به نام زیبایی

پاسخ تمرینات سری یازدهم سیگنال ها و سیستم ها

سوال ۱)

الف) از آنجا که در قطب ها مقدار پاسخ فرکانسی به سمت مقدار نامحدود میل می کند (و یا وجود ندارد)، بنا به تعریف ناحیه همگرایی (که باید مقدار پاسخ فرکانسی موجود و محدود باشد)، این ناحیه نمی تواند شامل هیچ قطبی باشد.

ب) ناحیه‌ی همگرایی تبدیل لاپلاس $x(t) + y(t)$ حداقل شامل $R_۱ \cap R_۲$ خواهد بود که $R_۱$ ناحیه‌ی همگرایی تبدیل لاپلاس $x(t)$ و $R_۲$ ناحیه‌ی همگرایی تبدیل لاپلاس $y(t)$ است؛ زیرا در اشتراک این دو ناحیه، هر دو تبدیل لاپلاس $X(s)$ و $Y(s)$ وجود دارند. با این حال، اطلاعات بیشتری نمی توان داد؛ زیرا اصل سیگنال ها تعیین کننده اند؛ به طور مثال اگر دو سیگنال قرینه ی هم باشند (یا دستکم به گونه ای باشند که خارج از یک بازه ی محدود مقدار یکدیگر را خنثی کنند)، ناحیه همگرایی تمام صفحه مختلط خواهد بود.

سوال ۲)

می دانیم برای سیگنال $x(t) = e^{-at}u(t)$:

$$\begin{aligned}X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}e^{-st}u(t)dt \\ &= \int_{۰}^{\infty} e^{-at}e^{-st}u(t)dt \\ &= \int_{۰}^{\infty} e^{-at}e^{-st}dt \\ &= \int_{۰}^{\infty} e^{-(a+s)t}dt \\ &= \frac{۱}{a+s} \quad , \quad \Re\{s\} > -\Re\{a\}\end{aligned}$$

همچنین برای سیگنال $x(t) = e^{-at}u(-t)$:

$$\begin{aligned}X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}e^{-st}u(-t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{۰} e^{-at}e^{-st}u(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{۰} e^{-at}e^{-st}dt \\ &= \int_{-\infty}^{۰} e^{-(a+s)t}dt \\ &= -\frac{۱}{a+s} \quad , \quad \Re\{s\} < -\Re\{a\}\end{aligned}$$

بنابراین

الف)

$$e^{-۲t}u(t) + e^{-۳t}u(t) \iff \frac{۱}{s+۲} + \frac{۱}{s+۳} \quad , \quad \Re\{s\} > -۲$$

ب)

$$e^t u(-t) + u(t) \iff -\frac{۱}{s+۱} + \frac{۱}{s} = \frac{۱}{s^۲+s} \quad , \quad ۰ < \Re\{s\} < ۱$$

پ)

$$x(t) = \frac{e^{(۱+۱j)t} - e^{(۱-۱j)t}}{۲j} u(-t) + e^{۲t}u(t)$$

از آنجا که ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس $e^{۲t}u(t)$ برابر $\Re\{s\} > ۲$ و ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس $\frac{e^{(۱+۱j)t}-e^{(۱-۱j)t}}{۲j}u(-t)$ برابر $\Re\{s\} < ۱$ بوده و این دو ناحیه همگرایی هیچ اشتراکی با هم ندارند، در نتیجه سیگنال حاصل جمع، تبدیل لاپلاس ندارد.

ت)

$$X(s) = \frac{۱}{s+۱} - \frac{۱}{s-۱} = \frac{-۲}{s^۲-۱} \quad , \quad -۱ < \Re\{s\} < ۱$$

ث)

$$x(t) = te^{-|t|} = t(e^{-t}u(t) + e^t u(-t)) = te^{-t}u(t) + te^t u(-t)$$

در نتیجه بر طبق خاصیت

$$tz(t) \iff -Z'(s)$$

خواهیم داشت:

$$X(s) = -\frac{d}{ds}\frac{۱}{s+۱} + \frac{d}{ds}\frac{۱}{s-۱} = \frac{۱}{(s+۱)^۲} - \frac{۱}{(s-۱)^۲} \quad , \quad -۱ < \Re\{s\} < ۱$$

سوال ۳)

الف)

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{۱}{s^۲+۹} \\ &= \frac{۱}{(s+۳j)(s-۳j)} \\ &= \frac{A}{s-۳j} + \frac{B}{s+۳j} \\ &= \frac{\frac{۱}{۶j}}{s-۳j} + \frac{-\frac{۱}{۶j}}{s+۳j} \end{aligned}$$

در نتیجه

$$x(t) = \frac{۱}{۶j}(e^{۳jt} - e^{-۳jt})u(t) = \frac{۱}{۳}\sin ۳t u(t)$$

ب)

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{s}{s^۲+۹} \\ &= \frac{s}{(s+۳j)(s-۳j)} \\ &= \frac{A}{s-۳j} + \frac{B}{s+۳j} \\ &= \frac{\frac{۱}{۲}}{s-۳j} + \frac{\frac{۱}{۲}}{s+۳j} \end{aligned}$$

در نتیجه

$$x(t) = -\frac{۱}{۲}(e^{۳jt} + e^{-۳jt})u(-t) = -\cos ۳tu(-t)$$

پ)

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{s+۱}{s^۲+۵s+۶} \\ &= \frac{s+۱}{(s+۲)(s+۳)} \\ &= \frac{A}{s+۲} + \frac{B}{s+۳} \\ &= -\frac{۱}{s+۲} + \frac{۲}{s+۳} \end{aligned}$$

بنابراین

$$x(t) = ۲e^{-۳t}u(t) + e^{-۲t}u(-t)$$

ت)

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{s^۲-s+۱}{(s+۱)^۲(s+۲)} \\ &= \frac{A_۱}{s+۱} + \frac{A_۲}{(s+۱)^۲} + \frac{B}{s+۲} \end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned} A_۱ &= \lim_{s\to -۱} \frac{d}{ds}(s+۱)^۲X(s) = -۶ \\ A_۲ &= \lim_{s\to -۱}(s+۱)^۲X(s) = ۳ \\ B &= \lim_{s\to -۱}(s+۲)X(s) = ۷ \end{aligned}$$

بنابرابن

$$x(t) = ۶e^{-t}u(-t) - ۳te^{-t}u(-t) - ۷e^{-۲t}u(-t)$$

سوال ۴)

الف) از آنجا که سیگنال $x(t)e^{-۳t}$ دارای تبدیل لاپلاس $X(s+۳)$ است، این شرط نتیجه می دهد که مقدار $X(۳+j\omega)$ محدود است و درنتیجه ناحیه همگرایی $X(s)$ شامل خط $\Re\{s\} = ۳$ خواهد بود. بنابراین شکل های الف تا ت، به ترتیب دارای نواحی همگرایی زیر خواهند بود:

$$\begin{aligned} &\Re\{s\} > ۲ \\ &\Re\{s\} > -۲ \\ &\Re\{s\} > ۲ \\ &\text{تمام صفحه‌ی مختلط} \end{aligned}$$

ب) می دانیم $x(t) * e^{-t}u(t)$ زمانی دارای تبدیل لاپلاس $\frac{X(s)}{s+۱}$ است که نواحی همگرایی تبدیل لاپلاس های سیگنال های $x(t)$ و $e^{-t}u(t)$ اشتراک داشته باشند. از آنجا که ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس $e^{-t}u(t)$ برابر $\Re\{s\} > -۱$ بوده و $X(s)$ یک قطب در $s = -۱$ دارد، بنابراین مشابه قسمت قبل، باید مقدار $\frac{X(j\omega)}{۱+j\omega}$ وجود داشته و محدود باشد و شکل های

الف تا ت، به ترتیب دارای نواحی همگرایی زیر خواهند بود:

$$-۲ < \Re\{s\} < ۲$$
$$-۲ < \Re\{s\}$$
$$\Re\{s\} < ۲$$
تمام صفحه‌ی مختلط

پ) مطابق این شرط، ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس $x(t)$ باید شامل $s = -\infty$ باشد؛ بنابراین شکل های الف تا ت، به ترتیب دارای نواحی همگرایی زیر خواهند بود:

$$\Re\{s\} < -۲$$
$$\Re\{s\} < -۲$$
$$\Re\{s\} < ۲$$
تمام صفحه‌ی مختلط

پ) مطابق این شرط، ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس $x(t)$ باید شامل $s = \infty$ باشد؛ بنابراین شکل های الف تا ت، به ترتیب دارای نواحی همگرایی زیر خواهند بود:

$$\Re\{s\} > ۲$$
$$\Re\{s\} > -۲$$
$$\Re\{s\} > ۲$$
تمام صفحه‌ی مختلط

سوال ۵)

از شرط اول نتیجه می شود که $X(s)$ باید به فرم $\frac{P(s)}{(s+a)(s+b)}$ باشد. از شرط دوم، چندجمله ای $P(s)$ نباید دارای ریشه باشد؛ در این صورت:

$$P(s) = A \neq ۰$$

به کمک شرط سوم:

$$X(s) = \frac{A}{(s + ۱ - j)(s + b)}$$

از شرط پنجم خواهیم داشت:

$$A = ۸(۱ - j)b$$

تا اینجا حل سوال کامل است؛ اما اگر سیگنال را حقیقی فرض کنیم، آنگاه مزدوج مختلط قطب $-۱ + j$ یعنی در $-۱ - j$ نیز قطب خواهیم داشت که باعث می شود:

$$A = ۱۶$$

بنابراین

$$X(s) = \frac{۱۶}{s^۲ + ۲s + ۲}$$

و از آنجا که ناحیه همگرایی $X(s)$ شامل $\Re\{s\} = -۲$ نیست، بنابراین

$$\text{ROC}: \quad \Re\{s\} > -۱$$

سوال ۶)

از شرط ۴ نتیجه می شود که $(s^۲ + ۲s + ۲)H(s)$ نباید دارای قطب جایی غیر از $s = ۰$ باشد؛ بنابراین $H(s)$ حداکثر در $s = -۱ + j$ (ساده) یا $s = -۱ - j$ (ساده) یا $s = ۰$ قطب خواهد داشت. از طرفی چون سیستم پایدار است، ناحیه همگرایی آن شامل محور $j\omega$ بوده و در نتیجه سیستم در $s = ۰$ نیز قطب ندارد.

از شرط ۲ نتیجه می شود که تبدیل لاپلاس خروجی یعنی $\frac{H(s)}{s}$ دارای قطبی روی محور $j\omega$ نیست و بنابراین $H(s)$ باید دارای صفری در $s=0$ باشد. از طرفی طبق شرط ۳، خروجی با تبدیل لاپلاس $-\frac{H(s)}{s^2}$ باید دارای قطبی روی محور $j\omega$ باشد که این الزام می کند که $H(s)$ باید دارای صفر ساده در $s=0$ باشد. به کمک شرط ۵، می توان گفت جایگذاری مقدار $s=\infty$ باعث می شود مقدار $H(s)$ صفر می شود که این مهم، نشان می دهد که درجه ی صورت $H(s)$ از مخرج آن کمتر است. چون در صورت، یک ریشه در $s=0$ داریم، درجه ی مخرج باید از ۲ بیشتر یا مساوی باشد. از طرفی، وجود قطب های $s=-1+j$ و $s=-1-j$ نتیجه می گیریم که درجه ی مخرج از ۲ بیشتر نیست؛ پس نتیجه می گیریم که درجه ی صورت و مخرج به ترتیب برابر ۱ و ۲ است. تا اینجا داریم:

$$H(s) = A\frac{s}{(s+1-j)(s+1+j)} = \frac{As}{s^2+2s+2}$$

در نهایت از شرط ۱ خواهیم داشت:

$$A = 1$$

بنابراین:

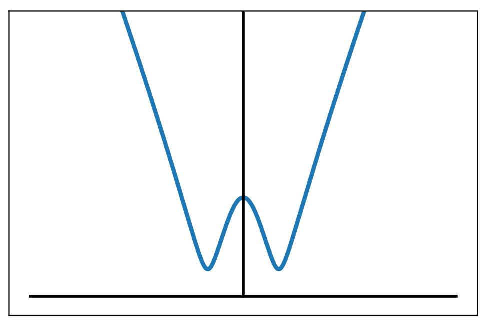
$$H(s) = \frac{s}{s^2+2s+2} \quad , \quad \Re\{s\} > -1$$

سوال ۷)

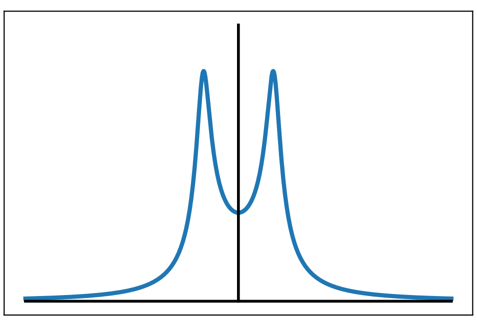
می دانیم

$$|H(j\omega)| = \frac{\text{حاصل ضرب فاصله از صفر ها}}{\text{حاصل ضرب فاصله از قطب ها}}$$

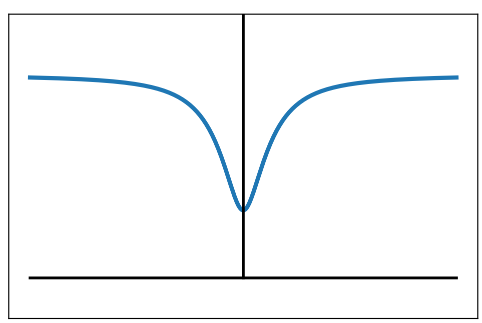
طبق رابطه‌ی فوق، به طور شهودی اندازه‌ی پاسخ فرکانسی در نزدیکی فرکانس قطب ها به سمت بینهایت و در نزدیکی فرکانس صفرها به صمت صفر میل میکند. بنابراین:



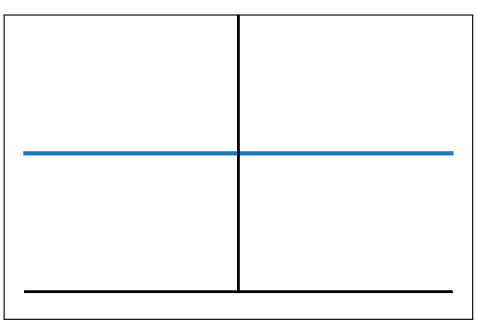
(آ) شکل ۱



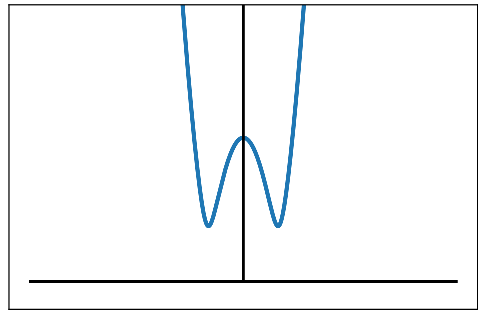
(ب) شکل ۲



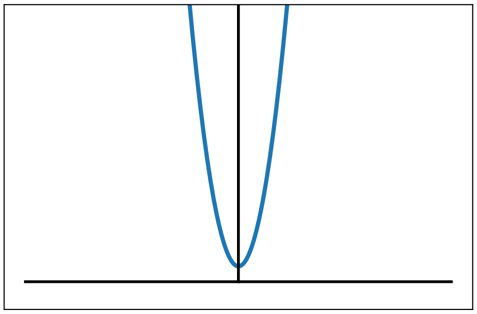
(ج) شکل ۳



(د) شکل ۴



( ) شکل ۵



(و) شکل ۶

سوال ۸)

الف)

$$H(s) = \frac{۱}{s^{۲} - s - ۲} = \frac{A}{s-۲} + \frac{B}{s+۱} = \frac{\frac{۱}{۳}}{s-۲} - \frac{\frac{۱}{۳}}{s+۱}$$

ب) سیستم پایدار:

$$h(t) = -\frac{۱}{۳}e^{-t}u(t) - \frac{۱}{۳}e^{۲t}u(-t)$$

سیستم علی:

$$h(t) = -\frac{۱}{۳}e^{-t}u(t) + \frac{۱}{۳}e^{۲t}u(t)$$

سیستم ناپایدار و غیرعلی:

$$h(t) = \frac{۱}{۳}e^{-t}u(-t) - \frac{۱}{۳}e^{۲t}u(-t)$$

سوال ۹)

۱. با توجه به تساوی $[e^s]^* = e^{s^*}$ نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} & x(t) \iff X(s) \implies \\ & X(s) = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-st}dt \implies \\ & X^*(s) = \int_{\mathbb{R}} x^*(t)e^{-s^*t}dt \implies \\ & X^*(s^*) = \int_{\mathbb{R}} x^*(t)e^{-st}dt \implies \\ & x^*(t) \iff X^*(s^*) \end{aligned}$$

ناحیه همگرایی تغییر نمی کند زیرا تبدیل $s \to s^*$ ، ناحیه همگرایی را نسبت به محور حقیقی قرینه می کند و دوباره همان ناحیه ی پیشین را نتیجه می دهد.

۲.

$$\begin{aligned} & x(t) = \frac{۱}{۲\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}ds \implies \\ & \frac{dx(t)}{dt} = \frac{۱}{۲\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} sX(s)e^{st}ds \end{aligned}$$

ناحیه همگرایی می تواند بزرگتر شود زیرا ضرب شدن تبدیل لاپلاس در s، می تواند قطبی را در $s = 0$ حذف کند.

۳.

$$\begin{aligned} & x(t) \iff X(s) \implies \\ & X(s) = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-st}dt \implies \\ & \frac{d}{ds}X(s) = \int_{\mathbb{R}} -tx(t)e^{-st}dt \implies \\ & -tx(t) \iff \frac{d}{ds}X(s) \end{aligned}$$

ناحیه همگرایی تغییر نمی کند؛ زیرا پایداری و علی بودن $x(t)$ با ضرب شدن در t تغییر نمی کند و همچنین قطب های $H(s)$ با قطب های $\frac{d}{ds}X(s)$ یکسانند.

۴. می توان گفت $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ خروجی سیستمی با ورودی $x(t)$ و پاسخ ضربه‌ی $h(t) = u(t)$ است؛ پس

$$y(t) = x(t) * u(t)$$

و باید ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس $y(t)$ شامل اشتراک نواحی همگرایی تبدیل های لاپلاس $x(t)$ و $h(t) = u(t)$ باشد که در این صورت خواهیم داشت:

$$Y(s) = X(s)H(s) = \frac{X(s)}{s} \quad , \quad R_{\text{جدید}} \supset R \cap \{s \ : \ \Re\{s\} > 0\}$$

سوال ۱۰)

الف) بله؛ زیرا طبق خاصیت ۲ سوال قبل، اگر ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس $h(t)$ شامل محور $j\omega$ و ∞ باشد، ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس $\frac{d}{dt}h(t)$ نیز شامل محور $j\omega$ و ∞ خواهد بود.

ب) علی بودن محرز است؛ زیرا به دلیل علی بودن سیستمی با پاسخ $h(t)$ داریم:

$$\int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau = \begin{cases} \int_{0}^{t} h(\tau)d\tau & , \quad t > 0 \\ 0 & , \quad t \leq 0 \end{cases}$$

اما ناپایداری الزامی نیست. مثال نقض آن، سیستمی با تابع تبدیل

$$H(s) = \frac{s}{s+1} \quad , \quad \Re\{s\} > -1$$

یا پاسخ ضربه‌ی

$$h(t) = \delta(t) - e^{-t}u(t)$$

است که در این صورت سیستمی با پاسخ ضربه‌ی

$$\int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau = e^{-t}u(t)$$

پایدار و علی خواهد بود.

سوال ۱۱)

الف)

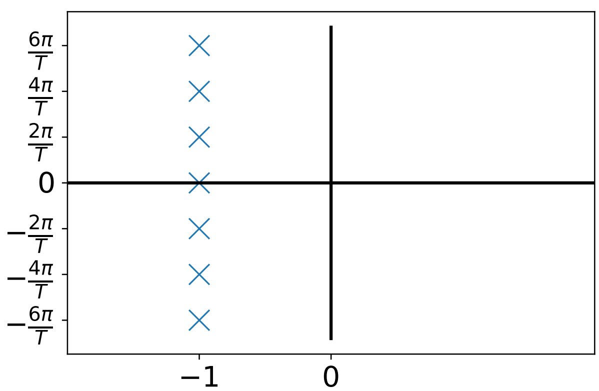
$$
\begin{aligned}
X(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nT} e^{-nTs} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nT(s+1)} \\
&= \frac{1}{1-e^{-T(s+1)}}
\end{aligned}
$$

تساوی اخیر هنگامی برقرار است که :

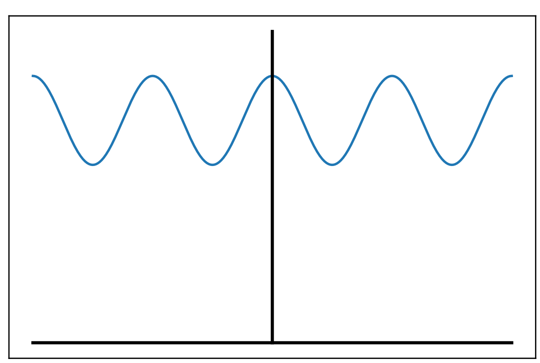
$$\Re\{T(s+1)\} > 0 \implies \Re\{T(s+1)\} > 0 \implies \Re\{s\} > -1$$

ب) تبدیل لاپلاس دارای صفر نیست (هیچگاه صفر نمی شود) و برای قطب های آن:

$$e^{T(s+1)} = 1 \iff T(s+1) = 2jk\pi \iff s = \frac{2jk\pi}{T} - 1 \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$



پ) با ترسیم $|X(j\omega)|$ خواهیم داشت:



که به وضوح متناوب است.