Задача 14

14. Пусть x_n и y_m — независимые случайные выборки из нормального распределения с параметрами $a, \sigma_x^2 = 2$ и $b, \sigma_y^2 = 1$ соответственно. Используя реализации случайных выборок: $x = \{-1.11, -6.10, 2.42\}$, $y = \{-2.29, -2.91\}$, проверить гипотезу о равенстве средних против альтернатив $a > b$. Построить график мощности критерия.

$H_0: \ a = b \quad H_1: \ a > b$

$X \sim N(a, \sigma_x), \ Y \sim N(b, \sigma_y)$

$\overline{x} = \dfrac{-1{,}11 - 6.1 + 2.42}{3} \approx -1.6 \qquad \overline{y} = \dfrac{-2{,}29 - 2.91}{2} = -2{,}6$

Стандартная ошибка: $\sigma_{\overline{x}-\overline{y}} = \sqrt{\dfrac{\sigma_x^2}{3} + \dfrac{\sigma_y^2}{2}} = \sqrt{\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{2}} \approx 1.08$

$Z = \dfrac{\overline{x} - \overline{y}}{\sigma_{\overline{x}-\overline{y}}} \sim N(0,1)$

$Z_{набл.} = \dfrac{-1.6 + 2.6}{1.08} \approx 0{,}93$

При $\alpha = 0.05$: $\quad z_{0.95} \approx 1.645$

$Z_{набл.} < 1.645 \Rightarrow$ нет оснований отвергать H_0.

Мощность:

Пусть $a - b = \delta > 0$. $\qquad Z = \dfrac{(\overline{x}-\overline{y}) - \delta}{\sigma_{\overline{x}-\overline{y}}} \sim N\left(\dfrac{\delta}{\sigma_{\overline{x}-\overline{y}}}; 1\right)$

δ – истинное различие.

$\pi(\delta) = \mathbb{P}(Z > z_{0.95}) = 1 - \Phi\left(z_{0.95} - \dfrac{\delta}{\sigma_{\overline{x}-\overline{y}}}\right) = 1 - \Phi\left(1.645 - \dfrac{\delta}{1.080}\right)$