقدر است؟

سوال ۵۴) دو کیسه در اختیار داریم. کیسه‌ی ۱ شامل ۷ توپ سیاه و ۱۰ توپ سفید و کیسه‌ی ۲ شامل ۴ توپ سیاه، ۲ توپ سفید و ۳ توپ قرمز است. ابتدا یکی از کیسه‌ها را به تصادف انتخاب کرده و سپس، توپی از آن به تصادف بیرون می‌آوریم. اگر بدانیم توپ انتخابی سفید نیست، با چه احتمالی از کیسه‌ی ۲ انتخاب شده است؟

سوال ۵۵) فرض کنید در نقشه‌ی زیر قصد داریم از شهر A به شهر Z برویم. هر یک از ۷ لینک نقشه‌ی زیر، با احتمال p مستقل از سایر لینک ها سالم هستند. احتمال آن که مسیر سالمی از A تا Z وجود داشته باشد چقدر است؟



سوال ۵۶) از کیسه‌ای که شامل ۵ مهره سیاه، ۸ مهره سفید و ۱ مهره قرمز است، دو توپ به تصادف بیرون می‌آوریم. احتمال آنکه هر دو توپ هم‌رنگ باشند چقدر است؟

سوال ۵۷) دو جعبه از لامپ‌ها در اختیار داریم. جعبه‌ی اول، دارای ۱۰۰۰ لامپ است که ۱% آنها سالمند. جعبه‌ی دوم، دارای ۱۰۰۰۰ لامپ است که ۹۵% آنها سالم اند. یکی از جعبه‌ها را به تصادف انتخاب کرده و دو لامپ بیرون می‌کشیم. احتمال آن که هر دو لامپ از جعبه‌ی ۱ انتخاب شده باشند چقدر است اگر

الف) هر دو لامپ خراب باشند.

ب) اگر یکی از لامپ ها سالم و دیگری خراب باشد.

فصل ۲

آزمایش های تکراری

سوال ۵۸) تاس سالمی را ۳ بار پرتاب می‌کنیم و اعداد رو آمده در سه پرتاب را در نظر می‌گیریم.

الف) احتمال آن که جمع اعداد رو آمده برابر ۵ باشد چقدر است؟

ب) اگر عدد رو آمده‌ی اول برابر ۴ باشد، احتمال آن که جمع اعداد پرتاب ها برابر ۷ باشد چقدر است؟

پ) احتمال آن که جمع اعداد تاس در پرتاب‌های فرد، برابر ۵ باشد چقدر است؟

ت) احتمال آنکه از این ۳ بار، حداقل ۲ بار عدد زوج بیاید چقدر است؟

ث) احتمال رو آمدن مضرب ۳ در پرتاب اول چقدر است؟

سوال ۵۹) سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر رو آمد، تاسی را ۳ بار پرتاب کرده و جمع اعداد رو آمده در ۳ پرتاب را در نظر می‌گیریم. اگر پشت آمد، تاسی را ۴ بار پرتاب کرده و جمع اعداد رو آمده در ۴ پرتاب را در نظر می‌گیریم. اگر جمع اعداد رو آمده‌ی تاس برابر ۵ باشد، با چه احتمالی سکه پشت آمده است؟

سوال ۶۰) تاس سالمی را ۴ بار پرتاب می‌کنیم و اعداد رو آمده در چهار پرتاب را در نظر می‌گیریم.

الف) اگر در دو پرتاب این تاس عدد ۲ ظاهر شده باشد، احتمال آنکه در دو پرتاب دیگر عدد فردی ظاهر شده باشد چقدر است؟

ب) با چه احتمالی، جمع اعداد در پرتاب‌های زوج، ۵ برابر جمع اعداد در پرتاب‌های فرد است؟

سوال ۶۱) سکه‌ی سالمی را ۱۰ بار پرتاب می‌کنیم. مطلوب‌ست احتمال آن که

الف) در این ۱۰ پرتاب، حداقل دو بار رو بیاید.

ب) در سه پرتاب اول حداقل یک بار پشت بیاید.

پ) در پرتاب‌های زوج، نتیجه یکسان باشد (همگی رو یا همگی پشت باشند).

الف) دقیقاً ۳ بار شیر بیاید.

ب) دست کم ۲ بار خط بیاید.

پ) در مجموع، دقیقاً ۷ بار خط آمده باشد، اگر بدانیم در ۵ پرتاب اول خط آمده است.

سوال ۶۲) الف) اگر یک رشته لامپ متوالی شامل n لامپ که هر لامپ به احتمال p خراب است، به ولتاژ برق وصل شود، با چه احتمالی روشن می‌شود؟ (در رشته متوالی لامپ‌ها، لامپ‌ها به صورت پشت سر هم به یکدیگر وصل شده‌اند.)

ب) اگر رشته لامپ موازی باشد، مسئله را حل کنید. (در رشته‌ی موازی لامپ‌ها، یکی از سرهای همه‌ی لامپ‌ها به یک نقطه و سر دیگر تمام لامپ‌ها به نقطه‌ی دیگر وصل شده‌اند.)

سوال ۶۳) در یک امتحان، احتمال درست پاسخ دادن به یک سوال دو گزینه‌ای برابر p است. پس از امتحان، n دانشجو پاسخ‌های خود را با هم مقایسه می‌کنند و متوجه می‌شوند که

همگی به آن سوال پاسخ یکسانی داده اند. با چه احتمالی تمام این n دانشجو به پاسخ درست رسیده اند؟

سوال ۶۴) یک سکه ی سالم را ۷ بار پرتاب می کنیم.

الف) احتمال اینکه نتیجه ی پرتاب اول و آخر برابر باشد چقدر است؟

ب) با چه احتمالی حداقل دو رو و سه پشت در این ۷ پرتاب فوایم داشت؟

پ) اگر نتیجه ی پرتاب سکه در سه پرتاب اول یکسان باشد، با چه احتمالی در این ۷ پرتاب، در مجموع دقیقاً ۴ بار سکه رو می آید؟

سوال ۶۵) یک تاس سالم را ۵ بار پرتاب می کنیم.

الف) اگر جمع پنج عدد رو آمده در این پنج پرتاب را در نظر بگیریم، با چه احتمالی این مجموع برابر ۷ است؟

ب) با چه احتمالی عدد رو آمده در پرتاب پنجم برابر جمع اعداد رو آمده در ۴ پرتاب قبلی خواهد بود؟

سوال ۶۶) بزرگراه ۸ بانده ای را در نظر بگیرید که از هر باند آن در هر لحظه حداکثر یک ماشین می تواند عبور کند. اگر ۹ ماشین هر یک با احتمال p وارد بزرگراه شوند،

الف) با چه احتمالی همه ی ماشین های وارد شده به بزرگراه بدون مشکل از آن رد می شوند؟

ب) p چقدر باشد تا احتمال قسمت الف بیشتر از ۰.۹۹ باشد؟

سوال ۶۷) دو تیم ورزشی A و B در یک بازی در ۹ دست با هم روبرو می شوند و نتیجه ی هر دست فقط برد یکی از دو تیم می تواند باشد. فرض کنید تیم A با احتمال p در هر دست پیروز می شود و نتیجه ی دست ها مستقل از هم است. برنده ی بازی کسی است که بیشتر بازی ها را برده باشد.

الف) با چه احتمالی تیم A پس از ۶ دست موفق به بردن بازی می شود؟

ب) اگر بدانیم تیم A در نهایت بازی را برده است، با چه احتمالی در حداقل یک دست به تیم B باخته است؟

ج) به ازای $p = 0.5$ ، اگر بدانیم تیم A دست اول را برده، با چه احتمالی بازی را می برد؟
 سوال ۶۸) یک سکه ی سالم n بار پرتاب شده و k بار رو آمده است. کوچکترین مقدار n را بیابید به گونه ای که

$$P \left\{ 0.49 \leq \frac{k}{n} \leq 0.51 \right\} > 0.95$$

سوال ۶۹) قضیه ی دموآو-لاپلاس در چه حالتی برای تکرر توزیع برنولی به تعداد n بار برقرار است؟ به کمک یک ماشین حساب یا کامپیوتر، مقادیر $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ و $e^{-np} \frac{(np)^k}{k!}$ را به ازای حالت های مختلف n و p مناسبه کرده و خطای تقریب پواسون را به دست آورید.

الف) $n = 10$, $p = 0.7$, $k = 7$

ب) $n = 30$, $p = 0.3$, $k = 9$

پ) $n = 50$, $p = 0.02$, $k = 1$

ت) $n = 300$, $p = 0.01$, $k = 3$

ث) $n = 30$, $p = 0.8$, $k = 24$

ج) $n = 1000$, $p = 0.5$, $k = 1$

چ) $n = 1000$, $p = 0.5$, $k = 300$

ح) $n = 1000$, $p = 0.5$, $k = 490$

در کدام حالت تقریب پواسون، خطای کمتری دارد و چرا؟

سوال ۷۰) سکه ای را پرتاب می کنیم. اگر پشت آمد، آن را ۹ بار دیگر پرتاب می کنیم و نتایج ۱۰ پرتاب را در نظر می گیریم. اگر رو آمد، آن را ۵ بار دیگر پرتاب می کنیم و نتایج ۶ پرتاب را در

نظر می گیریم. احتمال آن که در تمام پرتاب های سکه، دقیقاً ۶ بار رو بیاید چقدر است؟

سوال (۷۱) یک آزمایش برنولی، را که احتمال موفقیت در آن برابر ۴۰٪ است، n بار تکرار می کنیم. اگر k ، برابر تعداد موفقیت ها در این پرتاب ها باشد، n حداقل چقدر باشد تا احتمال رخداد $\{38\% < \frac{k}{n} < 42\%\}$ بیش از ۷۰٪ باشد؟

(راهنمایی: از قضیه ی دموآور-لاپلاس استفاده نمایید.)

(جدول مربوط به مناسبه ی تابع $G^{-1}(x)$ در صفحه ی بعد آمده است.)

$G^{-1}(x)$	x	$G^{-1}(x)$	x	$G^{-1}(x)$	x	$G^{-1}(x)$	x
0.7063	0.76	0.0251	0.51	-0.6433	0.26	-2.3263	0.01
0.7388	0.77	0.0502	0.52	-0.6128	0.27	-2.0537	0.02
0.7722	0.78	0.0753	0.53	-0.5828	0.28	-1.8808	0.03
0.8064	0.79	0.1004	0.54	-0.5534	0.29	-1.7507	0.04
0.8416	0.80	0.1257	0.55	-0.5244	0.30	-1.6449	0.05
0.8779	0.81	0.1510	0.56	-0.4959	0.31	-1.5548	0.06
0.9154	0.82	0.1764	0.57	-0.4677	0.32	-1.4758	0.07
0.9542	0.83	0.2019	0.58	-0.4399	0.33	-1.4051	0.08
0.9945	0.84	0.2275	0.59	-0.4125	0.34	-1.3408	0.09
1.0364	0.85	0.2533	0.60	-0.3853	0.35	-1.2816	0.10
1.0803	0.86	0.2793	0.61	-0.3585	0.36	-1.2265	0.11
1.1264	0.87	0.3055	0.62	-0.3319	0.37	-1.1750	0.12
1.1750	0.88	0.3319	0.63	-0.3055	0.38	-1.1264	0.13
1.2265	0.89	0.3585	0.64	-0.2793	0.39	-1.0803	0.14
1.2816	0.90	0.3853	0.65	-0.2533	0.40	-1.0364	0.15
1.3408	0.91	0.4125	0.66	-0.2275	0.41	-0.9945	0.16
1.4051	0.92	0.4399	0.67	-0.2019	0.42	-0.9542	0.17
1.4758	0.93	0.4677	0.68	-0.1764	0.43	-0.9154	0.18
1.5548	0.94	0.4959	0.69	-0.1510	0.44	-0.8779	0.19
1.6449	0.95	0.5244	0.70	-0.1257	0.45	-0.8416	0.20
1.7507	0.96	0.5534	0.71	-0.1004	0.46	-0.8064	0.21
1.8808	0.97	0.5828	0.72	-0.0753	0.47	-0.7722	0.22
2.0537	0.98	0.6128	0.73	-0.0502	0.48	-0.7388	0.23
2.3263	0.99	0.6433	0.74	-0.0251	0.49	-0.7063	0.24
3.7190	0.9999	0.6745	0.75	0.0000	0.50	-0.6745	0.25

سوال ۷۲) یک تاس سالم را ۶ بار پرتاب می‌کنیم.

الف) احتمال آن که جمع اعداد رو آمده در ۶ پرتاب برابر ۸ باشد چقدر است؟

ب) احتمال آن که در این ۶ پرتاب، تمام اعداد ۱ تا ۶ ظاهر شوند چقدر است؟

سوال ۷۳) از کیسه‌ای که شامل ۷ توپ آبی و ۳ توپ سفید است، ۱ توپ به تصادف برداشته، رنگ آن را یادداشت کرده و دوباره به کیسه برمی‌گردانیم. اگر این کار را ۱۱ بار انجام دهیم، احتمال آن که از این ۱۱ بار دقیقاً در ۷ مرتبه، توپ آبی بیرون آمده باشد چقدر است؟

سوال ۷۴) یک کانال مخابراتی دارای ظرفیت ۲۵ کیلوییته بر ثانیه است. در مجموع، ۱۲ کاربر قصد استفاده از این کانال برای ارسال داده‌ی خود را دارند که هر کاربر، ۲.۵ کیلوییته بر ثانیه از کانال را اشغال می‌کند و احتمال فعال بودن او، مستقل از سایرین برابر $p = 0.6$ است. با چه احتمالی، برای تخصیص کانال به کاربران فعال، دچار کمبود ظرفیت کانال نخواهیم شد؟

سوال ۷۵) یک آزمایش برنولی، را که احتمال موفقیت در آن برابر $\frac{1}{3}$ است، n بار تکرار می‌کنیم. اگر k تعداد موفقیت‌ها در n آزمایش باشد، n حداقل چقدر باشد تا احتمال رخداد $\left\{ \frac{97}{300} < \frac{k}{n} < \frac{103}{300} \right\}$ برابر ۹۹٪ باشد؟

سوال ۷۶) آزمایشی، را که احتمال موفقیت آن p و احتمال شکست آن $1 - p$ است، آنقدر تکرار می‌کنیم تا به k -امین موفقیت برسیم. متوسط تعداد آزمایش‌ها را تا حصول k -امین موفقیت به ازای $k = 1$ و $k = 2$ به دست آورید.

فصل ۳

متغیرهای تصادفی

سوال ۷۷) برای هر یک از توابع چگالی احتمال داده شده‌ی زیر،

$$f(x) = \begin{cases} k\delta(x+1) & , \quad x = -1 \\ x - x^2 & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\delta(x) & , \quad x = 0 \\ \frac{3}{32}\sqrt{x-1} & , \quad 1 \leq x \leq k \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} k\delta(x+1) & , \quad x = -1 \\ \frac{1}{2}e^{-x+1} & , \quad x \geq 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}, f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\delta(x+3) & , \quad x = -3 \\ \frac{1}{2}\sin x & , \quad 0 \leq x \leq k \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\delta(x+1) & , \quad x = -1 \\ \frac{1}{x^3} & , \quad x \geq k \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

الف) مقدار k را بیابید.

ب) تابع توزیع تجمعی را بیابید.

پ) مقدار احتمال $\Pr\{X^2 \leq 4\}$ را به دست آورید.

سوال ۷۸) فرض کنید متغیر تصادفی X ، یکنواخت در بازه‌ی $[0, 1]$ است. متغیر تصادفی Y را به صورت $Y = g(X)$ می‌سازیم. تابع g را به گونه‌ای تعیین کنید که Y :

الف) یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر λ باشد؛ یعنی

$$f(y) = \begin{cases} e^{-y} & , \quad y > 0 \\ 0 & , \quad y \leq 0 \end{cases}$$

ب) یک متغیر تصادفی کوشی با پارامتر π باشد؛ یعنی

$$f(y) = \frac{1}{y^2 + \pi^2} \quad , \quad y \in \mathbb{R}$$

سوال ۷۹) متغیر تصادفی و گسسته‌ی N دارای چگالی احتمال زیر است:

$$f(n) = \begin{cases} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} & , \quad n \in \mathbb{N} \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

الف) تابع مولد گشتاور آن را به دست آورید.

ب) از روی تابع مولد گشتاور، مقادیر میانگین و واریانس این متغیر تصادفی را محاسبه کنید.
(راهنمایی؛

$$\sum_{n=1}^{\infty} na^n = \frac{a}{(1-a)^2} \quad , \quad |a| < 1$$

(

سوال ۸۰) فرض کنید برای یک متغیر تصادفی با چگالی توزیع $f(x)$ داشته باشیم

$$\exists a \in \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = f(a - x).$$

میانگین و میانه‌ی این متغیر تصادفی را به دست آورید.

سوال ۸۱) متغیر تصادفی X با تابع توزیع تجمعی زیر داده شده است،

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x+1}{2}e^{-x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}.$$

در این صورت

الف) تابع مولد گشتاور آن را به دست آورید.

ب) میانگین و واریانس این متغیر تصادفی را بیابید.

سوال ۸۲) برای متغیر تصادفی با چگالی احتمال زیر، مقادیر میانگین و واریانس را به دست آورید.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2} & , \quad 1 < x < 2 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

سوال ۸۳) نشان دهید که اگر به ازای هر t_0 و t_1 مثبتی داشته باشیم

$$\Pr\{t_0 \leq t \leq t_0 + t_1 | t \geq t_0\} = \Pr\{t \leq t_1\},$$

آنگاه

$$\Pr\{t \leq t_1\} = 1 - e^{-ct_1}.$$

سوال ۸۴) کدام یک از توابع زیر می توانند تابع توزیع تجمعی یه متغیر تصادفی پیوسته باشند؟ در این حالت، مقادیر مناسب k را معین کنید.

$$F(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x > 0 \\ k & , \quad x = 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases} \quad \text{ب) ,} \quad F(x) = \begin{cases} \frac{kx}{1+x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases} \quad \text{الف)}$$

$$F(x) = \begin{cases} k + xe^{-x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases} \quad \text{ت) ,} \quad F(x) = \frac{e^x + k}{e^x + 1} \quad \text{پ)}$$

سوال ۱۵) اگر تابع توزیع تجمعی یک متغیر تصادفی به صورت

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

باشد، مقدار میانه را محاسبه کنید.

سوال ۱۶) برای هر یک از توابع توزیع تجمعی زیر، مقدار $P(X = 1)$ چقدر است؟

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3-x} & , \quad x < 1 \\ \frac{x}{x+1} & , \quad x \geq 1 \end{cases} \text{ (ب) } , \quad F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3-x} & , \quad x < 1 \\ \frac{3x}{3x+1} & , \quad x \geq 1 \end{cases} \text{ (الف)}$$

سوال ۱۷) اگر متغیر تصادفی X دارای چگالی احتمال $f(x)$ و تابع توزیع تجمعی $F(x)$ باشد، چگالی احتمال و توزیع تجمعی هر یک از متغیرهای تصادفی زیر چه خواهد بود؟

$$\text{الف) } X+1 \text{ , ب) } 2X \text{ , پ) } -X \text{ , ت) } X^2$$

سوال ۱۸) فرض کنید تابع توزیع تجمعی یک متغیر تصادفی گسسته به صورت های زیر داده شده باشد:

$$F(n) = \Pr\{X \leq n\} = \begin{cases} 1 & , \quad n > b \\ \frac{n-a+1}{b-a+1} & , \quad a \leq n \leq b \\ 0 & , \quad n < a \end{cases} \text{ (الف)}$$

$$\text{ب) } F(n) = \begin{cases} 1 - A^{n+1} & , \quad n \geq 0 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases} \text{ که } 0 < A < 1$$

کمیت $f(n) = F(n) - F(n-1)$ را محاسبه کرده و سپس $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n f(n)$ را برای این دو توزیع به دست آورید.

سوال ۱۹) توابع توزیع تجمعی و پیوسته‌ی زیر را در نظر بگیرید:

الف) $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{\lambda}x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$ زمانی که $\lambda > 0$

ب) $F(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \geq b \\ \frac{x-a}{b-a} & , \quad a < x < b \\ 0 & , \quad x \leq a \end{cases}$ زمانی که $b > a$

ج) $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$ که μ و σ^2 دو مقدار حقیقی هستند و $\sigma^2 \neq 0$ کمیت $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ را مناسبه کرده و از روی آن، $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ را برای این سه توزیع به دست آورید.

سوال ۹۰) (بی حافظگی توزیع نمایی) طول عمر یک ینفال از توزیع نمایی زیر پیروی می کند:

$$f_X(x) = \frac{1}{20} e^{-\frac{1}{20}x}$$

که x طول عمر ینفال بر حسب سال است. ینفال دست دومی که پس از ۱۵ سال کار کرد، همپنان سالم است به همراه ینفال نویی که از بازار خریداری شده مفروضند. احتمال خرابی هر یک از آنها دقیقاً در ۱۰ سال آینده چقدر است؟

سوال ۹۱) منحنی تابع $y = Ax^2 + 2Bx + C$ را در نظر بگیرید که در آن A ، B و C متغیرهای تصادفی مستقل و دارای توزیع زیر هستند:

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & , \quad 1 < x < e \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

الف) با چه احتمالی این منحنی از سه ربع از چهار ربع مفتصات می گذرد؟

ب) با چه احتمالی این منحنی از هر چهار ربع مفتصات می گذرد؟

سوال ۹۲) در پرتاب دو تاس سالم، اگر متغیر تصادفی X را برابر تعداد اعداد زوج رو آمده

در هر دو تاس در نظر بگیریم:

الف) فضای شذنی مسئله (Ω) را بیابید.

ب) مقدار $\Pr\{X \leq 1.5\} - \Pr\{X \leq 0.5\}$ را بیابید و با $\Pr\{X = 1\}$ مقایسه کنید. میزان تفاوت دو مقدار فوق را توضیح دهید.

پ) تابع جرم احتمال این متغیر تصادفی را به دست آورید.

سوال ۹۳) فرض کنید یک سکه سالم را n بار پرتاب کرده ایم. در این صورت تابع جرم احتمال متغیر تصادفی X را در حالت های زیر بیابید.

الف) متغیر تصادفی X برابر تعداد روها در پرتاب های زوج است.

ب) متغیر تصادفی X برابر جمع تعداد روها در 2 پرتاب اول و تعداد پشت ها در 2 پرتاب آخر است $(n > 4)$.

پ) متغیر تصادفی X دو مقدار 0 و 1 را اختیار می کند و مقدار آن 1 است هنگامی که تعداد روها و پشت ها با هم برابر باشد و 0 در غیر این صورت.

سوال ۹۴) در هر مورد، در صورت امکان مقدار k را به گونه ای معین کنید که تابع چگالی احتمال شود.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{2} & , \quad 0 < x < k \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases} \quad \text{الف)}$$

$$f(x) = ke^{-|x|} \quad \text{ب)}$$

سوال ۹۵) میانه را برای تابع چگالی احتمال $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2\pi x + 2\pi^2}$ به دست آورید.

سوال ۹۶) فرض کنید تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی پیوسته‌ی X به صورت زیر باشد:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \frac{x}{2} & , \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

در این صورت:

الف) مقدار $P(X = 1)$ چقدر است؟

ب) تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی $Y = X^2$ را به دست آورید.

سوال ۹۷) برای متغیر تصادفی گسسته‌ی X با جرم احتمال زیر، تابع مولد گشتاور را یافته و سپس از روی آن، میانگین و واریانس را بیابید.

$$\Pr\{X = x\} = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \quad x = 1 \\ \frac{1}{4} & , \quad x = 2 \\ \frac{1}{12} & , \quad x = 3 \\ \frac{1}{12} & , \quad x = 4 \\ \frac{1}{12} & , \quad x = 5 \end{cases}$$

سوال ۹۸) برای هریک از توزیع‌های زیر، میانگین و واریانس را به دست آورید.

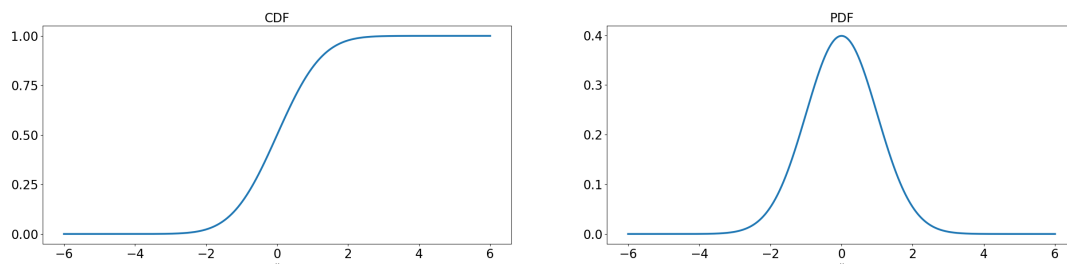
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , \quad a < x < b \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad \text{الف)}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad \text{ب)}$$

$$f(n) = \begin{cases} p & , \quad n = 0 \\ 1 - p & , \quad n = 1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad \text{پ)}$$

$$f(n) = \begin{cases} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} & , \quad n \geq 0 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (ت)$$

سوال ۹۹) متغیر تصادفی X دارای توزیع کوسی با میانگین صفر و واریانس ۱ است. نمودار چگالی احتمال این متغیر کوسی به صورت زیر است:



اگر چگالی احتمال و توزیع تجمعی متغیر $Y = 2 - X$ را بر حسب چگالی احتمال و توزیع تجمعی متغیر X بیاورید و آنها را رسم کنید.

سوال ۱۰۰) از دو جامعه آماری بزرگ، یک آزمون علمی ۱۰۰ نفره ای گرفته شده است. مشاهده شده که نمرات افراد این دو جامعه، به ترتیب از دو توزیع کوسی با میانگین های ۵۹ و ۷۳ و واریانس های ۹ و ۱۶ پیروی می کند.

الف) کدام یک از این دو جامعه به طور متوسط دارای سطح علمی بالاتری است؟ چرا؟
 ب) افراد کدام جامعه دارای سطح علمی نزدیک تری به یکدیگر هستند؟ (یا به عبارت دیگر، هم سطح ترند؟) چرا؟

سوال ۱۰۱) الف) آیا چگالی احتمال یک متغیر تصادفی می تواند تابعی فرد باشد؟ توضیح دهید.
 ب) گشتاور مرتبه n -ام یک متغیر تصادفی یکنواخت در بازه $[a, b]$ را به دست آورید.

سوال ۱۰۲) الف) برای هر متغیر تصادفی X و $s > 0$ تمقیق کنید

$$\Pr\{X \geq a\} = \Pr\{e^{sX} \geq e^{sa}\}$$

ب) به کمک نامساوی مارکوف ثابت کنید:

$$\Pr\{X \geq x\} \leq e^{-sx} \Phi_X(s)$$

سوال ۱۰۳) تعیین کنید به ازای چه مقادیری از k ، هر یک از توابع زیر می تواند تابع توزیع تجمعی یک متغیر تصادفی باشد.

$$F(x) = \frac{e^x}{e^x + k} \text{ (ب) , } F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-kx^2} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases} \text{ (الف)}$$

$$F(x) = \cos \frac{\pi}{e^x + k} \text{ (ت) , } F(x) = \begin{cases} kx & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & , \quad x > 1 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases} \text{ (پ)}$$

$$F(x) = \begin{cases} k - e^{x-x^2} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases} \text{ (ث)}$$

سوال ۱۰۴) اگر $F(x)$ تابع توزیع تجمعی یک متغیر تصادفی پیوسته باشد، کدام یک از توابع زیر می توانند تابع توزیع تجمعی یک متغیر تصادفی باشند؟ سپس برای هر تابع توزیع تجمعی، مقدار $\Pr\{1 < X \leq 2\}$ را بیابید (راهنمایی: از خواص تابع توزیع تجمعی بهره بگیرید).

الف) $F(x^2)$ ، ب) $F(x^3)$ ، پ) $1 - F(-x)$ ، ت) $F^n(x)$ برای هر مقدار طبیعی از n ، ث) $\sin \left[\frac{\pi}{2} F(x) \right]$

سوال ۱۰۵) تعیین کنید به ازای چه مقادیری از k ، هر یک از توابع زیر می تواند چگالی احتمال یک متغیر تصادفی باشد. سپس برای هر چگالی احتمال، مقادیر $\Pr\{X = 1\}$ و $\Pr\{X < \frac{1}{2}\}$ را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} kxe^{-x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases} \text{ (ب) } , \quad f(x) = \begin{cases} 1/x^k & , \quad x \geq 1 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases} \text{ (الف)}$$

$$f(x) = k\delta(x-1) + (1-k)\delta(x) \text{ (ت) } , \quad f(x) = \begin{cases} \sin x & , \quad 0 \leq x \leq k \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases} \text{ (پ)}$$

$$f(x) = \begin{cases} k\delta(x-1) & , \quad x = 1 \\ x & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases} \text{ (ث)}$$

دارای ضربه‌ای به مسامت k است)

سوال ۱۰۶) یک سامانه دارای ۷۰ قطعه است. پیشامد اینکه هر قطعه پس از شروع به کار در زمان $t=0$ ، در بازه‌ی $(0, x)$ دچار خرابی گردد، یک متغیر تصادفی با چگالی احتمال زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{T}e^{-\frac{x}{T}} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

احتمال آن را بیابید که بیش از ۶۵ قطعه از این سیستم در بازه‌ی $(0, \frac{T}{4})$ دچار خرابی نشوند.

سوال ۱۰۷) اگر x_u ، صدک- u متغیر تصادفی X باشد، در این صورت مقدار x_u را به ازای $u = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ برای توابع چگالی احتمال زیر به دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases} \text{ (ب) } , \quad f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases} \text{ (الف)}$$

سوال ۱۰۸) زمان خرابی یک لامپ، یک متغیر تصادفی با چگالی احتمال زیر است،

$$f_X(x) = \frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}} , \quad x > 0$$

الف) احتمال آن که این لامپ، به مدت حداقل 2λ عمر کند، چقدر است؟

ب) احتمال آن که این لامپ بیش از 3λ و کمتر از 3.5λ عمر کند چقدر است؟

سوال ۱۰۹) یک متغیر تصادفی دارای چگالی احتمال زیر است،

$$f_X(x) = \begin{cases} 6x^2(1-x) & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ k\delta(x+1) & , \quad x = -1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

به عبارت دیگر، چگالی احتمال دارای ضربه ای به اندازه k در $x = -1$ است.
الف) مقدار k را بیابید.

ب) تابع توزیع تجمعی را به دست آورید و آن را رسم کنید.

پ) مقدار احتمال های $\Pr\{-2 < X \leq \frac{1}{2}\}$ و $\Pr\{0 < X \leq \frac{1}{2}\}$ چقدر است؟

سوال ۱۱۰) فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع یکنواخت بین ۰ و ۱ است. در این صورت، تابع توزیع تجمعی و چگالی احتمال هریک از متغیرهای تصادفی زیر را بیابید. سپس، مقادیر احتمال های $\Pr\{X \leq \frac{2}{3}\}$ و $\Pr\{Y \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\}$ را از روی چگالی های احتمال X و Y بیابید و با هم مقایسه کنید. نتیجه مقایسه را توضیح دهید.

الف) $Y = X^2$ ، ب) $Y = -\ln(1-X)$ ، پ) $Y = \tan \pi(X - \frac{1}{2})$

سوال ۱۱۱) اگر تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی X را با $F(x)$ نشان دهیم، توابع توزیع تجمعی متغیرهای تصادفی زیر را بر حسب $F(x)$ دست آورید.

الف) $Y = |X|$ ، ب) $Y = \begin{cases} 0 & , \quad X \leq 0 \\ 1 & , \quad X > 0 \end{cases}$ ، پ) $Y = X^2 - 2X$

سوال ۱۱۲) تابع جرم احتمال متغیر تصادفی X دارای خاصیت زیر است:

$$6 \Pr\{X = k+2\} - 5 \Pr\{X = k+1\} + \Pr\{X = k\} = 0 \quad , \quad k = 1, 2, \dots$$

همچنین $\Pr\{X = 1\} = \frac{7}{12}$. در این صورت، چگالی جرم احتمال متغیر X را بیابید.

سوال ۱۱۳) متغیر تصادفی X دارای چگالی احتمال زیر است:

$$f(x) = \frac{a}{2}e^{-ax} + \frac{1}{2}e^{-x}, \quad x > 0.$$

مقدار a را به گونه ای بیابید به طوری که $E\{X\} = 5$.

سوال ۱۱۴) برای هر یک از توابع زیر، محدوده مقادیر k را به گونه ای تعیین کنید که تابع مورد نظر، یک تابع توزیع انباشته باشد. سپس، چگالی احتمال را بیابید.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1 - e^{-x-k \sin x} & , \quad x \geq 0 \end{cases} \quad \text{ب) } F(x) = \frac{1}{e^{-kx}+1} \quad \text{الف)}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1 + xe^{-kx} & , \quad x \geq 0 \end{cases} \quad \text{پ)}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \frac{1}{2} & , \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{k-kx} & , \quad x \geq 1 \end{cases} \quad \text{ت)}$$

سوال ۱۱۵) برای بخش های الف و ت سوال پیش، مقادیر میانه، صدکهای ۲۵ام و ۷۵ام و همچنین احتمال های $\Pr\{X = 0\}$ و $\Pr\{0 < X \leq 2\}$ را بیابید.

سوال ۱۱۶) یک تاس را پرتاب می کنیم. اگر زوج آمد، عدد آن را یادداشت می کنیم و اگر فرد آمد، عددی را به تصادف از بازه ی $[1, 6]$ انتخاب کرده و آن را یادداشت می کنیم. اگر متغیر تصادفی X ، نشان دهنده ی عدد یادداشت شده باشد، چگالی احتمال و تابع توزیع انباشته ی آن را به دست آورده و رسم کنید. سپس، مقدار $\Pr\{1 \leq X \leq 3\}$ را بیابید.

سوال ۱۱۷) فرض کنید متغیر تصادفی X ، از توزیع نمایی با پارامتر $\lambda = 1$ پیروی کند. در این صورت، چگالی احتمال متغیر تصادفی Y را در حالت های زیر بیابید.

الف) $Y = e^X$ ، ب) $Y = X^\alpha$ که α عدد ثابت مثبتی است.

پ) $Y = \lfloor X \rfloor$

سوال ۱۱۸) فرض کنید X ، یک متغیر تصادفی باشد که از توزیع زیر پیروی می‌کند:

$$f_X(x) = \begin{cases} kx & , \quad 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}\delta(x) & , \quad x = 1 \\ 0 & , \quad \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

الف) مقدار مناسب k را بیابید. ، ب) مقدار $\mathbb{E}\{X\}$ را مناسبه کنید.

پ) مقدار $\mathbb{E}\{e^{aX}\}$ را به دست آورید که a عدد حقیقی دلخواهی است.

سوال ۱۱۹) متغیر تصادفی X از توزیع زیر پیروی می‌کند:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

متغیر تصادفی $Y = X^2$ مفروض است.

الف) چگالی احتمال Y را به دست آورید. ، ب) امید ریاضی X را بیابید.

پ) امید ریاضی Y را از روی چگالی احتمال آن و مقدار $\mathbb{E}\{X^2\}$ را از قضیه‌ی اساسی امید ریاضی مناسبه کرده و با هم مقایسه کنید.

ت) مقادیر $\Pr\{X < \frac{1}{2}\}$ و $\Pr\{Y < \frac{1}{4}\}$ را به ترتیب از روی چگالی‌های احتمال X و Y به دست آورده و با هم مقایسه کنید.

سوال ۱۲۰) برای هر یک از توزیع‌های زیر، مقدار $\Pr\{X \geq \alpha\}$ را به دست آورده و همچنین، یک کران بالا برای این احتمال برای هر توزیع با کمک نامساوی مارکوف به دست آورید. سپس مقدار دقیق احتمال و کران آن را مقایسه کنید.

الف) $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$ ، ب) $f(x) = \frac{1}{\ln 2} \frac{1}{1+e^x}$, $x > 0$

پ) $f(x) = xe^{-x}$, $x > 0$

سوال ۱۲۱) برای توزیع های بفش های الف و پ سوال پیش، مقدار واریانس را به دست آورید.

سوال ۱۲۲) برای هر یک از توزیع های زیر، تابع مولد گشتاور را یافته و سپس از روی آن، مقدار $\mathbb{E}\{X^2\}$ را بیابید.

الف) $f(x) = \begin{cases} 1-x & , \quad 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}\delta(x-1) & , \quad x = 1 \end{cases}$

ب) $f(x) = \begin{cases} \cos x & , \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & , \quad \text{بـا هـای دـیگـر} \end{cases}$

پ) $\Pr\{X = x\} = \begin{cases} \frac{n}{2^{n+1}} & , \quad n \in \mathbb{N} \\ 0 & , \quad \text{بـا هـای دـیگـر} \end{cases}$

ت) X متغیر تصادفی حاصل ضرب دو عدد رو آمده در پرتاب دو تاس به طور مستقل است.

سوال ۱۲۳) برای هر یک از متغیرهای تصادفی زیر، واریانس را به دست آورید.

الف) $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & , \quad x > 1 \\ 0 & , \quad x \leq 1 \end{cases}$

ب) $f_X(x) = \begin{cases} \sin x & , \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & , \quad \text{سایر باها} \end{cases}$

پ) $f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} & , \quad x > 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر باها} \end{cases}$

ت) X یک متغیر تصادفی گسسته است و $\Pr\{X = i\} = 2(\frac{1}{3})^i$ برای $i \in \mathbb{N}$

سوال ۱۲۴) برای قسمت های الف و ت سوال ۱، ابتدا تابع مولد گشتاور را مناسبه نموده و سپس از روی آن، میانگین و واریانس را به دست آورید.

سوال ۱۲۵) برای قسمت های الف و ب سوال ۱، میانگین متغیر تصادفی e^{-X} را بیابید.

سوال ۱۲۶) برای متغیر تصادفی X با چگالی های احتمال زیر، ابتدا تابع مولد گشتاور را یافته و سپس از روی آن، مقادیر میانگین، واریانس و $\text{var} \{X | X > \frac{1}{2}\}$ را بیابید.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin x & , \quad 0 < x < \pi \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases} \text{ (الف)}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \cos x & , \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases} \text{ (ب)}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} xe^{-x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases} \text{ (پ)}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{7}x^2 & , \quad 1 < x < 2 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases} \text{ (ت)}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\delta(x-1) & , \quad x = 1 \\ x & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases} \text{ (ث)}$$

فصل ۴

متغیرهای تصادفی توأم

سوال ۱۲۷) فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل برنولی به ترتیب با پارامترهای $\frac{1}{2}$ و p باشند. ثابت کنید $Z = XY$ و $Z = X \oplus Y \pmod{2}$ دارای توزیع برنولی با پارامتر $\frac{1}{2}p$ هستند.

سوال ۱۲۸) اگر X و Y دو توزیع چندجمله‌ای به ترتیب با پارامترهای (n_1, p) و (n_2, p) باشند، ثابت کنید توزیع $X + Y$ دو جمله‌ای با پارامترهای $(n_1 + n_2, p)$ است.

سوال ۱۲۹) تابع چگالی احتمال توأم دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر است:

$$f(x, y) = \begin{cases} k(4 - x - y) & , \quad 1 < x < 2, \quad 0 < y < 2 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

الف) مقدار مناسب k را بیابید.

ب) با مقدار k به دست آمده در قسمت قبل، مقدار $\mathbb{E}\{XY\}$ را به دست آورید.

سوال ۱۳۰) تابع چگالی احتمال توأم دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر است:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & , \quad |x| + 2|y| < 1 \\ 0 & , \quad |x| + 2|y| \geq 1 \end{cases}$$

الف) پگالی های احتمال ماشیه ای X و Y را به دست آورید. همچنین ناهمبستگی، استقلال و تعامد این دو متغیر تصادفی را تحقیق کنید.

ب) پگالی احتمال $X + Y$ را به دست آورید.

سوال ۱۳۱) یک قطار و اتوبوس به طور تصادفی و مستقل از هم بین ساعات ۵ تا ۶ وارد یک ایستگاه می شوند. فردی نیز به طور تصادفی بین ساعت ۵ تا ۳۰ : ۵ وارد همان ایستگاه می شود.

الف) احتمال آن که فرد بیش از ۱۰ دقیقه منتظر قطار و اتوبوس شود چقدر است؟

ب) اگر قطار و اتوبوس هر یک ۱۰ دقیقه در ایستگاه تأخیر داشته باشند، احتمال با هم بودن آنها در ایستگاه چقدر است؟

پ) اگر فرد پس از ساعت ۱۵ : ۵ به ایستگاه برسد، با چه احتمالی به هیچ یک نمی رسد؟

سوال ۱۳۲) یک قطار و اتوبوس به طور تصادفی و مستقل از هم بین ساعات ۶ تا ۷ صبح وارد ایستگاهی می شوند. فردی نیز به طور تصادفی بین ساعات ۵:۵۰ تا ۶:۵۰ وارد همان ایستگاه می شود.

الف) احتمال اینکه فرد بیش از ۱۰ دقیقه منتظر قطار و یا اتوبوس بماند چقدر است؟

ب) احتمال اینکه این فرد به هیچ یک از قطار یا اتوبوس نرسد چقدر است؟

سوال ۱۳۳) اگر X و Y ، دو متغیر تصادفی نرمال با میانگین ۰ و واریانس ۱ باشند به گونه ای که $\text{cov}(X, Y) = 0.5$ ، در این صورت مقدار a را به گونه ای بیابید که $X + aY$ و $X + 2Y$ مستقل از هم باشند و در این صورت، واریانس هر یک را بیابید.

سوال ۱۳۴) تابع چگالی احتمال توأم دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر است:

$$f(x, y) = \begin{cases} k(4 - x - y) & , \quad 1 < x < 2, 0 < y < 2 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

الف) مقدار مناسب k را بیابید.

ب) با مقدار k به دست آمده در قسمت قبل، مقدار $\mathbb{E}\{XY\}$ را به دست آورید.

سوال ۱۳۵) تابع چگالی احتمال توأم دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر است:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} k & , \quad x - 1 < y < x, 0 < x < 2, 0 < y < 1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که k ثابت است.

الف) مقدار k را به دست آورید.

ب) نشان دهید Y و $X - Y$ از هم مستقل هستند.

سوال ۱۳۶) یک قطار و یک اتوبوس بین ساعت ۹ و ۱۰ در زمانی تصادفی وارد ایستگاه می شوند. قطار ۱۰ دقیقه و اتوبوس x دقیقه توقف دارند. x را طوری تعیین کنید که احتمال با هم بودن قطار و اتوبوس برابر ۰.۵ باشد.

سوال ۱۳۷) دایره‌ی واحد را با مرکز مبدأ مختصات در نظر بگیرید.

الف) نقطه‌ای به تصادف از داخل این دایره انتخاب می شود. اعداد $0 < r_0 < 1$ و $0 < \phi_0 < 2\pi$ را در نظر بگیرید. اگر مختصات قطبی این نقطه را با (r, ϕ) نشان دهیم، با چه احتمالی داریم $r_0 < r < r_0 + \Delta r_0$ و $\phi_0 < \phi < \phi_0 + \Delta \phi_0$ ؟

ب) ابتدا قطری از دایره را به تصادف انتخاب کرده و سپس نقطه‌ای از این قطر را به تصادف بر می گزینیم. اگر مختصات قطبی این نقطه را با (r, ϕ) نشان دهیم، با چه احتمالی داریم $r_0 < r < r_0 + \Delta r_0$ و $\phi_0 < \phi < \phi_0 + \Delta \phi_0$ ؟

پ) تابع چگالی احتمال نقطه را در هر دو حالت قسمت های الف و ب به دست آورید.

سوال ۱۳۸) (ناوردایی متغیرهای تصادفی گوسی تحت عمل جمع)

الف) فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی با توابع چگالی احتمال زیر باشند:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_X^2}\right)$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_Y^2}\right)$$

ثابت کنید متغیر تصادفی $X + Y$ از توزیع زیر پیروی می کند:

$$f_{X+Y}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi[\sigma_X^2 + \sigma_Y^2]}} \exp\left(-\frac{u^2}{2\pi[\sigma_X^2 + \sigma_Y^2]}\right)$$

ب) رابطه ی کلی تری را که می توان از تعمیم قسمت الف استنتاج کرد، بنویسید.

سوال ۱۳۹) برای هر کدام از توابع زیر که می توانند چگالی احتمال مشترک دو متغیر تصادفی باشند، ثابت مناسب k و مقادیر $\Pr\{X > 0\}$ و $\Pr\{X + Y > 0\}$ را بیابید. همچنین برای قسمت های ث و ج، چگالی احتمال متغیر تصادفی X را به دست آورید.

$$f(x, y) = \frac{k}{1+x^2+y^2} \quad \text{الف)}$$

$$f(x, y) = e^{a(x^2+y^2)} \quad \text{ب)}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} k & , \quad x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad \text{پ)}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} k - k\sqrt{x^2 + y^2} & , \quad x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad \text{ت)}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} xy & , \quad 0 < x < k \quad , \quad 0 < y < k \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (\text{ث})$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & , \quad x > 0 \quad , \quad y > 0 \quad , \quad x + y < a \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (\text{ج})$$

(راهنمایی: ابتدا تحقیق کنید اگر $f(x, y)$ تابعی از $x^2 + y^2$ باشد، داریم

$$\Pr\{aX + bY > 0\} = \Pr\{X > 0\} \quad , \quad a^2 + b^2 \neq 0$$

(

سوال ۱۴۰) دو متغیر تصادفی X و Y با چگالی احتمال توأم زیر مفروضند. در این صورت، مقدار α را به گونه ای بیابید که این دو متغیر تصادفی ناهمبسته شوند.

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 + \alpha xy & , \quad -1 < x < 1 \quad , \quad -1 < y < 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

سوال ۱۴۱) دو متغیر تصادفی X و Y با چگالی احتمال توأم زیر مفروضند. در این صورت، تابع توزیع تجمعی توأم این دو متغیر تصادفی را بیابید.

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} ye^{1-xy} & , \quad x > 1 \quad , \quad y > 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

سوال ۱۴۲) دو نفر به طور مستقل از هم و کاملاً تصادفی بین ساعت ۴ و ۵ وارد فروشگاه می شوند و هر یک پس از ۱۰ دقیقه، از آن خارج می شوند. احتمال آن که این دو نفر یکدیگر را در فروشگاه ملاقات کنند چقدر است؟

سوال ۱۴۳) جدول زیر را برای متغیرهای تصادفی X و Y در نظر بگیرید:
الف) توابع توزیع احتمال حاشیه ای متغیرهای X و Y را به دست آورید.

		Y
1	0	X
θ	$\frac{1}{2} - \theta$	0
$\frac{1}{2} - \theta$	θ	1

ب) به ازای چه مقدار θ داریم $P(X = Y) = 1$ ؟

پ) به ازای چه مقدار θ داریم $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$ ؟

سوال ۱۴۴) در پرتاب دو تاس سالم و متمایز، متغیر تصادفی X را مجموع اعداد رو آمده و Y را تعداد ۶ های رو آمده در نظر بگیرید.

الف) مقادیر $\mathbb{E}\{XY\}$ و $\Pr\{X = 1, Y = 7\}$ را محاسبه کنید.

ب) آیا این دو متغیر تصادفی ناهمبسته اند؟

سوال ۱۴۵) در جدول زیر که توزیع احتمال را برای متغیرهای تصادفی X و Y نشان می دهد،

		Y
1	0	X
p_2	p_1	0
p_4	p_3	1

الف) مقدار $\text{cov}(X, Y)$ را به دست آورید و تحقیق کنید چه زمانی این کمیت صفر است.

ب) آیا برای این دو متغیر تصادفی، ناهمبستگی، استقلال را نتیجه می دهد؟ اگر چنین است، نشان دهید و اگر چنین نیست، مثالی برای مقادیر p_1, p_2, p_3, p_4 بنویسید که ناهمبستگی، استقلال را نتیجه نمی دهد (دقت داشته باشید که جمع احتمالات برابر یک است و احتمالات نامنفی اند).

سوال ۱۴۶) چگالی احتمال زیر را در نظر بگیرید:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 1 + \alpha \sin[2\pi(x + y)] & , \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که α مقدار مناسبی است.

الف) کوواریانس این دو متغیر تصادفی را به دست آورید. آیا این دو متغیر تصادفی ناهمبسته هستند؟

ب) مقادیری از α را بیابید که این دو متغیر تصادفی مستقل باشند.

سوال ۱۴۷) تابع چگالی احتمال توأم زیر را در نظر بگیرید:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\rho^2} (x^2 + y^2 - 2\rho xy) \right]$$

الف) ثابت کنید X (و مشابه همپنین Y) دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس 1 است.

ب) ثابت کنید اگر $\rho = 0$ ، در این صورت متغیرهای تصادفی X و Y مستقل هستند.

پ) ثابت کنید اگر متغیرهای تصادفی X و Y مستقل باشند آنگاه $\rho = 0$.

ت) تابع چگالی احتمالی که در صورت این سوال تعریف شد، حالت خاصی از چگالی احتمال چند متغیره‌ی نرمال است.

ضریب همبستگی ρ در حالت دو متغیره، میزان همبستگی دو متغیر تصادفی را نشان می‌دهد. ابتدا تحقیق کنید به ازای چه مقدار ρ ، این چگالی احتمال، دایروی-مقارن خواهد بود. چگالی احتمال دو متغیره را به ازای مقادیر $\rho = 0.5$ ، $\rho = 0$ ، $\rho = -0.5$ ترسیم کنید. به طور شهودی چگونه می‌توان از روی نمودارها، به میزان همبستگی این دو متغیر تصادفی پی برد؟

این تابع چگالی را به صورت دیگری نیز می توان نوشت:

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \det(\Sigma)}} \exp \left[-\frac{1}{2} \cdot ([x, y] \Sigma^{-1} [x, y]^T) \right]$$

که بردار $[x, y]$ یک بردار سطری دوتایی است و $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$. ماتریس Σ در متغیرهای تصادفی نرمال توأم، مفهوم مهمی است و ماتریس کوواریانس نام دارد.

به ازای هر یک از مقادیر $\rho = 0.5, \rho = 0, \rho = -0.5$ و به کمک دستور `mvnrnd()` در متلب، ۱۰۰۰ جفت داده‌ی تصادفی تولید و آنها را در یک نمودار پراکنندگی ترسیم کنید (پس از اجرای دستور فوق در متلب به شیوه‌ی مناسب، ۱۰۰۰ داده‌ی تصادفی برای X و ۱۰۰۰ داده‌ی تصادفی برای Y خواهید داشت. کافی است Y را بر حسب X رسم کنید تا به نمودار پراکنندگی برسید. همچنین می توانید از Help متلب برای توضیحات بیشتر در مورد `mvnrnd()` بهره ببرید). چگونه از روی نمودار پراکنندگی می توان میزان همبستگی دو متغیر تصادفی را نشان داد؟ چه شهودی در آن نهفته است؟ (بسیار مهم است که در این تحقیق، تحلیل و دیدگاه خود را نیز ذکر بفرمایید).

هنگامی که $\rho = 1$ ، توضیح دهید چه اتفاقی می افتد؟ تفاوت آن با حالت $\rho = -1$ چیست؟ آیا همچنان می توان از چگالی احتمال داده شده استفاده کرد؟ چرا؟

سوال ۱۴۸) برای هر یک از چگالی احتمال های توأم داده شده‌ی زیر، موارد $f_X(x)$ ، $\mathbb{E}\{X\}$ و $\mathbb{E}\{XY\}$ را به دست آورید.

الف) $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{-x^2 - y^2}$

ب) $f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1 - |x - 1| - |y - 1|) & , \quad |x - 1| + |y - 1| < 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$

پ) $f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} e^{1-x} & , \quad 0 < x < y < 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$

ت) X و Y ، دو متغیر تصادفی گسسته (با مقادیر صحیح) اند و تابع چرم احتمال آنها به صورت زیر است،

$$\Pr\{X = x, Y = y\} = \begin{cases} \frac{1}{16} & , \quad x^2 + y^2 \leq 10, \quad x \geq y \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}.$$

سوال ۱۴۹) ابتدا فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای توزیع یکنواخت در بازه $[0, 1]$ و مستقل هستند. توزیع احتمال متغیرهای تصادفی

الف) XY ، ب) $X + Y$ ، پ) $\frac{X}{Y}$ ، ت) $\max\{X, Y\}$ (ث) $\min\{X, Y\}$

را به دست آورید. سپس فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی نمایی و مستقل با پارامتر λ باشند. توزیع احتمال هر یک از متغیرهای تصادفی قسمت ب و پ را بیابید.

سوال ۱۵۰) تابع چگالی احتمال توام دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر است:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} k & , \quad |x| + |y| < 1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

الف) مقدار مناسب k را بیابید. ب) کوواریانس و ضریب همبستگی X و Y را بیابید.

پ) ثابت کنید متغیرهای تصادفی $X + Y$ و $X - Y$ مستقل هستند و توزیع توام آنها را به دست آورید. ت) توزیع X و میانگین و واریانس آن را به دست آورید.

سوال ۱۵۱) برای متغیر تصادفی X که دارای توزیع زیر است

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & , \quad |x| < \frac{1}{2} \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

تابع مولد گشتاور را به دست آورده و از روی آن، $\mathbb{E}\{X^4\}$ را محاسبه نمایید.

سوال ۱۵۲) توزیع مشترک دو متغیر تصادفی به صورت زیر است،

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\rho^2} (x^2 + y^2 - 2\rho xy) \right]$$

الف) ثابت کنید متغیر تصادفی $X + Y$ یک متغیر تصادفی نرمال است و سپس واریانس آن را به دست آورید. چه زمانی این واریانس بیشینه است و چرا؟ در شرایطی که واریانس بیشینه باشد، متغیرهای تصادفی X و Y چه رابطه‌ای دارند؟

ب) ثابت کنید به ازای $\rho = 0$ ، متغیر تصادفی $\tan^{-1} \frac{Y}{X}$ دارای توزیع یکنواخت در بازه‌ی $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ خواهد بود.

سوال ۱۵۳) برای هر یک از توابع دو متغیره‌ی زیر، محدوده مقادیر k را به گونه‌ای بیابید که تابع مورد نظر، چگالی احتمال توأم دو متغیر تصادفی باشد و سپس، توزیع تجمعی توأم و مقدار $\Pr \{X + 3Y < \frac{1}{3}\}$ را (در صورت وجود) بیابید. به ازای هر تابع توزیع تجمعی، آیا X و Y مستقلند؟

$$f(x, y) = \begin{cases} xy + kx + ky & , \quad 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases} \quad \text{الف)}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} k \sin(x + 3y) & , \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < \frac{\pi}{6} \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases} \quad \text{ب)}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} kxy(1 - y) & , \quad 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases} \quad \text{پ)}$$

سوال ۱۵۴) برای هر یک از چگالی‌های احتمال زیر، مقادیر $\Pr\{X \leq 4, Y \leq -2\}$ ، $\Pr\{X = 4Y\}$ و $\Pr\{X + Y \leq 2\}$ را بیابید.

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin(x + y) & , \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < \frac{\pi}{2} \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases} \quad \text{الف)}$$

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \delta \left(\sqrt{(x+4)^2 + (y+1)^2} \right) & , \quad x = -4, y = -1 \\ \frac{1}{2} & , \quad 0 < x < 1, 0 < y < 1 \text{ (ب)} \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

(دقت شود که همانگونه که $\delta(x - x_0)$ نشان دهنده‌ی ضربه‌ی ای در $x = x_0$ است، $\delta(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2})$ نیز نشان دهنده‌ی ضربه‌ی ای در $x = x_0, y = y_0$ ، دو بعد و دارای سطح زیر یک است.)

سوال ۱۵۵) برای چگالی احتمال توأم زیر، مقادیر $\sigma_X^2, \sigma_Y^2, \Phi_X(s), \Phi_Y(s)$ و چگالی احتمال متغیرهای تصادفی XY و $\max\{X, Y\}$ را مناسبه کنید.

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} (xy - 1)e^{1-xy} & , \quad x \geq 1, y \geq 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

سوال ۱۵۶) چگالی احتمال توأم زیر برای دو متغیر تصادفی X و Y داده شده است:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \alpha + 2\left(\frac{1}{\pi} - \alpha\right)(x^2 + y^2) & , \quad x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

الف) مقادیر مجاز α را بیابید.

ب) به ازای چه مقدار α ، دو متغیر تصادفی X و Y مستقل اند؟ ناهمبسته اند؟

پ) احتمال‌های $\Pr\{aX + bY \geq 0\}$ و $\Pr\{XY \geq 0\}$ را بیابید.

سوال ۱۵۷) اگر چگالی احتمال مشترک دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر باشد

$$f(x, y) = \begin{cases} 12x^2 & , \quad 0 < x < y < 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

در این صورت مقدار $\text{cov}(X, Y)$ را بیابید.

سوال ۱۵۸) سکه ای را ۱۰ بار پرتاب می‌کنیم. متغیر تصادفی X ، تعداد دفعات رو آمدن سکه در ۵ پرتاب اول و متغیر تصادفی Y ، تعداد دفعات رو آمدن سکه در پرتاب های زوج است. احتمال $\Pr\{X = 5Y\}$ را بیابید.

سوال ۱۵۹) متغیر تصادفی X ، دارای تابع چرم احتمال زیر است:

2	1	0	-1	x
0.4	0.3	0.2	0.1	$\Pr\{X = x\}$

اگر داشته باشیم $Y = X^2 - 1$ ، در این صورت مقدار $\text{cov}(X, Y)$ را بیابید.

سوال ۱۶۰) برای متغیرهای تصادفی X و Y با چگالی های احتمال توأم زیر،

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} x + ky & , \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} kx & , \quad 0 < x < 1, \quad 0 < x < y < 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} kx & , \quad 0 < y < 1, \quad 0 < y < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} kx & , \quad x + y < 1, \quad x > 0, \quad y > 0 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} k(1 + x + y) & , \quad 1 < x < 2, \quad 0 < y < 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

الف) مقدار مناسب k را بیابید.

ب) توزیع حاشیه ای $f_X(x)$ را پیدا کنید.

پ) مقدار $\text{cov}(X, Y)$ را محاسبه کنید.

ت) استقلال دو متغیر تصادفی را بررسی کنید.

ث) چگالی احتمال $X + Y$ را بیابید.

سوال ۱۶۱) سکه سالمی را ۵ بار می اندازیم. تابع مولد گشتاور مشترک X و Y و مقدار $\mathbb{E}\{X + Y | X = 1\}$ را محاسبه کنید، اگر:

الف) X تعداد رو آمدن ها در سه پرتاب اول و Y تعداد پشت آمدن ها در سه پرتاب آخر باشد.

ب) X تعداد روها در پرتاب های فرد و Y تعداد پشت ها در سه پرتاب آخر باشد.

پ) X تعداد پشت ها در پرتاب های زوج و Y تعداد پشت ها در سه پرتاب آخر باشد.

ت) X تعداد پشت ها و Y تعداد روها در سه پرتاب آخر باشد.

ث) X تعداد پشت ها و Y تعداد روها در دو پرتاب اول باشد.

سوال ۱۶۲) یک امتحان احتمال مهندسی به صورت آنلاین (و با رعایت پروتکل های بهداشتی!) به مدت ۲ ساعت برگزار می شود. فرهاد و آرش، هر یک مستقل از دیگری و به تصادف در ۱۰ دقیقه اول (با توزیع یکنواخت) وارد جلسه امتحان می شوند. اگر این دو نفر مستقل از هم در بازه ای ۱.۵ تا ۱.۵ ساعت از شروع و با توزیع یکنواخت، امتحان خود را به پایان رسانده و از جلسه خارج شوند،

الف) با چه احتمالی فرهاد زودتر از آرش از جلسه امتحان خارج می شود؟

ب) اگر آرش زودتر از فرهاد به جلسه آمده باشد، با چه احتمالی حداکثر ۱۵ دقیقه دیرتر از آن جلسه خارج می شود؟

- پ) با چه احتمالی آرش حداقل ۱۰ دقیقه پس از فرهاد از جلسه خارج می شود؟
- ت) احتمال آن که فرهاد زودتر از آرش به جلسه آمده و زودتر از او خارج شود چقدر است؟
- ث) اگر آرش از جلسه امتحان خارج شده باشد، با چه احتمالی فرهاد حداقل ۲۰ دقیقه پس از او از جلسه خارج می شود؟
- ج) اگر فرهاد دیرتر از آرش از جلسه خارج شود، با چه احتمالی زودتر از او وارد جلسه شده است؟
- چ) احتمال آن که فرهاد زودتر از آرش به جلسه آمده ولی دیرتر از او خارج شود چقدر است؟
- ح) اگر آرش از جلسه امتحان خارج شده باشد، با چه احتمالی فرهاد حداقل ۲۰ دقیقه پیش از او از جلسه خارج شده است؟
- خ) اگر آرش زودتر از فرهاد به جلسه آمده باشد، با چه احتمالی دیرتر از او از جلسه خارج می شود؟
- د) احتمال آن که زمان مورد نیاز آرش برای حل سوالات، ۱۰ دقیقه بیشتر از فرهاد باشد چقدر است؟

فصل ۵

احتمال شرطی در متغیرهای تصادفی

سوال ۱۶۳) اگر متغیر تصادفی X را دارای چگالی احتمال زیر در نظر بگیریم

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \quad 0 < x < 2 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

موارد $F(x|X < 1)$ (توزیع تجمعی)، $f(x|X > 1)$ (چگالی احتمال) و $\mathbb{E}\{X|0.5 < X < 1.5\}$ را بیابید.

سوال ۱۶۴) فرض کنید متغیر تصادفی X دارای چگالی احتمال زیر باشد

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases} \quad , \quad \lambda > 0$$

در این صورت مقادیر $\mathbb{E}\{X|X > a\}$ و $\mathbb{E}\{X\} + a$ را بیابید و با هم مقایسه کنید. نتیجه را تفسیر کنید و ببینید آیا با شهود سازگار است. این چه ویژگی ای از متغیرهای تصادفی نمایی را نشان می دهد؟

سوال ۱۶۵) برای متغیر تصادفی X با توزیع زیر

$$\Pr\{X = i\} = (1 - p)^i \cdot p \quad , \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

الف) مقدار $\text{var}\{X|X \geq 4\}$ را به دست آورید.

ب) تابع جرم احتمال شرطی $\{X \text{ زوج است} | X = x\}$ را پیدا کنید.

سوال ۱۶۶) تاس سالمی را ۹ بار پرتاب می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی X ، تعداد اعداد زوج رو آمده به شرط دانستن این باشد که در سه پرتاب اول، حداقل یک عدد فرد آمده است،

الف) چگالی احتمال X را مناسبه کنید.

ب) اگر متغیر تصادفی Y ، تعداد اعداد اول رو آمده باشد، مقدار $\text{Pr}\{X = x | Y = 0\}$ بپذیرد است؟

سوال ۱۶۷) سکه ای را ۱۰ بار پرتاب می‌کنیم. متغیر تصادفی X برابر تعداد دفعات رو آمدن در پرتاب‌های دوم و چهارم و متغیر تصادفی Y برابر تعداد دفعات پشت آمدن در ۲ پرتاب اول است. مقدار $E\{XY\}$ و چگالی احتمال شرطی $f_{X|Y}(X = x | Y = y)$ را به دست آورید (می‌توانید از روش جدول نویسی برای چگالی احتمال استفاده کنید که سطر جدول $X = x$ و ستون جدول $Y = y$ است).

سوال ۱۶۸) در پرتاب ۱۰ بار سکه‌ی سالم به طور مستقل،

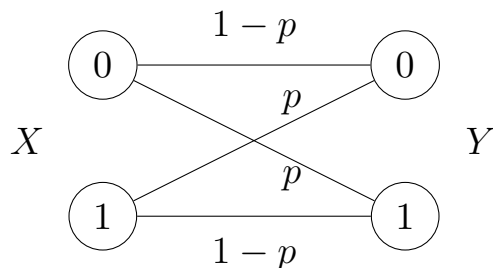
الف) توزیع احتمال متغیر تصادفی تعداد سکه‌های شیر آمده را به شرط آن که بدانیم سه پرتاب اول خط بوده اند به دست آورید.

ب) توزیع احتمال متغیر تصادفی تعداد سکه‌های شیر آمده را به شرط آن که بدانیم دست کم دو پرتاب از سه پرتاب اول خط بوده اند به دست آورید.

سوال ۱۶۹) کانال مخابراتی زیر را در نظر بگیرید:

که در آن، پیکان‌ها احتمالات گذار را از متغیر تصادفی X به متغیر تصادفی Y نشان می‌دهند؛ به طور مثال $\text{Pr}\{Y = 0 | X = 1\} = p$.

الف) اگر $\text{Pr}\{X = 0\} = q$ که $0 \leq q \leq 1$ ، در این صورت توزیع توام X و Y را مناسبه



کنید.

ب) احتمال خطا ($\Pr\{X \neq Y\}$) را محاسبه کنید. اگر مقدار p ثابت باشد، آیا احتمال خطا به حسب q نقطه‌ی بهینه دارد؟ اگر دارد آنرا بیابید و در غیر این صورت، علت را بیان کنید.

سوال ۱۷۰) اگر توزیع تبمعی یک متغیر تصادفی ترکیبی به صورت

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \frac{x+2}{4} & , \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

باشد، چگالی احتمال متغیر تصادفی ($X \neq 0$ یا $X \neq 1$) را به دست آورید.

سوال ۱۷۱) اگر برای متغیرهای تصادفی X و Y ، چگالی احتمال زیر را داشته باشیم

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} e^{-x(y+1)^2} & , \quad x, y > 0 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در این صورت توزیع $X|Y = y$ را به دست آورید.

سوال ۱۷۲) فرض کنید متغیر تصادفی X ، نتیجه پرتاب یک تاس سالم باشد. سپس با توجه به رفتار X ، متغیر تصادفی پیوسته‌ی Y را به صورت شرطی با چگالی احتمال زیر تعریف

می‌کنیم:

$$f_{Y|X}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \quad 0 < y < x \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

الف) احتمال $\Pr\{Y \geq 3\}$ را بیابید.

ب) چگالی احتمال $f_Y(y)$ را به دست آورید.

پ) مقادیر $\mathbb{E}\{Y\}$ و $\text{var}(Y)$ را از روی چگالی احتمال Y مناسبه کنید.

سوال ۱۷۳) برای چگالی احتمال زیر، مقادیر $\mathbb{E}\{X|X > 1\}$ و $\sigma_X^2(X|X > 1)$ و چگالی های احتمال شرطی $f(x|X \neq 1)$ و $f(x|X < \frac{1}{2})$ را مناسبه کنید.

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x(1-x) & , \quad 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}\delta(x-1) & , \quad x = 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

سوال ۱۷۴) چگالی احتمال توأم زیر برای دو متغیر تصادفی X و Y داده شده است:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & , \quad x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

الف) چگالی احتمال شرطی $f_{\max\{X,Y\}}(u|X \leq \frac{1}{2})$ را بیابید (ابتدا $\Pr\{\max\{X, Y\} \leq \frac{1}{2}\}$ را مناسبه کنید).

ب) مقدار $\mathbb{E}\{\sqrt{X^2 + Y^2}|X + Y \leq 1\}$ را بیابید.

سوال ۱۷۵) اطلاعات زیر در مورد دو متغیر تصادفی X و Y داده شده است:

$$\Pr\{X = -1\} = \Pr\{X = 1\} = \frac{1}{2}$$

$$f_Y(y|X = x) = \frac{a}{2} \exp(-a|x - y|)$$

که a ، عدد ثابت مثبتی است.

الف) احتمال های $\Pr\{Y \leq 0|X = 1\}$ و $\Pr\{Y \geq 0|X = -1\}$ را بیابید. با افزایش a ، مقادیر احتمال های فوق چه تغییر می کنند؟

ب) نتیجه ی قسمت الف را با دیدگاه احتمال خطا توجیه کنید.

فصل ۶

دنباله‌ی متغیرهای تصادفی

سوال ۱۷۶) (قدم زدن تصادفی) فردی از نقطه‌ی صفر روی محور اعداد حقیقی با احتمال p یک متر به سمت راست و با احتمال $1 - p$ یک متر به سمت چپ می‌رود. اگر این فرد این نوع قدم زدن را n بار و هر بار از روی نقطه‌ای که روی آن ایستاده تکرار کند، با چه احتمالی پس از k بار قدم زدن به مبدأ باز می‌گردد؟

سوال ۱۷۷) فرض کنید دنباله‌ی متغیرهای تصادفی $\{X_n\}$ ، از توزیع یکنواخت بین $-\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$ به طور مستقل پیروی می‌کند. به کمک قضیه‌ی حد مرکزی، توزیع متغیر تصادفی Y و میانگین و واریانس آن را به دست آورید؛ اگر

$$Y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}.$$

سوال ۱۷۸) الف) تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی پواسون با پارامتر λ را به دست آورید.

ب) اگر دنباله‌ی متغیرهای تصادفی مستقل $\{X_n\}$ ، از نوع پواسون با پارامتر λ باشد، نشان دهید متغیر تصادفی

$$Y = \sum_{i=1}^N X_i,$$

دارای توزیع پواسون با پارامتر $N\lambda$ است.

پ) نشان دهید اگر دنباله‌ی متغیرهای تصادفی مستقل $\{X_n\}$ ، برنولی با پارامتر p و N از نوع پواسون با پارامتر λ باشد، متغیر تصادفی $Y = \sum_{n=0}^{N-1} X_n$ دارای توزیع پواسون با پارامتر λp است.

سوال ۱۷۹) تحقیق کنید هر یک از دنباله‌ی متغیرهای تصادفی زیر، با چه مفهومی به یک متغیر تصادفی میل می‌کنند. برای هر یک دلیل بیاورید.

الف) $X_n = X + \frac{1}{n}$ که X ، یک متغیر تصادفی یکنواخت در بازه‌ی $[0, 1]$ است.

ب) متغیر تصادفی نمایی با پارامتر $\frac{n+1}{n}$

پ) متوسط تعداد شیرها در n بار پرتاب مستقل یک سکه‌ی سالم

فصل ۷

شبیه سازی ها

سوال ۱۸۰) سکه‌ی سالمی را (که احتمال پشت و رو برابر $\frac{1}{2}$ است) به تعداد n بار پرتاب می‌کنیم.

الف) منفی تعداد دفعات رو آمدن سکه را به تعداد کل دفعات پرتاب سکه بر حسب n به ازای $1 \leq n \leq 100$ رسم کنید.

ب) رفتار این نمودار را با افزایش n توصیف کرده و بیان کنید به چه عددی همگرا می‌شود. مشاهدات خود را توضیح دهید.

پ) همین نمودار را برای سکه غیر سالم که احتمال رو آمدن آن $\frac{2}{3}$ است، رسم کرده و بیان کنید به چه عددی همگرا می‌گردد. مشاهدات خود را توضیح دهید.

راهنمایی: ابتدا به کمک تابع $\text{randi}()$ در متلب، یک آرایه 1×100 از اعداد تصادفی ۰ یا ۱ بسازید (به عنوان مثال ۰ را شیر و ۱ را خط در نظر بگیرید). سپس هر بار، به ازای هر n که $1 \leq n \leq 100$ ، میانگین n مقدار اول آرایه فوق را حساب کرده و آرایه‌ی 1×100 جدید بسازید. آرایه‌ی جدید، پاسخ مسئله است که باید بر حسب n از ۱ تا ۱۰۰ رسم کرد.

سوال ۱۸۱) سکه‌ای با احتمال p رو و با احتمال $1 - p$ پشت می‌آید. آزمایشی را در نظر

بگیرید که در آن، این سکه ۱۰۰ بار پرتاب شده و نسبت تعداد رو آمدن ها به تعداد کل پرتاب ها (=۱۰۰) به عنوان نتیجه آزمایش در نظر گرفته می شود.

اگر آزمایش فوق را m بار تکرار کرده و نتیجه این m آزمایش را در یک آرایه $1 \times m$ ذخیره کنیم،

الف) با فرض $p = 0.5$ و $m = 100$ ، این آرایه را رسم کنید (مشابه بند الف سوال ۱). سپس به کمک قضیه دموآو-لاپلاس، منفی کوسی را به عنوان تقریبی از توزیع دو جمله ای به همراه نمودار قبل رسم نموده و مشاهدات خود را توضیح دهید.

ب) بند الف را به ازای $m = 1000$ تکرار کنید. چه تفاوتی مشاهده می شود؟

پ) بند الف را یک بار برای حالت $p = 0.2$ و $m = 1000$ و بار دیگر برای حالت $p = 0.1$ و $m = 1000$ شبیه سازی کنید و مشاهدات خود را توصیف کنید. چه تفاوتی با بند های پیشین مشاهده می شود؟

(یادآوری: توزیع دو جمله ای با پارامترهای n و p را می توان به صورت زیر با منفی کوسی تقریب زد:

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}$$

که $q = 1 - p$.)

سوال ۱۸۲) سوال ۱) (تعبیر تهری چکالی احتمال) می دانید که تابع چکالی احتمال دارای شهود تهری است؛ به این معنا که مقدار چکالی احتمال در هر نقطه از دامنه ی متغیر تصادفی، نشان دهنده ی وزن احتمالاتی آن نقطه است. برای به تصویر کشیدن این شهود، متغیر تصادفی کوسی با میانگین صفر و واریانس ۱ را در نظر بگیرید. تابع $\text{randn}()$ در متلب، تحقق از این چنین متغیر تصادفی ای را برآورده می کند. به کمک این تابع، ۱۰۰۰۰۰ تحقق مستقل از این متغیر تصادفی را تولید کرده و به کمک دستور $\text{histogram}()$ آرایه ی ۱۰۰۰۰۰ تایی را رسم

می‌دانیم در n بار پرتاب سکه‌ی سالم، احتمال k بار رو آمدن برابر است با

$$\binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

جهت تجربه‌ی عملی فرمول اخیر، آزمایشی را که در آن سکه 1000 بار پرتاب می‌شود، 1000 بار تکرار می‌کنیم (مشابه اینکه سکه‌ای را ۱۰۰۰۰۰۰ بار پرتاب کرده و هر ۱۰۰۰ نتیجه‌ی پشت سر هم را خوشه‌بندی کنیم).

گام‌ها:

گام ۱) به کمک یک حلقه‌ی for، ۱۰۰۰ عدد تصادفی ۰ یا ۱ تولید کرده و تعداد دفعاتی را که این رشته‌ی ۱۰۰۰ تایی برابر ۱ می‌شود (سکه رو می‌آید) را حساب کنید.

گام ۲) گام ۱ را ۱۰۰۰ بار تکرار کرده و هر بار نتیجه را در یک آرایه‌ی ۱۰۰۰ تایی ذخیره کنید.

گام ۳) هیستوگرام نتایج را رسم نموده و آن را توجیه کنید (تعداد bin‌های هیستوگرام را برابر 40 قرار دهید).

سوال ۲)

الف) می‌دانیم که چگالی احتمال یک متغیر تصادفی، میانگین تجربی تعداد دفعات رخداد مقادیر آن متغیر تصادفی را نشان می‌دهد؛ به طور مثال در توزیع یکنواخت در بازه‌ی $[0, 1]$ ، تمام اعداد این بازه، دارای میانگین تجربی یکسان رخداد هستند. جهت تمقیق این امر، ۱۰۰۰۰۰ نمونه از توزیع یکنواخت در بازه‌ی $[0, 1]$ را تولید کرده و هیستوگرام آن را رسم کنید. نتیجه را توجیه کنید.

ب) می‌دانیم که اگر X از توزیع یکنواخت در بازه‌ی $[0, 1]$ پیروی کند، $Y = -\ln X$ از توزیع نمایی با پارامتر $\lambda = 1$ پیروی می‌کند و چگالی احتمال آن به صورت زیر است:

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & , \quad y > 0 \\ 0 & , \quad y \leq 0 \end{cases}.$$

به کمک دستور هیستوگرام، ۱۰۰۰۰ تحقق از توزیع یکنواخت در بازه‌ی $[0, 1]$ تولید کرده و در آرایه‌ای به نام X ذخیره کنید. سپس آرایه‌ی Y را از روی آرایه‌ی X به صورت $Y = -\ln X$ بسازید. سپس هیستوگرام Y را با تعداد bin برابر ۱۰۰ رسم کنید. جهت مشاهده‌ی رفتار چگالی احتمال، تابع e^{-y} را در بازه‌ی $(0, 10)$ روی همان نمودار هیستوگرام رسم شده بکشید و نتیجه را توجیه کنید.

(فرض کنید می‌فواہید هیستوگرام آرایه‌ی x را رسم کنید. جهت رسم هیستوگرام در این سوال، از دستورهای زیر استفاده کنید:

(