نمونه سوالات

مصطفی ایاز

۲۶ مرداد ۱۴۰۱

فهرست مطالب

فصل ۱

مبانی احتمال و جبر مجموعه ها

سوال ۱) دو کیسه در اختیار داریم. کیسه اول شامل ۲۰ گلوله قرمز و ۳۰ گلوله آبی و دومی شامل ۲۰ گلوله زرد، ۳۰ گلوله آبی و ۵۰ گلوله قرمز است. ابتدا یکی از کیسه ها را به تصادف انتخاب کرده و سپس گلوله‌ای را از داخل آن به تصادف بر می داریم. با چه احتمالی گلوله انتخاب شده قرمز و از کیسه‌ی ۲ است؟

سوال ۲) دو کیسه در اختیار داریم. کیسه اول شامل ۲۰ گلوله قرمز و ۳۰ گلوله آبی و دومی شامل ۲۰ گلوله زرد، ۳۰ گلوله آبی و ۵۰ گلوله قرمز است. ابتدا یکی از کیسه ها را به تصادف انتخاب کرده و سپس گلوله‌ای را از داخل آن به تصادف بر می داریم. اگر گلوله از کیسه ۱ انتخاب شده باشد، با چه احتمالی آبی است؟

سوال ۳) دو کیسه در اختیار داریم. کیسه اول شامل ۲۰ گلوله قرمز و ۳۰ گلوله آبی و دومی شامل ۲۰ گلوله زرد، ۳۰ گلوله آبی و ۵۰ گلوله قرمز است. ابتدا یکی از کیسه ها را به تصادف انتخاب کرده و سپس گلوله‌ای را از داخل آن به تصادف بر می داریم. اگر گلوله زرد نباشد با چه احتمالی قرمز است؟

سوال ۴) دو کیسه در اختیار داریم. کیسه اول شامل ۲۰ گلوله قرمز و ۳۰ گلوله آبی و دومی

شامل ۲۰ گلوله زرد، ۳۰ گلوله آبی و ۵۰ گلوله قرمز است. ابتدا یکی از کیسه ها را به تصادف انتخاب کرده و سپس گلوله‌ای را از داخل آن به تصادف بر می داریم. اگر گلوله آبی نباشد، با چه احتمالی از کیسه‌ی ۲ انتخاب شده است؟

سوال ۵) دو کیسه در اختیار داریم. کیسه اول شامل ۲۰ گلوله قرمز و ۳۰ گلوله آبی و دومی شامل ۲۰ گلوله زرد، ۳۰ گلوله آبی و ۵۰ گلوله قرمز است. ابتدا یکی از کیسه ها را به تصادف انتخاب کرده و سپس گلوله‌ای را از داخل آن به تصادف بر می داریم. اگر گلوله قرمز یا زرد نباشد، با چه احتمالی از کیسه ۲ انتخاب شده است؟

سوال ۶) استانی دارای دو شهر است. شهر ۱ دارای ۱۲۰ مرد و ۸۰ زن و شهر ۲ دارای ۱۰۰۰ زن و ۸۰۰ مرد است. در شهر ۱، ۵۰ مرد و ۳۰ زن و در شهر ۲، ۱۰۰ مرد و ۱۵۰ زن به بیماری X مبتلا هستند. فردی را از این استان به تصادف انتخاب می کنیم.

الف) با چه احتمالی این فرد، زن سالمی از شهر ۱ است؟

ب) اگر فردی که انتخاب می کنیم بیمار باشد، با چه احتمالی مردی از شهر ۲ است؟

پ) اگر فرد انتخاب شده سالم باشد، احتمال زن بودن او چقدر است؟

سوال ۷) یک سکه سالم را برداشته، آن را سه بار پرتاب می کنیم و نتیجه‌ی سه بار پرتاب را در نظر می‌گیریم. اگر رو آمدن سکه را با H و پشت آمدن را با T نمایش دهیم:

الف) فضای نمونه را بیابید.

ب) این مسئله ی احتمال، چند واقعه‌ی محتمل دارد؟ (واقعه طبق تعریف یک زیر مجموعه از فضای نمونه است).

پ) طبق تعریف کلاسیک احتمال، واقعه‌ی اینکه در پرتاب اول و دوم سکه نتیجه یکسان باشد (در پرتاب سوم نتیجه دلخواه است)، با چه احتمالی رخ می دهد؟

سوال ۸) دو مجموعه‌ی $A = \{1, 4, 5\}$ و $B = \{2, 3, 4\}$ را در نظر بگیرید. مجموعه های

زیر را به دست آورید.

الف) $A \cap B$

ب) $A - B$

پ) $A \times B$ (ضرب دکارتی)

ت) اگر $C = \{2, 5, 6\}$، با محاسبه‌ی مجموعه های $(A \cup B) \cap C$ و $(A \cap C) \cup (B \cap C)$ نشان دهید:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

سوال ۹) به کمک تعریف اصولی احتمال (و با بهره گیری از اصول کولموگروف)، برای هر دو مجموعه‌ی A و B نتیجه بگیرید:

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$$

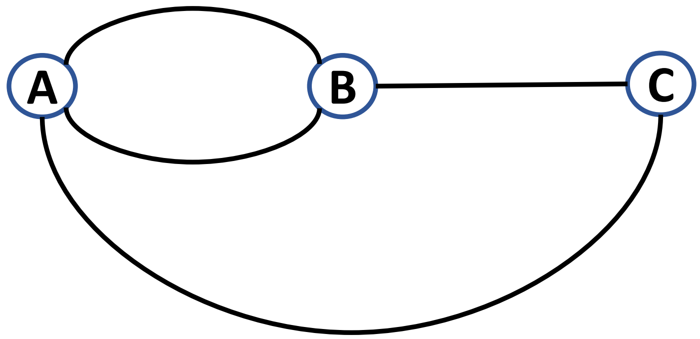
سوال ۱۰) در یک کیسه، ۵ گلوله‌ی آبی و ۳ گلوله‌ی سفید وجود دارد. دو عدد گلوله بر می‌داریم. احتمال این را که یکی از گلوله ها آبی و دیگری سفید باشد در حالت

الف) با جایگذاری

ب) بدون جایگذاری

به دست آورید (جایگذاری حالتی است که گلوله ای را پس از بیرون آوردن از کیسه و مشاهده‌ی رنگ آن، به کیسه باز گردانیم).

سوال ۱۱) در نقشه‌ی زیر، از شهر A به شهر B دو مسیر و از B به C یا از A به C یک مسیر وجود دارد. اگر احتمال قطع شدن هر مسیر مستقل از سایرین برابر p باشد، احتمال آن که شخصی بتواند از شهر A به C برود چقدر است؟



سوال ۱۲) در مبحث مدولاسیون دیجیتال، می‌توان هر سمبل مخابراتی را با تعدادی بیت کد نموده و پس از شکل دهی پالس روی کانال ارسال کرد. فرض کنید یک سمبل مخابراتی از n بیت تشکیل شده باشد. به طور مثال

$$S_k \equiv (1010001101)_2$$

که k اندیس سمبل است و در اینجا سمبل از 10 بیت تشکیل شده است. این سمبل از یک کانال مخابراتی ارسال و در انتهای کانال دریافت می‌شود. اگر احتمال خرابی هر بیت مستقل از سایرین برابر p باشد، با چه احتمالی سمبل به درستی آشکار نمی‌شود؟

سوال ۱۳) دو تاس را پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه دو عدد رو آمده نسبت به هم اول باشند چقدر است؟

سوال ۱۴) یک سکه‌ی سالم و یک تاس سالم را با هم پرتاب می کنیم.

الف) احتمال اینکه سکه به رو بیفتد و تاس عدد فرد شود را به دست آورید.

ب) احتمال اینکه سکه به رو بیفتد یا تاس عدد فرد شود را به دست آورید (هر دو باهم نیز می توانند رخ دهند!)

سوال ۱۵) یک تاس را پرتاب می کنیم. اگر مضرب ۳ ظاهر شد، نتیجه را یادداشت می کنیم

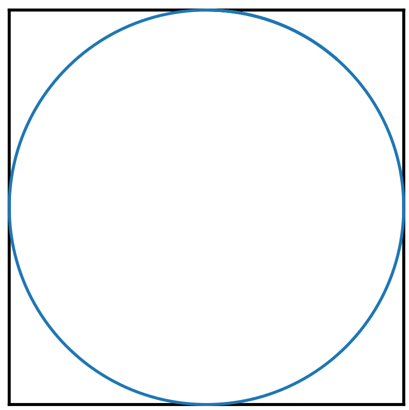
و در غیر این صورت سکه ای را می اندازیم و نتیجه‌ی سکه (پشت یا رو) را می نویسیم.

الف) فضای شدنی این مسئله را بیابید.

ب) با چه احتمالی واقعه‌ی رو آمدن سکه اتفاق می افتد؟

پ) احتمال واقعه‌ی اینکه تاس عدد ۱ بیاید یا سکه به پشت ظاهر شود را به دست آورید.

سوال ۱۶) نقطه ای را از داخل مربع زیر بر می گزینیم (طول ضلع مربع برابر ۲ است). احتمال اینکه:



الف) نقطه، داخل دایره ی واحد (نشان داده شده در شکل) بیفتد چقدر است؟

ب) نقطه، روی یکی از دو قطر مربع بیفتد چقدر است؟

پ) فاصله‌ی نقطه از هر یک از رأس های مربع بیش از ۰/۵ باشد چقدر است؟

سوال ۱۷) از بین اعداد سه رقمی ای که با ترکیب رقم های ۰، ۱ و ۲ می توان ساخت (تکرار مجاز است):

الف) چند عدد به ۳ بخش پذیرند؟

ب) اگر عددی را به تصادف برگزینیم، با چه احتمالی زوج خواهد بود؟

سوال ۱۸) در یک جامعه‌ی آماری، نسبت جمعیت زنان بزرگسال، مردان بزرگسال و کودکان به کل جمعیت جامعه به ترتیب برابر 0.37، 0.43 و 0.2 است. در این جامعه، 0.15 مردان بزرگسال و 0.25 زنان بزرگسال به نوعی بیماری مبتلا شده اند. فرد بزرگسالی را به تصادف از این جامعه انتخاب می‌کنیم، احتمال بیمار بودن او چقدر است؟

سوال ۱۹) فرض کنید مجموعه های B و C مستقل و دارای احتمال مثبت باشند. در چه حالتی داریم

$$P(A|B \cap C) = P(A|B)P(A|C)$$

؟

سوال ۲۰) (کران بالا و پایین برای احتمال اجتماع) برای هر دو مجموعه‌ی A و B ثابت کنید:

$$P(A)+P(B)-\frac{1}{4\max\{1-P(A),1-P(B)\}} \leq P(A\cup B) \leq P(A)+P(B)$$

سوال ۲۱) جعبه‌ی ۱ حاوی ۱۰۰۰ لامپ است که ۱۰ درصد آنها خراب هستند. جعبه‌ی ۲ نیز حاوی ۲۰۰۰ لامپ است که ۵ درصد آنها خراب هستند. از یک جعبه که به طور تصادفی انتخاب شده، دو لامپ بیرون آورده می شوند.

الف) احتمال خرابی هر دو چقدر است؟

ب) اگر هر دو لامپ خراب باشند، با چه احتمالی جعبه‌ی ۱ انتخاب شده است؟

سوال ۲۲) در یک کیسه، ۵ گلوله ي آبی و ۳ گلوله ي سفید وجود دارد. دو عدد گلوله بر می داریم. احتمال این را که یکی از گلوله ها آبی و دیگري سفید باشد در حالت

الف) با جایگذاري

ب) بدون جایگذاري

به دست آورید (جایگذاري حالتی است که گلوله اي را پس از بیرون آوردن از کیسه و مشاهده

ي رنگ آن، به کیسه باز گردانیم).

سوال ۲۳) نشان دهید که برای استقلال n رخداد باید $2^n - n - 1$ معادله برقرار باشد.

سوال ۲۴) در یک گل فروشی، ۱۰ گل لاله، ۵ نسترن، ۳ بنفشه و ۲ اقاقیا وجود دارد. می‌خواهیم دسته گلی شامل ۵ گل که همگی به تصادف انتخاب شده باشند، برگزینیم. با چه احتمالی

الف) دسته گل شامل ۲ نسترن و ۲ بنفشه است؟

ب) دسته گل شامل هیچ گل لاله و بنفشه ای نیست؟

پ) دسته گل شامل حداقل یک گل از هر یک از ۴ نوع گل است؟

(دقت کنید گل های هر نوع با هم فرقی نمی کنند!)

سوال ۲۵) الف) از یک مجموعه‌ی n عضوي، یک زیر مجموعه به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال آن که این زیر مجموعه k عضوي باشد چقدر است؟

ب) به کمک قسمت قبل ثابت کنید:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

سوال ۲۶)

سوال ۱) احتمال اینکه فردی به covid-19 مبتلا شود، در صورتی که ماسک نزند برابر 70% و در صورتی که ماسک بزند برابر 15% است. اگر این فرد به طور متوسط 5% مواقع ماسک بزند، احتمال کرونا گرفتن او چقدر است؟

سوال ۲۷) سوال ۲) دو تاس می اندازیم و جمع دو عدد رو آمده را یادداشت می کنیم.

الف) احتمال اینکه عدد رو آمده، زوج باشد چقدر است؟

ب) اگر جمع دو عدد رو آمده زوج باشد، با چه احتمالی بیشتر از ۸ است؟

سوال ۲۸) سوال ۳) از بین 2^n زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی $S = \{1, 2, \cdots, n\}$، دو زیر مجموعه به تصادف و مستقل از هم بر می داریم. اگر این دو زیر مجموعه، دارای اشتراک $\{1, 2\}$ باشند، احتمال آن که یکی از زیرمجموعه‌ها شامل عضوهای ۳، ۴ و ۵ باشد چقدر است؟ $(n \geq 5)$

سوال ۲۹) سوال ۴) سه جعبه در اختیار داریم. در جعبه‌ی ۱، ۱۰۰۰ لامپ موجود است که ۳ تای آنها معیوبند. جعبه‌ی ۲ شامل ۱۰ لامپ است که ۳ تای آنها معیوبند و در جعبه‌ی سوم هم ۳۰۰۰ لامپ وجود دارد که همگی سالمند. اگر یکی از این جعبه ها را به تصادف برگزیده و از داخل آن لامپی انتخاب کنیم،

الف) با چه احتمالی لامپ معیوب است؟

ب) اگر لامپ معیوب باشد، با چه احتمالی از جعبه‌ی ۲ انتخاب شده است؟

پ) اگر لامپ سالم باشد، با چه احتمالی از یکی از جعبه‌های ۱ یا ۲ انتخاب شده است؟

سوال ۳۰) سوال ۵) کشوری شامل دو استان ۱ و ۲ است. استان ۱، شامل ۶۰ مرد و ۴۰ زن و استان ۲ شامل ۶۵۰ زن و ۳۵۰ مرد است. در استان ۱، ۱۰ مرد و ۱۰ زن چشم آبی و در استان ۲، ۳۰ مرد و ۲۰ زن چشم آبی هستند. فردی را به تصادف از این کشور انتخاب می کنیم.

الف) اگر این فرد چشم آبی باشد، با چه احتمالی از استان ۱ انتخاب شده است؟

ب) اگر این فرد زن باشد، با چه احتمالی از استان ۲ انتخاب شده و چشم آبی نیست؟

پ) اگر فرد انتخاب شده مرد باشد، با چه احتمالی چشم آبی است؟

سوال ۳۱) از یک جعبه که دارای M گلوله‌ی سفید و $N-M$ گلوله‌ی سیاه است، n گلوله برداشته می‌شود.

الف) احتمال آنکه m گلوله از گلوله های برداشته شده سفید باشند در حالت با جایگذاری چقدر است؟

ب) احتمال آنکه m گلوله از گلوله های برداشته شده سفید باشند در حالت بدون جایگذاری چقدر است؟

ج) اگر بدانیم تمام گلوله های سفید برداشته شده اند، احتمال آنکه دقیقا ۲ گلوله‌ی سیاه نیز برداشته شده باشند چقدر است؟

سوال ۳۲) از مجموعه‌ی $S = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ دو زیر مجموعه به تصادف و به طور مستقل بر می‌گزینیم به گونه ای که احتمال آن که هر عضو S داخل هر یکی از زیر مجموعه ها باشد، مستقل از دیگر اعضا برابر p است. با چه احتمالی این دو زیرمجموعه ناسازگار هستند؟

سوال ۳۳) سکه ای را پرتاب می‌کنیم. اگر رو آمد، دو تاس را پرتاب کرده، جمع دو عدد روی تاس را یادداشت می کنیم. اگر سکه پشت آمد، یک تاس را پرتاب کرده و عدد آنرا یادداشت می کنیم. با چه احتمالی

الف) عدد یادداشت شده برابر ۳ است؟ ، **ب)** عدد یادداشت شده برابر ۸ است؟

سوال ۳۴) موارد زیر را در یک مسئله‌ی احتمالاتی تعریف کنید:

الف) فضای نمونه ، **ب)** پیشامد (واقعه) ، **پ)** پیشامد (واقعه‌ی) ساده

سوال ۳۵) آیا فضای نمونه در یک مسئله‌ی احتمالاتی، تنها مجموعه با احتمال یک است؟ پاسخ را برای هر دو حالتی که فضای نمونه متناهی یا نامتناهی باشد شرح دهید و در صورت لزوم، مثال بزنید.

سوال ۳۶) اگر A فضای نمونه‌ی آزمایش پرتاب سکه با رخدادهای پشت و رو و B فضای نمونه‌ی پرتاب تاس با اعداد طبیعی ۱ تا ۶ باشد:

الف) حاصلضرب دکارتی A و B ($A \times B$) را به دست آورید. این مجموعه، فضای نمونه‌ی چه آزمایشی است؟

ب) دو زیر مجموعه‌ی ۳ عضوی از مجموعه‌ی $A \times B$ برگزینید که با یکدیگر ناسازگار باشند. آیا می‌توانید همین کار را برای زیرمجموعه‌های ۷ عضوی تکرار کنید؟ چرا؟

سوال ۳۷) با بهره گیری از جبر مجموعه ها و اصول کولموگروف احتمال، نشان دهید اگر A، B و C سه مجموعه باشند به طوری که $P(B \cap C) = 0$ ، در این صورت

$$P\{A \cap (B \cup C)\} = P\{A \cap B\} + P\{A \cap C\}$$

سوال ۳۸) در یک جامعه، احتمال اینکه فردی به کرونا مبتلا باشد 0.07 و احتمال آن که به آنفلوآنزا مبتلا باشد 0.19 است. اگر ۲۰ درصد افراد این جامعه مبتلا به حداقل یکی از این دو بیماری باشند،

الف) چند درصد افراد به هر دو بیماری مبتلا هستند؟

ب) چند درصد افراد فقط به کرونا مبتلا هستند؟

سوال ۳۹) یک عدد از مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$ به تصادف بر می‌گزینیم. اگر تمام وقایع ساده هم شانس باشند و تعریف کنیم

$$A = \{2, 3, 5, 7\}$$
$$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

الف) مقدار $P(A)$ را بیابید.

ب) مجموعه‌های $A - B$ و $A \cap B$ را به دست آورده و مقادیر $P(A - B)$ و $P(A \cap B)$ را بیابید.

پ) تحقیق کنید

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$$

چه توجیهی برای پاسخ شما وجود دارد؟

سوال ۴۰) برای هر دو مجموعه‌ی A و B ثابت کنید:

$$P(A)+P(B)-\frac{1}{4\max\{1-P(A),1-P(B)\}} \leq P(A\cup B) \leq P(A)+P(B).$$

سوال ۴۱) در یک کتابخانه، سه کتاب فیزیک، دو کتاب رمان و چهار کتاب روان شناسی موجود است. مطلوبست تعداد حالات چیدن این کتاب ها در یک قفسه کنار هم چنانچه:

الف) تمام کتابهای هم نوع متمایز باشند (مثلا ترتیب دو کتاب رمان نسبت به هم مهم باشد).

ب) تمام کتابهای هم نوع نامتمایز باشند (مثلا ترتیب دو کتاب رمان نسبت به هم مهم نباشد).

سوال ۴۲) در یک گل فروشی، سه گل بنفشه، چهار گل رز و ۲ گل اقاقیا موجود است. به چند طریق می توان دسته گلی متشکل از ۳ گل از بین گل های موجود برگزید، اگر گلهای هم نوع نامتمایز باشند؟

سوال ۴۳) اعضای یک شرکت شامل ۱ مدیرعامل، ۲ منشی، ۱ حسابدار و ۵ نفر از سایر اعضای هیئت مدیره در یک میزگرد دارای ۱۱ صندلی می‌نشینند. مطلوبست تعداد حالاتی که

الف) هر دو منشی کنار هم باشند.

ب) هیچ یک از اعضای هیئت مدیره (به جز مدیرعامل)، مجاور مدیرعامل نباشد.

پ) حسابدار کنار مدیرعامل بنشیند و تمام اعضای هیئت مدیره (به جز مدیرعامل) کنار هم باشند.

(راهنمایی: برای حل این سوال، به تمایز یا عدم تمایز اعضای هیئت مدیره یا منشی ها دقت کنید. آیا منطقی است متمایز باشند یا نباشند؟ همچنین دقت کنید که همواره دو صندلی از میزگرد خالی می مانند و باید در شمارش حالات محاسبه شوند.)

سوال ۴۴) در کیسه ای، ۱۰ توپ آبی و ۷ توپ قرمز موجود است. دو توپ به تصادف و بدون جایگذاری بر می‌داریم.

الف) اگر توپهای همرنگ نامتمایز باشند، تعداد حالات برداشتن دو توپ غیرهمرنگ چقدر است؟

ب) اگر توپهای همرنگ نامتمایز باشند، احتمال برداشتن دو توپ غیرهمرنگ چقدر است؟

پ) اگر توپهای آبی را از ۱ تا ۱۰ و توپهای قرمز را از ۱ تا ۷ شماره گذاری کنیم، احتمال آنکه توپ آبی شماره ۴ و توپ آبی شماره ۳ برداشته شود چقدر است؟

ت) اگر توپهای آبی را از ۱ تا ۱۰ و توپهای قرمز را از ۱ تا ۷ شماره گذاری کنیم، آیا احتمال برداشتن دو توپ غیرهمرنگ، با مقدار بدست آمده در قسمت الف تفاوت می‌کند؟ توضیح دهید.

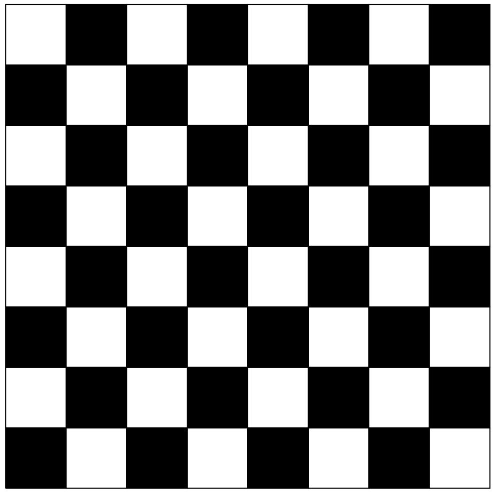
سوال ۴۵) قسمتهای ب)، پ) و ت) مسئله‌ی پیش را با فرض داشتن جایگذاری حل کنید؛ یعنی زمانی که توپ اول را برداشتیم، رنگ آن را یادداشت کرده، آنرا به کیسه بازگردانده و سپس توپ دوم را بر می‌داریم.

سوال ۴۶) نقطه‌ای را از داخل مربع به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه فاصله‌ی این نقطه تا مرکز مربع، از فاصله‌ی این نقطه تا هر یک از رئوس مربع بیشتر باشد چقدر است؟

سوال ۴۷) الف) در یک صفحه‌ی شطرنجی ۸ در ۸، یک مهره‌ی رخ سفید به تصادف در یکی از خانه‌های این صفحه قرار می‌گیرد. سپس، یک مهره‌ی رخ سیاه را به تصادف در یکی از خانه‌های این صفحه قرار می‌دهیم. با چه احتمالی، رخ سیاه در معرض حمله‌ی رخ سفید قرار می‌گیرد؟ (حرکت رخ، به صورت افقی یا عمودی در صفحه است)

ب) یک مهره‌ی شاه سفید، در یکی از گوشه‌های یک صفحه‌ی شطرنجی ۸ در ۸ قرار دارد. دو رخ سیاه به تصادف در دو خانه‌ی این صفحه قرار می‌گیرند. با چه احتمالی، شاه سفید مات

می‌شود؟ (مات شدن شاه، زمانی اتفاق می‌افتد که نوبت حرکت شاه بوده و با هر حرکت، در معرض حمله‌ی یکی از مهره‌های دشمن قرار گیرد)



سوال ۴۸) از مجموعه‌ی زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$، دو زیرمجموعه‌ی متمایز به تصادف انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی، این دو زیرمجموعه ناسازگارند؟

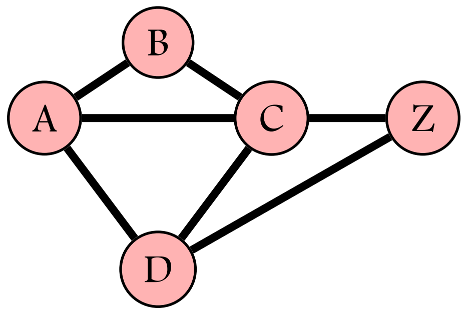
سوال ۴۹) یک سکه‌ی سالم را پرتاب می‌کنیم. اگر رو بیاید، یک تاس را پرتاب کرده و عدد روی آن را یادداشت می‌کنیم. اگر سکه پشت بیاید، دو تاس را پرتاب کرده و جمع اعداد دو تاس را یادداشت می‌کنیم. احتمال آنکه عدد رو آمده برابر n باشد چقدر است؟ ($2 \leq n \leq 12$)

سوال ۵۰) از کیسه‌ای که شامل ۷ توپ سیاه و ۱۰ توپ سفید است، ۳ توپ به تصادف بیرون می‌آوریم. سپس از بین ۳ توپ بیرون آمده، یکی را به تصادف برمی‌گزینیم. اگر بدانیم حداقل یک توپ از ۳ توپ بیرون آمده سیاه است، احتمال آنکه توپ انتخابی از بین این ۳ توپ، سفید باشد چقدر است؟

سوال ۵۱) دو کیسه در اختیار داریم. کیسه‌ی ۱ شامل ۷ توپ سیاه و ۱۰ توپ سفید و کیسه‌ی ۲ شامل ۴ توپ سیاه، ۲ توپ سفید و ۳ توپ قرمز است. ابتدا یکی از کیسه‌ها را به تصادف

انتخاب کرده و سپس، توپی از آن به تصادف بیرون می‌آوریم. اگر بدانیم توپ انتخابی سفید نیست، با چه احتمالی از کیسه‌ی ۲ انتخاب شده است؟

سوال ۵۲) فرض کنید در نقشه‌ی زیر قصد داریم از شهر A به شهر Z برویم. هر یک از ۷ لینک نقشه‌ی زیر، با احتمال p مستقل از سایر لینک ها سالم هستند. احتمال آن که مسیر سالمی از A تا Z وجود داشته باشد چقدر است؟



فصل ۲

آزمایش های تکراری

سوال ۵۳) تاس سالمی را ۳ بار پرتاب می کنیم و اعداد رو آمده در سه پرتاب را در نظر می گیریم. احتمال آن که جمع اعداد رو آمده برابر ۵ باشد چقدر است؟

سوال ۵۴) تاس سالمی را ۳ بار پرتاب می کنیم و اعداد رو آمده در سه پرتاب را در نظر می گیریم. اگر عدد رو آمده‌ی اول برابر ۴ باشد، احتمال آن که جمع اعداد پرتاب ها برابر ۷ باشد چقدر است؟

سوال ۵۵) تاس سالمی را ۳ بار پرتاب می کنیم و اعداد رو آمده در سه پرتاب را در نظر می گیریم. احتمال آن که جمع اعداد تاس در پرتاب های فرد، برابر ۵ باشد چقدر است؟

سوال ۵۶) تاس سالمی را ۴ بار پرتاب می کنیم و اعداد رو آمده در چهار پرتاب را در نظر می گیریم. اگر در دو پرتاب این تاس عدد ۲ ظاهر شده باشد، احتمال آنکه در دو پرتاب دیگر عدد فردی ظاهر شده باشد چقدر است؟

سوال ۵۷) تاس سالمی را ۴ بار پرتاب می کنیم و اعداد رو آمده در چهار پرتاب را در نظر می گیریم. با چه احتمالی، جمع اعداد در پرتاب های زوج، ۵ برابر جمع اعداد در پرتاب های فرد است؟

سوال ۵۸) سکه‌ی سالمی را ۱۰ بار پرتاب می کنیم. مطلوبست احتمال آن که

الف) در این ۱۰ پرتاب، حداقل دوبار رو بیاید.

ب) در سه پرتاب اول حداکثر یک بار پشت بیاید.

پ) در پرتاب های زوج، نتیجه یکسان باشد (همگی رو یا همگی پشت باشند).

سوال ۵۹) الف) اگر یک رشته لامپ متوالی شامل n لامپ که هر لامپ به احتمال p خراب است، به ولتاژ برق وصل شود، با چه احتمالی روشن می شود؟ (در رشته متوالی لامپ ها، لامپ ها به صورت پشت سر هم به یکدیگر وصل شده اند)

ب) اگر رشته لامپ موازی باشد، مسئله را حل کنید. (در رشته‌ی موازی لامپ ها، یکی از سرهای همه‌ی لامپ ها به یک نقطه و سر دیگر تمام لامپ ها به نقطه‌ی دیگر وصل شده اند)

سوال ۶۰) الف) قضیه‌ی دموآو–لاپلاس در چه حالتی برای تکرر توزیع برنولی به تعداد n بار برقرار است؟

ب) توزیع دوجمله ای را با پارامترهای $n = 1000$ و $p = 0.5$ در نظر بگیرید. به کمک ماشین حساب یا کامپیوتر، خطای نسبی تقریب قضیه‌ی دموآو–لاپلاس را برای $k = 1, 300, 490$ محاسبه کنید.

سوال ۶۱) سوال ۵)

دو تیم ورزشی A و B در یک بازی در ۹ دست با هم روبرو می شوند و نتیجه‌ی هر دست فقط برد یکی از دو تیم می تواند باشد. فرض کنید تیم A با احتمال p در هر دست پیروز می شود و نتیجه‌ی دست ها مستقل از هم است. برنده‌ی بازی کسی است که بیشتر بازی ها را برده باشد.

الف) با چه احتمالی تیم A پس از ۶ بازی موفق به بردن بازی می شود؟

ب) اگر بدانیم تیم A در نهایت بازی را برده است، با چه احتمالی در حداقل یک دست به تیم B باخته است؟

ج) به ازای $p = 0.5$، اگر بدانیم تیم A دست اول را برده، با چه احتمالی بازی را می برد؟

سوال ۶۲) سوال ۶)

در یک امتحان، احتمال درست پاسخ دادن به یک سوال دو گزینه ای برابر p است. پس از امتحان، n دانشجو پاسخ های خود را با هم مقایسه می کنند و متوجه می شوند که همگی به آن سوال پاسخ یکسانی داده اند. با چه احتمالی تمام این n دانشجوها به پاسخ درست رسیده اند؟

سوال ۶۳) سوال ۱) یک سکه‌ی سالم را ۷بار پرتاب می کنیم.

الف) احتمال اینکه نتیجه‌ی پرتاب اول و آخر برابر باشد چقدر است؟

ب) با چه احتمالی حداقل دو رو و سه پشت در این ۷ پرتاب خواهیم داشت؟

پ) اگر نتیجه پرتاب سکه در سه پرتاب اول یکسان باشد، با چه احتمالی در این ۷ پرتاب، در مجموع دقیقا ۴ بار سکه رو می آید؟

سوال ۶۴) سوال ۲) یک تاس سالم را ۵ بار پرتاب می کنیم.

الف) اگر جمع پنج عدد رو آمده در این پنج پرتاب را در نظر بگیریم، با چه احتمالی این مجموع برابر ۷ است؟

ب) با چه احتمالی عدد رو آمده در پرتاب پنجم برابر جمع اعداد رو آمده در ۴ پرتاب قبلی خواهد بود؟

سوال ۶۵) سوال ۳) بزرگراه ۸ بانده ای را در نظر بگیرید که از هر باند آن در هر لحظه حداکثر یک ماشین می‌تواند عبور کند. اگر ۹ ماشین هر یک با احتمال p وارد بزرگراه شوند،

الف) با چه احتمالی همه‌ی ماشین های وارد شده به بزرگراه بدون مشکل از آن رد می‌شوند؟

ب) p چقدر باشد تا احتمال قسمت الف بیشتر از 0.99 باشد؟

سوال ۶۶) سوال ۴) دو تیم ورزشی A و B در یک بازی در ۹ دست با هم روبرو می شوند و نتیجه‌ی هر دست فقط برد یکی از دو تیم می تواند باشد. فرض کنید تیم A با احتمال p در هر دست پیروز می شود و نتیجه‌ی دست ها مستقل از هم است. برنده‌ی بازی کسی است که بیشتر بازی ها را برده باشد.

الف) با چه احتمالی تیم A پس از ۶ دست موفق به بردن بازی می شود؟

ب) اگر بدانیم تیم A در نهایت بازی را برده است، با چه احتمالی در حداقل یک دست به تیم B باخته است؟

ج) به ازای $p = 0.5$، اگر بدانیم تیم A دست اول را برده، با چه احتمالی بازی را می برد؟

سوال ۶۷) سوال ۵) یک سکه‌ی سالم n بار پرتاب شده و k بار رو آمده است. کوچکترین مقدار n را بیابید به گونه‌ای که

$$P\left\{0.49 \leq \frac{k}{n} \leq 0.51\right\} > 0.95$$

سوال ۶۸) سوال ۶) بزرگراه 8 بانده ای را در نظر بگیرید که از هر باند آن در هر لحظه حداکثر یک ماشین می‌تواند عبور کند. اگر 9 ماشین هر یک دارای احتمال ورود به بزرگراه p باشند،

الف) با چه احتمالی همه‌ی ماشین های وارد شده به بزرگراه بدون مشکل از آن رد می‌شوند؟

ب) p چقدر باشد تا احتمال قسمت الف کمتر از 0.002 باشد؟

سوال ۷) یک سکه‌ی سالم n بار پرتاب شده و k بار رو آمده است. کوچکترین مقدار n را

بیابید به گونه ای که
$$P\left\{0.49 \leq \frac{k}{n} \leq 0.51\right\} > 0.95$$

سوال ۶۹) به کمک یک ماشین حساب یا کامپیوتر، مقادیر $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ و $e^{-np}\frac{(np)^k}{k!}$ را به ازای حالت های مختلف n و p محاسبه کرده و خطای تقریب پواسون را به دست آورید.

الف) $n = 10 \quad , \quad p = 0.7 \quad , \quad k = 7$

ب) $n = 30 \quad , \quad p = 0.3 \quad , \quad k = 9$

پ) $n = 50 \quad , \quad p = 0.02 \quad , \quad k = 1$

در کدام حالت تقریب پواسون، خطای کمتری دارد و چرا؟

سوال ۷۰) تاس سالمی را ۳ بار پرتاب می‌کنیم (احتمال رو آمدن هر عدد از ۱ تا ۶، برابر $\frac{1}{6}$ است).

الف) احتمال آنکه از این ۳ بار، حداقل ۲ بار عدد زوج بیاید چقدر است؟

ب) احتمال آنکه مجموع اعداد رو آمده در این ۳ پرتاب برابر ۵ باشد، چقدر است؟

پ) احتمال رو آمدن مضرب ۳ در پرتاب اول چقدر است؟

سوال ۷۱) سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر رو آمد، آن را ۹ بار دیگر پرتاب می‌کنیم و نتایج ۱۰ پرتاب را در نظر می‌گیریم. اگر پشت آمد، آن را ۵ بار دیگر پرتاب می‌کنیم و نتایج ۶ پرتاب را در نظر می‌گیریم. احتمال آن که در تمام پرتاب های سکه، دقیقا ۶ بار رو بیاید چقدر است؟

سوال ۷۲) یک آزمایش برنولی را که احتمال موفقیت در آن برابر 40% است، n بار تکرار می‌کنیم. اگر k، برابر تعداد موفقیت‌ها در این پرتاب ها باشد، n حداقل چقدر باشد تا احتمال رخداد $\{38\% < \frac{k}{n} < 42\%\}$ بیش از 70% باشد؟

(راهنمایی: از قضیه‌ی دموآور-لاپلاس استفاده نمایید.)

(جدول مربوط به محاسبه‌ی تابع $G^{-1}(x)$ در صفحه‌ی بعد آمده است.)

$G^{-1}(x)$	x	$G^{-1}(x)$	x	$G^{-1}(x)$	x	$G^{-1}(x)$	x
0.7063	0.76	0.0251	0.51	-0.6433	0.26	-2.3263	0.01
0.7388	0.77	0.0502	0.52	-0.6128	0.27	-2.0537	0.02
0.7722	0.78	0.0753	0.53	-0.5828	0.28	-1.8808	0.03
0.8064	0.79	0.1004	0.54	-0.5534	0.29	-1.7507	0.04
0.8416	0.80	0.1257	0.55	-0.5244	0.30	-1.6449	0.05
0.8779	0.81	0.1510	0.56	-0.4959	0.31	-1.5548	0.06
0.9154	0.82	0.1764	0.57	-0.4677	0.32	-1.4758	0.07
0.9542	0.83	0.2019	0.58	-0.4399	0.33	-1.4051	0.08
0.9945	0.84	0.2275	0.59	-0.4125	0.34	-1.3408	0.09
1.0364	0.85	0.2533	0.60	-0.3853	0.35	-1.2816	0.10
1.0803	0.86	0.2793	0.61	-0.3585	0.36	-1.2265	0.11
1.1264	0.87	0.3055	0.62	-0.3319	0.37	-1.1750	0.12
1.1750	0.88	0.3319	0.63	-0.3055	0.38	-1.1264	0.13
1.2265	0.89	0.3585	0.64	-0.2793	0.39	-1.0803	0.14
1.2816	0.90	0.3853	0.65	-0.2533	0.40	-1.0364	0.15
1.3408	0.91	0.4125	0.66	-0.2275	0.41	-0.9945	0.16
1.4051	0.92	0.4399	0.67	-0.2019	0.42	-0.9542	0.17
1.4758	0.93	0.4677	0.68	-0.1764	0.43	-0.9154	0.18
1.5548	0.94	0.4959	0.69	-0.1510	0.44	-0.8779	0.19
1.6449	0.95	0.5244	0.70	-0.1257	0.45	-0.8416	0.20
1.7507	0.96	0.5534	0.71	-0.1004	0.46	-0.8064	0.21
1.8808	0.97	0.5828	0.72	-0.0753	0.47	-0.7722	0.22
2.0537	0.98	0.6128	0.73	-0.0502	0.48	-0.7388	0.23
2.3263	0.99	0.6433	0.74	-0.0251	0.49	-0.7063	0.24
3.7190	0.9999	0.6745	0.75	0.0000	0.50	-0.6745	0.25

سوال ۷۳)

یک سکه‌ی سالم را ۱۰ بار پرتاب می‌کنیم.

الف) احتمال آن که دقیقا ۳ بار شیر بیاید چقدر است؟

ب) احتمال آن که دست کم ۲ بار خط بیاید چقدر است؟

پ) اگر بدانیم در ۵ پرتاب اول خط آمده است، احتمال آن که در کل، دقیقا ۷ بار خط آمده باشد چقدر است؟

سوال ۷۴)

یک تاس سالم را ۶ بار پرتاب می‌کنیم.

الف) احتمال آن که جمع اعداد رو آمده در ۶ پرتاب برابر ۸ باشد چقدر است؟

ب) احتمال آن که در این ۶ پرتاب، تمام اعداد ۱ تا ۶ ظاهر شوند چقدر است؟

سوال ۷۵)

از کیسه‌ای که شامل ۷ توپ آبی و ۳ توپ سفید است، ۱ توپ به تصادف برداشته، رنگ آن را یادداشت کرده و دوباره به کیسه بر می‌گردانیم. اگر این کار را ۱۱ بار انجام دهیم، احتمال آن که از این ۱۱ بار دقیقاً در ۷ مرتبه، توپ آبی بیرون آمده باشد چقدر است؟

سوال ۷۶)

یک کانال مخابراتی دارای ظرفیت ۲۵ گیگابیت بر ثانیه است. در مجموع، ۱۲ کاربر قصد استفاده از این کانال برای ارسال داده‌ی خود را دارند که هر کاربر، 2.5 گیگابیت بر ثانیه از کانال را اشغال می‌کند و احتمال فعال بودن او، مستقل از سایرین برابر $p = 0.6$ است. با چه احتمالی، برای تخصیص کانال به کاربران فعال، دچار کمبود ظرفیت کانال نخواهیم شد؟

سوال ۷۷)

یک آزمایش برنولی را که احتمال موفقیت در آن برابر $\frac{1}{3}$ است، n بار تکرار می‌کنیم. اگر k تعداد موفقیت ها در n آزمایش باشد، n حداقل چقدر باشد تا احتمال رخداد $\{\frac{97}{300} < \frac{k}{n} < \frac{103}{300}\}$ برابر 99% باشد؟

سوال ۷۸)

با استفاده از قضیه‌ی تقریب پواسن، کمیت های $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ و $e^{-np}\frac{(np)^k}{k!}$ را به ازای مقادیر مختلف داده شده برای n، p و k محاسبه کرده و خطای نسبی را در هر مورد به دست آورید. از مقایسه‌ی خطاهای نسبی چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

الف) $k = 3 \quad , \quad p = 0.01 \quad , \quad n = 300$

ب) $k = 24 \quad , \quad p = 0.8 \quad , \quad n = 30$

فصل ۳

متغیرهای تصادفی

سوال۷۹) برای هریک از توابع چگالی احتمال داده شده‌ی زیر،

$$f(x) = \begin{cases} k\delta(x+1) & , \quad x=-1 \\ x-x^2 & , \quad 0<x<1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases} , \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\delta(x) & , \quad x=0 \\ \frac{3}{32}\sqrt{x-1} & , \quad 1\le x\le k \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} k\delta(x+1) & , \quad x=-1 \\ \frac{1}{2}e^{-x+1} & , \quad x\ge 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases} , \quad f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\delta(x+3) & , \quad x=-3 \\ \frac{1}{2}\sin x & , \quad 0\le x\le k \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\delta(x+1) & , \quad x=-1 \\ \frac{1}{x^3} & , \quad x\ge k \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

الف) مقدار k را بیابید.

ب) تابع توزیع تجمعی را بیابید.

پ) مقدار احتمال $\Pr\{X^2\le 4\}$ را به دست آورید.

سوال ۸۰) فرض کنید متغیر تصادفی X، یکنواخت در بازه‌ی $[0,1]$ است. متغیر تصادفی Y را به صورت $Y = g(X)$ می سازیم. تابع g را به گونه ای تعیین کنید که Y:

الف) یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر ۱ باشد؛ یعنی

$$f(y) = \begin{cases} e^{-y} & , \quad y > 0 \\ 0 & , \quad y \leq 0 \end{cases}$$

ب) یک متغیر تصادفی کوشی با پارامتر π باشد؛ یعنی

$$f(y) = \frac{1}{y^2 + \pi^2} \quad , \quad y \in \mathbb{R}$$

سوال ۸۱) متغیر تصادفی و گسسته‌ی N دارای چگالی احتمال زیر است:

$$f(n) = \begin{cases} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} & , \quad n \in \mathbb{N} \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

الف) تابع مولد گشتاور آن را به دست آورید.

ب) از روی تابع مولد گشتاور، مقادیر میانگین و واریانس این متغیر تصادفی را محاسبه کنید.
(راهنمایی:

$$\sum_{n=1}^{\infty} na^n = \frac{a}{(1-a)^2} \quad , \quad |a| < 1$$

)

سوال ۸۲) فرض کنید برای یک متغیر تصادفی با چگالی توزیع $f(x)$ داشته باشیم

$$\exists a \in \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = f(a-x)$$

نشان دهید میانگین و میانه‌ی این متغیر تصادفی برابر a است.

سوال ۸۳) متغیر تصادفی X با تابع توزیع تجمعی زیر داده شده است:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x+1}{2}e^{-x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

در این صورت

الف) تابع مولد گشتاور آن را به دست آورید.

ب) میانگین و واریانس این متغیر تصادفی را بیابید.

سوال ۸۴) نشان دهید که اگر به ازای هر t_0 و t_1 مثبتی داشته باشیم

$$\Pr\{t_0 \leq t \leq t_0 + t_1 | t \geq t_0\} = \Pr\{t \leq t_1\}$$

آنگاه

$$\Pr\{t \leq t_1\} = 1 - e^{-ct_1}$$

سوال ۸۵) کدام یک از توابع زیر می توانند تابع توزیع تجمعی یه متغیر تصادفی پیوسته باشند؟ در این حالت، محدوده‌ی مقادیر مناسب k را معین کنید.

الف) $F(x) = \begin{cases} \frac{kx}{1+x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$

ب) $F(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x > 0 \\ k & , \quad x = 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$

پ) $F(x) = \frac{e^x + k}{e^x + 1}$

ت) $F(x) = \begin{cases} k + xe^{-x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$

سوال ۸۶) سوال ۳) اگر تابع توزیع تجمعی یک متغیر تصادفی به صورت

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

باشد، مقدار میانه (Median) را محاسبه کنید.

سوال ۸۷) برای هر یک از توابع توزیع تجمعی زیر، مقدار $P(X = 1)$ چقدر است؟

الف) $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3-x} & , \quad x < 1 \\ \frac{3x}{3x+1} & , \quad x \geq 1 \end{cases}$

ب) $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3-x} & , \quad x < 1 \\ \frac{x}{x+1} & , \quad x \geq 1 \end{cases}$

سوال ۸۸) اگر متغیر تصادفی X دارای چگالی احتمال $f(x)$ و تابع توزیع تجمعی $F(x)$ باشد، چگالی احتمال و توزیع تجمعی هر یک از متغیر های تصادفی زیر چه خواهد بود؟

الف) $X + 1$

ب) $2X$

پ) $-X$

ت) X^2

سوال ۸۹) سوال ۱) فرض کنید تابع توزیع تجمعی یک متغیر تصادفی گسسته به صورت های زیر داده شده باشد:

الف) $F(n) = \Pr\{X \leq n\} = \begin{cases} 1 & , \quad n > b \\ \frac{n-a+1}{b-a+1} & , \quad a \leq n \leq b \\ 0 & , \quad n < a \end{cases}$ ؛ زمانی که $b \geq a$

ب) $F(n) = \begin{cases} 1-A^{n+1} & , \quad n \geq 0 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$ زمانی که $0 < A < 1$

کمیت $f(n) = F(n) - F(n-1)$ را محاسبه کرده و سپس $\sum_{n=-\infty}^{\infty} nf(n)$ را برای این دو توزیع به دست آورید.

سوال ۹۰) توابع توزیع تجمعی و پیوسته‌ی زیر را در نظر بگیرید:

الف) $F(x) = \begin{cases} 1-e^{-\frac{1}{\lambda}x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$ زمانی که $\lambda > 0$

ب) $F(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \geq b \\ \frac{x-a}{b-a} & , \quad a < x < b \\ 0 & , \quad x \leq a \end{cases}$ زمانی که $b > a$

ج) $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$ که μ و σ^2 دو مقدار حقیقی هستند و $\sigma^2 \neq 0$

کمیت $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ را محاسبه کرده و از روی آن، $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ را برای این سه توزیع به دست آورید.

سوال ۹۱) (بی حافظگی توزیع نمایی) طول عمر یک یخچال از توزیع نمایی زیر پیروی می کند:

$$f_X(x) = \frac{1}{20} e^{-\frac{1}{20}x}$$

که x طول عمر یخچال بر حسب سال است. یخچال دست دومی که پس از ۱۵ سال کارکرد، همچنان سالم است به همراه یخچال نویی که از بازار خریداری شده مفروضند. احتمال خرابی هر یک از آنها دقیقا در ۱۰ سال آینده چقدر است؟

سوال ۹۲) منحنی تابع $y = Ax^2+2Bx+C$ را در نظر بگیرید که در آن A، B و C متغیرهای

تصادفی مستقل و دارای توزیع زیر هستند:

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & , \quad 1 < x < e \\ 0 & , \quad \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

الف) با چه احتمالی این منحنی از سه ربع از چهار ربع مختصات می گذرد؟

ب) با چه احتمالی این منحنی از هر چهار ربع مختصات می گذرد؟

سوال ۹۳) در پرتاب دو تاس سالم، اگر متغیر تصادفی X را برابر تعداد اعداد زوج رو آمده در هر دو تاس در نظر بگیریم:

الف) فضای شدنی مسئله (Ω) را بیابید.

ب) مقدار $\Pr\{X \leq 1.5\} - \Pr\{X \leq 0.5\}$ را بیابید و با $\Pr\{X = 1\}$ مقایسه کنید. میزان تفاوت دو مقدار فوق را توضیح دهید.

پ) PMF این متغیر تصادفی را به دست آورید.

سوال ۹۴) فرض کنید یک سکه سالم را n بار پرتاب کرده ایم. در اینصورت PMF متغیر تصادفی X را در حالت های زیر بیابید.

الف) متغیر تصادفی X برابر تعداد روها در پرتاب های زوج است.

ب) متغیر تصادفی X برابر جمع تعداد روها در ۲ پرتاب اول و تعداد پشت ها در ۲ پرتاب آخر است $(n > 4)$.

پ) متغیر تصادفی X دو مقدار ۰ و ۱ را اختیار می کند و مقدار آن ۱ است هنگامی که تعداد روها و پشت ها با هم برابر باشد و ۰ در غیر اینصورت.

سوال ۹۵) برای هر یک از توزیع های زیر، میانگین و واریانس را به دست آورید.

الف) $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , \quad a < x < b \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

ب)
$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}} & , \quad x>0\\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

پ)
$$f(n)=\begin{cases}p & , \quad n=0\\ 1-p & , \quad n=1\\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

ت)
$$f(n)=\begin{cases}e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^n}{n!} & , \quad n\geq 0\\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

سوال ۹۶) از دو جامعه ی آماری بزرگ، یک آزمون علمی ۱۰۰ نمره ای گرفته شده است. مشاهده شده که نمرات افراد این دو جامعه، به ترتیب از دو توزیع گوسی با میانگین های ۵۹ و ۷۳ و واریانس های ۹ و ۱۶ پیروی می کند.

الف) کدام یک از این دو جامعه به طور متوسط دارای سطح علمی بالاتری است؟ چرا؟

ب) افراد کدام جامعه دارای سطح علمی نزدیک تری به یکدیگر هستند؟ (یا به عبارت دیگر، هم سطح ترند؟) چرا؟

سوال ۹۷) الف) آیا چگالی احتمال یک متغیر تصادفی می تواند تابعی فرد باشد؟ توضیح دهید.

ب) گشتاور مرتبه n−ام یک متغیر تصادفی یکنواخت در بازه‌ی $[a,b]$ را به دست آورید.

سوال ۹۸) الف) برای هر متغیر تصادفی X و $s>0$ تحقیق کنید

$$\Pr\{X\geq a\}=\Pr\{e^{sX}\geq e^{sa}\}$$

ب) به کمک نامساوی مارکوف ثابت کنید:

$$\Pr\{X\geq x\}\leq e^{-sx}\Phi_X(s)$$

سوال ۹۹) تعیین کنید به ازای چه مقادیری از k هر یک از توابع زیر می تواند CDF یک متغیر

تصادفی باشد.

الف) $$F(x) = \begin{cases} 1-e^{-kx^2} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

ب) $$F(x) = \begin{cases} kx & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & , \quad x > 1 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

پ) $$F(x) = \begin{cases} k-e^{x-x^2} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

ت) $F(x) = \frac{e^x}{e^x+k}$

ث) $F(x) = \cos\frac{\pi}{e^x+k}$

سوال ۱۰۰) اگر $F(x)$ تابع توزیع تجمعی یک متغیر تصادفی پیوسته باشد، کدام یک از توابع زیر می‌توانند تابع توزیع تجمعی یک متغیر تصادفی باشند؟ (راهنمایی: از خواص CDF بهره بگیرید.)

الف) $F(x^2)$

ب) $F(x^3)$

پ) $1-F(-x)$

ت) $F^n(x)$ برای هر مقدار طبیعی از n

ث) $\sin\left[\frac{\pi}{2}F(x)\right]$

سوال ۱۰۱) برای هر یک از CDF های سوال ۱، مقدار $\Pr\{1 < X \leq 2\}$ را بیابید.

سوال ۱۰۲) تعیین کنید به ازای چه مقادیری از k هر یک از توابع زیر می تواند pdf یک متغیر تصادفی باشد.

الف) $f(x) = \begin{cases} 1/x^k & , \quad x \geq 1 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$

ب) $f(x) = \begin{cases} kxe^{-x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$

پ) $f(x) = \begin{cases} \sin x & ,0 \leq x \leq k \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$ $(k > 0)$

ت) $f(x) = \begin{cases} k\delta(x-1) & , \quad x = 1 \\ x & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$ (به عبارت دیگر، تابع در نقطه‌ی $x = 1$ دارای ضربه‌ای به مساحت k است)

ث) $f(x) = k\delta(x-1) + (1-k)\delta(x)$

سوال ۱۰۳) یک سامانه دارای ۷۰ قطعه است. پیشامد اینکه هر قطعه پس از شروع به کار در زمان ۰، در بازه‌ی $(0, x)$ دچار خرابی گردد، یک متغیر تصادفی با PDF زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{T}e^{-\frac{x}{T}} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

احتمال آن را بیابید که بیش از ۶۵ قطعه از این سیستم در بازه‌ی $\left(0, \frac{T}{4}\right)$ دچار خرابی نشوند.

سوال ۱۰۴) برای هریک از PDF های سوال ا، مقدارهای $\Pr\{X = 1\}$ و $\Pr\left\{X < \frac{1}{2}\right\}$ را بیابید (پاسخ می تواند شامل ثابت k باشد).

سوال ۱۰۵) اگر x_u ، صدک$-u$ متغیر تصادفی X باشد، در این صورت مقدار x_u را به ازای $u = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ برای حالت های زیر به دست آورید.

الف) X یک متغیر تصادفی با PDF زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

ب) X یک متغیر تصادفی با PDF زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & , \quad x \ge 0 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

سوال ۱۰۶) سوال ۱) زمان خرابی یک لامپ، یک متغیر تصادفی با pdf زیر است:

$$f_X(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} \quad , \quad x > 0$$

الف) احتمال آن که این لامپ، به مدت حداکثر 2λ عمر کند، چقدر است؟

ب) احتمال آن که این لامپ بیش از 3λ و کمتر از 3.5λ عمر کند چقدر است؟

سوال ۱۰۷) سوال ۲) یک متغیر تصادفی دارای چگالی احتمال زیر است:

$$f_X(x) = \begin{cases} 6x^2(1-x) & , \quad 0 \le x \le 1 \\ k\delta(x+1) & , \quad x = -1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

به عبارت دیگر، PDF دارای ضربه ای به اندازه k در $x = -1$ است.

الف) مقدار k را بیابید.

ب) CDF را به دست آورید و آن را رسم کنید.

پ) مقدار احتمال های $\Pr\{-2 < X \le \frac{1}{2}\}$ و $\Pr\{0 < X \le \frac{1}{2}\}$ چقدر است؟

سوال ۱۰۸) سوال ۳) فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع یکنواخت بین ۰ و ۱ است. در این صورت، CDF و PDF هر یک از متغیرهای تصادفی زیر را بیابید.

الف) $Y = X^2$

ب) $Y = -\ln(1-X)$

پ) $Y = \tan \pi(X - \frac{1}{2})$

سوال ۱۰۹) سوال ۴) برای قسمت پ سوال پیش، مقدار احتمال های $\Pr\{X \leq \frac{2}{3}\}$ و $\Pr\{Y \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\}$ را از روی PDF های X و Y بیابید و با هم مقایسه کنید. نتیجه مقایسه را توضیح دهید.

سوال ۱۱۰) سوال ۵) اگر CDF متغیر تصادفی X را با $F(x)$ نشان دهیم، CDF متغیرهای تصادفی زیر را برحسب $F(x)$ دست آورید.

الف) $Y = |X|$ 　　　ب) $Y = \begin{cases} 0 & , \quad X \leq 0 \\ 1 & , \quad X > 0 \end{cases}$ 　　　پ) $Y = X^2 - 2X$

سوال ۱۱۱) تابع جرم احتمال متغیر تصادفی X دارای خاصیت زیر است:

$$6\Pr\{X = k+2\} - 5\Pr\{X = k+1\} + \Pr\{X = k\} = 0 \quad , \quad k = 1, 2, \cdots$$

همچنین $\Pr\{X = 1\} = \frac{7}{12}$. در این صورت، چگالی جرم احتمال متغیر X را بیابید.

سوال ۱۱۲) متغیر تصادفی X دارای چگالی احتمال زیر است:

$$f(x) = \frac{a}{2}e^{-ax} + \frac{1}{2}e^{-x} \quad , \quad x > 0.$$

مقدار a را به گونه ای بیابید به طوری که $\mathbb{E}\{X\} = 5$.

فصل ۴

متغیرهای تصادفی توأم

سوال ۱۱۳) تابع چگالی احتمال توام دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر است:

$$f(x,y) = \begin{cases} k(4-x-y) & , \quad 1 < x < 2 \ , \ 0 < y < 2 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

الف) مقدار مناسب k را بیابید.

ب) با مقدار k به دست آمده در قسمت قبل، مقدار $\mathbb{E}\{XY\}$ را به دست آورید.

سوال ۱۱۴) تابع چگالی احتمال توام دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر است:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & , \quad |x| + 2|y| < 1 \\ 0 & , \quad |x| + 2|y| \geq 1 \end{cases}$$

الف) چگالی های احتمال حاشیه ای X و Y را به دست آورید. همچنین ناهمبستگی، استقلال و تعامد این دو متغیر تصادفی را تحقیق کنید.

ب) چگالی احتمال $X+Y$ را به دست آورید.

سوال ۱۱۵) یک قطار و اتوبوس به طور تصادفی و مستقل از هم بین ساعات ۵ تا ۶ وارد یک ایستگاه می شوند. فردی نیز به طور تصادفی بین ساعت ۵ تا $5:30$ وارد همان ایستگاه

می شود.

الف) احتمال آن که فرد بیش از ۱۰ دقیقه منتظر قطار و اتوبوس شود چقدر است؟

ب) اگر قطار و اتوبوس هر یک ۱۰ دقیقه در ایستگاه تاخیر داشته باشند، احتمال با هم بودن آنها در ایستگاه چقدر است؟

پ) اگر فرد پس از ساعت $5:15$ به ایستگاه برسد، با چه احتمالی به هیچ یک نمی رسد؟

سوال ۱۱۶) یک قطار و اتوبوس به طور تصادفی و مستقل از هم بین ساعات ۶ تا ۷ صبح وارد ایستگاهی می شوند. فردي نیز به طور تصادفی بین ساعات ۵:۵۰ تا ۶:۵۰ وارد همان ایستگاه می شود.

الف) احتمال اینکه فرد بیش از ۱۰ دقیقه منتظر قطار ویا اتوبوس بماند چقدر است؟

ب) احتمال اینکه این فرد به هیچ یک از قطار یا اتوبوس نرسد چقدر است؟

سوال ۱۱۷) اگر X و Y، دو متغیر تصادفی نرمال با میانگین ۰ و واریانس ۱ باشند به گونه ای که $\mathrm{cov}(X,Y)=0.5$ ، در این صورت مقدار a را به گونه ای بیابید که $X+aY$ و $X+2Y$ مستقل از هم باشند و در این صورت، واریانس هر یک را بیابید.

سوال ۱۱۸) تابع چگالی احتمال توام دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر است:

$$f(x,y)=\begin{cases} k(4-x-y) & , \quad 1<x<2\ ,\ 0<y<2 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

الف) مقدار مناسب k را بیابید.

ب) با مقدار k به دست آمده در قسمت قبل، مقدار $\mathbb{E}\{XY\}$ را به دست آورید.

سوال ۱۱۹) تابع چگالی احتمال توأم دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر است:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k \quad , \quad x-1<y<x \ , \ 0<x<2 \ , \ 0<y<1 \\ 0 \quad , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که k ثابت است.

الف) مقدار k را به دست آورید.

ب) نشان دهید Y و $X-Y$ از هم مستقل هستند.

سوال ۱۲۰) یک قطار و یک اتوبوس بین ساعت 9 و 10 در زمانی تصادفی وارد ایستگاه می شوند. قطار 10 دقیقه و اتوبوس x دقیقه توقف دارند. x را طوری تعیین کنید که احتمال با هم بودن قطار و اتوبوس برابر 0.5 باشد.

سوال ۱۲۱) سوال ۱) دایره‌ی واحد را با مرکز مبدا مختصات در نظر بگیرید.

الف) نقطه ای به تصادف از داخل این دایره انتخاب می شود. اعداد $0 < r_0 < 1$ و $0 < \phi_0 < 2\pi$ را در نظر بگیرید. اگر مختصات قطبی این نقطه را با (r, ϕ) نشان دهیم، با چه احتمالی داریم $r_0 < r < r + \Delta r_0$ و $\phi_0 < \phi < \phi_0 + \Delta\phi_0$ ؟

ب) ابتدا قطری از دایره را به تصادف انتخاب کرده و سپس نقطه ای از این قطر را به تصادف بر می‌گزینیم. اگر مختصات قطبی این نقطه را با (r, ϕ) نشان دهیم، با چه احتمالی داریم $r_0 < r < r + \Delta r_0$ و $\phi_0 < \phi < \phi_0 + \Delta\phi_0$ ؟

پ) تابع چگالی احتمال نقطه را در هر دو حالت قسمت های الف و ب به دست آورید.

سوال ۱۲۲) سوال ۴) (ناوردایی متغیرهای تصادفی گوسی تحت عمل جمع)

الف) فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی با توابع چگالی احتمال زیر باشند:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_X^2}\right)$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_Y^2}\right)$$

ثابت کنید متغیر تصادفی $X+Y$ از توزیع زیر پیروی می کند:

$$f_{X+Y}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi[\sigma_X^2+\sigma_Y^2]}} \exp\left(-\frac{u^2}{2\pi[\sigma_X^2+\sigma_Y^2]}\right)$$

ب) (امتیازی) رابطه‌ی کلی تری را که می توان از تعمیم قسمت الف استنتاج کرد، بنویسید.

سوال ۱۲۳) سوال ۱) کدام یک از توابع زیر می توانند PDF توام متغیرهای تصادفی باشند؟ برای هر کدام از PDFها، ثابت مناسب k را بیابید.

الف) $f(x,y) = \frac{k}{1+x^2+y^2}$

ب) $f(x,y) = e^{a(x^2+y^2)}$

پ) $$f(x,y) = \begin{cases} k & , \quad x^2+y^2<1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

ت) $$f(x,y) = \begin{cases} k-k\sqrt{x^2+y^2} & , \quad x^2+y^2<1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

ث) $$f(x,y) = \begin{cases} xy & , \quad 0<x<k \quad , \quad 0<y<k \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

ج) $$f(x,y) = \begin{cases} 1 & , \quad x>0 \;,\; y>0 \;,\; x+y<a \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

سوال ۲) برای هر یک از PDFهای سوال ۱، مقادیر زیر را به دست آورید.

الف) $\Pr\{X>0\}$

ب) $\Pr\{X+Y>0\}$

(راهنمایی: ابتدا تحقیق کنید اگر $f(x,y)$ تابعی از x^2+y^2 باشد، داریم

زمانی که حداقل یکی از $\mathbf{a}$ یا $\mathbf{b}$ غیر صفر است $\quad , \quad \Pr\{\mathbf{aX}+\mathbf{bY}>\mathbf{0}\}=\Pr\{\mathbf{X}>\mathbf{0}\}$

)

سوال ۱۲۴) برای قسمت های ث) و ج)، PDF متغیر تصادفی X را به دست آورید.

سوال ۱۲۵) جدول زیر را برای متغیرهای تصادفی X و Y در نظر بگیرید:

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{1}{2}-\theta$	θ
1	θ	$\frac{1}{2}-\theta$

الف) توابع توزیع احتمال متغیرهای X و Y را به دست آورید.

ب) به ازای چه مقدار θ داریم

$$P(X=Y)=1$$

؟

پ) به ازای چه مقدار θ داریم

$$P(X=x,Y=y)=P(X=x)P(Y=y)$$

؟

سوال ۱۲۶) در پرتاب دو تاس سالم و متمایز، متغیر تصادفی X را مجموع اعداد رو آمده و Y را تعداد ۶ های رو آمده در نظر بگیرید.

الف) مقدار $\Pr\{X=1,Y=7\}$ را به دست آورید.

ب) مقدار $E\{XY\}$ چقدر است؟

پ) (امتیازی) آیا این دو متغیر تصادفی ناهمبسته اند؟

سوال ۱۲۷) در جدول زیر که توزیع احتمال را برای متغیر های تصادفی X و Y نشان می دهد،

1	0	$X \backslash Y$
p_2	p_1	0
p_4	p_3	1

الف) مقدار $\text{cov}(X,Y)$ را به دست آورید و تحقیق کنید چه زمانی داریم $\text{cov}(X,Y)=0$ ؟

ب) آیا برای این دو متغیر تصادفی، ناهمبستگی، استقلال را نتیجه می دهد؟ اگر چنین است، نشان دهید و اگر چنین نیست، مثالی برای مقادیر p_1, p_2, p_3, p_4 بزنید که ناهمبستگی، استقلال را نتیجه نمی‌دهد (دقت داشته باشید که جمع احتمالات برابر یک است و احتمالات نامنفی اند).

سوال ۱۲۸) چگالی احتمال زیر را در نظر بگیرید:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}1+\alpha\sin[2\pi(x+y)] & , \quad 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

که α مقدار مناسبی است.

الف) کوواریانس این دو متغیر تصادفی را به دست آورید. آیا این دو متغیر تصادفی ناهمبسته هستند؟

ب) مقادیری از α را بیابید که این دو متغیر تصادفی مستقل باشند.

سوال ۱۲۹) تابع چگالی احتمال توام زیر را در نظر بگیرید:

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\rho^2}(x^2+y^2-2\rho xy)\right]$$

الف) ثابت کنید X (و مشابها همچنین Y) دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس 1 است.

ب) ثابت کنید اگر $\rho=0$، در این صورت متغیرهای تصادفی X و Y مستقل هستند.

پ) ثابت کنید اگر متغیرهای تصادفی X و Y مستقل باشند آنگاه $\rho = 0$.

ت) تابع چگالی احتمالی که در صورت این سوال تعریف شد، حالت خاصی از چگالی احتمال چند متغیره‌ی نرمال است.

ضریب همبستگی ρ در حالت دو متغیره، میزان همبستگی دو متغیر تصادفی را نشان می دهد. ابتدا تحقیق کنید به ازای چه مقداری از ρ، این چگالی احتمال، دایروی–متقارن خواهد بود. چگالی احتمال دو متغیره را به ازای مقادیر $\rho = -0.5, \rho = 0, \rho = 0.5$ ترسیم کنید. به طور شهودی چگونه می توان از روی نمودارها، به میزان همبستگی این دو متغیر تصادفی پی برد؟

این تابع چگالی را به صورت دیگری نیز می توان نوشت:

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \det(\Sigma)}} \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot ([x, y]\Sigma^{-1}[x, y]^T)\right]$$

که بردار $[x, y]$ یک بردار سطری دوتایی است و

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس Σ در متغیرهای تصادفی نرمال توام، مفهوم مهمی است و ماتریس کوواریانس نام دارد.

به ازای هر یک از مقادیر $\rho = -0.5, \rho = 0, \rho = 0.5$ و به کمک دستور mvnrnd() در متلب، ۱۰۰۰ جفت داده‌ی تصادفی تولید و آنها را در یک نمودار پراکندگی ترسیم کنید (پس از اجرای دستور فوق در متلب به شیوه ی مناسب، ۱۰۰۰ داده‌ی تصادفی برای X و ۱۰۰۰ داده‌ی تصادفی برای Y خواهید داشت. کافی است Y را برحسب X رسم کنید تا به نمودار پراکندگی برسید. همچنین می توانید از Help متلب برای توضیحات بیشتر در مورد mvnrnd() بهره ببرید). چگونه از روی نمودار پراکندگی می توان میزان همبستگی دو متغیر تصادفی را نشان داد؟ چه شهودی در آن نهفته است؟ (بسیار مهم است که در این تحقیق، تحلیل و دیدگاه خود را نیز ذکر بفرمایید.)

هنگامی که $\rho = 1$، توضیح دهید چه اتفاقی می افتد؟ تفاوت آن با حالت $\rho = -1$ چیست؟
آیا همچنان می‌توان از چگالی احتمال داده شده استفاده کرد؟ چرا؟

سوال ۱۳۰) برای هر یک از pdf های توام داده شده‌ی زیر، موارد $f_X(x)$ ، $E\{X\}$ و $E\{XY\}$ را به دست آورید.

الف) $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi}e^{-x^2-y^2}$

ب)
$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1-|x-1|-|y-1|) & , \quad |x-1|+|y-1|<1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

پ)
$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{1-x} & , \quad 0<x<y<1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

ت) X و Y، دو متغیر تصادفی گسسته (با مقادیر صحیح) اند و pmf آنها به صورت زیر است:
$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{16} & , \quad x^2+y^2 \le 10 \ , \ x \ge y \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

سوال ۱۳۱) در جدول زیر که توزیع احتمال را برای متغیر های تصادفی X و Y نشان می دهد،

	Y		
۱	۰		
p_2	p_1	۰	X
p_4	p_3	۱	

		Y	
		0	1
X	0	P_1	P_2
	1	P_3	P_4

الف) مقدار $\mathrm{cov}(X,Y)$ را به دست آورید و تحقیق کنید چه زمانی داریم $\mathrm{cov}(X,Y)=0$ ؟

ب) آیا برای این دو متغیر تصادفی، ناهمبستگی، استقلال را نتیجه می دهد؟ اگر چنین است، نشان دهید و اگر چنین نیست، مثالی برای مقادیر p_1,p_2,p_3,p_4 بزنید که ناهمبستگی، استقلال را نتیجه نمی‌دهد (دقت داشته باشید که جمع احتمالات برابر یک است و احتمالات نامنفی اند).

سوال ۱۳۲) چگالی احتمال زیر را در نظر بگیرید:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}1+\alpha\sin[2\pi(x+y)] & , \quad 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

که α مقدار مناسبی است.

الف) کوواریانس این دو متغیر تصادفی را به دست آورید. به ازای چه مقادیری از α، این دو متغیر تصادفی ناهمبسته هستند؟

ب) مقادیری از α را بیابید که این دو متغیر تصادفی مستقل باشند.

سوال ۱۳۳) ابتدا فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای توزیع یکنواخت در بازه‌ی $[0,1]$ و مستقل هستند. توزیع احتمال متغیرهای تصادفی

الف) XY ، ب) $X+Y$ ، پ) $\frac{X}{Y}$ ، ت) $\max\{X,Y\}$ ، ث) $\min\{X,Y\}$

را به دست آورید. سپس فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی نمایی و مستقل با پارامتر ا باشند. توزیع احتمال هر یک از متغیرهای تصادفی قسمت ب و پ را بیابید.

(توزیع احتمال یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر λ به صورت زیر است:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & , \quad x>0\\ 0 & , \quad x\le 0\end{cases}$$

توزیع احتمال یک متغیر تصادفی یکنواخت در بازه‌ی $[a,b]$ به صورت زیر است:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & , \quad a<x<b\\ 0 & , \quad \text{سایر جاها}\end{cases}$$

)

سوال ۱۳۴) تابع چگالی احتمال توام دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر است:

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}k & , \quad |x|+|y|<1\\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

الف) مقدار مناسب k را بیابید.

ب) کوواریانس و ضریب همبستگی X و Y را بیابید.

پ) ثابت کنید متغیرهای تصادفی $X+Y$ و $X-Y$ مستقل هستند و توزیع توام آنها را به دست آورید.

ت) توزیع X و میانگین و واریانس آن را به دست آورید.

سوال ۱۳۵) برای متغیر تصادفی X که دارای توزیع زیر است

$$f_X(x)=\begin{cases}1 & , \quad |x|<\frac{1}{2}\\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

تابع مولد گشتاور را به دست آورده و از روی آن، $E\{X^4\}$ را محاسبه نمایید.

سوال ۱۳۶) ثابت کنید اگر X, Y، دو متغیر تصادفی نرمال مستقل با میانگین ۰ و واریانس ۱ باشند، آنگاه توزیع $\tan^{-1}\frac{Y}{X}$ ، یکنواخت بین $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ خواهد بود.

فصل ۵

احتمال شرطی در متغیرهای تصادفی

سوال ۱۳۷) تاس سالمی را ۹۱ بار پرتاب می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی X، تعداد اعداد زوج رو آمده به شرط دانستن این باشد که در سه پرتاب اول، حداقل یک عدد فرد آمده است،

الف) چگالی احتمال X را محاسبه کنید.

ب) اگر متغیر تصادفی Y، تعداد اعداد اول رو آمده باشد، مقدار $\Pr\{X = x|Y = 0\}$ چقدر است؟

سوال ۱۳۸) سکه ای را ۱۰ بار پرتاب می کنیم. متغیر تصادفی X برابر تعداد دفعات رو آمدن در پرتاب های دوم و چهارم و متغیر تصادفی Y برابر تعداد دفعات پشت آمدن در ۲ پرتاب اول است.

الف) چگالی احتمال شرطی $f_{X|Y}(X = x|Y = y)$ را به دست آورید (می توانید از روش جدول نویسی برای چگالی احتمال استفاده کنید که سطر جدول $X = x$ و ستون جدول $Y = y$ است).

ب) مقدار $E\{XY\}$ را بیابید.

سوال ۱۳۹) فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل برنولی به ترتیب با پارامترهای $\frac{1}{2}$ و p باشند. ثابت کنید $Z = X \oplus Y \mod 2$ و $Z = XY$ دارای توزیع برنولی با پارامتر

$\frac{1}{2}p$ هستند.

سوال ۱۴۰) اگر X و Y دو توزیع چندجمله ای به ترتیب با پارامترهای (n_1, p) و (n_2, p) باشند، ثابت کنید توزیع $X+Y$ دوجمله ای با پارامترهای (n_1+n_2, p) است.

فصل ۶

دنباله‌ی متغیرهای تصادفی

سوال ۱۴۱) (قدم زدن تصادفی) فردی از نقطه‌ی صفر روی محور اعداد حقیقی با احتمال p یک متر به سمت راست و با احتمال $1-p$ یک متر به سمت چپ می رود. اگر این فرد این نوع قدم زدن را n بار و هربار از روی نقطه ای که روی آن ایستاده تکرار کند، با چه احتمالی پس از k بار قدم زدن به مبدا باز می گردد؟

سوال ۱۴۲) فرض کنید دنباله‌ی متغیرهای تصادفی $\{X_n\}$، از توزیع یکنواخت بین $-\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$ به طور مستقل پیروی می‌کند. به کمک قضیه‌ی حد مرکزی، توزیع متغیر تصادفی Y و میانگین و واریانس آن را به دست آورید؛ اگر

$$Y = \lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}.$$

سوال ۱۴۳) الف) تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی پواسون با پارامتر λ را به دست آورید.

ب) اگر دنباله‌ی متغیرهای تصادفی مستقل $\{X_n\}$، از نوع پواسون با پارامتر λ باشد، نشان دهید متغیر تصادفی

$$Y = \sum_{i=1}^{N} X_i,$$

دارای توزیع پواسون با پارامتر $N\lambda$ است.

پ) نشان دهید اگر دنباله‌ی متغیرهای تصادفی مستقل $\{X_n\}$، برنولی با پارامتر p و N از نوع پواسون با پارامتر λ باشد، متغیر تصادفی

$$Y = \sum_{n=0}^{N-1} X_n$$

دارای توزیع پواسون با پارامتر λp است.

سوال ۱۴۴) نشان دهید دنباله‌ی متغیرهای تصادفی $X_n = X + \frac{1}{n}$ که n عدد طبیعی و X دارای توزیع یکنواخت بین ۰ و ۱ است، در احتمال به X میل می کند.

سوال ۲) آزمایشی را که احتمال موفقیت آن p و احتمال شکست آن $1-p$ است، آنقدر تکرار می‌کنیم تا به k-امین موفقیت برسیم. متوسط تعداد آزمایش ها را تا حصول k-امین موفقیت به ازای

الف) $k=1$

ب) $k=2$

به دست آورید.

سوال ۱) ابتدا فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای توزیع یکنواخت در بازه‌ی $[0,1]$ و مستقل هستند. توزیع احتمال متغیرهای تصادفی

الف) XY

ب) $X+Y$

پ) $\frac{X}{Y}$

ت) $\max\{X,Y\}$

ج) $\min\{X,Y\}$

را به دست آورید.

حال فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی نمایی و مستقل با پارامتر ا باشند. توزیع احتمال هر یک از متغیرهای تصادفی قسمت ب) و پ) را بیابید.

سوال ۲) توزیع مشترک دو متغیرتصادفی به صورت زیر است:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\rho^2}(x^2+y^2-2\rho xy)\right]$$

ثابت کنید متغیر تصادفی $X+Y$ یک متغیر تصادفی نرمال است و سپس واریانس آن را به دست آورید. چه زمانی این واریانس بیشینه است و چرا؟ در شرایطی که واریانس بیشینه باشد، متغیرهای تصادفی X و Y چه رابطه ای دارند؟

سوال ۱) برای هر یک از متغیرهای تصادفی زیر، واریانس را به دست آورید.

الف) $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & , \quad x > 1 \\ 0 & , \quad x \leq 1 \end{cases}$

ب) $f_X(x) = \begin{cases} \sin x & , \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$

پ) $\begin{cases} \frac{2}{x^3} & , \quad x > 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$

ت) X یک متغیر تصادفی گسسته است و $\Pr\{X=i\} = 2(\frac{1}{3})^i$ برای $i \in \mathbb{N}$

سوال ۲) برای قسمت های الف و ت سوال ا، ابتدا تابع مولد گشتاور را محاسبه نموده و سپس از روی آن، میانگین و واریانس را به دست آورید.

سوال ۳) برای قسمت های الف و ب سوال ا، میانگین متغیر تصادفی e^{-X} را بیابید.

سوال ۴) برای هر یک از جفت متغیر های تصادفی X و Y، ابتدا مقدار مناسب k و سپس مقدار $\Pr\{X+3Y<\frac{1}{3}\}$ را بیابید. در هر بخش آیا X و Y مستقلند؟ (چگالی $f_{X,Y}(x,y)$)

احتمال توام متغیر های تصادفی پیوسته‌ی X و Y است.)

الف) $$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}k\sin(x+3y) & , \quad 0<x<\frac{\pi}{2}, 0<y<\frac{\pi}{6}\\ 0 & , \quad \text{سایر جاها}\end{cases}$$

ب) $$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}kxy(1-y) & , \quad 0<x<1, 0<y<1\\ 0 & , \quad \text{سایر جاها}\end{cases}$$

سوال ۵) جدول زیر را برای متغیرهای تصادفی X و Y در نظر بگیرید:

X \ Y	0	1
0	$\frac{1}{2}-\theta$	θ
1	θ	$\frac{1}{2}-\theta$

الف) توابع توزیع احتمال حاشیه ای متغیرهای X و Y را به دست آورید.

ب) به ازای چه مقدار θ داریم

$$P(X=Y)=1$$

؟

پ) به ازای چه مقدار θ داریم

$$P(X=x,Y=y)=P(X=x)P(Y=y)$$

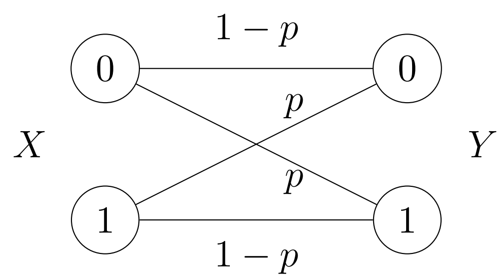
؟

سوال ۱) در پرتاب ۱۰ بار سکه‌ی سالم به طور مستقل،

الف) توزیع احتمال متغیر تصادفی تعداد سکه های شیر آمده را به شرط آن که بدانیم سه پرتاب اول خط بوده اند به دست آورید.

ب) توزیع احتمال متغیر تصادفی تعداد سکه های شیر آمده را به شرط آن که بدانیم دو پرتاب از سه پرتاب اول خط بوده اند به دست آورید.

سوال ۲) کانال مخابراتی زیر را در نظر بگیرید:



که در آن، پیکان ها احتمالات گذار را از متغیر تصادفی X به متغیر تصادفی Y نشان می دهند. به طور مثال

$$\Pr\{Y=0|X=1\}=p$$

الف) اگر $\Pr\{X=0\}=q$ که $0\le q\le 1$ ، در اینصورت توزیع توام X و Y را محاسبه کنید.

ب) احتمال خطا ($\Pr\{X\neq Y\}$) را محاسبه کنید. اگر مقدار p ثابت باشد، آیا احتمال خطا بر حسب q نقطه‌ی بهینه دارد؟ اگر دارد آنرا بیابید و در غیر این صورت، علت را بیان کنید.

سوال ۳) فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع احتمال نمایی با پارامتر λ باشد. ثابت کنید

$$E\{X|X>a\}=E\{X\}+a$$

سوال ۴) اگر توزیع تجمعی یک متغیر تصادفی ترکیبی به صورت

$$F(x)=\begin{cases}0 & , \quad x<0\\ \frac{x+2}{4} & , \quad 0\le x<1\\ 1 & , \quad x\ge 1\end{cases}$$

باشد، چگالی احتمال متغیر تصادفی $X|(X \neq 0$ یا $X \neq 1)$ را به دست آورید.

سوال ۴) اگر برای متغیرهای تصادفی X و Y، چگالی احتمال زیر را داشته باشیم

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} e^{-x(y+1)^2} & , \quad x,y > 0 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در این صورت توزیع $X|Y=y$ را به دست آورید.

سوال ۵) (امتیازی) تحقیق کنید هر یک از دنباله‌ی متغیرهای تصادفی زیر، با چه مفهومی به یک متغیر تصادفی حدی میل می کنند. برای هر یک دلیل بیاورید.

الف) $X_n = X + \frac{1}{n}$ که X، یک متغیر تصادفی یکنواخت در بازه‌ی $[0,1]$ است.

ب) متغیر تصادفی نمایی با پارامتر $\frac{n+1}{n}$

پ) متوسط تعداد شیرها در n بار پرتاب مستقل یک سکه‌ی سالم

سوال ۱) اگر متغیر تصادفی X را دارای چگالی احتمال زیر در نظر بگیریم

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \quad 0 < x < 2 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

موارد $F(x|X<1)$ **(cdf)**، $f(x|X>1)$ **(pdf)** و $\mathbb{E}\{X|0.5 < X < 1.5\}$ را بیابید.

سوال ۲) فرض کنید متغیر تصادفی X دارای چگالی احتمال زیر باشد

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases} \quad , \quad \lambda > 0$$

در این صورت مقادیر $\mathbb{E}\{X|X>a\}$ و $\mathbb{E}\{X\}+a$ را بیابید و با هم مقایسه کنید. نتیجه را تفسیر کنید و ببینید آیا با شهود سازگار است. این چه ویژگی ای از متغیرهای تصادفی نمایی را نشان می دهد؟

سوال ۱۴۵) برای متغیر تصادفی X با توزیع زیر

$$\Pr\{X=i\}=(1-p)^i\cdot p \quad , \quad i=0,1,2,\cdots$$

الف) مقدار $\text{var}\{X|X\geq 4\}$ را به دست آورید.

ب) pmf شرطی $\Pr\{X=x|\text{X زوج است}\}$ را پیدا کنید.

سوال ۴) فرض کنید متغیر تصادفی X، نتیجه پرتاب یک تاس سالم باشد ($X\in\{1,2,3,4,5,6\}$). سپس با توجه به رخداد X ، متغیر تصادفی پیوسته‌ی Y را به صورت شرطی با چگالی احتمال زیر تعریف می کنیم:

$$f_{Y|X}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{x} & , \quad 0<y<x\\ 0 & , \quad \text{سایر جاها}\end{cases}$$

الف) احتمال $\Pr\{Y\geq 3\}$ را بیابید.

ب) چگالی احتمال $f_Y(y)$ را به دست آورید.

پ) مقادیر $\mathbb{E}\{Y\}$ و $\text{var}(Y)$ را از روی چگالی احتمال Y محاسبه کنید.

سوال ۱۴۶) از کیسه‌ای که شامل ۵ مهره سیاه، ۸ مهره سفید و ۱ مهره قرمز است، دو توپ به تصادف بیرون می‌آوریم. احتمال آنکه هر دو توپ همرنگ باشند چقدر است؟

سوال ۱۴۷) دو جعبه از لامپ‌ها در اختیار داریم. جعبه‌ی اول، دارای ۱۰۰۰ لامپ است که 1% آنها سالمند. جعبه‌ی دوم، دارای ۱۰۰۰۰ لامپ است که 95% آنها سالم اند. یکی از جعبه‌ها را به تصادف انتخاب کرده و دو لامپ بیرون می‌کشیم. احتمال آن که هر دو لامپ از جعبه‌ی ۱ انتخاب شده باشند چقدر است اگر

الف) هر دو لامپ خراب باشند.

ب) اگر یکی از لامپ ها سالم و دیگری خراب باشد.

سوال ۱۴۸)

برای هر یک از توابع زیر، محدوده مقادیر k را به گونه ای تعیین کنید که تابع مورد نظر، یک تابع توزیع انباشته باشد. سپس، چگالی احتمال را بیابید.

الف) $F(x) = \frac{1}{e^{-kx}+1}$

ب) $$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1 - e^{-x-k\sin x} & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

پ) $$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1 + xe^{-kx} & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

ت) $$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \frac{1}{2} & , \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{k-kx} & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

سوال ۱۴۹)

برای بخش های الف و ت سوال پیش، مقادیر میانه، صدکهای ۲۵ام و ۷۵ام و همچنین احتمال‌های $\Pr\{X = 0\}$ و $\Pr\{0 < X \leq 2\}$ را بیابید.

سوال ۱۵۰)

یک تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر زوج آمد، عدد آن را یادداشت می‌کنیم و اگر فرد آمد، عددی را به تصادف از بازه‌ی $[1, 6]$ انتخاب کرده و آن را یادداشت می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی X، نشان دهنده‌ی عدد یادداشت شده باشد، چگالی احتمال و تابع توزیع انباشته‌ی آن را به دست آورده و مقدار $\Pr\{1 \leq X \leq 3\}$ را بیابید.

سوال ۱۵۱)

یک تابع چگالی احتمال $f(x)$، همواره مثبت بوده و به ازای عدد حقیقی و داده‌شده‌ی a،

دارای خاصیت زیر است:
$$f(x) = f(a-x).$$
در این صورت، میانه‌ی آن را بیابید.

سوال ۱۵۲)

فرض کنید متغیر تصادفی X، از توزیع نمایی با پارامتر $\lambda = 1$ پیروی کند. در این صورت، چگالی احتمال متغیر تصادفی Y را در حالت های زیر بیابید.

الف) $Y = e^X$

ب) $Y = X^\alpha$ که α عدد ثابت مثبتی است.

پ) $Y = \lfloor X \rfloor$

سوال ۱۵۳)

فرض کنید X، یک متغیر تصادفی باشد که از توزیع زیر پیروی می‌کند:

$$f_X(x) = \begin{cases} kx & , \quad 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}\delta(x) & , \quad x = 1 \\ 0 & , \quad \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

الف) مقدار مناسب k را بیابید.

ب) مقدار $\mathbb{E}\{X\}$ را محاسبه کنید.

پ) مقدار $\mathbb{E}\{e^{aX}\}$ را به دست آورید که a عدد حقیقی دلخواهی است.

سوال ۱۵۴)

متغیر تصادفی X از توزیع زیر پیروی می‌کند:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

متغیر تصادفی $Y = X^2$ مفروض است.

الف) چگالی احتمال Y را به دست آورید.

ب) امید ریاضی X را بیابید.

پ) امید ریاضی Y را از روی چگالی احتمال آن و مقدار $\mathbb{E}\{X^2\}$ را از قضیه‌ی اساسی امید ریاضی محاسبه کرده و با هم مقایسه کنید.

ت) مقادیر $\Pr\{X < \frac{1}{2}\}$ و $\Pr\{Y < \frac{1}{4}\}$ را به ترتیب از روی چگالی های احتمال X و Y به دست آورده و با هم مقایسه کنید.

سوال ۱۵۵)

برای هر یک از توزیع های زیر، مقدار $\Pr\{X \geq \alpha\}$ را به دست آورده و همچنین، یک کران بالا برای این احتمال برای هر توزیع با کمک نامساوی مارکوف به دست آورید. سپس مقدار دقیق احتمال و کران آن را مقایسه کنید.

الف) $f(x) = e^{-x} \quad , \quad x > 0$

ب) $f(x) = \frac{1}{\ln 2}\frac{1}{1+e^x} \quad , \quad x > 0$

پ) $f(x) = xe^{-x} \quad , \quad x > 0$

سوال ۱۵۶)

برای توزیع های بخش های الف و پ سوال پیش، مقدار واریانس را به دست آورید.

سوال ۱۵۷)

برای هر یک از توزیع های زیر، تابع مولد گشتاور را یافته و سپس از روی آن، مقدار $\mathbb{E}\{X^2\}$ را بیابید.

الف) $$f(x) = \begin{cases} 1-x & , \quad 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}\delta(x-1) & , \quad x = 1 \end{cases}$$

ب) $$f(x)=\begin{cases}\cos x & , \quad 0<x<\frac{\pi}{2}\\ 0 & , \quad \text{جاهای دیگر}\end{cases}$$

پ) $$\Pr\{X=x\}=\begin{cases}\frac{n}{2^{n+1}} & , \quad n\in\mathbb{N}\\ 0 & , \quad \text{جاهای دیگر}\end{cases}$$

ت) X متغیر تصادفی حاصل ضرب دو عدد رو آمده در پرتاب دو تاس به طور مستقل است.

سوال ۱۵۸)

برای هر یک از توابع دومتغیره‌ی زیر، محدوده مقادیر k را به گونه ای بیابید که تابع مورد نظر، چگالی احتمال توأم دو متغیر تصادفی باشد و سپس، توزیع تجمعی توأم را (در صورت وجود) بیابید.

الف) $$f(x,y)=\begin{cases}xy+kx+ky & , \quad 0<x<1, 0<y<1\\ 0 & , \quad \text{سایر جاها}\end{cases}$$

ب) $$f(x,y)=\begin{cases}k\sin(x+3y) & , \quad 0<x<\frac{\pi}{2}, 0<y<\frac{\pi}{6}\\ 0 & , \quad \text{سایر جاها}\end{cases}$$

سوال ۱۵۹)

برای هر یک از چگالی های احتمال زیر، مقادیر $\Pr\{X\leq 4, Y\leq -2\}$، $\Pr\{X+Y\leq 2\}$ و $\Pr\{X=4Y\}$ را بیابید.

الف) $$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin(x+y) & , \quad 0<x<\frac{\pi}{2}, 0<y<\frac{\pi}{2}\\ 0 & , \quad \text{سایر جاها}\end{cases}$$

ب) $$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\delta\left(\sqrt{(x+4)^2+(y+1)^2}\right) & , \quad x=-4, y=-1\\ \frac{1}{2} & , \quad 0<x<1, 0<y<1\\ 0 & , \quad \text{سایر جاها}\end{cases}$$

(دقت شود که همانگونه که $\delta(x-x_0)$ نشان دهنده‌ی ضربه ای در $x=x_0$ است، $\delta(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2})$ نیز نشان دهنده‌ی ضربه ای در $x=x_0, y=y_0$ در دو بعد و دارای سطح زیر یک است.)

سوال ۱۶۰)

برای چگالی احتمال توأم زیر، مقادیر σ_X^2، σ_Y^2، $\Phi_X(s)$، $\Phi_Y(s)$ و چگالی احتمال متغیرهای تصادفی XY و $\max\{X,Y\}$ را محاسبه کنید.

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}(xy-1)e^{1-xy} & , \quad x\geq 1, y\geq 1\\ 0 & , \quad \text{سایر جاها}\end{cases}$$

سوال ۱۶۱)

چگالی احتمال توأم زیر برای دو متغیر تصادفی X و Y داده شده است:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\alpha+2(\frac{1}{\pi}-\alpha)(x^2+y^2) & , \quad x^2+y^2\leq 1\\ 0 & , \quad \text{سایر جاها}\end{cases}$$

الف) محدوده‌ی مقادیر مجاز α را بیابید.

ب) به ازای چه مقدار از α ، دو متغیر تصادفی X و Y مستقل اند؟ ناهمبسته اند؟

پ) احتمال های $\Pr\{aX+bY\geq 0\}$ و $\Pr\{XY\geq 0\}$ را بیابید.

سوال ۱۶۲)

برای چگالی احتمال زیر، مقادیر $\mathbb{E}\{X|X>1\}$ و $\sigma_X^2(X|X>1)$ و چگالی های احتمال شرطی $f(x|X\neq 1)$ و $f(x|X<\frac{1}{2})$ را محاسبه کنید.

$$f_X(x)=\begin{cases}3x(1-x) & , \quad 0<x<1\\ \frac{1}{2}\delta(x-1) & , \quad x=1\\ 0 & , \quad \text{سایر جاها}\end{cases}$$

سوال ۱۶۳)

چگالی احتمال توأم زیر برای دو متغیر تصادفی X و Y داده شده است:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & , \quad x^2+y^2 \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

الف) چگالی احتمال شرطی $f_{\max\{X,Y\}}(u|X \leq \frac{1}{2})$ را بیابید (ابتدا $\Pr\{\max\{X,Y\} \leq u|X \leq \frac{1}{2}\}$ را محاسبه کنید).

ب) مقدار $\mathbb{E}\{\sqrt{X^2+Y^2}|X+Y \leq 1\}$ را بیابید.

سوال ۱۶۴)

اطلاعات زیر در مورد دو متغیر تصادفی X و Y داده شده است:

$$\Pr\{X=-1\} = \Pr\{X=1\} = \frac{1}{2}$$
$$f_Y(y|X=x) = \frac{a}{2}\exp(-a|x-y|)$$

که a، عدد ثابت مثبتی است.

الف) احتمال های $\Pr\{Y \leq 0|X=1\}$ و $\Pr\{Y \geq 0|X=-1\}$ را بیابید. با افزایش a، مقادیر احتمالهای فوق چه تغییر می‌کنند؟

ب) (امتیازی) نتیجه‌ی قسمت الف را با دیدگاه احتمال خطا توجیه کنید.

سوال ۱۶۵)

اگر PDF مشترک دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر باشد

$$f(x,y) = \begin{cases} 12x^2 & , \quad 0<x<y<1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

در این صورت مقدار $\mathrm{cov}(X,Y)$ را بیابید.

سوال ۱۶۶)

نشان دهید احتمال هر مجموعه، کمتر از یا مساوی ۱ است.

پاسخ:

از اصل سوم احتمال، برای هر دو مجموعه‌ی ناسازگار A و B داریم

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

از آنجا که A و A' طبق تعریف ناسازگارند، بنابراین

$$P(A \cup A') = P(A) + P(A').$$

از طرفی طبق تعریف،

$$A \cup A' = S$$

که S فضای نمونه است. در نتیجه

$$P(A) + P(A') = 1.$$

بر اساس اصل اول احتمال، احتمال هر مجموعه مقداری نامنفی است؛ در نتیجه

$$P(A) = 1 - P(A') \leq 1$$

و اثبات کامل است ■

سوال ۱۶۷)

فرض کنید که برنامه ي نوشته اید که اعداد ۱ تا ۹ را به صورت کاملا تصادفی در هر بار اجرا در ۳ جایگاه (سه رقم) چاپ می کند. احتمال ظاهر شده اعداد با هر سه رقم فرد را محاسبه کنید.

پاسخ:

طبق اصل ضرب، تعداد تمام اعداد سه رقمی متمایزی که می توان به این روش ساخت، برابر است با $9^3 = 729$. تعداد ارقام فرد از بین اعداد ۱ تا ۹، برابر ۵ است (ارقام ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹). در نتیجه، تعداد اعداد سه رقمی ای که تمام ارقام آن فرد هستند را می توان دوباره

طبق اصل ضرب به $5^3 = 125$ طریق ممکن ساخت. بنابراین احتمال مطلوب عبارتست از

$$p = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{125}{729}$$

سوال ۱۶۸)

از کیسه‌ای که دارای ۴۰ مهره سیاه و ۶۰ مهره قرمز است، ۲۰ مهره بر می‌داریم. با چه احتمالی، از این ۲۰ مهره، ۵ مهره سیاه و ۱۵ مهره قرمزند؟

پاسخ:

تعداد حالات برداشتن ۲۰ توپ، برابر $\binom{100}{20}$ بوده و تعداد حالات مطلوب، برابر $\binom{40}{5}\binom{60}{15}$ است؛ لذا احتمال مطلوب برابر $\frac{\binom{40}{5}\binom{60}{15}}{\binom{100}{20}}$ خواهد بود.

سوال ۱۶۹)

کشوری شامل دو استان ۱ و ۲ است. استان ۱، شامل ۶۰ مرد و ۴۰ زن و استان ۲ شامل ۶۵۰ زن و ۳۵۰ مرد است. در استان ۱، ۱۰ مرد و ۱۰ زن چشم آبی و در استان ۲، ۳۰ مرد و ۲۰ زن چشم آبی هستند. فردی را به تصادف از این کشور انتخاب می کنیم.

الف) اگر این فرد چشم آبی باشد، با چه احتمالی از استان ۱ انتخاب شده است؟

ب) اگر این فرد زن باشد، با چه احتمالی از استان ۲ انتخاب شده و چشم آبی نیست؟

پاسخ:

اصولاً در پرسشهای احتمالاتی، باید فضای نمونه و پیشامدها را در ابتدا به درستی تعریف کرد. اینجا نیز چنین قاعده‌ای را پی می‌گیریم.

از آنجا که یک فرد خاص می‌تواند زن یا مرد باشد یا چشم آبی باشد یا نباشد، چهار پیشامد ممکن وجود دارد:

$M =$ پیشامد مرد بودن

$F =$ پیشامد زن بودن

$B =$ پیشامد چشم آبی بودن

$N =$ پیشامد چشم آبی نبودن

$S_1 =$ پیشامد اهل استان ۱ بودن

$S_2 =$ پیشامد اهل استان ۲ بودن

صورت سوال، اطلاعات احتمالاتی زیر را به ما می‌دهد:

$$P(S_1) = \frac{100}{1100}$$
$$P(S_2) = \frac{1000}{1100}$$
$$P(B|S_1) = \frac{20}{100}$$
$$P(B|S_2) = \frac{50}{1000}$$
$$P(M|S_1) = \frac{60}{100}$$
$$P(M|S_2) = \frac{350}{1000}$$

الف) احتمال مطلوب ما، $P(S_1|B)$ است که به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
P(S_1|B) &= \frac{P(S_1\cap B)}{P(B)}\\
&= \underbrace{\frac{P(S_1)P(B|S_1)}{P(B)}}_{\text{قاعده‌ی بیز}}\\
&= \frac{P(S_1)P(B|S_1)}{P(S_1)P(B|S_1)+P(S_2)P(B|S_2)}\\
&= \frac{\frac{100}{1100}\times\frac{20}{100}}{\frac{100}{1100}\times\frac{20}{100}+\frac{1000}{1100}\times\frac{50}{1000}} = \frac{2}{7}
\end{aligned}$$

ب) برای این بخش داریم:

$$P(S_2\cap N|F) = \frac{P(S_2\cap N\cap F)}{P(F)}$$

پیشامد $S_2\cap N\cap F$، پیشامد حالتی است که فرد انتخاب شده، زن بوده، از استان ۲ انتخاب شود و چشم آبی نباشد. از آنجا که از جامعه‌ی ۱۱۰۰ نفری، ۶۳۰ نفر چنین ویژگی‌ای دارند در نتیجه:

$$P(S_2\cap N\cap F) = \frac{630}{1100}$$

و می‌توان نوشت

$$
\begin{aligned}
P(S_2 \cap N | F) &= \frac{P(S_2 \cap N \cap F)}{P(F)} \\
&= \frac{P(S_2 \cap N \cap F)}{P(S_1)P(F|S_1) + P(S_2)P(F|S_2)} \\
&= \frac{P(S_2 \cap N \cap F)}{\frac{100}{1100} \times \frac{40}{100} + \frac{1000}{1100} \times \frac{650}{1000}} \\
&= \frac{\frac{630}{1100}}{\frac{100}{1100} \times \frac{40}{100} + \frac{1000}{1100} \times \frac{650}{1000}} \\
&= \frac{21}{23}
\end{aligned}
$$

کوئیز ۴)

سه جعبه در اختیار داریم. جعبه‌ی ۱ شامل ۷ توپ آبی و ۳ توپ قرمز، جعبه‌ی ۲ شامل ۱ توپ آبی، ۳ توپ قرمز و ۶توپ زرد و جعبه‌ی ۳ شامل ۷ توپ آبی و ۳ توپ زرد هستند. ابتدا یکی از جعبه ها را به تصادف برداشته و سپس توپی از آن جعبه به تصادف بر می‌داریم. اگر توپ بیرون آمده آبی نباشد، با چه احتمالی قرمز است و از جعبه‌ی ۱ یا از جعبه‌ی ۲ بیرون آمده است؟

کوئیز ۵)

سکه ای را پرتاب می‌کنیم. اگر رو آمد، تاسی را ۳ بار پرتاب کرده و جمع اعداد رو آمده در ۳ پرتاب را در نظر می‌گیریم. اگر پشت آمد، تاسی را ۴ بار پرتاب کرده و جمع اعداد رو آمده در ۴ پرتاب را در نظر می‌گیریم. اگر جمع اعداد روآمده‌ی تاس برابر ۵ باشد، با چه احتمالی سکه پشت آمده است؟

کوئیز ۲)

یک عدد دو رقمی را به این صورت می سازیم که هر رقم آن، به صورت تصادفی از بین ارقام

۱ تا ۹ انتخاب شده باشد. با چه احتمالی، عدد ساخته شده بر ۹ بخش پذیر است؟

کوئیز ۵)

سه جعبه داریم که هر یک شامل ۱۰ توپ هستند. در جعبه اول، ۳ توپ آبی و ۷ توپ قرمز، در جعبه دوم، ۳ توپ سفید و ۵ توپ آبی و در جعبه سوم، ۱ توپ قرمز و ۹ توپ سفید هستند. ابتدا یکی از جعبه ها را به تصادف انتخاب کرده و سپس توپی از آن جعبه بیرون می‌کشیم. اگر توپ مورد نظر سفید باشد، با چه احتمالی از جعبه دوم نیست؟

کوئیز ۱۰)

سکه ای را ۱۰ بار پرتاب می‌کنیم. متغیر تصادفی X، تعداد دفعات رو آمدن سکه در ۵ پرتاب اول و متغیر تصادفی Y، تعداد دفعات رو آمدن سکه در پرتاب های زوج است. احتمال $\Pr\{X = 5Y\}$ را بیابید.

کوئیز ۱۱)

متغیر تصادفی X، دارای تابع جرم احتمال زیر است:

2	1	0	-1	x
0.4	0.3	0.2	0.1	$\Pr\{X = x\}$

اگر داشته باشیم $Y = X^2 - 1$ ، در اینصورت مقدار $\text{cov}(X, Y)$ را بیابید.