

به نام زیبایی

تمرینات سری یازدهم سیگنال ها و سیستم ها

سوال (۱) (مفهومی)

الف) چرا ناحیه‌ی همگرایی تبدیل لاپلاس نمی تواند شامل قطب باشد؟

ب) اگر سیگنال های  $x(t)$  و  $y(t)$  دارای تبدیل های لاپلاس  $X(s)$  و  $Y(s)$  باشند، تحت چه شرایطی سیگنال  $z(t) = x(t) + y(t)$  دارای تبدیل لاپلاس است؟ (راهنمایی: به نواحی همگرایی توجه کنید).

سوال (۲)

تبدیل لاپلاس هریک از سیگنال های زیر را به همراه نواحی همگرایی و نمودار صفر-قطب به دست آورید. مواردی را که تبدیل لاپلاس ندارند، با استدلال پیدا کنید.

الف)  $x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-3t}u(t)$

ب)  $x(t) = e^t u(-t) + u(t)$

پ)  $x(t) = e^t \sin t u(-t) + e^{2t} u(t)$

ت)  $x(t) = e^t u(-t) + e^{-t} u(t)$

ث)  $x(t) = t e^{-|t|}$

سوال (۳)

برای هریک از تبدیل لاپلاس های زیر، سیگنال حوزه زمان را با توجه به ناحیه همگرایی داده شده به دست آورید.

الف)  $X(s) = \frac{1}{s^2+9}$  ,  $\Re\{s\} > 0$

ب)  $X(s) = \frac{s}{s^2+9}$  ,  $\Re\{s\} < 0$

پ)  $X(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6}$  ,  $-3 < \Re\{s\} < -2$

ت)  $X(s) = \frac{s^2-s+1}{(s+1)^2(s+2)}$  ,  $\Re\{s\} < -2$

سوال (۴)

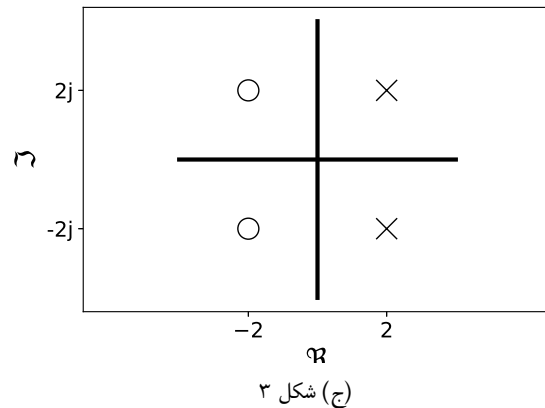
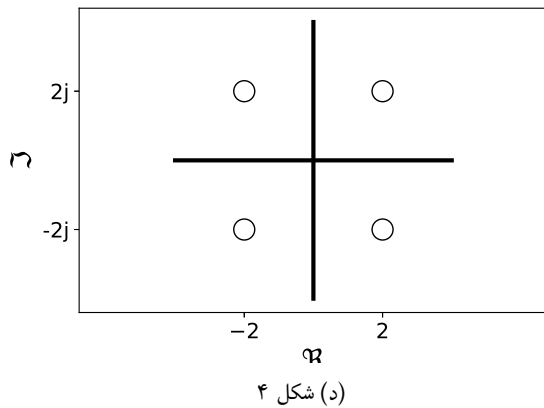
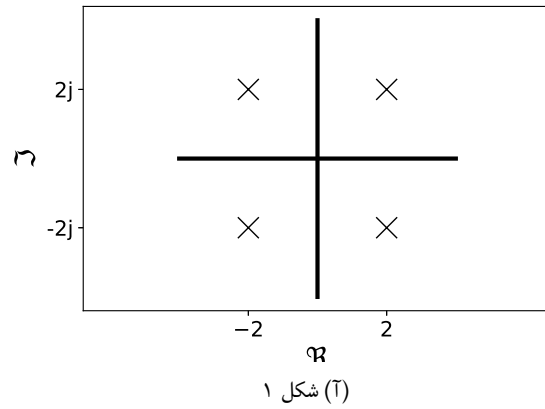
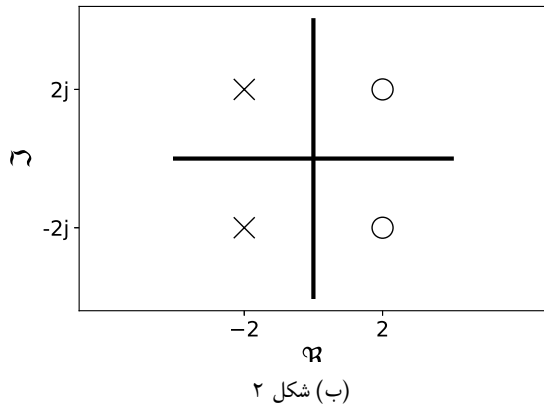
برای هریک از گزاره های زیر برای سیگنال  $x(t)$  و هریک از نمودار های صفر-قطب زیر، ناحیه‌ی همگرایی را تعیین کنید (۱۶ حالت مختلف وجود دارد).

الف)  $x(t)e^{-3t}$  مطلقا انتگرال پذیر است.

ب)  $x(t) * [e^{-t}u(t)]$  مطلقا انتگرال پذیر است.

پ)  $x(t) = 0$  ,  $t > 1$

ت)  $x(t) = 0$  ,  $t < -1$



## سوال (۵)

حقایق زیر در مورد سیگنال  $x(t)$  با تبدیل لاپلاس  $X(s)$  به ما داده شده است:

الف)  $X(s)$  دقیقا دو قطب دارد.

ب)  $X(s)$  هیچ صفر محدودی ندارد (می تواند در  $\pm\infty$  صفر داشته باشد).

پ)  $X(s)$  یک قطب در  $s = -1 + j$  دارد.

ت)  $e^{3t}x(t)$  مطلقا انتگرال پذیر نیست.

ث)  $X(0) = 8$

در اینصورت  $X(s)$  و ناحیه همگرایی آن را بیابید.

## سوال ۶)

فرض کنید اطلاعات زیر در مورد یک سیستم پایدار و علی با پاسخ ضربه‌ی  $h(t)$  و پاسخ فرکانسی  $H(s)$  به ما داده شده است:

۱.  $H(1) = 0.2$

۲. اگر ورودی  $u(t)$  باشد، خروجی مطلقاً انتگرال پذیر است.

۲. اگر ورودی  $tu(t)$  باشد، خروجی مطلقاً انتگرال پذیر نیست.

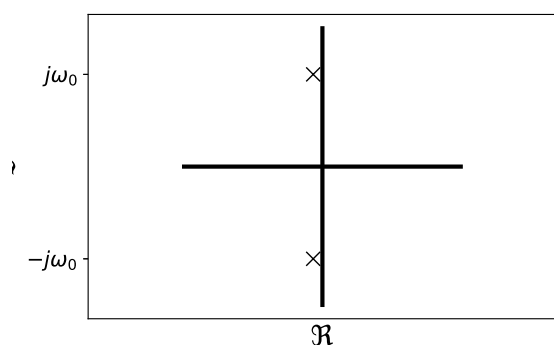
۴. سیگنال  $\frac{d^2 h(t)}{dt^2} + 2 \frac{dh(t)}{dt} + 2h(t)$  دارای دوره‌ی محدود است.

۵.  $H(s)$  دقیقاً یک صفر در  $\infty$  دارد.

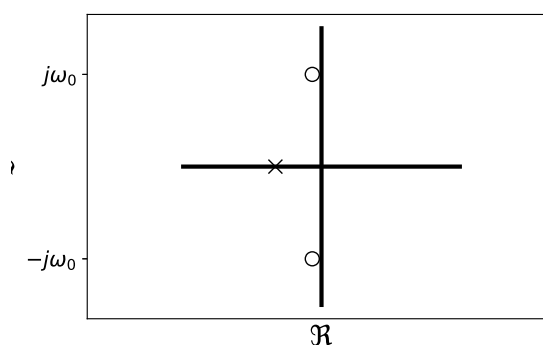
در این صورت،  $H(s)$  و ناحیه همگرایی آن را بیابید.

## سوال ۷)

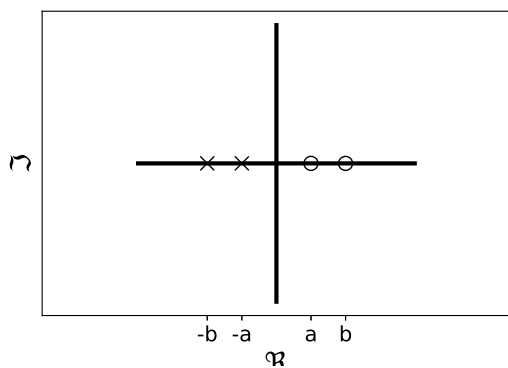
برای هریک از نمودارهای صفر-قطب زیر، اندازه‌ی تبدیل فوریه را به صورت هندسی (و تقریبی) رسم کنید.



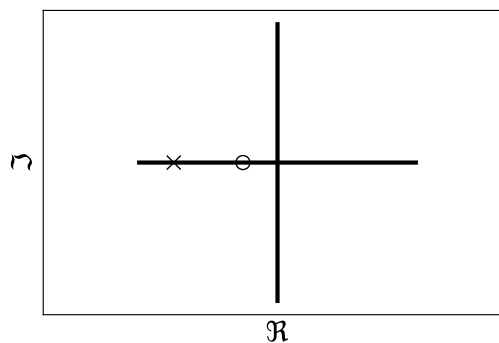
(ب) شکل ۲



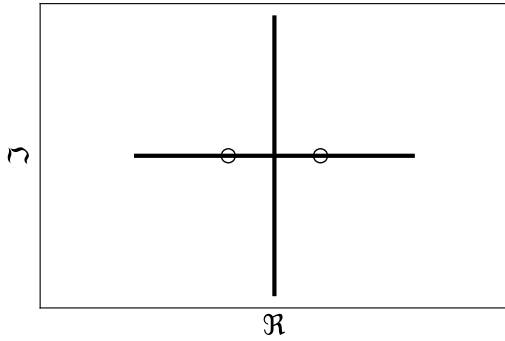
(آ) شکل ۱



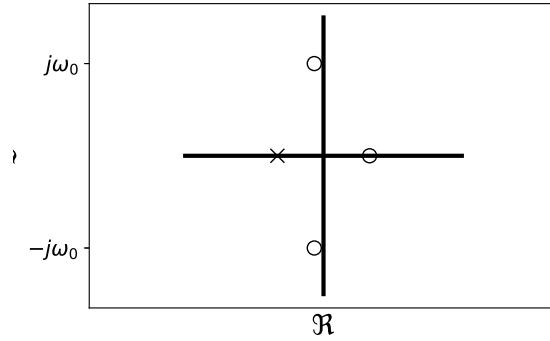
(د) شکل ۴



(ج) شکل ۳



(و) شکل ۶



( ) شکل ۵

### سوال ۸

سیستم LTI ای با رابطه‌ی ورودی-خروجی زیر داده شده است:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} - \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = x(t)$$

فرض کنید پاسخ ضربه‌ی آن  $h(t)$  با تبدیل لاپلاس  $H(s)$  باشد.

الف)  $H(s)$  را به صورت حاصل تقسیم دو چندجمله‌ای گویا بر حسب  $s$  بنویسید.

ب)  $h(t)$  را برای حالت‌های زیر بیابید:

۱. سیستم پایدار باشد.

۲. سیستم علی باشد.

۳. سیستم نه پایدار و نه علی باشد.

### سوال ۹ (خواص تبدیل لاپلاس)

اگر  $x(t)$  دارای تبدیل لاپلاس  $X(s)$  با ناحیه همگرایی  $\text{ROC} = R$  باشد، نشان دهید:

۱.

$$x^*(t) \iff X^*(s^*) \quad , \quad \text{ROC} = R$$

۲.

$$\frac{d}{dt}x(t) \iff sX(s) \quad , \quad \text{حداقل } \text{ROC} = R$$

۳.

$$-tx(t) \iff \frac{d}{ds}X(s) \quad , \quad \text{ROC} = R$$

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \iff \frac{1}{s} X(s) \quad , \quad \text{ROC} = R \cap \{\Re\{s\} > 0\} \text{ حداقل}$$

سوال ۱۰)

فرض کنید سیستم پایدار و علی با پاسخ ضربه‌ی  $h(t)$  با تبدیل لاپلاس گویا داده شده است.

الف) آیا سیستمی با پاسخ ضربه‌ی  $\frac{dh(t)}{dt}$  همواره پایدار و علی است؟

ب) آیا سیستمی با پاسخ ضربه‌ی  $\int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$  همواره ناپایدار و علی است؟

سوال ۱۱) (امتیازی)

اگر سیگنال  $x(t)$  به صورت زیر داده شده باشد:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nT} \delta(t - nT)$$

الف)  $X(s)$  را به همراه ناحیه همگرایی آن به دست آورید.

ب) نمودار صفر-قطب  $X(s)$  را رسم کنید.

پ) به کمک تعبیر هندسی نمودار صفر-قطب، نتیجه بگیرید تبدیل فوریه‌ی  $x(t)$ ،  $X(j\omega)$ ، متناوب است.