به نام زیبایی

پاسخ تمرینات سری نهم سیگنال ها و سیستم ها

سوال ۱)

راه اول: کانولوشن دایروی عبارتست از

$$y[n] = \sum_{k=<N>} x[k]h[n-k]$$

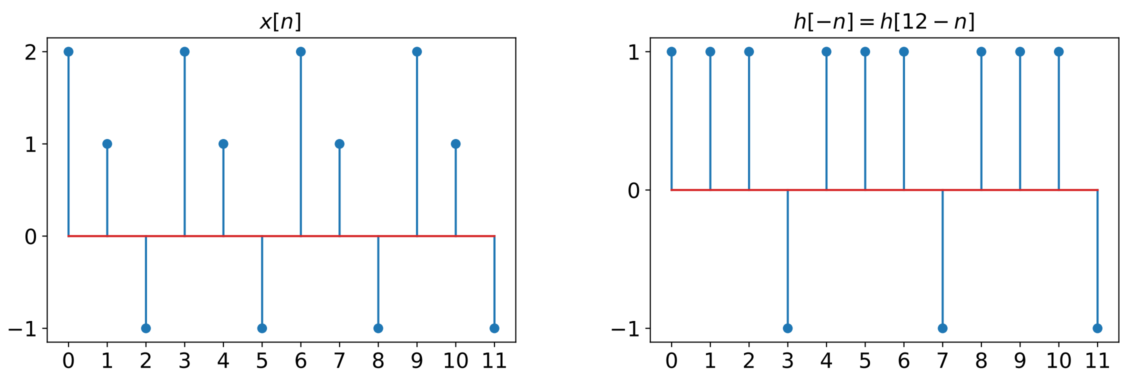
از آنجا که در کانولوشن دایره ای باید دوره‌ی تناوب هر دو سیگنال برابر باشد، تناوب هر دو سیگنال را برابر ۱۲ می گیریم؛ در این صورت:

$$y[n] = \sum_{k=<۱۲>} x[k]h[n-k]$$

اکنون می خواهیم ارتباط کانولوشن دایروی را با خطی پیدا کنیم. به طور مثال برای محاسبه‌ی $y[۰]$ می‌توان نوشت:

$$y[۰] = \sum_{k=<۱۲>} x[k]h[-k] = \sum_{k=<۱۲>} x[k]h[۱۲-k]$$

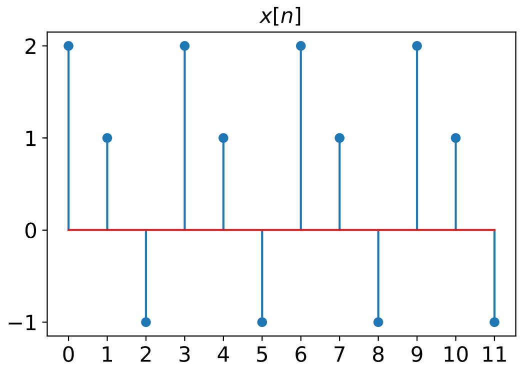
این مانند این است که کانولوشن خطی یک دوره‌ی تناوب از $x[n]$ را با یک دوره‌ی تناوب از $h[n]$ در نقطه‌ی ۰ (یا ۱۲ به دلیل متناوب بودن هر دو سیگنال با دوره‌ی ۱۲ و طبق تساوی بالا) محاسبه کنیم؛ به عبارت دیگر، دو سیگنال شکل زیر را در هم ضرب کرده و سپس جمع نمونه های حاصل را محاسبه کنیم: در اینصورت $y[۰] = ۴$.

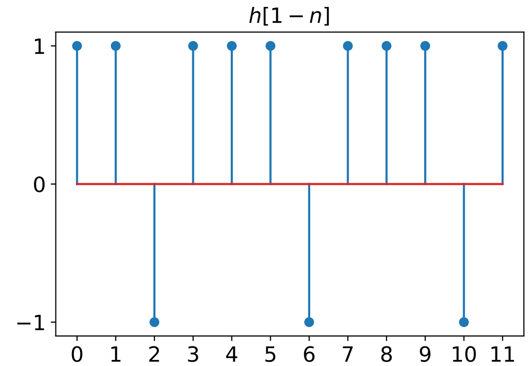


اگر بخواهیم $y[۱]$ را محاسبه کنیم، باید تساوی زیر را در نظر بگیریم:

$$y[۰] = \sum_{k=<۱۲>} x[k]h[۱-k] = \sum_{k=<۱۲>} x[k]h[۱۳-k]$$

به عبارت دیگر، سیگنالهای زیر را در هم ضرب کرده ایم:





دیده می شود که سیگنال $h[۱-n]$ از روی $h[-n]$ به این ترتیب ساخته شده است که ۱ واحد به راست شیفت دایره ای خورده است؛ یعنی نمونه‌ی ۱۱ ام سیگنال $h[-n]$ به جایگاه ۰ منتقل شده و سایر قسمت های سیگنال $h[-n]$ نیز ۱ واحد به راست رفته اند. با محاسبه‌ی مجموع فوق دوباره داریم

$$y[۱] = ۴$$

به همین ترتیب سایر نمونه های $y[n]$ نیز برابر ۴ محاسبه می شوند و می توان نوشت:

$$y[n] = ۴$$

راه دوم: با توجه به رابطه‌ی

$$y[n] = \sum_{k=<N>} x[k]h[n-k]$$

اگر $h[n]$ با دوره‌ی $N_۱$ متناوب باشد که $N_۱|۱۲$ ، آنگاه

$$y[n+N_۱] = \sum_{k=<N>} x[k]h[n+N_۱-k] = \sum_{k=<N>} x[k]h[n-k] = y[n]$$

یعنی $y[n]$ نیز با دوره‌ی $N_۱$ متناوب است. از طرف با تعویض جای h و x، با فرض آنکه $x[n]$ با دوره‌ی $N_۲$ متناوب باشد، $y[n]$ نیز با دوره‌ی $N_۲$ متناوب است. پس $y[n]$ باید با دوره‌ی $\gcd(N_۱, N_۲)$ متناوب باشد که در اینجا چون $\gcd(N_۱, N_۲) = ۱$ در نتیجه سیگنال $y[n]$ ثابت است. مقدار ثابت را به راحتی می توان به دست آورد.

راه سوم: با محاسبه‌ی سری فوریه‌ی دو سیگنال، به غیر از مضارب ۱۲ در مکانهایی که a_k غیر صفر است، b_k صفر است و بالعکس. پس حاصل ضرب $a_k b_k$ فقط در مضارب ۱۲ غیر صفر می شود که معادل با سیگنال ثابت است.

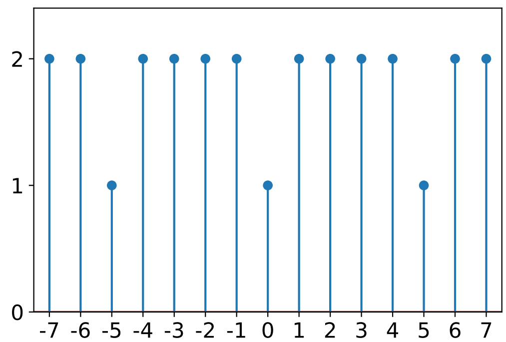
سوال ۲)

$h[n]$ شامل سه ضربه در زمان است؛ بنابراین

$$y[n] = x[n+۱] - x[n] + x[n-۱]$$

سوال ۳)

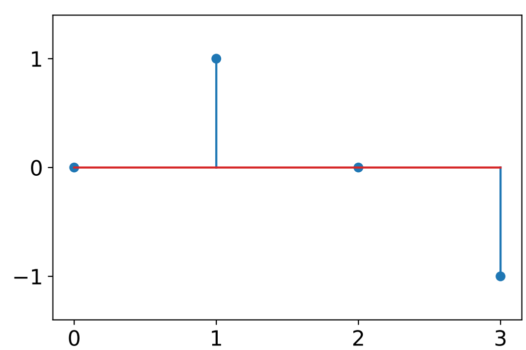
الف)



از شرط اول طبق خواص سری فوریه خواهیم داشت:

$$x[n] = -x[n](-۱)^n$$

که نشان می دهد نمونه های زوج $x[n]$ برابر صفرند؛ پس سیگنال $x[n]$ در یک دوره تناوب مانند زیر است:



ب) ضرایب سری فوریه‌ی $x[n-۱]$ برابر است با:

$$a_k e^{-jk\frac{\pi}{۴}}$$

بنابراین اگر ضرایب فوریه‌ی $y[n]$ را b_k بنامیم، آنگاه:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{۱}{۲}[a_k e^{-jk\frac{\pi}{۴}} + a_{k-۴} e^{-j(k-۴)\frac{\pi}{۴}}] \\ &= \frac{۱}{۲}[a_k e^{-jk\frac{\pi}{۴}} - a_k (-۱)^k e^{-jk\frac{\pi}{۴}}] \end{aligned}$$

بنابراین

$$f[k] = \frac{۱}{۲} e^{-jk\frac{\pi}{۴}}[۱ - (-۱)^k]$$

سوال ۴)

الف) طبق خواص می توان نوشت:

$$b_k = a_k[۱ - (-۱)^k]$$

ب) اگر ضرایب سری فوریه‌ی این سیگنال را b_k بنامیم، در این صورت b_k با دوره‌ی $N/۲$ متناوب است. در اینصورت

$$b_k = \frac{۲}{N} \sum_{n=۰}^{\frac{N}{۲}-۱} \{x[n] + x[n+N/۲]\} e^{-j\frac{۴\pi}{N}kn}$$

چنانچه بخواهیم ضرایب فوریه‌ی این سیگنال را با در نظر گرفتن دوره‌ی تناوب N محاسبه و آن را c_k نام گذاری کنیم، در این صورت:

$$c_k = \frac{۱}{N} \sum_{n=۰}^{N-۱} \{x[n] + x[n+N/۲]\} e^{-j\frac{۲\pi}{N}kn}$$

پرواضح است که $c_{۲k} = b_k$ و $c_{۲k+۱} = ۰$. از طرفی

$$c_k = a_k[۱ + (-۱)^k] = \begin{cases} ۲a_k & , \quad \text{k زوج} \\ ۰ & , \quad \text{k فرد} \end{cases}$$

در این صورت:

$$b_k = ۲a_{۲k}$$

پ) بر طبق خواص

$$b_k = a_{k-\frac{N}{۲}}$$

ت) اگر ضرایب $x[n]$ را با a_k نشان دهیم، a_k با دوره‌ی N متناوب است. اکنون فرض کنید ضرایب $x[n]$ را با دوره‌ی تناوب $۲N$ محاسبه کرده و آن را c_k نامیده ایم. در این صورت:

$$a_k = \frac{۱}{N} \sum_{n=۰}^{N-۱} x[n] e^{-j\frac{۲\pi}{N}kn}$$
$$c_k = \frac{۱}{۲N} \sum_{n=۰}^{۲N-۱} x[n] e^{-j\frac{\pi}{N}kn}$$

بنابراین $c_{۲k} = a_k$ و $c_{۲k+۱} = ۰$. از طرفی $(-۱)^n$، شیفتی به اندازه‌ی نصف دوره تناوب یعنی $N = \frac{۲N}{۲}$ در حوزه‌ی فوریه تحمیل می کند؛ پس:

$$b_k = \begin{cases} ۰ & , \quad \text{k زوج} \\ a_{\frac{k-N}{۲}} & , \quad \text{k فرد} \end{cases}$$

ث)

$$y[n] = x[n] \frac{۱ + (-۱)^n}{۲}$$

بنابراین طبق خواص اگر N زوج باشد:

$$b_k = \frac{a_k + a_{k-\frac{N}{۲}}}{۲}$$

و اگر N فرد باشد:

$$b_k = \begin{cases} a_k & , \quad \text{زوج k} \\ \frac{a_k + a_{\frac{k-N}{۲}}}{۲} & , \quad \text{فرد k} \end{cases}$$

سوال ۵)

در هر خاصیت، ضرایب سری فوریه‌ی سیگنال را با c_k نشان می دهیم.

الف)

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{۱}{N} \sum_{n=<N>} \sum_{r=<N>} x[r]y[n-r]e^{-jkn\frac{۲\pi}{N}} \\ &= \frac{۱}{N} \sum_{r=<N>} x[r] \sum_{n=<N>} y[n-r]e^{-jkn\frac{۲\pi}{N}} \\ &= \frac{۱}{N} \sum_{r=<N>} x[r] \sum_{n=<N>} y[n-r]e^{-jk(n-r)\frac{۲\pi}{N}} e^{-jkr\frac{۲\pi}{N}} \\ &= \frac{۱}{N} \sum_{r=<N>} x[r] \sum_{m=<N>} y[m]e^{-jkm\frac{۲\pi}{N}} e^{-jkr\frac{۲\pi}{N}} \\ &= \sum_{r=<N>} x[r]b_k e^{-jkr\frac{۲\pi}{N}} \\ &= N a_k b_k \end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{۱}{N} \sum_{n=<N>} x[n]y[n]e^{-jk\frac{۲\pi}{N}n} \\ &= \frac{۱}{N} \sum_{n=<N>} \sum_{p=<N>,q=<N>} a_p b_q e^{jk(p+q)\frac{۲\pi}{N}n} e^{-jk\frac{۲\pi}{N}n} \\ &= \frac{۱}{N} \sum_{p=<N>,q=<N>} a_p b_q \sum_{n=<N>} e^{jk(p+q)\frac{۲\pi}{N}n} e^{-jk\frac{۲\pi}{N}n} \\ &= \sum_{p=<N>} a_p b_{k-p} \end{aligned}$$

پ)

از خواص سری فوریه فورا نتیجه می شود.

ت) با تعریف $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ خواهیم داشت:

$$y[n] - y[n-۱] = x[n]$$

در نتیجه

$$b_k(۱ - e^{-jk\frac{۲\pi}{N}}) = a_k$$

به ازای $k = ۰$ باید الزاما داشته باشیم $a_۰ = ۰$ و به ازای $k \neq ۰$:

$$b_k = \frac{a_k}{۱ - e^{-jk\frac{۲\pi}{N}}}$$

ث)

$$x[n] = \sum_{n=<N>} a_k e^{jk\frac{۲\pi}{N}n}$$

$$\begin{aligned} x^*[n] &= \sum_{n=<N>} a_k^* e^{-jk\frac{۲\pi}{N}n} \\ &= \sum_{n=<N>} a_{-k}^* e^{jk\frac{۲\pi}{N}n} \end{aligned}$$

در نتیجه

$$x[n] = x^*[n] \iff a_k = a_{-k}^*$$

از این گزاره، سایر گزاره ها نتیجه می شوند.

ج) می دانیم

$$x[-n] \implies a_{-k}$$

بنابراین به کمک تقارن هرمیتیک:

$$\begin{aligned} x_e[n] = \frac{x[n] + x[-n]}{۲} &\implies \frac{a_k + a_{-k}}{۲} = \frac{a_k + a_k^*}{۲} = \Re\{a_k\} \\ x_o[n] = \frac{x[n] - x[-n]}{۲} &\implies \frac{a_k - a_{-k}}{۲} = \frac{a_k - a_k^*}{۲} = j\Im\{a_k\} \end{aligned}$$

چ) طبق خاصیت قسمت ب، سیگنال $x[n]x^*[n]$ دارای ضرایب سری فوریه‌ی $\sum_{p=<N>} a_p a_{p-k}^*$ است؛ از طرفی محاسبه کردن ضریب سری فوریه‌ی سیگنال در فرکانس صفر، معادل با $\frac{۱}{N}$ حاصل جمع سیگنال روی یک دوره‌ی تناوب آن است؛ بنابراین با قرار دادن $k = ۰$ در ضرایب بالا و جمع بستن کل سیگنال خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{N} \sum_{n=<N>} |x[n]|^۲ = \frac{۱}{N} \sum_{n=<N>} x[n]x^*[n] = \sum_{p=<N>} a_p a_p^* = \sum_{p=<N>} |a_p|^۲$$