

به نام او

تمرینات سری یازدهم درس احتمال مهندسی

سوال ۱) برای هر یک از pdf های توام داده شده زیر، موارد $f_X(x)$ ، $E\{X\}$ و $E\{XY\}$ را به دست آورید.

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi} e^{-x^2-y^2} \quad (\text{الف})$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}(1 - |x-1| - |y-1|) & , \quad |x-1| + |y-1| < 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases} \quad (\text{ب})$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{1-x} & , \quad 0 < x < y < 1 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases} \quad (\text{پ})$$

ت) X و Y دو متغیر تصادفی گسسته (با مقادیر صحیح) اند و pmf آنها به صورت زیر است:

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{16} & , \quad x^2 + y^2 \leq 10, \quad x \geq y \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

سوال ۲) در جدول زیر که توزیع احتمال را برای متغیرهای تصادفی X و Y نشان می دهد،

		Y	
		0	1
X	0	P_1	P_2
	1	P_3	P_4

الف) مقدار $\text{cov}(X, Y)$ را به دست آورید و تحقیق کنید که چه زمانی داریم $\text{cov}(X, Y) = 0$ ؟

ب) آیا برای این دو متغیر تصادفی، ناهمبستگی، استقلال را نتیجه می دهد؟ اگر چنین است، نشان دهید و اگر چنین نیست، مثالی برای مقادیر p_1, p_2, p_3, p_4 بزنید که ناهمبستگی، استقلال

را نتیجه نمی‌دهد (دقت داشته باشید که جمع احتمالات برابر یک است و احتمالات نامنفی اند).

سوال ۳) چگالی احتمال زیر را در نظر بگیرید:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1 + \alpha \sin[2\pi(x+y)] & , \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که α مقدار مناسبی است.

الف) کوواریانس این دو متغیر تصادفی را به دست آورید. به ازای چه مقادیری از α ، این دو متغیر تصادفی ناهمبسته هستند؟

ب) مقادیری از α را بیابید که این دو متغیر تصادفی مستقل باشند.

سوال ۴) ابتدا فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای توزیع یکنواخت در بازه‌ی $[0, 1]$ و مستقل هستند. توزیع احتمال متغیرهای تصادفی

الف) XY

ب) $X + Y$

پ) $\frac{X}{Y}$ (امتیازی)

ت) $\max\{X, Y\}$ (امتیازی)

ث) $\min\{X, Y\}$ (امتیازی)

را به دست آورید.

حال فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی نمایی و مستقل با پارامتر ۱ باشند. توزیع احتمال هر یک از متغیرهای تصادفی قسمت ب و پ را بیابید (بخش پ همچنان امتیازی است!).

(توزیع احتمال یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر λ به صورت زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases}$$

توزیع احتمال یک متغیر تصادفی یکنواخت در بازه‌ی $[a, b]$ به صورت زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , \quad a < x < b \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

(