به نام زیبایی

پرسش های پیشنهادی آزمون پایانی

سوال ۱) تابع چگالی احتمال توام دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر است:

$$f(x,y) = \begin{cases} k(۴ - x - y) & , \quad ۱ < x < ۲ \ , \ ۰ < y < ۲ \\ ۰ & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

الف) مقدار مناسب k را بیابید.

ب) با مقدار k به دست آمده در قسمت قبل، مقدار $\mathbb{E}\{XY\}$ را به دست آورید.

سوال ۲) فرض کنید دنباله‌ی متغیرهای تصادفی $\{X_n\}$ ، از توزیع یکنواخت بین $-\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۲}$ و به طور مستقل پیروی می‌کند. به کمک قضیه‌ی حد مرکزی، توزیع متغیر تصادفی Y را به دست آورید که

$$Y = \lim_{n\to\infty} \frac{X_۱ + X_۲ + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}$$

و میانگین و واریانس آن را بیابید.

سوال ۳) فرض کنید متغیر تصادفی X، یکنواخت در بازه‌ی $[۰ , ۱]$ است. متغیر تصادفی Y را به صورت $Y = g(X)$ می سازیم. تابع g را به گونه ای تعیین کنید که Y:

الف) یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر ۱ باشد؛ یعنی

$$f(y) = \begin{cases} e^{-y} & , \quad y > ۰ \\ ۰ & , \quad y \le ۰ \end{cases}$$

ب) یک متغیر تصادفی کوشی با پارامتر π باشد؛ یعنی

$$f(y) = \frac{۱}{y^۲ + \pi^۲} \quad , \quad y \in \mathbb{R}$$

سوال ۴) تابع چگالی احتمال توام دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر است:

$$f(x,y) = \begin{cases} ۱ & , \quad |x| + ۲|y| < ۱ \\ ۰ & , \quad |x| + ۲|y| \ge ۱ \end{cases}$$

الف) چگالی های احتمال حاشیه ای X و Y را به دست آورید. همچنین ناهمبستگی، استقلال و تعامد این دو متغیر تصادفی را تحقیق کنید.

ب) چگالی احتمال $X + Y$ را به دست آورید.

سوال ۵) یک قطار و اتوبوس به طور تصادفی و مستقل از هم بین ساعات ۵ تا ۶ وارد یک ایستگاه می شوند. فردی نیز به طور تصادفی بین ساعت ۵ تا ۵ : ۳۰ وارد همان ایستگاه می شود.
الف) احتمال آن که فرد بیش از ۱۰ دقیقه منتظر قطار و اتوبوس شود چقدر است؟
ب) اگر قطار و اتوبوس هر یک ۱۰ دقیقه در ایستگاه تاخیر داشته باشند، احتمال با هم بودن آنها در ایستگاه چقدر است؟
پ) اگر فرد پس از ساعت ۵ : ۱۵ به ایستگاه برسد، با چه احتمالی به هیچ یک نمی رسد؟

سوال ۶) متغیر تصادفی و گسسته‌ی N دارای چگالی احتمال زیر است:

$$f(n) = \begin{cases} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} & , \quad n \in \mathbb{N} \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

الف) تابع مولد گشتاور آن را به دست آورید.
ب) از روی تابع مولد گشتاور، مقادیر میانگین و واریانس این متغیر تصادفی را محاسبه کنید.
(راهنمایی:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a^n = \frac{a}{(1-a)^2} \quad , \quad |a| < 1$$

)

سوال ۷) اگر X و Y، دو متغیر تصادفی نرمال با میانگین ۰ و واریانس ۱ باشند به گونه ای که $\mathrm{cov}(X,Y) = 0/5$ ، در این صورت مقدار a را به گونه ای بیابید که $X + aY$ و $X + 2Y$ مستقل از هم باشند و در این صورت، واریانس هر یک را بیابید.

سوال ۸) تاس سالمی را ۹ بار پرتاب می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی X، تعداد اعداد زوج رو آمده به شرط دانستن این باشد که در سه پرتاب اول، حداقل یک عدد فرد آمده است،
الف) چگالی احتمال X را محاسبه کنید.
ب) اگر متغیر تصادفی Y، تعداد اعداد اول رو آمده باشد، مقدار $\Pr\{X = x | Y = 0\}$ چقدر است؟

سوال ۹)
الف) تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی پواسون با پارامتر λ را به دست آورید.
ب) اگر دنباله‌ی متغیرهای تصادفی مستقل $\{X_n\}$، از نوع پواسون با پارامتر λ باشد، نشان دهید متغیر تصادفی

$$Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

، پواسون با پارامتر $N\lambda$ است.

پ) نشان دهید اگر دنباله‌ی متغیرهای تصادفی مستقل $\{X_n\}$، برنولی با پارامتر p و N از نوع پواسون با پارامتر λ باشد، متغیر تصادفی

$$Y = \sum_{n=0}^{N-1} X_n$$

دارای توزیع پواسون با پارامتر λp است.

سوال ۱۰) نشان دهید دنباله‌ی متغیرهای تصادفی $X_n = X + \frac{1}{n}$ که n عدد طبیعی و X دارای توزیع یکنواخت بین ۰ و ۱ است، در احتمال به X میل می کند.

سوال ۱۱) فرض کنید برای یک متغیر تصادفی با چگالی توزیع $f(x)$ داشته باشیم

$$\exists a \in \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = f(a - x)$$

نشان دهید میانگین و میانه‌ی این متغیر تصادفی برابر a است.

سوال ۱۲)