Задача 12

$n = 2$

12. У игрока, наблюдавшего за игрой в четырехгранные кости, создалось впечатление, что четверка выпадает в 8 случаях из 24, тройка в 4, а остальные две грани выпадают равновероятно. Получив приглашение принять участие в игре, игрок попросил разрешения предварительно проверить свою гипотезу на двух производимых подряд бросаниях кости. Единственная рассматриваемая им альтернатива состоит в том, что игральная кость сделана «честно». Найти наиболее мощный критерий с уровнем значимости 0,2. Найти мощность критерия.

$H_0: \quad p_1 = \frac{1}{4} \quad p_2 = \frac{1}{4} \quad p_3 = \frac{1}{6} \quad p_4 = \frac{1}{3}$

$H_1: \quad p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{1}{4}$

Снова используем лемму Неймана-Пирсона:

$$\Lambda(x_1, x_2) = \frac{L(x_1, x_2 | H_1)}{L(x_1, x_2 | H_0)} > k$$

Рассмотрим случаи.

$x = 1$ или $x = 2$: $\quad \Lambda(x) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = 1$

$x = 3$: $\quad \Lambda(x) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{6}} = \frac{3}{2}$

$x = 4$: $\quad \Lambda(x) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$

Тогда в случае двух бросков имеем:

$x_1 \backslash x_2$	1	2	3	4
1	$\Lambda(1)\cdot\Lambda(1) = 1$	1	1.5	0.75
2	$\Lambda(2)\cdot\Lambda(1) = 1$	1	1.5	0.75
3	$\Lambda(3)\cdot\Lambda(1) = 1.5$	1.5	2.25	1.125
4	$\Lambda(4)\cdot\Lambda(1) = 0.75$	0.75	1.125	0.5625

Будем включать в область отклонения те исходы, для которых $\Lambda(x_1, x_2)$ максимально, до тех пор пока $P(x_1, x_2 | H_0) \leq 0.2$

суммарная

1) Исход $(3, 3)$

$P((3;3)|H_0) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

2) Исходы $(3;1), (3,2), (2,3), (1,3)$

$P((3;1),(3,2),(2,3),(1,3)|H_0) = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

На данном этапе в сумме уже $\frac{1}{36}+\frac{1}{6}=\frac{7}{36}$

$0{,}2-\frac{7}{36}=\frac{1}{5}-\frac{7}{36}=\frac{1}{180}$

Если целиком добавить исходы с $\Lambda(x_1,x_2)=1.125$ получим перебор. Введем рандомизированный критерий. Пусть γ - вероятность отклонения при исходах $(4,3),(3,4)$

$\mathbb{P}((3;4),(4;3)/H_0)=2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$. Хотим, чтобы

$\frac{1}{9}\cdot\gamma=\frac{1}{180} \Rightarrow \gamma=\frac{1}{20}=0{,}05$

Таким образом имеем критерий:

Если наблюдаются исходы с $\Lambda(x_1,x_2)>1.125$ - отклоняем H_0

Если наблюдаются исходы с $\Lambda(x_1,x_2)=1.125$ - отклоняем H_0 с вер-ю $\gamma=0.05$

При остальных исходах не отклоняем H_0.

Мощность критерия:

$\mathbb{P}((3,3)/H_1)=\frac{1}{16}$

$\mathbb{P}((3;1),(3,2),(2,3),(1,3)/H_1)=4\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

$\mathbb{P}((3;4),(4;3)/H_1)=2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$

$\pi=\frac{1}{16}+\frac{1}{4}+0.05\cdot\frac{1}{8}=0.31875$ - мощность.