

به نام خدا

تمرینات سری هشتم درس آمار و احتمال

مهلت تحویل : ۱۹ آذر ماه ۹۸

سوال ۱) در پرتاب دو تاس سالم و متمایز، متغیر تصادفی  $X$  را مجموع اعداد رو آمده و  $Y$  را تعداد ۶ های رو آمده در نظر بگیرید.

الف) مقدار  $\Pr\{X = ۱, Y = ۷\}$  را به دست آورید.

ب) مقدار  $E\{XY\}$  چقدر است؟

پ) (امتیازی) آیا این دو متغیر تصادفی ناهمبسته اند؟

سوال ۲) در جدول زیر که توزیع احتمال را برای متغیرهای تصادفی  $X$  و  $Y$  نشان می دهد،

$X \backslash Y$	0	1
0	$p_1$	$p_2$
1	$p_3$	$p_4$

الف) مقدار  $\text{cov}(X, Y)$  را به دست آورید و تحقیق کنید کنید چه زمانی داریم  $\text{cov}(X, Y) = 0$  ؟

ب) آیا برای این دو متغیر تصادفی، ناهمبستگی، استقلال را نتیجه می دهد؟ اگر چنین است، نشان دهید و اگر چنین نیست، مثالی برای مقادیر  $p_1, p_2, p_3, p_4$  بزنید که ناهمبستگی، استقلال را نتیجه نمی دهد (دقت داشته باشید که جمع احتمالات برابر یک است و احتمالات نامنفی اند).

سوال ۳) چگالی احتمال زیر را در نظر بگیرید:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 1 + \alpha \sin[2\pi(x + y)] & , \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که  $\alpha$  مقدار مناسبی است.

الف) کوواریانس این دو متغیر تصادفی را به دست آورید. آیا این دو متغیر تصادفی ناهمبسته هستند؟

ب) مقادیری از  $\alpha$  را بیابید که این دو متغیر تصادفی مستقل باشند.

سوال ۴) تابع چگالی احتمال توام زیر را در نظر بگیرید:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\rho^2} (x^2 + y^2 - 2\rho xy) \right]$$

الف) ثابت کنید  $X$  (و مشابه همچنین  $Y$ ) دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس ۱ است.

ب) ثابت کنید اگر  $\rho = 0$ ، در این صورت متغیرهای تصادفی  $X$  و  $Y$  مستقل هستند.

پ) (امتیازی) ثابت کنید اگر متغیرهای تصادفی  $X$  و  $Y$  مستقل باشند آنگاه  $\rho = 0$ .

ت) (امتیازی تحقیقی) تابع چگالی احتمالی که در صورت این سوال تعریف شد، حالت خاصی از چگالی احتمال چند متغیره‌ی نرمال است.

ضریب همبستگی  $\rho$  در حالت دو متغیره، میزان همبستگی دو متغیر تصادفی را نشان می‌دهد. ابتدا تحقیق کنید به ازای چه مقداری از  $\rho$ ، این چگالی احتمال، دایروی-مقارن خواهد بود. چگالی احتمال دو متغیره را به ازای مقادیر  $\rho = 0.5$ ،  $\rho = 0$ ،  $\rho = -0.5$  ترسیم کنید. به طور شهودی چگونه می‌توان از روی نمودارها، به میزان همبستگی این دو متغیر تصادفی پی برد؟

این تابع چگالی را به صورت دیگری نیز می‌توان نوشت:

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \det(\Sigma)}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \cdot ([x, y] \Sigma^{-1} [x, y]^T) \right]$$

که بردار  $[x, y]$  یک بردار سطری دوتایی است و

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس  $\Sigma$  در متغیرهای تصادفی نرمال توام، مفهوم مهمی است و ماتریس کوواریانس نام دارد.

به ازای هر یک از مقادیر  $\rho = 0.5$ ،  $\rho = 0$ ،  $\rho = -0.5$  و به کمک دستور `mvnrnd()` در متلب، ۱۰۰۰ جفت داده‌ی تصادفی تولید و آنها را در یک نمودار پراکندگی ترسیم کنید (پس از اجرای دستور فوق در متلب به شیوه‌ی مناسب، ۱۰۰۰ داده‌ی تصادفی برای  $X$  و ۱۰۰۰ داده‌ی تصادفی برای  $Y$  خواهید داشت. کافی است  $Y$  را برحسب  $X$  رسم کنید تا به نمودار پراکندگی برسید. همچنین

می توانید از Help متلب برای توضیحات بیشتر در مورد `mvnrnd()` بهره ببرید. چگونه از روی نمودار پراکندگی می توان میزان همبستگی دو متغیر تصادفی را نشان داد؟ چه شهودی در آن نهفته است؟

(این کار تحقیقی، امتیاز ویژه ای دارد و مهلت آن تا پایان امتحان نهایی خواهد بود؛ بنابراین زمان، محدودکننده نخواهد بود. بسیار مهم است که در این تحقیق، تحلیل و دیدگاه خود را نیز ذکر بفرمایید.)

هنگامی که  $\rho = 1$ ، توضیح دهید چه اتفاقی می افتد؟ تفاوت آن با حالت  $\rho = -1$  چیست؟ آیا همچنان می توان از چگالی احتمال داده شده استفاده کرد؟ چرا؟