

## Задача 13

13. Исследование длины и ширины 139 черепов, найденных в Верхнем Египте и относимых к расе, жившей за 8000 лет до нашей эры, показало, что стандартное отклонение длины и ширины черепа 5,722 и 4,612 мм соответственно. Те же величины, выведенные на основании обследования 1000 европейцев, оказались равными 6,161 и 5,055 мм. Предполагая, что законы распределения длины и ширины черепа нормальные, выяснить, можно ли считать расхождение стандартов случайным. Построить график мощности критерия.

$$n_1 = 139 \quad S_{g1,1} = 5.722 \text{ мм} \quad S_{ш,1} = 4.612 \text{ мм}$$

$$n_2 = 1000 \quad S_{g1,2} = 6.161 \text{ мм} \quad S_{ш,2} = 5.055 \text{ мм}$$

Для проверки равенства дисперсий используем F-тест.

$$H_0: \sigma_1 = \sigma_2 \quad H_1: \sigma_1 \neq \sigma_2$$

$$\text{при } H_0 \quad \frac{(n_2-1) \cdot S_2^2}{(n_1-1) \cdot S_1^2} \sim F(n_2-1; n_1-1)$$

1) Тест по длине:

$$F_{\text{набл.д.}} = \frac{S_{g1,2}^2}{S_{g1,1}^2} = \left( \frac{6.161}{5.722} \right)^2 \approx 1.16$$

2) Тест по ширине:

$$F_{\text{набл.ш.}} = \frac{S_{ш,2}^2}{S_{ш,1}^2} = \left( \frac{5.055}{4.612} \right)^2 \approx 1.2$$

Критическая область при  $\alpha = 0.05$

$$F_{0.025}(999; 138) \approx 0.73$$

$$F_{0.975}(999; 138) \approx 1.38$$

Для обоих тестов  $0.73 < F_{\text{набл.}} < 1.38 \Rightarrow$  нет оснований отвергнуть  $H_0$ . При уровне значимости  $\alpha = 0.05$  расхождение случайно.

Пусть  $\lambda = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$  (истинное отношение дисперсий)

Положим  $F_0 \sim F(999; 138)$

Тогда используемая статистика  $F = \lambda \cdot F_0$

Мощность:

$$\pi(\lambda) = P(F < 0.73) + P(F > 1.38) = P\left(F_0 < \frac{0.73}{\lambda}\right) + P\left(F_0 > \frac{1.38}{\lambda}\right)$$

