MOwNiT - laboratorium 8

Michał Bert grupa 4 (śr. 16:40-18:10)

Spis treści

[Cel laboratorium 1](#_Toc136341672)

[Konfiguracja sprzętowa 1](#_Toc136341673)

[Metody bezpośrednie rozwiązywania układów równań 2](#_Toc136341674)

[Metoda eliminacji Gaussa 2](#_Toc136341675)

[Metoda Thomasa 2](#_Toc136341676)

[Macierze użyte w zadaniu 3](#_Toc136341677)

[Norma wektorów użyta w zadaniu 4](#_Toc136341678)

[Wyniki działania programu 4](#_Toc136341679)

[Macierz 4](#_Toc136341680)

# Cel laboratorium

W ramach laboratorium należało zaimplementować algorytmy rozwiązywania układów równań liniowych metodami bezpośrednimi – metodę eliminacji Gaussa oraz metodę Thomasa dla macierzy trójdiagonalnej.

# Konfiguracja sprzętowa

Zadanie zostało wykonane na komputerze z procesorem i5-12400f oraz systemem Windows

11 w języku Python. Do uruchomienia programu został wykorzystany WSL, ponieważ Windows nie wspiera wykorzystanego w tym zadaniu typu danych float128 zawartego w bibliotece numpy.

# Metody bezpośrednie rozwiązywania układów równań

Przedstawione poniżej metody służą do rozwiązywania układów równań liniowych w postaci

Gdzie:

* – macierz współczynników (o rozmiarze )
* – poszukiwany wektor zmiennych (o rozmiarze )
* – wektor wyrazów wolnych (o rozmiarze )

## Metoda eliminacji Gaussa

Metoda eliminacji Gaussa opiera się na trzech elementarnych operacjach wykonywanych na wierszach macierzy:

* Zamiana miejscami dwóch wierszy
* Pomnożenie wiersza przez stałą
* Dodanie do wiersza innego wiersza pomnożonego przez stałą

Aby wykorzystać algorytm, należy rozszerzyć macierz współczynników o wektor wynikowy , tworząc następującą macierz:

Następnie wykorzystując podane wcześniej operacje elementarne należy przekształcić macierz do postaci schodkowej. Rozwiązanie układu można wtedy obliczyć wykorzystując podstawienie wsteczne (ostatni wiersz macierzy jednoznacznie określa wartość zmiennej niezależnie od pozostałych zmiennych w wektorze ).

## Metoda Thomasa

W przypadku gdy macierz jest macierzą trójdiagonalną do rozwiązania układu równań można wykorzystać algorytm Thomasa. Przyjmując oznaczenie:

– wektor elementów na dolnej przekątnej

– wektor elementów na głównej przekątnej

– wektor elementów na górnej przekątnej

rozważany układ równań można zapisać w następujący sposób:

Metoda Thomasa polega na obliczaniu nowych współczynników wg poniższych wzorów:

Rozwiązanie otrzymujemy wykorzystując podstawienie wsteczne:

# Macierze użyte w zadaniu

Do wykonania zadania zostały wykorzystane 3 przedstawione poniżej macierze.

Macierz zależy od podanych wcześniej parametrów zadania: oraz .

Ponieważ macierz jest macierzą trójdiagonalną, możemy przechowywać ją w formie trzech wektorów zawierających jedynie przekątne. Algorytm Thomasa został zaimplementowany tak, aby operował tylko na trzech zadanych tablicach przechowujących diagonale. Pozwala to zaoszczędzić sporo miejsca, ponieważ zamiast przechowywać elementów, przechowujemy tylko elementów, co łącznie daje . Jest to zatem spora oszczędność, zwłaszcza dla dużych rozmiarów macierzy.

Do obliczenia wskaźnika uwarunkowania macierzy została wykorzystana funkcja z biblioteki numpy, wykorzystująca normę Frobeniusa.

# Norma wektorów użyta w zadaniu

Aby obliczyć błąd pomiędzy wynikiem dokładnym a wynikiem otrzymanym po wykonaniu algorytmu można potraktować wektory jako punkty w przestrzeni , a następnie obliczyć ich odległość wykorzystując normę euklidesową. Przyjmując oznaczenia:

– wektor rozwiązań dokładnych

- wektor rozwiązań otrzymanych w wyniku działania algorytmu

Otrzymujemy następujący wzór:

# 

# Wyniki działania programu

Eksperymenty zostały przeprowadzone dla różnych rozmiarów macierzy oraz 3 różnych precyzji – *float*32, *float64*, oraz *float128*. Wektor został obliczony za pomocą biblioteki numpy, a następnie przekazany do algorytmów eliminacji Gaussa oraz Thomasa jako wektor wyrazów wolnych.

## Macierz

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Błąd metody eliminacji Gaussa dla macierzy | | | | |
|  | | Precyzja | | |
| float32 | float64 | float128 |
| n | 3 | 2.59674E-06 | 5.88313E-15 | 0 |
| 4 | 5.27695E-06 | 7.17187E-14 | 0 |
| 5 | 3.59090E-04 | 1.25999E-11 | 2.71948E-16 |
| 6 | 2.67862E-01 | 3.40944E-10 | 1.60230E-14 |
| 7 | 2.13651E+00 | 2.04065E-09 | 1.28023E-12 |
| 8 | 1.26214E+01 | 4.70384E-08 | 3.85229E-11 |
| 9 | 1.45603E+01 | 3.60771E-06 | 1.53750E-09 |
| 10 | 8.64012E+00 | 3.73680E-04 | 1.92421E-08 |
| 11 | 2.59908E+01 | 7.07418E-03 | 1.27408E-06 |
| 12 | 7.34208E+01 | 6.39571E-01 | 7.41450E-06 |
| 13 | 2.34815E+01 | 1.06704E+00 | 3.94740E-05 |
| 14 | 2.55516E+01 | 4.76576E+00 | 1.34345E-04 |
| 15 | 4.26316E+02 | 3.21620E+00 | 4.96519E-04 |
| 16 | 8.32248E+01 | 7.12067E+00 | 3.42326E-04 |
| 17 | 6.82980E+01 | 2.32143E+01 | 1.62187E-03 |
| 18 | 1.33782E+01 | 2.38808E+01 | 1.09603E-03 |
| 19 | 1.22729E+01 | 7.92485E+01 | 9.60803E-03 |
| 20 | 5.96469E+02 | 7.87877E+00 | 3.03501E-03 |

Tabela 1: Błąd metody Gaussa dla macierzy

Z powyższych wyników można wysnuć dwa istotne wnioski. Po pierwsze macierz jest źle uwarunkowana i mała zmiana rozmiaru mocno wpływa na błąd otrzymanego rozwiązania. Dodatkowo zwiększanie precyzji powoduje zwiększenie dokładności wyników. Jak łatwo zauważyć, dla precyzji *float128* błąd rozwiązania jest rzędu .

## Macierz

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Błąd metody eliminacji Gaussa dla macierzy nr 2 | | | | |
|  | | Precyzja | | |
| float32 | float64 | float128 |
| n | 3 | 2.92002E-07 | 0 | 0 |
| 4 | 2.45756E-07 | 1.12127E-15 | 0 |
| 5 | 7.65636E-07 | 1.40433E-15 | 0 |
| 6 | 1.70056E-06 | 1.93892E-15 | 0 |
| 7 | 1.88392E-06 | 3.22538E-15 | 0 |
| 8 | 5.18595E-06 | 3.56311E-15 | 0 |
| 9 | 4.88431E-06 | 8.25904E-15 | 0 |
| 10 | 4.08150E-06 | 7.21816E-15 | 0 |
| 11 | 4.22100E-06 | 9.76618E-15 | 0 |
| 12 | 5.96255E-06 | 8.81562E-15 | 0 |
| 13 | 5.49075E-06 | 1.58058E-14 | 0 |
| 14 | 1.47178E-05 | 3.07381E-14 | 0 |
| 15 | 4.59652E-06 | 1.72810E-14 | 0 |
| 16 | 8.83316E-06 | 1.61376E-14 | 0 |
| 17 | 1.79134E-05 | 2.24907E-14 | 0 |
| 18 | 1.50426E-05 | 2.43640E-14 | 0 |
| 19 | 1.45437E-05 | 3.05396E-14 | 0 |
| 20 | 1.48663E-05 | 3.24157E-14 | 0 |
| 21 | 2.14261E-05 | 2.17782E-14 | 0 |
| 22 | 1.63038E-05 | 3.63643E-14 | 0 |
| 23 | 2.29939E-05 | 4.68255E-14 | 0 |
| 24 | 2.41970E-05 | 3.78892E-14 | 0 |
| 25 | 2.24584E-05 | 4.16779E-14 | 0 |
| 26 | 1.42948E-05 | 2.53316E-14 | 0 |
| 27 | 3.49982E-05 | 6.61898E-14 | 0 |
| 28 | 3.76398E-05 | 4.79229E-14 | 0 |
| 29 | 4.20902E-05 | 1.10105E-13 | 0 |
| 30 | 5.65028E-05 | 6.75563E-14 | 0 |
| 50 | 1.38592E-04 | 3.83392E-13 | 0 |
| 100 | 9.14259E-04 | 2.31266E-12 | 7.69185E-16 |
| 350 | 1.47288E-02 | 3.32060E-11 | 1.67993E-14 |
| 500 | 5.88841E-02 | 1.17175E-10 | 3.93229E-14 |

Tabela 2: Błąd metody Gaussa dla macierzy

Powyższa tabela pokazuje, że macierz nie jest tak źle uwarunkowana jak macierz . Zmiana rozmiaru wpływa na dokładność rozwiązania, natomiast nawet dla rozmiaru 500 błąd dla precyzji *float32* jest rzędu . Dodatkowo dla dużej precyzji *float128* błędy dla małych rozmiarów macierzy praktycznie nie występują.

## Porównanie wskaźników uwarunkowania

Wskaźniki uwarunkowania zostały obliczone tylko dla precyzji *float64*, ponieważ jej zmiana nie wpływa znacząco na samo uwarunkowanie macierzy.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | | Wartości wskaźników uwarunkowania | |
| Macierz | Macierz |
| n | 3 | 4.85350E+02 | 7.84232E+00 |
| 4 | 1.71448E+04 | 1.50381E+01 |
| 5 | 5.96485E+05 | 2.53255E+01 |
| 6 | 2.05563E+07 | 3.90617E+01 |
| 7 | 7.04645E+08 | 5.65711E+01 |
| 8 | 2.40786E+10 | 7.81523E+01 |
| 9 | 8.21197E+11 | 1.04084E+02 |
| 10 | 2.79733E+13 | 1.34628E+02 |
| 11 | 9.52925E+14 | 1.70031E+02 |
| 12 | 3.22899E+16 | 2.10530E+02 |
| 13 | 6.06325E+17 | 2.56350E+02 |
| 14 | 5.82665E+17 | 3.07706E+02 |
| 15 | 2.10155E+18 | 3.64807E+02 |
| 16 | 6.50779E+17 | 4.27853E+02 |
| 17 | 2.85612E+18 | 4.97039E+02 |
| 18 | 3.26235E+20 | 5.72552E+02 |
| 19 | 4.52205E+18 | 6.54576E+02 |
| 20 | 1.88208E+18 | 7.43287E+02 |
| 21 | 2.29804E+18 | 8.38860E+02 |
| 22 | 1.08664E+19 | 9.41462E+02 |
| 23 | 1.25382E+19 | 1.05126E+03 |
| 24 | 2.28183E+18 | 1.16841E+03 |
| 25 | 1.29852E+19 | 1.29308E+03 |
| 26 | 5.24415E+19 | 1.42541E+03 |
| 27 | 7.29353E+19 | 1.56557E+03 |
| 28 | 2.41418E+19 | 1.71369E+03 |
| 29 | 8.90850E+18 | 1.86992E+03 |
| 30 | 4.09062E+18 | 2.03441E+03 |
| 50 | 1.54422E+20 | 7.26040E+03 |
| 100 | 3.34287E+20 | 4.09388E+04 |
| 350 | 8.85337E+20 | 9.36305E+05 |
| 500 | 6.98609E+20 | 2.28335E+06 |

Tabela 3: Porównanie wskaźników uwarunkowania macierzy oraz

Z powyższej tabeli jasno wynika, że macierz jest źle uwarunkowaną macierzą, zatem błędy w otrzymywanych wynikach będą bardzo szybko rosły.

## Macierz

Ponieważ macierz jest macierzą trójdiagonalną, do rozwiązania układu można wykorzystać zarówno algorytm eliminacji Gaussa, jak i algorytm Thomasa. Poniższe tabele prezentują porównanie otrzymanych wyników dla obu metod.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Porównanie wyników działania algorytmu Thomasa oraz eliminacji Gaussa | | | | | | | |
|  | | float32 | | float64 | | float128 | |
| Thomas | Gauss | Thomas | Gauss | Thomas | Gauss |
| n | 3 | 1.10726E-04 | 1.19209E-07 | 1.10743E-04 | 2.22045E-16 | 1.10743E-04 | 0 |
| 4 | 1.18916E-04 | 1.68587E-07 | 1.18840E-04 | 2.48253E-16 | 1.18840E-04 | 0 |
| 5 | 1.22864E-04 | 1.68587E-07 | 1.38051E-04 | 2.48253E-16 | 1.34974E-04 | 0 |
| 6 | 1.26812E-04 | 1.68587E-07 | 1.26746E-04 | 2.48253E-16 | 1.26746E-04 | 0 |
| 7 | 1.26699E-04 | 1.68587E-07 | 1.27610E-04 | 2.48253E-16 | 1.41441E-04 | 0 |
| 8 | 1.29256E-04 | 2.06477E-07 | 1.41120E-04 | 2.48253E-16 | 1.28074E-04 | 0 |
| 9 | 1.39027E-04 | 1.68587E-07 | 1.29321E-04 | 3.33067E-16 | 1.29582E-04 | 0 |
| 10 | 1.27292E-04 | 1.68587E-07 | 1.29357E-04 | 3.51083E-16 | 1.41186E-04 | 0 |
| 11 | 1.27728E-04 | 1.68587E-07 | 1.39176E-04 | 2.48253E-16 | 1.38431E-04 | 0 |
| 12 | 1.29683E-04 | 2.06477E-07 | 1.42244E-04 | 3.33067E-16 | 1.26724E-04 | 0 |
| 13 | 1.39233E-04 | 1.33280E-07 | 1.27557E-04 | 2.48253E-16 | 1.27364E-04 | 0 |
| 14 | 1.41486E-04 | 1.68587E-07 | 1.26641E-04 | 3.51083E-16 | 1.27731E-04 | 0 |
| 15 | 1.27021E-04 | 2.14908E-07 | 1.42379E-04 | 3.14018E-16 | 1.41368E-04 | 0 |
| 16 | 1.28043E-04 | 1.78814E-07 | 1.26771E-04 | 3.51083E-16 | 1.26782E-04 | 0 |
| 17 | 1.39525E-04 | 2.45756E-07 | 1.38755E-04 | 4.15407E-16 | 1.38552E-04 | 0 |
| 18 | 1.29266E-04 | 2.66560E-07 | 1.30044E-04 | 4.15407E-16 | 1.26740E-04 | 0 |
| 19 | 1.41762E-04 | 2.38419E-07 | 1.42533E-04 | 4.57757E-16 | 1.42671E-04 | 0 |
| 20 | 1.27261E-04 | 2.45756E-07 | 1.30246E-04 | 3.33067E-16 | 1.41840E-04 | 0 |
| 21 | 1.27032E-04 | 2.52881E-07 | 1.29242E-04 | 5.08768E-16 | 1.42729E-04 | 0 |
| 22 | 1.41562E-04 | 2.45756E-07 | 1.28877E-04 | 4.71028E-16 | 1.41902E-04 | 0 |
| 23 | 1.27483E-04 | 2.79571E-07 | 1.27196E-04 | 4.57757E-16 | 1.27053E-04 | 0 |
| 24 | 1.42460E-04 | 1.46001E-07 | 1.29021E-04 | 4.71028E-16 | 1.27843E-04 | 0 |
| 25 | 1.26987E-04 | 2.06477E-07 | 1.41817E-04 | 4.57757E-16 | 1.41891E-04 | 0 |
| 26 | 1.29735E-04 | 3.37175E-07 | 1.29196E-04 | 4.29988E-16 | 1.27592E-04 | 0 |
| 27 | 1.39138E-04 | 2.85854E-07 | 1.41581E-04 | 4.57757E-16 | 1.38803E-04 | 0 |
| 28 | 1.38739E-04 | 2.59811E-07 | 1.41669E-04 | 4.83935E-16 | 1.38615E-04 | 0 |
| 29 | 1.30159E-04 | 2.73143E-07 | 1.41465E-04 | 4.71028E-16 | 1.29258E-04 | 0 |
| 30 | 1.39010E-04 | 2.38419E-07 | 1.30057E-04 | 4.83935E-16 | 1.42522E-04 | 0 |
| 50 | 1.41868E-04 | 3.15398E-07 | 1.27861E-04 | 6.84387E-16 | 1.27501E-04 | 0 |
| 100 | 1.28027E-04 | 5.65459E-07 | 1.27953E-04 | 1.00535E-15 | 1.39532E-04 | 0 |

Tabela 4: Porównanie błędów przy wykorzystaniu eliminacji Gaussa oraz algorytmu Thomasa

Jak widać, eliminacja Gaussa daje dużo dokładniejsze wyniki. Co ciekawe błąd w przypadku wykorzystania algorytmu Thomasa utrzymuje się na stałym poziomie , niezależnie od rozmiaru macierzy jak i użytej precyzji.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Porównanie czasów działania algorytmu Thomasa oraz eliminacji Gaussa | | | | | | | |
|  | | float32 | | float64 | | float128 | |
| Thomas | Gauss | Thomas | Gauss | Thomas | Gauss |
| n | 3 | 9.57900E-06 | 7.62240E-05 | 5.11500E-06 | 3.22790E-05 | 4.97200E-06 | 3.25420E-05 |
| 4 | 1.09540E-05 | 7.83080E-05 | 5.75400E-06 | 3.56460E-05 | 5.48000E-06 | 3.56040E-05 |
| 5 | 1.01880E-05 | 9.34560E-05 | 6.41800E-06 | 4.90780E-05 | 6.06600E-06 | 4.72590E-05 |
| 6 | 1.13660E-05 | 1.23212E-04 | 6.75100E-06 | 6.47430E-05 | 6.99600E-06 | 6.39520E-05 |
| 7 | 1.24220E-05 | 1.61471E-04 | 7.94700E-06 | 8.48230E-05 | 7.38100E-06 | 8.72890E-05 |
| 8 | 1.36620E-05 | 2.09688E-04 | 8.19100E-06 | 1.12279E-04 | 8.59000E-06 | 1.10335E-04 |
| 9 | 1.53550E-05 | 2.66778E-04 | 8.91100E-06 | 1.41339E-04 | 9.25400E-06 | 1.40248E-04 |
| 10 | 1.67340E-05 | 3.39959E-04 | 9.84900E-06 | 1.76729E-04 | 9.81800E-06 | 1.77456E-04 |
| 11 | 1.78850E-05 | 4.41594E-04 | 1.02610E-05 | 2.21673E-04 | 1.12660E-05 | 3.38767E-04 |
| 12 | 1.94600E-05 | 5.08935E-04 | 1.14790E-05 | 2.70226E-04 | 1.15900E-05 | 2.72292E-04 |
| 13 | 2.06030E-05 | 6.24394E-04 | 1.21180E-05 | 3.27188E-04 | 1.20150E-05 | 3.29615E-04 |
| 14 | 2.19730E-05 | 7.43910E-04 | 1.27560E-05 | 3.98816E-04 | 1.34880E-05 | 4.09694E-04 |
| 15 | 2.28080E-05 | 8.72100E-04 | 1.38100E-05 | 4.65499E-04 | 1.41530E-05 | 5.00256E-04 |
| 16 | 2.43460E-05 | 1.05904E-03 | 1.44090E-05 | 5.47388E-04 | 1.47330E-05 | 5.52070E-04 |
| 17 | 2.51240E-05 | 1.19887E-03 | 1.54470E-05 | 6.54035E-04 | 1.56400E-05 | 6.48873E-04 |
| 18 | 2.63340E-05 | 1.37965E-03 | 1.61590E-05 | 7.57234E-04 | 1.62520E-05 | 7.54583E-04 |
| 19 | 2.88800E-05 | 1.64275E-03 | 1.57130E-05 | 1.07492E-03 | 1.71110E-05 | 8.61542E-04 |
| 20 | 3.08280E-05 | 1.89606E-03 | 1.58060E-05 | 8.94684E-04 | 1.83490E-05 | 1.02700E-03 |
| 21 | 3.12930E-05 | 2.15133E-03 | 1.63620E-05 | 1.00820E-03 | 1.87520E-05 | 1.17655E-03 |
| 22 | 4.18700E-05 | 2.36676E-03 | 1.72840E-05 | 1.16983E-03 | 2.11590E-05 | 1.49188E-03 |
| 23 | 4.30400E-05 | 2.69990E-03 | 1.79000E-05 | 1.30824E-03 | 2.07040E-05 | 1.46964E-03 |
| 24 | 4.45640E-05 | 3.03640E-03 | 1.87590E-05 | 1.45832E-03 | 2.13860E-05 | 1.60276E-03 |
| 25 | 4.63500E-05 | 3.34969E-03 | 1.92540E-05 | 1.60910E-03 | 2.25380E-05 | 1.80328E-03 |
| 26 | 4.89260E-05 | 3.87462E-03 | 2.02110E-05 | 1.81919E-03 | 2.29660E-05 | 2.04910E-03 |
| 27 | 5.00870E-05 | 4.10545E-03 | 2.06980E-05 | 2.24225E-03 | 2.38190E-05 | 2.22211E-03 |
| 28 | 5.08830E-05 | 4.51811E-03 | 2.10130E-05 | 2.21935E-03 | 2.47470E-05 | 2.46987E-03 |
| 29 | 2.38040E-05 | 3.84150E-03 | 2.19050E-05 | 2.52315E-03 | 2.60880E-05 | 2.87330E-03 |
| 30 | 3.21330E-05 | 2.93892E-03 | 2.26860E-05 | 2.71308E-03 | 2.66640E-05 | 3.17698E-03 |
| 50 | 4.93010E-05 | 1.22462E-02 | 3.74410E-05 | 1.21171E-02 | 4.21610E-05 | 1.28837E-02 |
| 100 | 8.22590E-05 | 1.56738E-01 | 6.97240E-05 | 1.42245E-01 | 8.14800E-05 | 9.86778E-02 |

Tabela 5: Porównanie czasów przy wykorzystaniu eliminacji Gaussa oraz algorytmu Thomasa

Z powyższej tabeli wynika, że algorytm Thomasa przeprowadza obliczenia dużo szybciej niż metoda eliminacji Gaussa. Szczególnie widać to przy dużych rozmiarach macierzy .

# Wnioski:

Wskaźnik uwarunkowania a także precyzja wykonywanych obliczeń mają duży wpływ na otrzymywane wyniki. Zastosowanie algorytmu Thomasa powoduje znaczne przyspieszenie rozwiązywania układu równań w przypadku trójdiagonalnej macierzy współczynników. Należy jednak wziąć pod uwagę, że nie zawsze jest to algorytm stabilny, co można wywnioskować z tabeli nr 4. Jeżeli zależy nam na dokładności obliczeń, powinniśmy wykorzystać metodę Gaussa.