به نام زیبایی

پاسخ تمرینات سری سوم سیگنال ها و سیستم ها

سوال ۱)

با مشتق گیری از سیگنال ورودی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t) &= -5e^{-5t}u(t-2) + e^{-5t}\delta(t-2)\\ &= -5e^{-5t}u(t-2) + e^{-10}\delta(t-2)\end{aligned}$$

از آنجا که سیستم LTI است، پاسخ آن به ورودی فوق برابر است با

$$-5y(t) + e^{-10}h(t-2)$$

که $h(t)$ پاسخ ضربه است. از طرفی

$$-5y(t) + e^{-10}h(t-2) = -5y(t) + \frac{1}{1+t^2}u(t)$$

درنتیجه

$$h(t) = \frac{e^{10}}{1+(t+2)^2}u(t+2)$$

سوال ۲)

برای حل این دسته از سوالات، یک راه حل مناسب ساختن ورودی دوم از روی ورودی اول به کمک شیفت های متوالی و مقیاس های دامنه است. از آنجا که سیستم LTI است، این دو عمل به همان ترتیب، روی خروجی نیز اعمال می شوند.

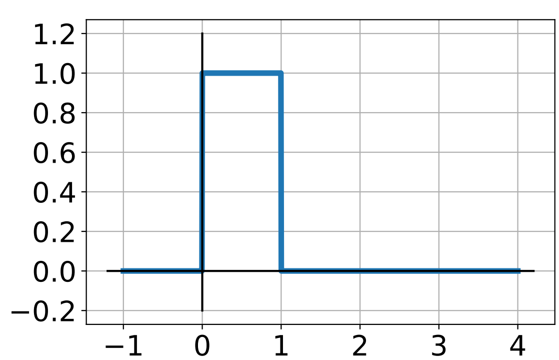
همچنین می توان ورودی اول را از روی ورودی دوم به کمک شیفت های متوالی و مقیاس های دامنه ساخت و همان عملیات را روی خروجی اعمال کرد. در این سوال، با کمی دقت دیده می شود

$$x_1(t) = x_2(t) + x_2(t-1)$$

به دلیل LTI بودن سیستم

$$y_1(t) = y_2(t) + y_2(t-1)$$

باید شکل سیگنالی یافت که جمع آن با شیفت یافته اش، خروجی اول را بدهد. می توان شکل سیگنال زیر را در نظر گرفت:



که جمع شیفت یافته‌ی آن با خودش، $y_۱(t)$ را می دهد.

سوال ۳)

الف)

با مشتق گیری از $u(f(t))$ به کمک قاعده‌ی زنجیری خواهیم داشت :

$$\frac{d}{dt}u(f(t)) = f'(t)\delta(f(t))$$

در نزدیکی هر ریشه‌ی r_i از $f(t)$، طبق قضیه‌ی تیلور می توان تابع $f(t)$ را به صورت زیر نوشت:

$$f(t) = f'(r_i)(t - r_i)$$

بنابراین در نزدیکی این ریشه:

$$\delta(f(t)) = \delta(f'(r_i)(t - r_i)) = \frac{۱}{|f'(r_i)|}\delta(t - r_i)$$

چون تعداد n ریشه به این ترتیب موجود است، در نهایت می توان نوشت:

$$\delta(f(t)) = \sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{|f'(r_i)|}\delta(t - r_i)$$

ب)

(i) برای این انتگرال، ۰ ریشه‌ی مضاعف $t^۲$ است. بنابراین از رابطه‌ی فوق نمی توان بهره گرفت. با این حال، به کمک تعریف δ:

$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{۱}{۲\Delta} & , \quad -\Delta < t < \Delta \\ ۰ & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

بنابراین

$$\delta_\Delta(t^۲) = \begin{cases} \frac{۱}{۲\Delta} & , \quad -\Delta < t^۲ < \Delta \\ ۰ & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{۱}{۲\Delta} & , \quad -\sqrt{\Delta} < t < \sqrt{\Delta} \\ ۰ & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$
$$= \frac{۱}{\sqrt{\Delta}}\delta_{\sqrt{\Delta}}(t)$$

از آنجا که $\lim_{\Delta\to۰^+}\delta_{\sqrt{\Delta}}(t) \to \delta(t)$ ، در این صورت $\frac{۱}{\sqrt{\Delta}}\delta_{\sqrt{\Delta}}(t)$ به ضربه ای با سطح زیر ∞ میل می کند و حاصل انتگرال، ∞ است.

(ii) ریشه های ساده‌ی $\sin\frac{۱}{t}$ در $[۰, \infty)$ عبارتند از:

$$r_k = \frac{۱}{k\pi} \quad , \quad k \in \mathbb{N}$$

در این صورت

$$\begin{aligned}\delta\left(\sin\frac{۱}{t}\right) &= \sum_{k=۱}^{\infty}\frac{r_k^۲}{|\cos\frac{۱}{r_k}|}\delta\left(t-\frac{۱}{k\pi}\right)\\ &= \sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{k^۲\pi^۲}\delta\left(t-\frac{۱}{k\pi}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\circ}^{\infty}\delta\left(\sin\frac{۱}{t}\right)dt &= \int_{\circ}^{\infty}\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{k^۲\pi^۲}\delta\left(t-\frac{۱}{k\pi}\right)dt\\ &= \sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{k^۲\pi^۲}\int_{\circ}^{\infty}\delta\left(t-\frac{۱}{k\pi}\right)dt\\ &= \sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{k^۲\pi^۲}\\ &= \frac{۱}{۶}\end{aligned}$$

(iii)

$$\delta(t^۲-t) = \delta(t)+\delta(t-۱) \implies$$

$$\begin{aligned}\int_{-۱}^{۳}\sin\pi t\delta(t^۲-t)dt &= \int_{-۱}^{۳}\sin\pi t[\delta(t)+\delta(t-۱)]dt\\ &= \int_{-۱}^{۳}\sin\pi t\delta(t)dt+\int_{-۱}^{۳}\sin\pi t\delta(t-۱)dt\\ &= \int_{-۱}^{۳}\sin\circ\pi\delta(t)dt+\int_{-۱}^{۳}\sin ۱\pi\delta(t-۱)dt\\ &= \circ\end{aligned}$$

(iv) برای تحلیل $\delta^۲(t)$، از $\delta_\Delta(t)$ کمک می گیریم. در این صورت:

$$\delta_\Delta^۲(t) = \begin{cases}\frac{۱}{۴\Delta^۲} & , \quad -\Delta < t < \Delta\\ \circ & , \quad \text{در غیر این صورت}\end{cases} = \frac{۱}{۲\Delta}\delta_\Delta(t)$$

که به سمت ضربه ای با مساحت ∞ میل می کند و حاصل انتگرال، ∞ است.

سوال ۴)

الف)

(i) نادرست. سیستم $y(t) = x(t-۱)$ ، LTI و علی است؛ ولی معکوس آن $y(t) = x(t+۱)$ علی نیست.

(ii) درست. شرط پایداری سیستم LTI با پاسخ ضربه‌ی $h[n]$، $\sum_n |h[n]| < \infty$ است که اگر تعداد نقاط پاسخ ضربه محدود باشد، جمع فوق همواره محدود است. به چنین سیستمی FIR[1] می‌گویند.

[1] Finite Impulse Response

ب)
می توان نوشت

$$\begin{aligned}\sum_n |h[n]| &= \sum_{h[n]\geq ۰} h[n] + \sum_{h[n]<۰} -h[n] \\ &= \sum_n x[-n]h[n]\end{aligned}$$

که در آن

$$x[-n] = \begin{cases} ۱ & , \quad h[n] \geq ۰ \\ -۱ & , \quad h[n] < ۰ \end{cases}$$

در این صورت

$$x[n] = \begin{cases} ۱ & , \quad h[-n] \geq ۰ \\ -۱ & , \quad h[-n] < ۰ \end{cases}$$

از طرفی می توان جمع فوق را برابر خروجی سیستم LTI با پاسخ ضربه‌ی $h[n]$ به ورودی $x[n]$ در لحظه ی ۰ دانست؛ زیرا:

$$y[n] = \sum_k h[k]x[n-k]$$

بنابراین

$$y[۰] = \sum_k h[k]x[-k]$$

که طبق استدلال بالا، مقدار آن برابر $\sum_n |h[n]|$ و نامحدود است؛ بنابراین سیستم ناپایدار است.