به نام زیبایی

پاسخ تمرینات سری ششم سیگنال ها و سیستم ها

سوال ۱)

الف)

$$x(t-t_0)+x(t+t_0) \iff a_k e^{-j\frac{2\pi}{T}kt_0}+a_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt_0}=2a_k\cos\frac{2\pi}{T}kt_0$$

ب)

$$x'(t) \iff jk\omega_0 a_k$$

بنابراین

$$\frac{d^n}{dt^n}x(t) \iff (jk\omega_0)^n a_k$$

پ) سیگنال $x(t+b)$ دارای ضرایب سری فوریه ی $a_k e^{j\frac{2\pi}{T}kb}$ است. از آنجا که فشردگی یا گستردگی سیگنال متناوب، ضرایب سری فوریه‌ی آن را تغییر نمی دهد، بنابراین، سیگنال $x(at+b)$ نیز دارای ضرایب سری فوریه ی $a_k e^{j\frac{2\pi}{T}kb}$ است.

ت)

$$b_k=\frac{1}{T}\int_0^{T_1} x(t)e^{jk\frac{2\pi}{T}t}dt$$

سوال ۲)

الف)

$$\begin{aligned}
c_k&=\frac{1}{T}\int_0^{T} x(t)y(t)e^{-j2\pi k\frac{1}{T}t}dt\\
&=\frac{1}{T}\int_0^{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_m e^{j2\pi m\frac{1}{T}t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n e^{j2\pi n\frac{1}{T}t}e^{-j2\pi k\frac{1}{T}t}dt\\
&=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_m b_n\int_0^{T} e^{j2\pi m\frac{1}{T}t}e^{j2\pi n\frac{1}{T}t}e^{-j2\pi k\frac{1}{T}t}dt\\
&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_m b_{k-m}
\end{aligned}$$

ب) چنانچه فرض کنیم ضرایب سری فوریه ی سیگنال های $y(t)=x(t)\sin\frac{2\pi}{T}t$ و $z(t)=x^*(t)$ به ترتیب برابر b_n و c_n باشد، در این صورت

$$b_k=\frac{a_{k-1}-a_{k+1}}{2j}$$

و

$$c_k=a^*_{-k}$$

در این صورت به کمک تساوی اثبات شده در قسمت قبل:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 \sin\frac{2\pi}{T}tdt &= \frac{1}{T}\int_0^T x^*(t)x(t)\sin\frac{2\pi}{T}tdt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T y(t)z(t)dt \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_{k-1}-a_{k+1}}{2j}\cdot a_k^* \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_k^* a_{k-1}-a_k^* a_{k+1}}{2j} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_k^* a_{k-1}}{2j} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_k^* a_{k+1}}{2j} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_{k+1}^* a_k}{2j} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_k^* a_{k+1}}{2j} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_{k+1}^* a_k}{2j} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\left[a_k a_{k+1}^*\right]^*}{2j} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_{k+1}^* a_k}{2j} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\left[a_k a_{k+1}^*\right]^*}{2j} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Im\left\{a_k a_{k+1}^*\right\}
\end{aligned}$$