MOwNiT- laboratorium 5

Michał Bert grupa 4 (śr. 16:40-18:10)

Spis treści

Cel laboratorium

W ramach laboratorium należało zaimplementować algorytm aproksymacji średniokwadratowej wielomianami algebraicznymi dla zadanej funkcji. Dodatkowo należało przedstawić wykresy funkcji wraz z otrzymaną aproksymacją, a także policzyć błąd maximum oraz błąd średniokwadratowy dla otrzymanych wyników.

Konfiguracja sprzętowa

Zadanie zostało wykonane na komputerze z procesorem i5-12400f oraz systemem Windows 11 w języku Python.

Zadana funkcja

Przydzielona funkcja ma następujący wzór:

$$f(x) = \sin(2x) * \sin\left(\frac{x^2}{\pi}\right), \qquad x \in [0, 3\pi]$$

Wzór 1: Wzór funkcji f

Miejsca zerowe tej funkcji mają następującą postać:

$$\begin{cases} x = -\sqrt{n} * \pi, & n \in Z \\ x = \sqrt{n} * \pi, & n \in Z \\ x = n\frac{\pi}{2}, & n \in Z \end{cases}$$

Aproksymacja

Aproksymacja to przybliżanie zadanej funkcji za pomocą innej funkcji. Jest to pojęcie ogólniejsze od interpolacji. W naszym przypadku będziemy aproksymować zadaną wcześniej funkcję przy wykorzystaniu aproksymacji średniokwadratowej wielomianami algebraicznymi. Funkcję aproksymowaną zadamy w postaci zbioru punktów należących do wykresu funkcji.

Aproksymacja średniokwadratowa

W przypadku aproksymacji średniokwadratowej będziemy wykorzystywali następujące dane:

1. Zbiór węzłów

$$\{(x_i, f(x_i) \mid i = 0, 1, \dots, n\}$$

Wzór 2: Definicja zbioru węzłów aproksymacji

2. Funkcje bazowe:

$$\varphi_j(x) = x^j, \qquad j = 0, 1, \dots, m$$

Wzór 3: Postać funkcji bazowych dla aproksymacji średniokwadratowej wielomianami algebraicznymi

Należy zaznaczyć, że $m \ll n$.

Funkcja aproksymująca g ma następującą postać:

$$g(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j \varphi_j(x)$$

Wzór 4: Funkcja g aproksymująca funkcję f

Ponieważ znamy postać funkcji φ_j, naszym zadaniem będzie wyznaczenie współczynników a_j, dla których zachodzić będzie następujący warunek:

$$\min\|f(x) - g(x)\| = \min \sum_{i=0}^{n} w(x_i) \left[f(x_i) - \sum_{j=0}^{m} a_j \varphi_j(x_i) \right]^2$$

Równanie 1: Warunek aproksymacji średniokwadratowej do wyznaczenia współczynników a_j

Gdzie w oznacza pewną funkcję wagową. W naszym przypadku jest to funkcja stała:

$$w(x) = 1$$

Równanie 2: Definicja funkcji w

Wprowadzimy teraz oznaczenie:

$$H(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=0}^{n} w(x_i) \left[f(x_i) - \sum_{j=0}^{m} a_j \varphi_j(x_i) \right]^2$$

Wzór 5: Definicja oznaczenia $H(a_0, a_1, \dots, a_m)$

Współczynniki a_j możemy wyznaczyć korzystając z następującego warunku:

$$\frac{\partial H}{\partial a_k} = 0, \qquad k = 0, 1, \dots, m$$

Równanie 3: Warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego

W wyniku otrzymujemy układ $(m+1)$ równań o $(m+1)$ niewiadomych, nazywany *układem normalnym*:

$$\frac{\partial H}{\partial a_k} = -2 \cdot \sum_{i=0}^{n} w(x_i) \left[f(x_i) - \sum_{j=0}^{m} a_j \varphi_j(x_i) \right] \varphi_k(x_i) = 0, \qquad k = 0, 1, \dots, m$$

Równanie 4: Układ normalny

Ponieważ znamy postaci funkcji bazowych φ_j, możemy zapisać powyższy układ w następujący sposób:

$$\sum_{i=0}^{n} w(x_i) \left[f(x_i) - \sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j \right] x_i^k = 0, \qquad k = 0, 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=0}^{n} w(x_i)\, x_i^k \sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j = \sum_{i=0}^{n} w(x_i)\, f(x_i)\, x_i^k, \qquad k = 0, 1, \dots, m$$

$$\sum_{j=0}^{m} \left(\sum_{i=0}^{n} w(x_i) x_i^{j+k} \right) a_j = \sum_{i=0}^{n} w(x_i)\, f(x_i)\, x_i^k, \qquad k = 0, 1, \dots, m$$

Równanie 5: Przekształcenia układu normalnego

Przyjmując oznaczenia:

$$g_{k,j} = \sum_{i=0}^{n} w(x_i) x_i^{j+k}, \qquad j = 0,1,\dots,m, \qquad k = 0,1,\dots,m$$

$$b_k = \sum_{i=0}^{n} w(x_i)\, f(x_i)\, x_i^{k}, \qquad k = 0,1,\dots,m$$

$$\sum x_i = \sum_{i=0}^{n} x_i$$

Wzór 6: Wprowadzenie oznaczeń $g_{k,j}$, b_k oraz $\sum x_i$

Możemy zapisać powyższy układ w postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} \sum w_i & \sum w_i x_i & \dots & \sum w_i x_i^m \\ \sum w_i x_i & \sum w_i x_i^2 & \dots & \sum w_i x_i^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum w_i x_i^m & \sum w_i x_i^{m+1} & \dots & \sum w_i x_i^{2m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum w_i f(x_i) \\ \sum w_i f(x_i) x_i \\ \vdots \\ \sum w_i f(x_i) x_i^m \end{pmatrix}$$

$$G \cdot A = B$$

Równanie 6: Układ normalny w postaci macierzowej

Dla powyższego układu $\det G \neq 0$, jeżeli:

$$\begin{cases} \bigvee_{i=0,1,\dots,n} \bigvee_{j=0,1,\dots,n} x_i = x_j \Leftrightarrow i = j \\ m \leq n \end{cases}$$

Równanie 7: Warunki istnienia dokładnie jednego rozwiązania układu normalnego

Co równoznaczne jest ze stwierdzeniem, że układ posiada dokładnie jedno rozwiązanie.

Wyniki działania programu

Dla przeprowadzenia testów przyjęte zostały następujące warunki:

$$n \in N = \{4, 10, 15, 20, 30, 50, 75, 100\}$$
$$m \in M = \{2, 4, 6, 10\}$$

Wzór 7: Definicja zbiorów N oraz M

Dodatkowo węzły rozmieszczone zostały równomiernie na całym przedziale (wraz z krańcami przedziału).

Argumentem dla każdego testu jest para liczb $(n, m) \in T$, gdzie T oznacza zbiór testowy, zdefiniowany następująco:

$$T = \{(n, m) \mid n \in N \ \wedge \ m \in M \ \wedge \ m < n\}$$

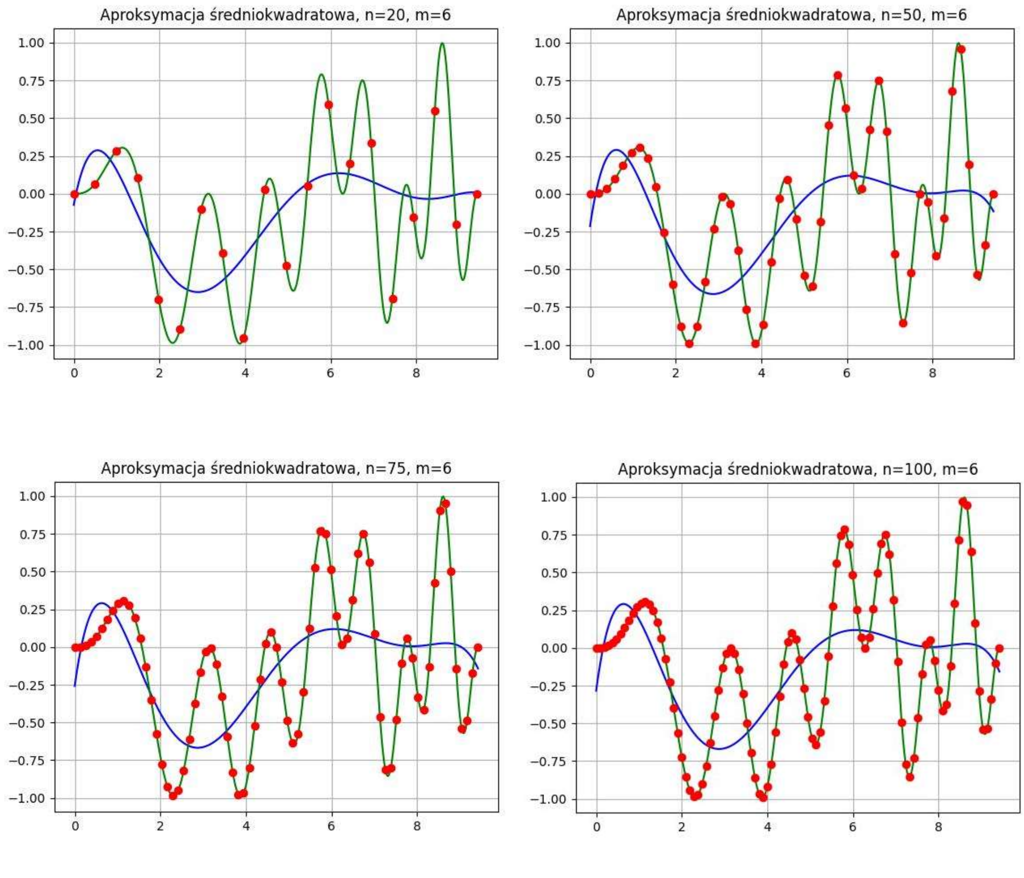
Wzór 8: Definicja zbioru testowego T

Wpływ zmiany parametrów na wyniki aproksymacji

Analizie poddamy wpływ zmiany parametrów n oraz m na uzyskane wyniki aproksymacji

Wpływ liczby węzłów na wyniki aproksymacji

Na poniższych wykresach przedstawiony jest wpływ zwiększania parametru n przy ustalonym parametrze $m = 6$.

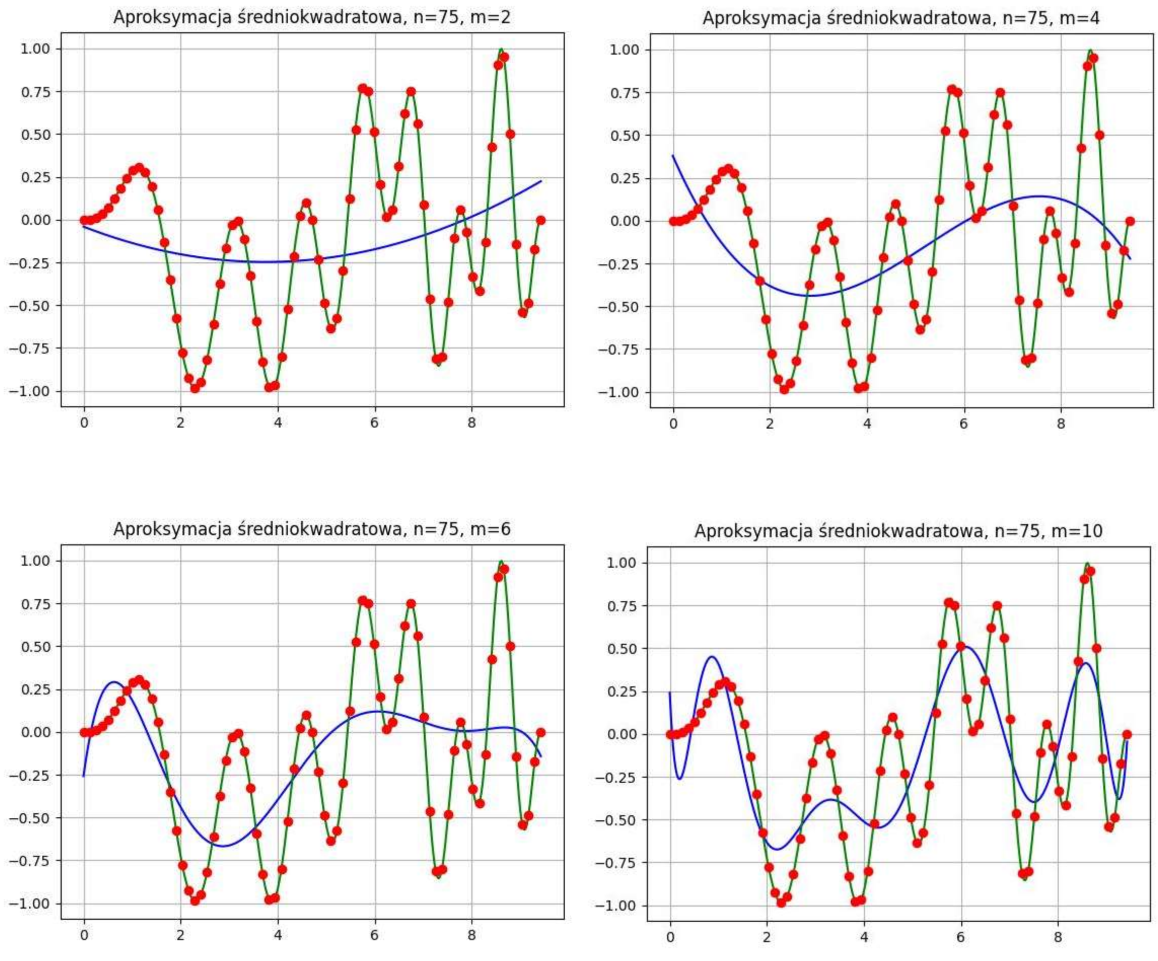


Rysunek 1: Wpływ zwiększania liczby węzłów na wykres funkcji wynikowej

Z przedstawionych na rysunku nr 1 wykresach można stwierdzić, że w przypadku zadanej funkcji f zwiększanie liczby węzłów nie wpływa na dokładność interpolacji. Jedyne widoczne zmiany występują blisko początku oraz końca przedziału.

Wpływ zmiany najwyższego stopnia wielomianu na wyniki aproksymacji

Poniższe wykresy prezentują zmianę wyników przy zwiększaniu wartości parametru m dla ustalonej liczby węzłów $n = 75$.



Rysunek 2: Wpływ zmiany parametru m na wykres funkcji wynikowej

Z wykresów przedstawionych na rysunku nr 2 można wywnioskować, że zwiększanie wartości parametru m powoduje dokładniejsze odwzorowanie funkcji f przez otrzymaną funkcję g.

Błędy aproksymacji

Dla otrzymanej aproksymacji zostały wyliczone dwa rodzaje błędów: błąd maximum oraz błąd średniokwadratowy. W przedstawionych poniżej wzorach k oznacza liczbę punktów, dla których obliczamy wartości funkcji oraz wielomianu aproksymującego. W przypadku obu tabel $k = 1000$.

Błąd maximum

Błąd maximum można obliczyć następującym wzorem:

$$\max_{i=0,\dots,k} |f(x_i) - g(x_i)|$$

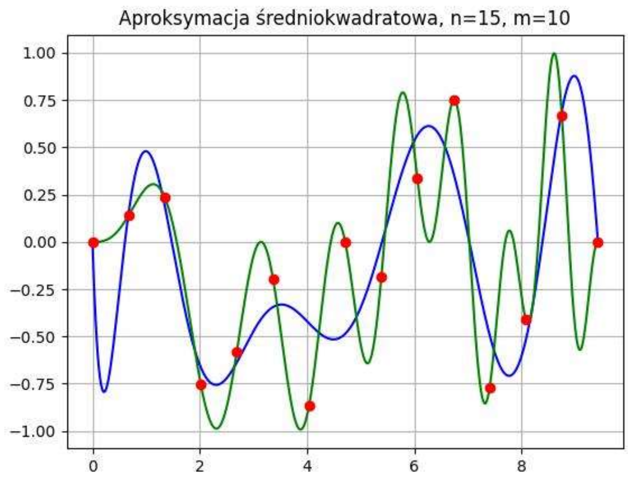
Wzór 9: Wzór na obliczenie wartości błędu maximum

Tabela błędów maximum dla aproksymacji średniokwadratowej					
		m			
		2	4	6	10
n	4	9.97495E-01	Brak danych	Brak danych	Brak danych
	10	1.21364E+00	1.23022E+00	1.32682E+00	Brak danych
	15	9.91641E-01	9.15263E-01	9.39022E-01	1.41154E+00
	20	9.78829E-01	9.72314E-01	1.02315E+00	6.52152E-01
	50	9.77474E-01	9.91059E-01	9.77224E-01	6.34982E-01
	75	9.77571E-01	9.92471E-01	9.72495E-01	6.33114E-01
	100	9.77625E-01	9.93119E-01	9.70021E-01	6.32408E-01

Tabela 1: Wartości błędów maximum dla poszczególnych parametrów

Z tabeli nr 1 możemy wywnioskować, że zwiększanie maksymalnego stopnia wielomianu, a zatem parametru m, obniża wartość błędu maximum, a co za tym idzie zwiększa dokładność aproksymacji.

Ciekawy wydaje się być przypadek, w którym $n = 15$ oraz $m = 10$, ponieważ otrzymana tam wartość błędu jest największa ze wszystkich znajdujących się w tabeli. Aby zobaczyć, dlaczego tak się dzieje, warto spojrzeć na wykres:



Rysunek 3: Wykres funkcji f (kolor zielony) oraz g (kolor niebieski) dla parametrów $n = 15, m = 10$.

Na powyższym wykresie można zauważyć, że na przedziale wyznaczonym przez ostatnie dwa węzły funkcja f jest wypukła, natomiast funkcja g wklęsła. Występują tam zatem spore rozbieżności pomiędzy wartościami dla argumentów z tego przedziału, co powoduje dużą wartość błędu maximum.

Błąd średniokwadratowy

Błąd średniokwadratowy oblicza się według następującego wzoru:

$$\frac{1}{k}\sqrt{\sum_{i=0}^{k}\left(f(x_i) - g(x_i)\right)^2}$$

Wzór 10: Wzór na obliczenie wartości błędu średniokwadratowego

Tabela błędów średniokwadratowych dla aproksymacji średniokwadratowej					
		m			
		2	4	6	10
n	4	1.58187E-02	Brak danych	Brak danych	Brak danych
	10	1.57834E-02	1.58032E-02	1.60898E-02	Brak danych
	15	1.47865E-02	1.38940E-02	1.28493E-02	1.36920E-02
	20	1.47865E-02	1.36953E-02	1.26510E-02	1.04094E-02
	50	1.47819E-02	1.36295E-02	1.25736E-02	1.00412E-02
	75	1.47811E-02	1.36216E-02	1.25623E-02	1.00149E-02
	100	1.47808E-02	1.36187E-02	1.25577E-02	1.00015E-02

Tabela 2 Wartości błędów średniokwadratowych dla poszczególnych parametrów

Tabela nr 2 potwierdza, że zwiększanie wartości parametru m powoduje zwiększenie dokładności aproksymacji. Dla $m = 10$ nadal możemy zauważyć, że wartość błędu jest dość spora w przypadku $n = 15$, nie odstaje on jednak znacznie od pozostałych wartości w tej kolumnie.

Wnioski

Z przedstawionych wykresów oraz tabel błędów można wywnioskować, że w przypadku omawianej funkcji f na dokładność aproksymacji wpływa głównie zmiana parametru m. Zmiana parametru n ma znikomy wpływ na otrzymane wyniki.

Dodatkowo możemy zaobserwować, że w pewnych przypadkach wartość błędu maximum może wzrosnąć przy zwiększeniu parametru m (np. $n = 20, m = 4 \rightarrow m = 6$), jednak błąd średniokwadratowy maleje wraz ze wzrostem tego parametru.

Istnieją pewne szczególne przypadki, dla których błąd średniokwadratowy może wzrosnąć przy wzroście parametru m. Można to zaobserwować w wierszu $n = 10$ w tabeli nr 2.