

vollständiges Differential ist, so daß also durch die Anfangs- und Endwerte der Koordinaten die Arbeit gegeben ist, während sie im zweiten Fall von dem ganzen Überführungswege abhängt.

9. Die einfachen hier angeführten Beispiele, die an sich gar keine Schwierigkeiten bieten, dürften genügen, um den Sinn der Operationen der analytischen Mechanik zu erläutern. Neue prinzipielle Aufklärungen über die Natur der mechanischen Vorgänge darf man von der analytischen Mechanik nicht erwarten. Vielmehr muß die prinzipielle Erkenntnis im wesentlichen abgeschlossen sein, bevor an den Aufbau einer analytischen Mechanik gedacht werden kann, welche nur die einfachste praktische Bewältigung der Aufgaben zum Ziel hat. Wer dieses Verhältnis verkennen würde, dem würde Lagranges große Leistung, die auch hier eine wesentlich ökonomische ist, unverständlich bleiben. Poincaré ist von diesem Fehler nicht ganz freizusprechen.

10. Erwähnt muß werden, daß durch Möbius, Hamilton, Graßmann u. a. eine neue Formwandlung der Mechanik eingeleitet ist, indem die genannten Forscher mathematische Begriffe entwickelt haben, welche sich genauer und unmittelbarer den geometrischen Vorstellungen anschließen, als jene der gewöhnlichen analytischen Geometrie, wodurch also die Vorteile analytischer Allgemeinheit und geometrischer Anschaulichkeit vereinigt werden. Diese Wandlung liegt freilich noch außerhalb der Grenzen einer historischen Darstellung.

Die „Ausdehnungslehre“ von 1844, in welcher Graßmann zum erstenmal seine Gedanken darlegte, ist in mehrfacher Beziehung merkwürdig. Die Einleitung enthält wertvolle erkenntnistheoretische Bemerkungen. Die Ausdehnungslehre wird als eine allgemeinere Wissenschaft entwickelt, von welcher die Geometrie einen besonders dreidimensionalen Fall darstellt, und bei dieser Gelegenheit werden die Grundlagen der letzteren einer Kritik unterzogen. Die neuen und fruchtbaren Begriffe der Summe von Strecken, des Produktes von Strecken u. a. zeigen sich auch auf die Mechanik anwendbar. Die Newtonschen Prinzipien unterzieht Graßmann ebenfalls einer Kritik und glaubt dieselben auf einen Ausdruck bringen zu können „Die Gesamtkraft (oder die Gesamtbewegung), die einem Verein von materiellen Teilchen zu irgendeiner Zeit einwohnt, ist die Summe aus der Gesamtkraft (oder der Gesamtbewegung), die

ihm zu irgendeiner früheren Zeit einwohnte, und den sämtlichen Kräften, die ihm in der Zwischenzeit von außen mitgeteilt sind; wenn nämlich alle Kräfte als Strecken aufgefaßt werden von konstanter Richtung und Länge, und auf an Masse gleiche Punkte bezogen werden.“ Unter Kraft versteht hier Graßmann die unzerstörbar eingeprägte Geschwindigkeit. Die ganze Auffassung ist der Hertzschen sehr verwandt. Die Kräfte (Geschwindigkeiten) stellen sich als Strecken, die Momente als in bestimmtem Sinne gezählte Flächen dar usw., wodurch jede Entwicklung sehr anschaulich und kurz ausfällt. Den Hauptvorteil sieht jedoch Graßmann darin, daß jeder Schritt der Rechnung zugleich der reine Ausdruck des begrifflichen Fortschritts ist, während letzterer bei der gewöhnlichen Methode durch Einführung von drei willkürlichen Koordinaten ganz in den Hintergrund tritt. Der Unterschied zwischen der analytischen und synthetischen Methode wird wieder aufgehoben und die Vorteile beider vereinigen sich. Die S. 154 durch ein Beispiel veranschaulichte verwandte Methode Hamiltons kann eine Vorstellung von diesen Vorteilen geben.

#### 4. Die Ökonomie der Wissenschaft.<sup>1</sup>

1. Alle Wissenschaft hat Erfahrungen zu ersetzen oder zu ersparen durch Nachbildung und Vorbildung von Tatsachen in Gedanken, welche Nachbildungen leichter zur Hand sind als die Erfahrung selbst und diese in mancher Beziehung vertreten können. Diese ökonomische Funktion der Wissenschaft, welche deren Wesen ganz durchdringt, wird schon durch die allgemeinsten Überlegungen klar. Mit der Erkenntnis des ökonomischen Charakters verschwindet auch alle Mystik aus der Wissenschaft. Die Mitteilung der Wissenschaft durch den Unterricht bezweckt, einem Individuum Erfahrung zu ersparen durch Übertragung der Erfahrung eines andern Individuums. Ja es werden sogar die Erfahrungen ganzer Generationen durch die schriftliche Aufbewahrung in Bibliotheken späteren Generationen übertragen und diesen daher erspart. Natürlich ist auch die

<sup>1</sup> Vgl. die Leitgedanken meiner naturwissenschaftlichen Erkenntnislehre und ihre Aufnahme durch die Zeitgenossen („Rivista di Scienza“, Vol. VII, 1910, Nr. 14, 2, oder „Physikalische Zeitschrift“, 1910, S. 599—606).

Sprache, das Mittel der Mitteilung, eine ökonomische Einrichtung. Die Erfahrungen werden mehr oder weniger vollkommen in einfachere, häufiger vorkommende Elemente zerlegt und zum Zwecke der Mitteilung stets mit einem Opfer an Genauigkeit symbolisiert. Diese Symbolisierung ist bei der Lautsprache durchgängig noch eine rein nationale und wird es wohl noch lange bleiben. Die Schriftsprache nähert sich aber allmählich dem Ideale einer internationalen Universalschrift, denn sie ist keine reine Lautschrift mehr. Wir müssen die Zahlzeichen, die algebraischen und mathematischen Zeichen überhaupt, die chemischen Zeichen, die musikalische Notenschrift, die (Brückesche) phonetische Schrift, schon als Teile einer künftigen Universalschrift betrachten, die zum Teil schon sehr abstrakter Natur und fast ganz international sind. Die Analyse der Farben ist physikalisch und physiologisch auch bereits so weit, daß eine unzweideutige internationale Bezeichnung der physikalischen Farben und der Farbenempfindungen keine prinzipiellen Schwierigkeiten mehr hat. Endlich liegt in der chinesischen Schrift eine wirkliche Begriffsschrift vor, welche von verschiedenen Völkern phonetisch ganz verschieden gelesen, aber von allen in demselben Sinne verstanden wird. Ein einfacheres Zeichensystem könnte diese Schrift zu einer universellen machen. Die Beseitigung des Konventionellen und historisch Zufälligen aus der Grammatik und die Beschränkung der Formen auf das Notwendige, wie dies im Englischen fast erreicht ist, wird der Einführung einer solchen Schrift vorausgehen müssen. Der Vorteil einer solchen Schrift läge nicht allein in deren Allgemeinheit. Das Lesen einer derartigen Schrift wäre von dem Verstehen derselben nicht verschieden. Unsere Kinder lesen oft, was sie nicht verstehen. Der Chinese kann nur lesen, was er versteht.

2. Wenn wir Tatsachen in Gedanken nachbilden, so bilden wir niemals die Tatsachen überhaupt nach, sondern nur nach jener Seite, die für uns wichtig ist; wir haben hierbei ein Ziel, das unmittelbar oder mittelbar aus einem praktischen Interesse hervorgewachsen ist. Unsere Nachbildungen sind immer Abstraktionen. Auch hierin spricht sich ein ökonomischer Zug aus.

Die Natur setzt sich aus den durch die Sinne gegebenen Elementen zusammen. Der Naturmensch faßt aber zunächst gewisse Komplexe dieser Elemente heraus, die mit einer rela-

tiven Stabilität auftreten und die für ihn wichtiger sind. Die ersten und ältesten Worte sind Namen für „Dinge“. Hierin liegt schon ein Absehen von der Umgebung der Dinge, von den fortwährenden kleinen Veränderungen, welche diese Komplexe erfahren und welche als weniger wichtig nicht beachtet werden. Es gibt in der Natur kein unveränderliches Ding. Das Ding ist eine Abstraktion, der Name ein Symbol für einen Komplex von Elementen, von deren Veränderung wir absehen. Daß wir den ganzen Komplex durch ein Wort, durch ein Symbol bezeichnen, geschieht, weil wir ein Bedürfnis haben, alle zusammengehörigen Eindrücke auf einmal wachzurufen. Sobald wir auf einer höhern Stufe auf diese Veränderungen achten, können wir natürlich nicht zugleich die Unveränderlichkeit festhalten, wenn wir nicht zum „Ding an sich“ und ähnlichen widerspruchsvollen Vorstellungen gelangen wollen. Die Empfindungen sind auch keine „Symbole der Dinge“. Vielmehr ist das „Ding“ ein Gedankensymbol für einen Empfindungskomplex von relativer Stabilität. Nicht die Dinge (Körper), sondern Farben, Töne, Drucke, Räume, Zeiten (was wir gewöhnlich Empfindungen nennen) sind eigentliche Elemente der Welt.

Der ganze Vorgang hat lediglich einen ökonomischen Sinn. Wir beginnen bei Nachbildung der Tatsachen mit den stabilern gewöhnlichen, uns geläufigen Komplexen und fügen nachträglich das Ungewöhnliche korrigierend hinzu. Wenn wir z. B. von einem durchbohrten Zylinder, von einem Würfel mit abgestutzten Ecken sprechen, so ist dies genau genommen eigentlich ein Widerspruch, wenn wir nicht die eben angegebene Auffassung annehmen. Alle Urteile sind derartige Ergänzungen und Korrekturen schon vorhandener Vorstellungen.

3. Wenn wir von Ursache und Wirkung sprechen, so heben wir willkürlich jene Momente heraus, auf deren Zusammenhang wir bei Nachbildung einer Tatsache in der für uns wichtigen Richtung zu achten haben. In der Natur gibt es keine Ursache und keine Wirkung. Die Natur ist nur einmal da. Wiederholungen gleicher Fälle, in welchen  $A$  immer mit  $B$  verknüpft wäre, also gleiche Erfolge unter gleichen Umständen, also das Wesentliche des Zusammenhangs von Ursache und Wirkung, existieren nur in der Abstraktion, die wir zum Zweck der Nachbildung der Tatsachen vornehmen. Ist uns eine Tat-

sache geläufig geworden, so bedürfen wir dieser Heraushebung der zusammenhängenden Merkmale nicht mehr, wir machen uns nicht mehr auf das Neue, Auffallende aufmerksam, wir sprechen nicht mehr von Ursache und Wirkung. Die Wärme ist die Ursache der Spannkraft des Dampfes. Ist uns das Verhältnis geläufig geworden, so stellen wir uns den Dampf gleich mit der zu seiner Temperatur gehörigen Spannkraft vor. Die Säure ist die Ursache der Rötung der Lackmustinktur. Später gehört aber diese Rötung unter die Eigenschaften der Säure.

Hume hat sich zuerst die Frage vorgelegt: Wie kann ein Ding *A* auf ein anderes *B* wirken? Er erkennt auch keine Kausalität, sondern nur eine uns gewöhnlich und geläufig gewordene Zeitfolge an. Kant hat richtig erkannt, daß nicht die bloße Beobachtung uns die Notwendigkeit der Verknüpfung von *A* und *B* lehren kann. Er nimmt einen angeborenen Verstandesbegriff an, unter welchen ein in der Erfahrung gegebener Fall subsumiert wird. Schopenhauer, der im wesentlichen denselben Standpunkt hat, unterscheidet eine vierfache Form des „Satzes vom zureichenden Grunde“, die logische, physische und mathematische Form und das Gesetz der Motivation. Diese Formen unterscheiden sich aber nur nach dem Stoff, auf welchen sie angewandt werden, welcher teils der äußern und teils der innern Erfahrung angehört.

Die naive und natürliche Aufklärung scheint folgende zu sein. Die Begriffe Ursache und Wirkung entstehen erst durch das Bestreben, die Tatsachen nachzubilden. Zunächst entsteht nur eine Gewohnheit der Verknüpfung von *A* und *B*, *C* und *D*, *E* und *F* usw. Beobachtet man, wenn man schon viele Erfahrung besitzt, eine Verknüpfung von *M* und *N*, so erkennt man oft *M* als aus *A*, *C*, *E*, und *N* als aus *B*, *D*, *F* bestehend, deren Verknüpfung schon geläufig ist und uns mit einer höhern Autorität gegenübertritt. Dadurch erklärt es sich, daß der erfahrene Mensch jede neue Erfahrung mit andern Augen ansieht als der Neuling. Die neue Erfahrung tritt der ganzen ältern gegenüber. In der Tat gibt es also einen „Verstandesbegriff“, unter welchen jede neue Erfahrung subsumiert wird; derselbe ist aber durch die Erfahrung selbst entwickelt. Die Vorstellung von der Notwendigkeit des Zusammenhangs von Ursache und Wirkung bildet sich wahrscheinlich durch unsere

willkürliche Bewegung und die Veränderungen, welche wir mittelbar durch diese hervorbringen, wie dies Hume flüchtig angenommen, selbst aber nicht aufrecht gehalten hat. Wichtig ist es für die Autorität der Begriffe Ursache und Wirkung, daß sich dieselben instinktiv und unwillkürlich entwickeln, daß wir deutlich fühlen, persönlich nichts zur Bildung derselben beigetragen zu haben. Ja, wir können sogar sagen, daß das Gefühl für Kausalität nicht vom Individuum erworben, sondern durch die Entwicklung der Art vorgebildet sei. Ursache und Wirkung sind also Gedankendinge von ökonomischer Funktion. Auf die Frage, warum sie entstehen, läßt sich keine Antwort geben. Denn eben durch die Abstraktion von Gleichförmigkeiten erlernen wir erst die Frage „warum“.

4. Fassen wir die Einzelheiten der Wissenschaft ins Auge, so tritt ihr ökonomischer Charakter noch mehr hervor. Die sogenannten beschreibenden Wissenschaften müssen sich vielfach damit begnügen, einzelne Tatsachen nachzubilden. Wo es angeht, wird das Gemeinsame mehrerer Tatsachen ein für allemal herausgehoben. Bei höher entwickelten Wissenschaften gelingt es, die Nachbildungsanweisung für sehr viele Tatsachen in einen einzigen Ausdruck zu fassen. Statt z. B. die verschiedenen vorkommenden Fälle der Lichtbrechung uns einzeln zu merken, können wir alle vorkommenden sofort nachbilden oder vorbilden, wenn wir wissen, daß der einfallende, der gebrochene Strahl und das Lot in einer Ebene liegen und  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$  ist.

Wir haben dann statt der unzähligen Brechungsfälle bei verschiedenen Stoffkombinationen und Einfallswinkeln nur diese Anweisung und die Werte der *n* zu merken, was viel leichter angeht. Die ökonomische Tendenz ist hier unverkennbar. In der Natur gibt es auch kein Brechungsgesetz, sondern nur verschiedene Fälle der Brechung. Das Brechungsgesetz ist eine zusammenfassende konzentrierte Nachbildungsanweisung für uns, und zwar nur bezüglich der geometrischen Seite der Tatsache.

5. Am weitesten nach der ökonomischen Seite sind die Wissenschaften entwickelt, deren Tatsachen sich in nur wenige gleichartige abzählbare Elemente zerlegen lassen, wie z. B. die Mechanik, in welcher wir nur mit Räumen, Zeiten, Massen zu

tun haben. Die ganze vorgebildete Ökonomie der Mathematik kommt diesen Wissenschaften zugute. Die Mathematik ist eine Ökonomie des Zählens. Zahlen sind Ordnungszeichen, die aus Rücksichten der Übersicht und Ersparung selbst in ein einfaches System gebracht sind. Die Zähloperationen werden als von der Art der Objekte unabhängig erkannt und ein für allemal eingeübt. Wenn ich zu 5 gleichartigen Objekten 7 hinzufüge, so zähle ich zur Bestimmung der Summe zuerst noch einmal alle durch, dann bemerke ich, daß ich von 5 gleich weiter zählen kann, und bei mehrmaliger Wiederholung solcher Fälle erspare ich mir das Zählen ganz und antizipiere das bereits bekannte Resultat des Zählens.

Alle Rechnungsoperationen haben den Zweck, das direkte Zählen zu ersparen und durch die Resultate schon vorher vorgenommenen Zählprozesse zu ersetzen. Wir wollen dieselbe Zähloperation nicht öfter wiederholen, als es nötig ist. Schon die vier Spezies enthalten reichliche Belege für die Richtigkeit dieser Auffassung. Dieselbe Tendenz führt aber auch zur Algebra, welche die formgleichen Zähloperationen, soweit sie sich unabhängig von dem Werte der Zahlen ausführen lassen, ein für allemal darstellt. Aus der Gleichung

$$\frac{x^2 - y^2}{x + y} = x - y$$

lernen wir z. B., daß die kompliziertere Zähloperation links, sich stets durch die einfachere rechts ersetzen läßt, was auch  $x$  und  $y$  für Zahlen sein mögen. Wir ersparen uns dadurch die kompliziertere Operation in jedem künftigen Fall auszuführen. Mathematik ist die Methode, neue Zähloperationen soweit als möglich und in der sparsamsten Weise durch bereits früher ausgeführte, also nicht zu wiederholende, zu ersetzen. Es kann hierbei vorkommen, daß die Resultate von Operationen verwendet werden, welche vor Jahrhunderten wirklich ausgeführt worden sind.

Anstrengendere Kopfoperationen können oft durch mechanische Kopfooperationen mit Vorteil ersetzt werden. Die Theorie der Determinanten verdankt z. B. ihren Ursprung der Bemerkung, daß es nicht nötig ist, die Auflösung der Gleichungen von der Form

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

aus welchen sich ergibt

$$x = -\frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = -\frac{P}{N}$$

$$y = -\frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = -\frac{Q}{N}$$

jedesmal aufs neue durchzuführen, sondern, daß man die Auflösung aus den Koeffizienten herstellen kann, indem man dieselben nach einem gewissen Schema anschreibt und in mechanischer Weise mit denselben operiert. Es ist

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = N$$

und analog

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = P, \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = Q.$$

Bei mathematischen Operationen kann sogar eine gänzliche Entlastung des Kopfes eintreten, indem man einmal ausgeführte Zähloperationen durch mechanische Operationen mit Zeichen symbolisiert und, statt die Hirnfunktion auf Wiederholung schon ausgeführter Operationen zu verschwenden, sie für wichtigere Fälle spart. Ähnlich sparsam verfährt der Kaufmann, indem er, statt seine Kisten selbst herumzuschieben, mit Anweisungen auf dieselben operiert. Die Handarbeit des Rechners kann sogar noch durch Rechenmaschinen übernommen werden. Solcher Maschinen gibt es bekanntlich schon mehrere. Dem Mathematiker Babbage, der eine derartige Maschine konstruiert hat, waren die hier dargelegten Gedanken schon sehr klar.

Nicht immer muß ein Zählresultat durch wirkliche Zählung, es kann auch indirekt gefunden werden. Man kann z. B. leicht ermitteln, daß eine Kurve, deren Quadratur für die Abszisse  $x$  den Wert  $x^m$  hat, einen Zuwachs  $m x^{m-1} dx$  der Quadratur für den Abszissenzuwachs  $dx$  ergibt. Dann weiß man auch, daß  $\int m x^{m-1} dx = x^m$ , d. h. man erkennt, daß zu dem Zuwachs  $m x^{m-1} dx$  die Größe  $x^m$  gehört, so wie man eine Frucht an ihrer Schale erkennt. Solche durch Umkehrung zufällig gefundene Resultate werden in der Mathematik vielfach verwendet.

Es könnte auffallen, daß längst geleistete wissenschaftliche Arbeit wiederholt verwendet werden kann, was bei mechanischer Arbeit natürlich nicht angeht. Wenn jemand, der täglich einen Gang zu machen hat, einmal durch Zufall einen kürzern Weg findet und nun stets denselben einschlägt, indem er sich der Abkürzung erinnert, erspart er sich allerdings die Differenz der Arbeit. Allein die Erinnerung ist keine eigentliche Arbeit, sondern eine Auslösung von zweckmäßigerer Arbeit. Gerade so verhält es sich mit der Verwendung wissenschaftlicher Gedanken.

Wer Mathematik treibt, ohne sich in der angedeuteten Richtung Aufklärung zu verschaffen, muß oft den unbehaglichen Eindruck erhalten, als ob Papier und Bleistift ihn selbst an Intelligenz überträfen. Mathematik in dieser Weise als Unterrichtsgegenstand betrieben ist kaum bildender als die Beschäftigung mit Kabbala oder dem magischen Quadrat. Notwendig entsteht dadurch eine mystische Neigung, welche gelegentlich ihre Früchte trägt.

6. Die Physik liefert nun ganz ähnliche Beispiele einer Ökonomie der Gedanken, wie diejenigen, welche wir eben betrachtet haben. Ein kurzer Hinweis darauf wird genügen. Das Trägheitsmoment erspart uns die Betrachtung der einzelnen Massenteile. Mit Hilfe der Kraftfunktion ersparen wir die Untersuchung der einzelnen Kraftkomponenten. Die Einfachheit der Überlegungen mit Hilfe der Kraftfunktion beruht darauf, daß schon eine Menge Überlegungen dem Auffinden der Eigenschaften der Kraftfunktion vorausgehen mußten. Die Gaußsche Dioptrik erspart uns die Betrachtung der einzelnen brechenden Flächen eines dioptrischen Systems und ersetzt diese durch die Haupt- und Brennpunkte. Die Betrachtung der einzelnen Flächen mußte aber der Auffindung der Haupt- und Brennpunkte vorausgehen. Die Gaußsche Dioptrik erspart nur die fortwährende Wiederholung dieser Betrachtung.

Man muß also sagen, daß es gar kein wissenschaftliches Resultat gibt, welches prinzipiell nicht auch ohne alle Methode gefunden werden könnte. Tatsächlich ist aber in der kurzen Zeit eines Menschenlebens und bei dem begrenzten Gedächtnis des Menschen ein nennenswertes Wissen nur durch die größte Ökonomie der Gedanken erreichbar. Die Wissenschaft kann

daher selbst als eine Minimumaufgabe angesehen werden, welche darin besteht, möglichst vollständig die Tatsachen mit dem geringsten Gedankenaufwand darzustellen.

7. Alle Wissenschaft hat nach unserer Auffassung die Funktion, Erfahrung zu ersetzen. Sie muß daher zwar einerseits in dem Gebiet der Erfahrung bleiben, eilt aber doch andererseits der Erfahrung voraus, stets einer Bestätigung, aber auch Widerlegung gewärtig. Wo weder eine Bestätigung noch eine Widerlegung ist, dort hat die Wissenschaft nichts zu schaffen. Sie bewegt sich immer nur auf dem Gebiete der unvollständigen Erfahrung. Muster solcher Zweige der Wissenschaft sind die Theorien der Elastizität und der Wärmeleitung, die beide den kleinsten Teilen der Körper nur dieselben Eigenschaften beilegen, welche uns die Beobachtung an größern Teilen direkt kennen lehrt. Die Vergleichung zwischen Theorie und Erfahrung kann mit der Verfeinerung der Beobachtungsmittel immer weiter getrieben werden.

Die Erfahrung allein, ohne die sie begleitenden Gedanken, würde uns stets fremd sein. Diejenigen Gedanken, welche auf dem größten Gebiet festgehalten werden können und am ausgiebigsten die Erfahrung ergänzen, sind die wissenschaftlichsten. Man geht bei der Forschung nach dem Prinzip der Kontinuität vor, weil nur nach diesem Prinzip eine nützliche und ökonomische Auffassung der Erfahrung sich ergeben kann.

8. Wenn wir einen langen elastischen Stab einklemmen, so kann derselbe in langsame, direkt beobachtbare Schwingungen versetzt werden. Diese Schwingungen kann man sehen, tasten, graphisch verzeichnen usw. Bei Abkürzung des Stabes werden die Schwingungen rascher und können nicht mehr direkt gesehen werden; der Stab gibt ein verwischtes Bild, eine neue Erscheinung. Allein die Tastempfindung ist der frühern noch ähnlich; wir können den Stab seine Bewegungen noch aufzeichnen lassen, und wenn wir die Vorstellung der Schwingungen noch festhalten, so sehen wir die Ergebnisse der Versuche voraus. Bei weiterer Abkürzung des Stabes ändert sich auch die Tastempfindung, er fängt zudem an zu tönen, es tritt also wieder eine neue Erscheinung auf. Da sich aber nicht alle Erscheinungen auf einmal gänzlich ändern, sondern immer nur eine oder die andere, bleibt der begleitende Gedanke der Schwingung,

der ja nicht an eine einzelne gebunden ist, noch immer nützlich, noch immer ökonomisch. Selbst wenn der Ton so hoch und die Schwingungen so klein geworden sind, daß die erwähnten Beobachtungsmittel der frühern Fälle versagen, stellen wir uns mit Vorteil noch den tönenden Stab schwingend vor und können die Schwingungen der dunklen Streifen im Spektrum des polarisierten Lichts eines Glasstabes voraussagen. Würden alle Erscheinungen bei weiterer Abkürzung plötzlich in neue übergehen, so würde die Vorstellung der Schwingung nichts mehr nützen, weil dieselbe kein Mittel mehr bieten würde, die neuen Erfahrungen durch die frühern zu ergänzen.

Wenn wir zu den wahrnehmbaren Handlungen der Menschen uns unwahrnehmbare Empfindungen und Gedanken, ähnlich den unserigen, hinzudenken, so hat diese Vorstellung einen ökonomischen Wert, indem sie uns die Erfahrung verständlich macht, d. h. ergänzt und erspart. Diese Vorstellung wird nur deshalb nicht als eine große wissenschaftliche Entdeckung betrachtet, weil sie sich so mächtig aufdrängt, daß jedes Kind sie findet. Man verfährt ganz ähnlich, wenn man sich einen eben hinter einer Säule verschwundenen bewegten Körper oder einen eben nicht sichtbaren Kometen mit allen seinen vorher beobachteten Eigenschaften in seiner Bahn fortbewegt denkt, um durch das Wiedererscheinen nicht überrascht zu werden. Man füllt die Erfahrungslücken durch die Vorstellungen aus, welche eben die Erfahrung an die Hand gegeben hat.

9. Nicht jede bestehende wissenschaftliche Theorie ergibt sich so natürlich und ungekünstelt. Wenn z. B. chemische, elektrische, optische Erscheinungen durch Atome erklärt werden, so hat sich die Hilfsvorstellung der Atome nicht nach dem Prinzip der Kontinuität ergeben, sie ist vielmehr für diesen Zweck eigens erfunden. Atome können wir nirgends wahrnehmen, sie sind wie alle Substanzen Gedankendinge. Ja, den Atomen werden zum Teil Eigenschaften zugeschrieben, welche allen bisher beobachteten widersprechen. Mögen die Atomtheorien immerhin geeignet sein, eine Reihe von Tatsachen darzustellen, die Naturforscher, welche Newtons Regeln des Philosophierens sich zu Herzen genommen haben, werden diese Theorien nur als provisorische Hilfsmittel gelten lassen und einen Ersatz durch eine natürlichere Anschauung anstreben.

Die Atomtheorie hat in der Physik eine ähnliche Funktion wie gewisse mathematische Hilfsvorstellungen; sie ist ein mathematisches Modell zur Darstellung der Tatsachen. Wenn man auch die Schwingungen durch Sinusformeln, die Abkühlungsvorgänge durch Exponentielle, die Fallräume durch Quadrate der Zeiten darstellt, so denkt doch niemand daran, daß die Schwingung an sich mit einer Winkel- oder Kreisfunktion, der Fall an sich mit dem Quadrieren etwas zu schaffen hat. Man hat eben bemerkt, daß zwischen den beobachteten Größen ähnliche Beziehungen stattfinden wie zwischen gewissen uns geläufigen Funktionen und benutzt diese geläufigern Vorstellungen zur bequemen Ergänzung der Erfahrung. Naturerscheinungen, welche in ihren Beziehungen nicht jenen der uns geläufigen Funktionen gleichen, sind jetzt sehr schwer darzustellen. Das kann anders werden mit den Fortschritten der Mathematik. — Als solche mathematische Hilfsvorstellungen können auch Räume von mehr als drei Dimensionen nützlich werden, wie ich dies anderwärts auseinandergesetzt habe. Man hat deshalb nicht nötig, dieselben für mehr zu halten als für Gedankendinge.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Bekanntlich hat sich durch die Bemühungen von Lobatschewsky, Bolyai, Gauß, Riemann allmählich die Einsicht Bahn gebrochen, daß dasjenige, was wir Raum nennen, ein spezieller wirklicher Fall eines allgemeineren denkbaren Falles mehrfacher quantitativer Mannigfaltigkeit sei. Der Raum des Gesichts und Getastetes ist eine dreifache Mannigfaltigkeit, er hat drei Dimensionen; jeder Ort in demselben kann durch drei voneinander unabhängige Merkmale bestimmt werden. Es ist nun eine vierfache oder noch mehrfache raumähnliche Mannigfaltigkeit denkbar. Und auch die Art der Mannigfaltigkeit kann anders gedacht werden, als sie im gegebenen Raum angetroffen wird. Wir halten diese Aufklärung, um die sich Riemann am meisten verdient gemacht hat, für sehr wichtig. Die Eigenschaften des gegebenen Raumes erscheinen sofort als Objekte der Erfahrung, und alle geometrischen Pseudotheorien, welche dieselben herausphilosophieren wollen, entfallen.

Einem Wesen, welches in der Kugelfläche leben würde und keinen andern Raum zum Vergleich hätte, würde sein Raum überall gleich beschaffen erscheinen. Es könnte denselben für unendlich halten und würde nur durch die Erfahrung vom Gegenteil überzeugt. Von zwei Punkten eines größten Kreises senkrecht zu demselben ebenfalls nach größten Kreisen fortschreitend, würde dieses Wesen kaum erwarten, daß diese Kreise sich irgendwo schneiden. So kann auch für den uns gegebenen Raum nur die Erfahrung lehren, ob derselbe endlich ist, ob Parallellinien in demselben sich schneiden usw. Diese Aufklärung kann kaum hoch genug angeschlagen werden. Eine ähnliche Aufklärung, wie sie Riemann für die Wissenschaft

So verhält es sich auch mit allen Hypothesen, welche zur Erklärung neuer Erscheinungen herangezogen werden. Unsere Gedanken über elektrische Vorgänge folgen diesen sofort, beinahe von selbst in den gewohnten Bahnen ablaufend, sobald

herbeigeführt, hat sich für das gemeine Bewußtsein in bezug auf die Erdoberfläche durch die Entdeckungen der ersten Weltumsegler ergeben.

Die theoretische Untersuchung der erwähnten mathematischen Möglichkeiten hat zunächst mit der Frage, ob denselben Realitäten entsprechen, nichts zu tun, und man darf daher auch nicht die genannten Mathematiker für die Monstrositäten verantwortlich machen, welche durch ihre Untersuchungen angeregt worden sind. Der Raum des Gesichts und Getastetes ist dreidimensional, daran hat nie jemand gezweifelt. Würden aus diesem Raume Körper verschwinden oder neue in denselben hineingeraten, so könnte die Frage, ob es eine Erleichterung der Einsicht und Übersicht gewährt, sich den gegebenen Raum als Teil eines vier- oder mehrdimensionalen Raumes zu denken, wissenschaftlich diskutiert werden. Diese vierte Dimension bliebe darum immer noch ein Gedankending.

So steht aber die Sache nicht. Derartige Erscheinungen sind vielmehr erst nach dem Bekanntwerden der neuen Anschauungen in Gegenwart gewisser Personen in Spiritistengesellschaften aufgetreten. Manchen Theologen, welche in Verlegenheit waren, die Hölle unterzubringen, und den Spiritisten kam die vierte Dimension sehr gelegen. Der Nutzen der vierten Dimension für die Spiritisten ist folgender. Aus einer begrenzten Linie kann man ohne die Endpunkte zu passieren durch die zweite Dimension, aus der von einer Kurve umgrenzten Fläche durch die dritte und analog aus einem geschlossenen Raum durch die vierte Dimension entweichen, ohne die Grenzen zu durchbrechen. Selbst das, was die Taschenspieler bisher harmlos in drei Dimensionen trieben, erhält nun durch die vierte Dimension einen neuen Nimbus. Alle Spiritistenkünste, in geschlossene Schnüre Knoten zu machen oder dieselben zu lösen, aus verschlossenen Räumen Körper zu entfernen, gelingen nur in Fällen, wo gar nichts darauf ankommt. Alles läuft auf nutzlose Spielerei hinaus. Ein Accoucheur, der eine Geburt durch die vierte Dimension bewerkstelligt hätte, ist noch nicht aufgetreten. Die Frage würde sofort eine ernste, wenn dies geschähe. Professor Simonys schöne Knotenkünste, welche sich taschenspielerisch sehr hübsch verwerten lassen, sprechen nicht für, sondern gegen die Spiritisten.

Es sei jedem unbenommen, eine Meinung aufzustellen und Beweise für dieselbe beizubringen. Ob aber ein Naturforscher auf irgendeine aufgestellte Meinung in einer ernsten Untersuchung einzugehen wert findet, das zu entscheiden muß seinem Verstand und Instinkt überlassen werden. Sollten diese Dinge sich als wahr erweisen, so werde ich mich nicht schämen, der letzte zu sein, der sie glaubt. Was ich davon gesehen habe, war nicht geeignet, mich gläubiger zu machen.

Als mathematisch-physikalisches Hilfsmittel habe ich selbst die mehrdimensionalen Räume schon vor dem Erscheinen der Riemannschen Abhandlung betrachtet. Ich hoffe aber, daß mit dem, was ich darüber gedacht, gesagt und geschrieben habe, niemand die Kosten einer Spukgeschichte bestreiten wird. (Vgl. Mach, „Die Geschichte und die Wurzel des Satzes von der Erhaltung der Arbeit“.)

wir bemerken, daß alles so vorgeht, als ob sich anziehende und abstoßende Flüssigkeiten auf der Oberfläche der Leiter wären. Diese Hilfsvorstellungen selbst haben aber mit der Erscheinung an sich nichts zu schaffen.

10. Die Vorstellung von einer Ökonomie des Denkens entwickelte sich mir durch Lehrerfahrungen, durch die Praxis des Unterrichts. Ich hatte dieselbe schon, als ich 1861 meine Vorlesungen als Privatdozent begann, und glaubte damals im alleinigen Besitz derselben zu sein, was man wohl verzeihlich finden wird. Ich bin jetzt im Gegenteil davon überzeugt, daß wenigstens eine Ahnung dieser Einsicht stets ein Gemeingut aller Forscher gewesen sein muß, welche über das Forschen als solches sich überhaupt Gedanken gemacht haben. Der Ausdruck dieser Einsicht kann ja noch sehr verschiedene Formen annehmen. So möchte ich das Leitmotiv der Simplizität und der Schönheit, welches bei Kopernikus und Galilei so deutlich hervortritt, nicht nur als ästhetisch, sondern auch als ökonomisch bezeichnen. Auch Newtons „Regulae Philosophandi“ sind wesentlich von ökonomischen Gesichtspunkten beeinflusst, wenn auch das ökonomische Prinzip als solches nicht ausdrücklich ausgesprochen ist. Mac Cormack hat in einem interessanten Artikel „An episode in the history of philosophy“ (The Open Court, April 4, 1895) gezeigt, daß Adam Smith in seinen „Essays“ der Gedanke der Ökonomie der Wissenschaft recht nahe lag. In neuerer Zeit ist die betreffende Einsicht, wenn auch in verschiedener Form, wiederholt ausgesprochen worden, von mir in meinem 1871 gehaltenen Vortrag „Über die Erhaltung der Arbeit“, von Clifford 1872 in seinen „Lectures and essays“, von Kirchhoff in seiner „Mechanik“ 1874 und von Avenarius 1876. Auf eine mündliche Äußerung des Nationalökonom E. Herrmann habe ich schon in „Erhaltung der Arbeit“ (S. 55, Anm. 5) hingewiesen. Eine auf diesen Gegenstand bezügliche Publikation dieses Autors ist mir jedoch nicht bekannt.

11. Ich möchte hier auf die ergänzende Darstellung in meinen „Populär-wissenschaftlichen Vorlesungen“, 4. Aufl. (S. 217 fg., 245 fg.), und in den „Prinzipien der Wärmelehre“ (S. 294) hinweisen. In letzterer Schrift sind auch die Einwendungen von Petzoldt („Vierteljahrsschrift f. wissenschaftl. Philosophie“, 1891) berücksichtigt. Kürzlich hat Husserl in dem ersten Teil seiner Schrift



„Logische Untersuchungen“ (1900) neue Bedenken gegen die Denkökonomie vorgebracht. Zum Teil sind dieselben durch die Replik an Petzoldt schon beantwortet. Ich denke nun, daß es sich empfiehlt, mit der ausführlichen Antwort zu warten, bis die ganze Arbeit von Husserl vorliegt, und dann erst zu sehen, ob sich keine Verständigung erzielen läßt. Vorläufig möchte ich aber doch einige Bemerkungen vorausschicken. Ich bin als Naturforscher gewöhnt, die Untersuchungen an Spezielles anzuknüpfen, dieses auf mich wirken zu lassen und von diesem zum Allgemeinen aufzusteigen. Diese Gewohnheit befolgte ich auch bei Untersuchung der Entwicklung der physikalischen Erkenntnis. Ich mußte mich schon deshalb so verhalten, weil eine allgemeine Theorie der Theorie für mich eine zu schwierige Aufgabe war, doppelt schwierig auf einem Gebiet, in welchem ein Minimum von zweifellosen, allgemeinen, unabhängigen Prinzipien, aus welchen man alles deduzieren kann, nicht gegeben, sondern erst zu suchen ist. Eher möchte ein solches Unternehmen Aussicht auf Erfolg bieten, wenn man von der Mathematik ausgeht. So richtete ich also meine Aufmerksamkeit auf Einzelerscheinungen: Anpassung der Gedanken an die Tatsachen, Anpassung der Gedanken aneinander<sup>1</sup>, Denkökonomie, Vergleichung, Gedankenexperiment, Beständigkeit und Kontinuität des Denkens usw. Hierbei war es mir förderlich und ernüchternd zugleich, das vulgäre Denken und auch die ganze Wissenschaft als eine biologische, organische Erscheinung zu betrachten, wobei denn auch das logische Denken als ein idealer Grenzfall angesehen wurde. Daß man an beiden Enden anfangen kann zu untersuchen, will ich keinen Augenblick bezweifeln. Ich selbst bezeichnete meine Versuche als erkenntnispsychologische Skizzen.<sup>2</sup> Schon hieraus kann man sehen, daß

<sup>1</sup> „Populär-wissenschaftl. Vorlesungen“, S. 260, woselbst die Anpassung der Gedanken aneinander als die Aufgabe der eigentlichen Theorie bezeichnet wird. Wesentlich dasselbe scheint mir Graßmann in seiner Einleitung zur Ausdehnungslehre von 1844, S. XIX, zu sagen: „Die oberste Teilung aller Wissenschaften ist die in reale und formale, von denen die erstern das Sein, als das dem Denken selbständig Gegenüberstehende, im Denken abbilden und ihre Wahrheit haben in der Übereinstimmung des Denkens mit jenem Sein; die letztern hingegen das durch das Denken selbst Gesetzte zum Gegenstand haben und ihre Wahrheit haben in der Übereinstimmung der Denkprozesse unter sich.“

<sup>2</sup> „Prinzipien der Wärmelehre“, Vorwort zur 1. Auflage.

ich zwischen psychologischen und logischen Fragen wohl zu unterscheiden weiß, wie ich dies übrigens jedem zutraue, der das Bedürfnis fühlt, logische Prozesse auch psychologisch zu beleuchten. Schwerlich wird mir aber derjenige vorwerfen dürfen, daß ich den Unterschied zwischen natürlichem, blindem und logischem Denken nivellieren will, der sich einmal genau auch nur die logische Analyse der Newtonschen Aufstellungen in meiner Mechanik angesehen hat. Wenn auch die logische Analyse aller Wissenschaften schon vollständig fertig vor uns läge, so bliebe die biologisch-psychologische Untersuchung ihres Werdens für mich noch immer ein Bedürfnis, was nicht ausschließen würde, daß man diese letztere Untersuchung wieder logisch analysiert. Wenn man die Denkökonomie auch als bloßes teleologisches, also provisorisches Leitmotiv auffaßt, so ist hiermit die Zurückführung desselben auf tiefere Grundlagen<sup>1</sup> nicht nur nicht ausgeschlossen worden, sondern sogar gefordert. Die Denkökonomie ist aber auch, abgesehen hiervon, ein sehr klares logisches Ideal, welches selbst nach vollendeter logischer Analyse noch seinen Wert behält. Aus denselben Prinzipien kann das System einer Wissenschaft noch in verschiedener Weise deduziert werden. Aber eine von diesen Ableitungen entspricht der Ökonomie besser als die andern, wie ich dies an dem Beispiel der Gaußschen Dioptrik erläutere habe.<sup>2</sup> Soviel ich also jetzt sehen kann, glaube ich nicht, daß durch die Untersuchungen von Husserl die Ergebnisse der meinigen hinfällig werden. Übrigens muß ich seine weitere Publikation abwarten, für welche ich ihm aufrichtig den besten Erfolg wünsche.

Als ich fand, daß die Idee der Denkökonomie so oft vor und nach mir sich geltend gemacht hatte, mußte dies wohl meine Selbstschätzung vermindern, der Gedanke selbst schien mir aber hierdurch nur zu gewinnen. Und gerade das, was Husserl als eine Erniedrigung des wissenschaftlichen Denkens empfindet, die Anknüpfung an das vulgäre („blinde“) Denken, erscheint mir als eine Erhebung. Aus einer bloßen Gelehrtenstubenangelegenheit wird eine solche, die tief in dem Leben der Menschheit wurzelt und mächtig wieder auf dieses zurückwirkt.

<sup>1</sup> „Analyse der Empfindungen“, 2. Aufl., S. 64, 65.

<sup>2</sup> „Wärmelehre“, S. 394.