



UNIVERSITÀ DI PISA

Ingegneria Robotica e dell'Automazione

Controllo dei Sistemi Incerti

Robust Control of a Distillation Column

Professore: Mario Innocenti

Studente: Marco Borraccino 501794

Anno Accademico: 2019-2020

Indice

Descrizione del problema	3
Dinamica del sistema.....	3
Modellazione delle incertezze	6
Specifiche di performance del sistema a ciclo chiuso	8
Interconnessioni del sistema open-loop e closed-loop	10
Progetto controllore H_∞ a 1 e 2 gradi di libertà	13
Descrizione teorica controllore H_∞	13
Risultati	14
Progetto controllore H_∞ loop-shaping a 1 grado di libertà	18
Descrizione teorica controllore H_∞ loop-shaping.....	18
Risultati	19
Progetto controllore μ	22
Descrizione teorica controllore μ	22
Risultati	23
Progetto controllore LQG/LTR	27
Descrizione teorica controllore LQG/LTR.....	27
Risultati	29
Analisi globale dei risultati e Conclusioni.....	33
Bibliografia.....	34

Descrizione del problema

Dinamica del sistema

In questa relazione verrà presentata la progettazione di diversi controllori robusti per una colonna di distillazione. Per la sintesi dei controllori verrà usato un modello linearizzato di ordine ridotto, includendo anche un modello sulle incertezze da considerare.

Una colonna di distillazione è un sistema fisico che permette la separazione e purificazione di sostanze chimiche. Come si vede in Fig. 1, l'obiettivo è separare la *feed* F con concentrazione z_F , composto generalmente da un componente leggero e uno pesante, nel *distillate* D con composizione y_D , il componente più leggero, e nel *bottom product* con concentrazione x_B , il componente più pesante.

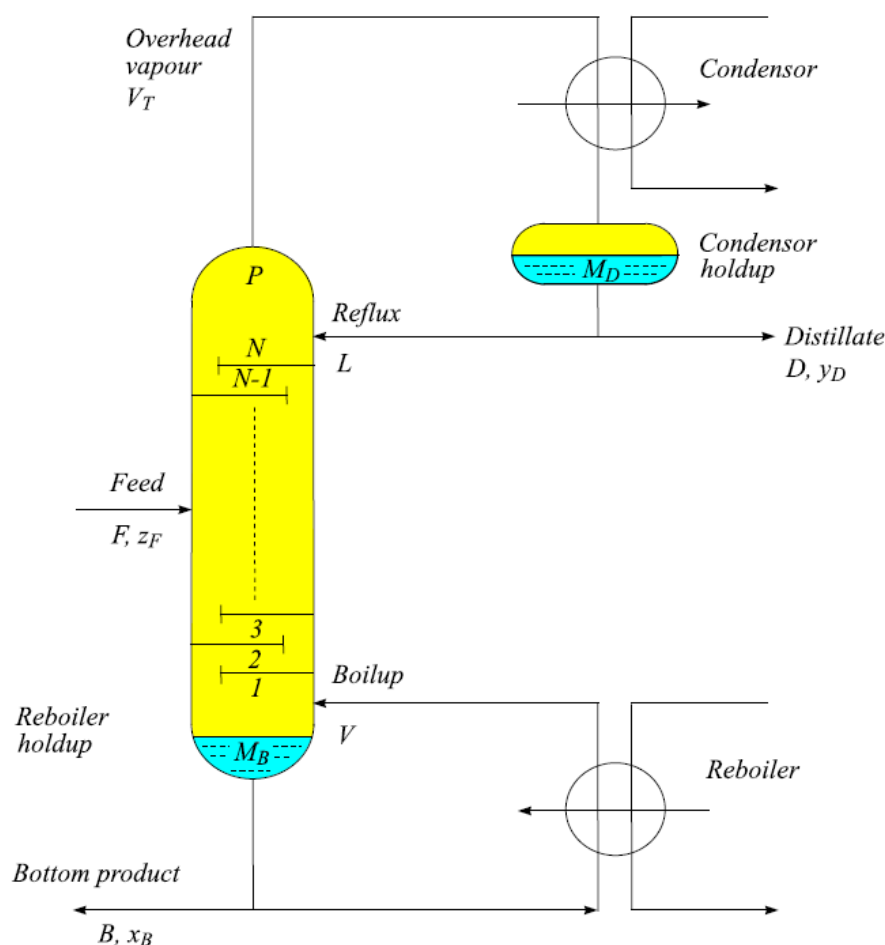


Figura 1: schema di una colonna di distillazione

Lungo tutta l'altezza della colonna ci sono i piatti che permettono la separazione delle sostanze: in pratica la concentrazione delle due sostanze cambierà al variare dell'altezza avendo in cima la sostanza più leggera in forma di vapore e in basso quella più pesante in forma liquida. A tale scopo è necessario garantire il costante contatto tra le due componenti in tutta la colonna e perciò vengono reinseriti i flussi Reflux L e Boilup V in cima e in basso alla colonna.

La dinamica del sistema è non lineare ed è descritta dalle seguenti equazioni in cui l'indice i rappresenta il piatto i -esimo della colonna.

- 1 Equazione del bilancio di materia al piatto i :

$$dM_i/dt = L_{i+1} - L_i + V_{i-1} - V_i$$

- 2 Equazione del bilancio di materia della componente più leggera al piatto i :

$$d(M_i x_i)/dt = L_{i+1} x_{i+1} + V_{i-1} y_{i-1} - L_i x_i - V_i y_i$$

la quale porta alla seguente espressione della derivata della frazione molare liquida:

$$dx_i/dt = (d(M_i x_i)/dt - x_i(dM_i/dt)) / M_i$$

- 3 Equazioni algebriche

La composizione del vapore y_i è legata alla composizione del liquido x_i sullo stesso piatto dall'equilibrio algebrico:

$$y_i = \alpha x_i / (1 + (\alpha - 1)x_i)$$

Assumendo costanti i flussi molari e assente la dinamica del vapore, otteniamo:

$$V_i = V_{i-1}$$

I flussi del liquido dipendono dall'*holdup liquido* del piatto superiore e dal flusso di vapore:

$$L_i = L_{0i} + (M_i - M_{0i})/\tau_L + \lambda(V_{i-1} - V_{0i-1})$$

dove L_{0i} e M_{0i} sono i valori nominali del flusso e dell'*holdup* liquido sul piatto i e V_{0i} è il flusso nominale del *boilup*.

Queste equazioni sono applicate per ogni piatto della colonna, ad eccezione dei due piatti estremi (condensatore ed evaporatore) e del piatto dove viene inserita la feed. In questi casi avremo:

- Per il piatto $i = N_F$:

$$\begin{aligned} dM_i/dt &= L_{i+1} - L_i + V_{i-1} - V_i + F \\ d(M_i x_i)/dt &= L_{i+1} x_{i+1} + V_{i-1} y_{i-1} - L_i x_i - V_i y_i + F z_F \end{aligned}$$

- Per il condensatore $i = N_{tot}$ ($M_{N_{tot}} = M_D$, $L_{N_{tot}} = L_T$):

$$dM_i/dt = V_{i-1} - L_i - D$$

$$d(M_i x_i)/dt = V_{i-1} - L_i x_i - D x_i$$

- Per l'evaporatore $i = 1$ ($M_i = M_B, V_i = V_B = V$) :

$$d(M_i x_i)/dt = L_{i+1} x_{i+1} - V_i y_i - B x_i$$

Dato che il numero di piatti in questo caso è 40, come risultato otteniamo un sistema non lineare di ordine 82. Ci sono due stati per piatto, uno che rappresenta la composizione del liquido e l'altro la composizione del vapore. Il sistema ha quindi quattro ingressi manipolabili (L_T, V_B, D, B) e tre disturbi (F, z_F, q_F).

Con lo scopo di linearizzare il modello attorno ad un punto di lavoro stabile, assumiamo di stabilizzare il sistema con la cosiddetta *LV-configuration*, cioè usando D per controllare M_D e B per controllare M_B . Il punto di lavoro è dato dai seguenti valori, ottenuti portando a regime la colonna di distillazione dopo un tempo $t = 5000min$.

N	N_{tot}	N_F	F	z_F	q_F	D	B	L	V	y_D	x_B	M_i	τ_L
40	41	21	1	0.5	1	0.5	0.5	2.706 29	3.206 29	0.99	0.01	0.5	0.063

La creazione e la linearizzazione della dinamica del sistema è ottenuta tramite i file Matlab *cola_lv.m*, *cola_lin.m* e *cola_lv_lin.m*. La dinamica del sistema è quindi contenuta nella variabile G_{4u} ed ha quattro ingressi (due dei quali sono considerati disturbi F, z_F) e due uscite:

Ingressi	
L_T	Reflux liquido dal condensatore
V_B	Boilup vapore dall'evaporatore
F	<i>Feed</i> (alimentazione)
z_F	Composizione della <i>feed</i>
Uscite	
y_D	Composizione del distillato
x_B	Composizione del <i>bottom product</i>

Dopo aver scalato il modello con lo scopo di rendere uguali tutte le ampiezze degli ingressi e dei disturbi, tramite il comando *reduce* si ottiene un modello di ordine 6, salvato nella variabile G , utilizzando il codice nel file *mod_col.m*. Di seguito è riportato il confronto tra i valori singolari di G_4 e della sua approssimazione G , si può osservare che il comportamento è molto simile fino a circa $2 rad/min$.

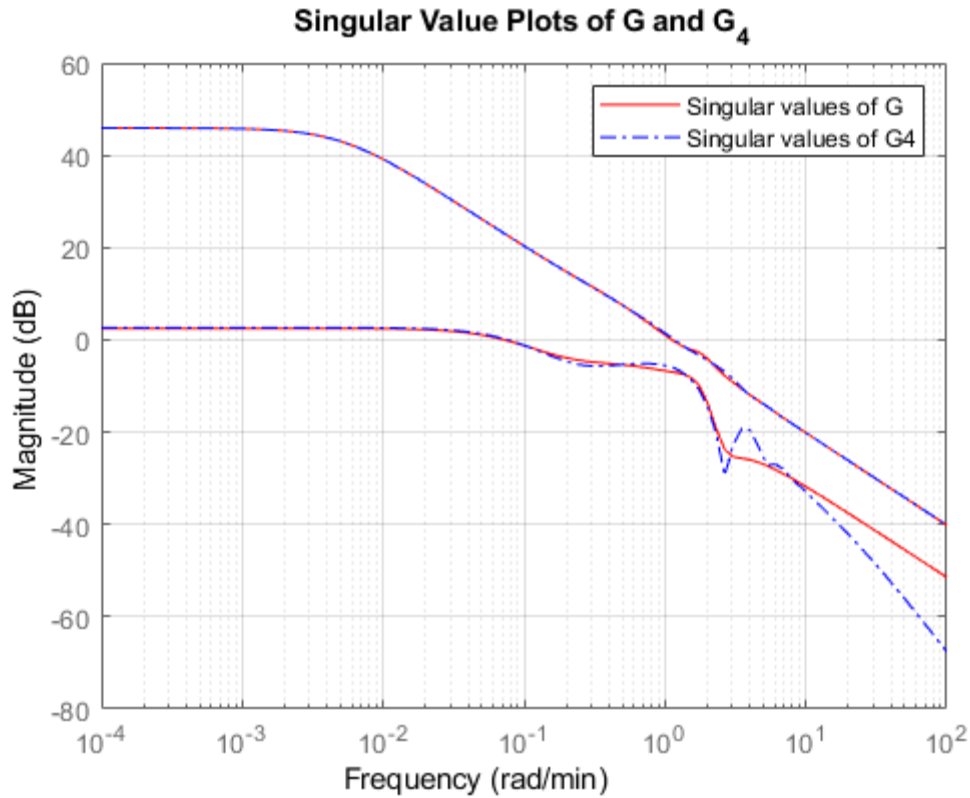


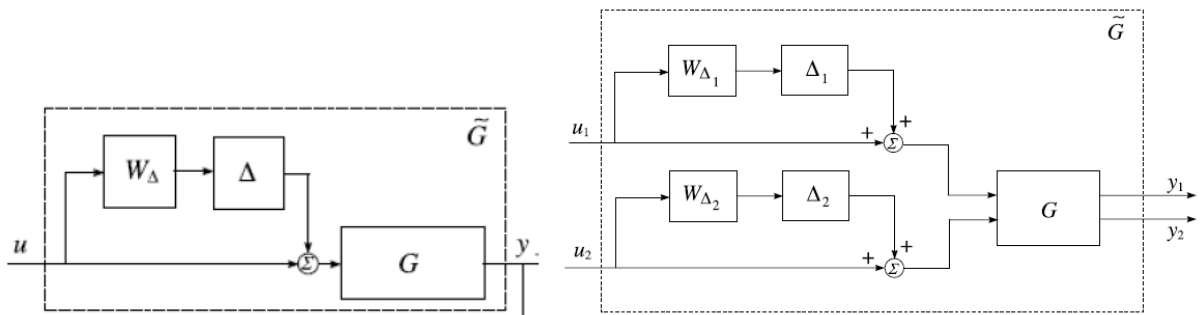
Figura 2: confronto dei valori singolari di G e G_4

Modellazione delle incertezze

Le incertezze considerate per questo sistema di controllo sono delle incertezze sul guadagno del $\pm 20\%$ e un tempo di ritardo di 1 min per ogni canale di input. Possono essere perciò rappresentate dalla matrice di trasferimento:

$$W_u = \begin{bmatrix} k_1 e^{-\Theta_1 s} & 0 \\ 0 & k_2 e^{-\Theta_2 s} \end{bmatrix}$$

in cui $k_i \in [0.8 \ 1.2]$ e $\Theta_i \in [0.0 \ 1.0]$, $i = 1, 2$. È più conveniente rappresentare tali incertezze come un'incertezza moltiplicativa in ingresso:



con:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix} \quad W_{\Delta} = \begin{bmatrix} W_{\Delta_1} & 0 \\ 0 & W_{\Delta_2} \end{bmatrix}$$

Ponendo W_{Δ_i} le funzioni peso delle incertezze e \overline{W}_{u_i} la funzione di trasferimento nominale nel caso $k_i = 1$ e $\theta_i = 0$, e dato che $|\Delta_i| \leq 1$, otteniamo che:

$$W_{u_i} = (1 + W_{\Delta_i} \Delta_i) \overline{W}_{u_i}, \quad i = 1, 2$$

$$\frac{|W_{u_i}(j\omega) - \overline{W}_{u_i}(j\omega)|}{|\overline{W}_{u_i}(j\omega)|} \leq |W_{\Delta_i}(j\omega)|, \quad i = 1, 2$$

La risposta in frequenza dell'incertezza relativa è calcolata per tutti i valori dei parametri incerti nel file *unc_col.m* e mostrata in Fig. 3. Queste risposte sono approssimate nel file *wfit.m* ad una funzione di trasferimento del terzo ordine, usata per la sintesi dei diversi controllori (per le simulazioni invece, si userà un'approssimazione di Padé del sesto ordine).

$$W_{\Delta_i} = \frac{2.2138s^3 + 15.9537s^2 + 27.6702s + 4.9050}{1.0000s^3 + 8.3412s^2 + 21.2393s + 22.6705}, \quad i = 1, 2$$

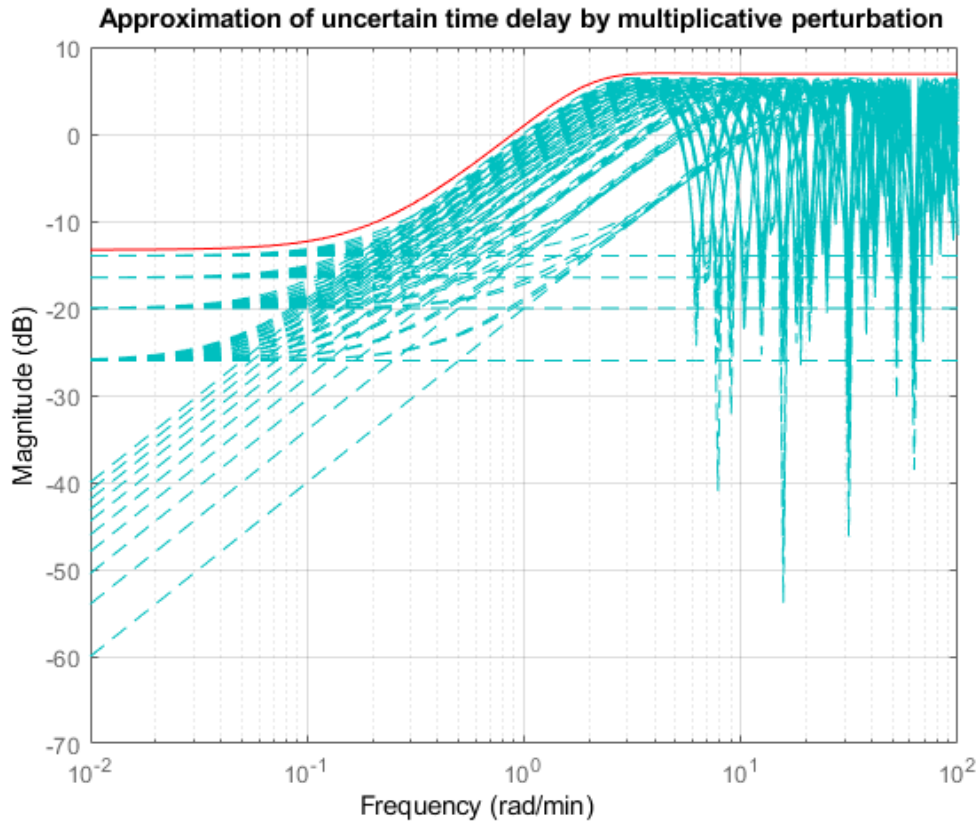


Figura 3: grafico delle incertezze relative con approssimazione del terzo ordine (linea rossa)

Specifiche di performance del sistema a ciclo chiuso

Lo scopo del progetto è, come già detto, di sintetizzare un controllore che soddisfi le condizioni di *performance robusta* (RP) e *robusta stabilità* (RS) per un sistema di una colonna di distillazione. Garantire la robusta stabilità significa garantire la stabilità del sistema a ciclo chiuso per l'intero set d'incertezze, cioè per $k_i \in [0.8 \ 1.2]$ e $\Theta_i \in [0.0 \ 1.0]$, $i = 1, 2$.

Le specifiche nel tempo invece sono riferite alla risposta temporale del sistema quando gli ingressi sono eccitati con un gradino unitario. Precisamente, in risposta a un gradino unitario nel primo (o secondo) canale di input al tempo $t = 0$, le uscite y_1 (inseguimento) e y_2 (interazione) devono soddisfare:

- $y_1(t) \geq 0.9$ per $t \geq 30 \text{ min}$;
- $y_1(t) \leq 1.1$ per ogni t ;
- $0.99 \leq y_1(\infty) \leq 1.01$;
- $y_2(t) \leq 0.5$ per ogni t ;
- $-0.01 \leq y_2(\infty) \leq 0.01$.

Le specifiche in frequenza invece sono:

- $\bar{\sigma}(\hat{K}_y \hat{S})(j\omega) < 316$ per ogni ω , dove \hat{K}_y è il guadagno di feedback del controllore;
- $\bar{\sigma}(\hat{G} \hat{K}_y)(j\omega) < 1$ per $\omega \geq 150$; oppure $\bar{\sigma}(\hat{K}_y \hat{S})(j\omega) \leq 1$ per $\omega \geq 150$.

in cui $\bar{\sigma}$ rappresenta il *massimo valore singolare*, $\hat{S} = (I + \hat{G} \hat{K}_y)$ la *sensitività* dell'impianto non scalato.

Per incorporare tali specifiche all'interno del nostro sistema, sono generate delle funzioni peso equivalenti, inserite all'interno dello schema generale. In particolare, viene creata una matrice di funzioni di trasferimento M che rappresenta la dinamica desiderata delle uscite in risposta al riferimento a ciclo chiuso, con coefficienti $T = 6$, $\xi = 0.8$ (risposta sovrasmorzata con tempo di assestamento di 30 min, minima iterazione tra i canali):

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{Ts^2 + 2\xi Ts + 1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{Ts^2 + 2\xi Ts + 1} \end{bmatrix}$$

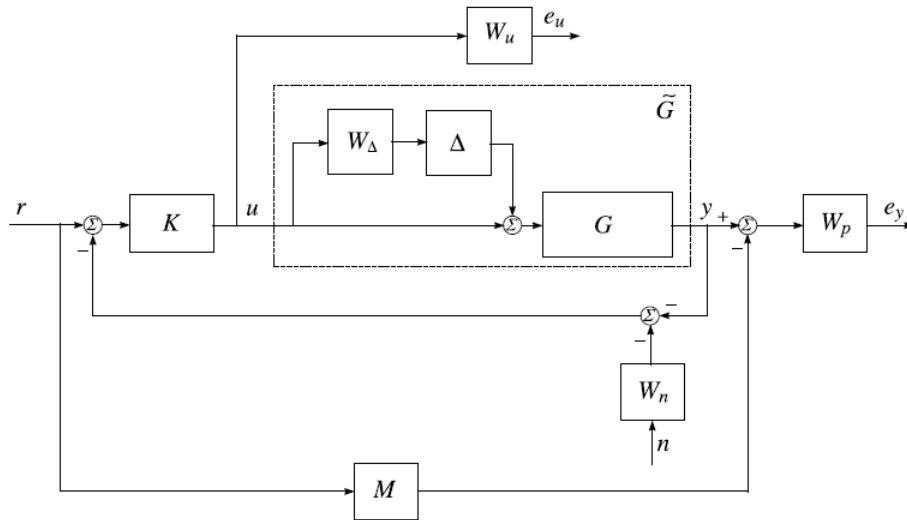
Le funzioni peso dell'azione di controllo W_u e di performance W_p sono invece:

$$W_p = \begin{bmatrix} 0.55 \frac{9.5s+3}{9.5s+10^{-4}} & 0.3 \\ 0.3 & 0.55 \frac{9.5s+3}{9.5s+10^{-4}} \end{bmatrix}, \quad W_u = \begin{bmatrix} 0.87 \frac{s+1}{0.01s+1} & 0 \\ 0 & 0.87 \frac{s+1}{0.01s+1} \end{bmatrix}$$

e garantiscono il rispetto delle prestazioni e un limite per l'ampiezza dell'azione di controllo alle frequenze $\omega < 150$. È aggiunto anche un filtro W_n in accordo con tipici sensori utilizzati per le misure delle composizioni del bottom product e del distillato.

$$W_n = \begin{bmatrix} 10^{-2} \frac{s}{s+1} & 0 \\ 0 & 10^{-2} \frac{s}{s+1} \end{bmatrix}$$

Di seguito è mostrato lo schema a blocchi del sistema con un controllore ad un grado di libertà.



Per tale sistema, si ha che:

$$\begin{bmatrix} e_p \\ e_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_p(T - M) & -W_p T W_n \\ W_u K S & -W_u K S W_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ n \end{bmatrix}$$

$$\left\| \begin{bmatrix} W_p(T - M) & -W_p T W_n \\ W_u K S & -W_u K S W_n \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < 1$$

9

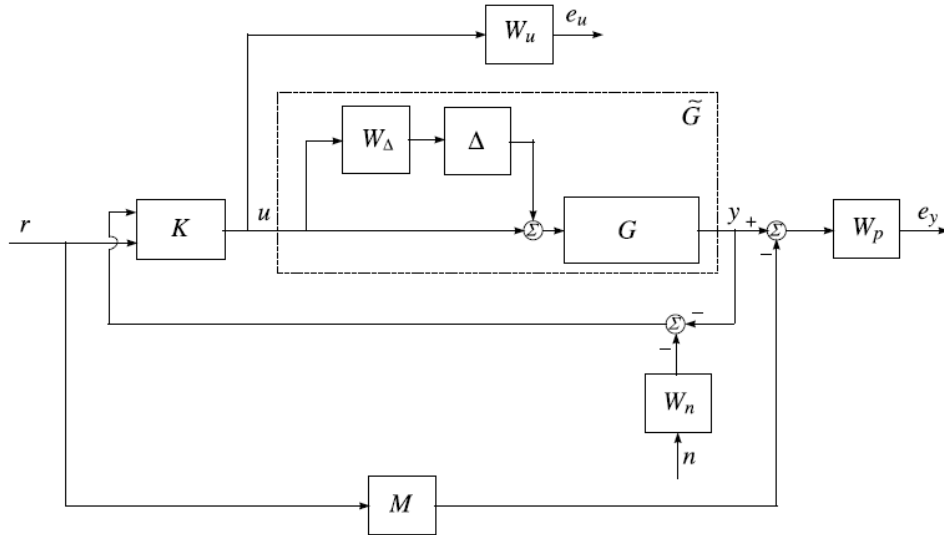


Figura 5: schema a blocchi del sistema con un controllore a due gradi di libertà

e la condizione da verificare è:

$$\left\| \begin{bmatrix} W_p(S\tilde{G}K_r - M) & -W_pTW_n \\ W_u(I + K_y\tilde{G})^{-1}K_r & -W_uK_ySW_n \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < 1$$

Interconnessioni del sistema open-loop e closed-loop

Le connessioni del sistema a ciclo aperto sono ottenute dal file *olp_col.m*. La struttura del sistema con 1 grado di libertà ha sei ingressi, sei uscite ed è di ordine 22, come mostrato in Fig. 6 e Fig. 7. Tale sistema è salvato nella variabile *sys_ic_1dof*.

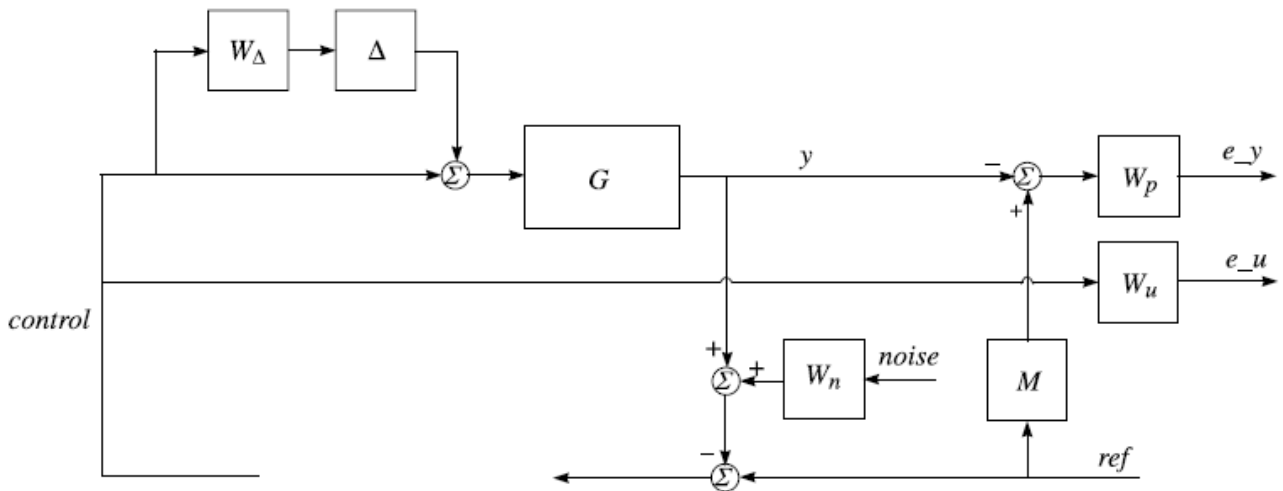


Figura 6: struttura delle interconnessioni del sistema con controllore ad un grado di libertà

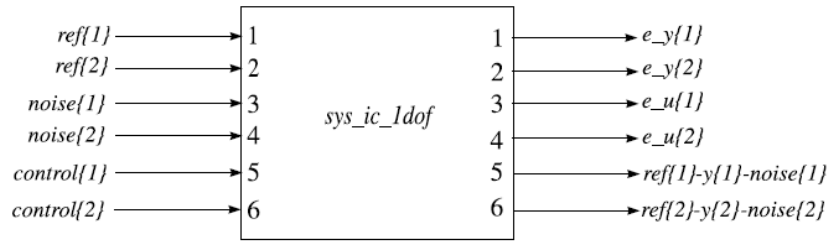


Figura 7: Diagramma schematico delle interconnessioni a ciclo aperto

Similmente accade per la struttura interna del sistema con un controllore con 2 gradi di libertà, salvato nella variabile *sys_ic_2dof* (Fig. 8 e Fig.9).

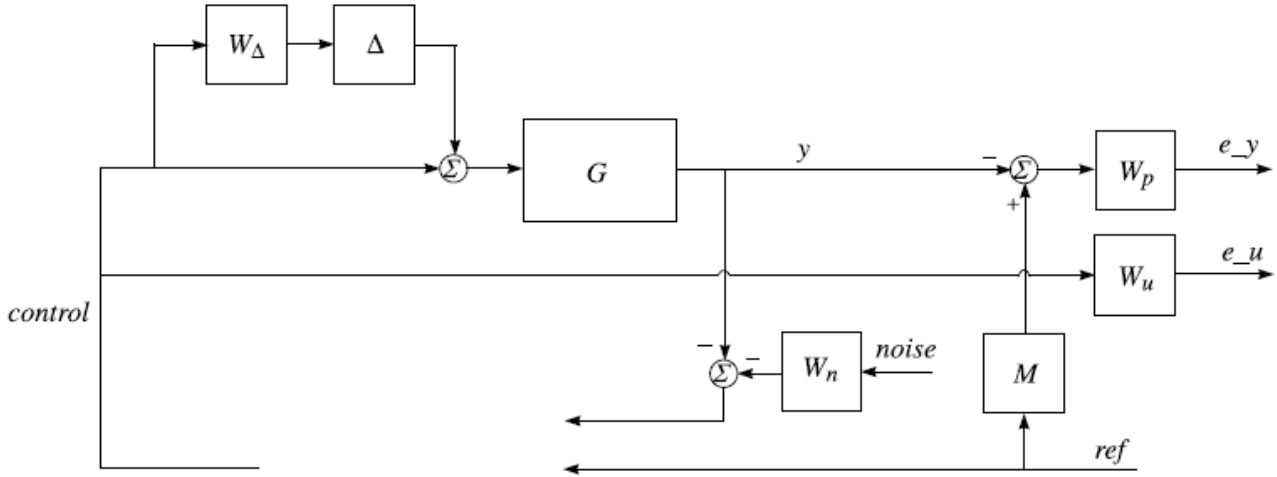


Figura 8: struttura delle interconnessioni del sistema con controllore ad un grado di libertà

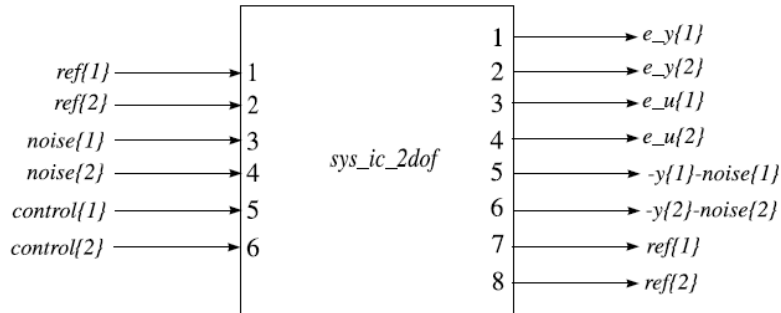


Figura 9: Diagramma schematico delle interconnessioni a ciclo aperto

I sistemi usati per le simulazioni ad anello chiuso sono riportati in Fig. 10 con 1 grado di libertà e in Fig. 11 con 2 gradi di libertà, salvati nella variabile *clp_ic*.

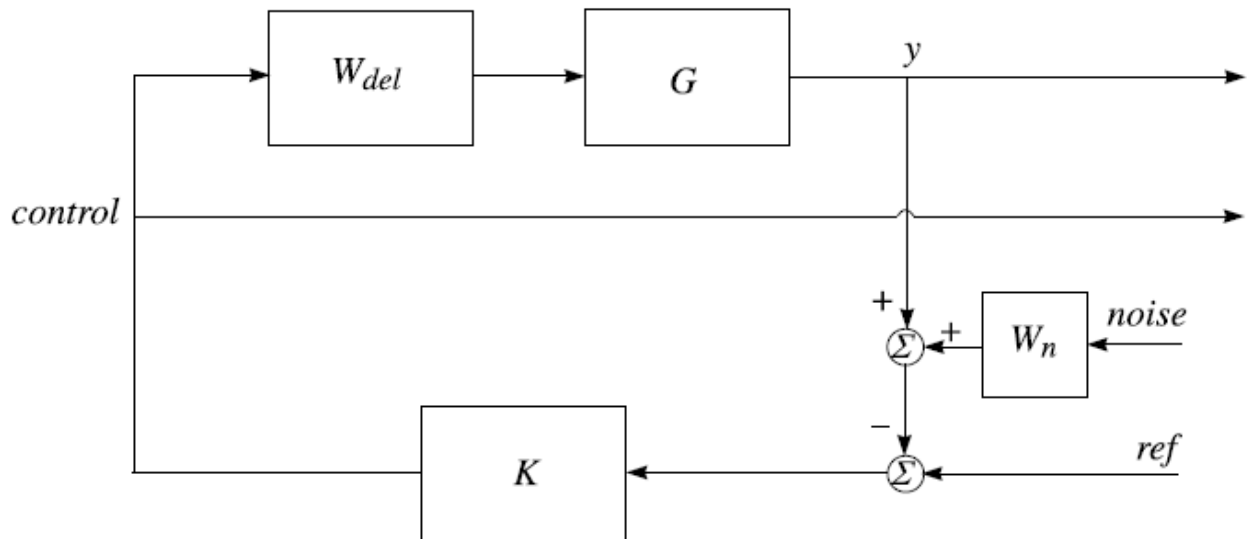


Figura 10: struttura delle interconnessioni del sistema con un controllore ad un grado di libertà

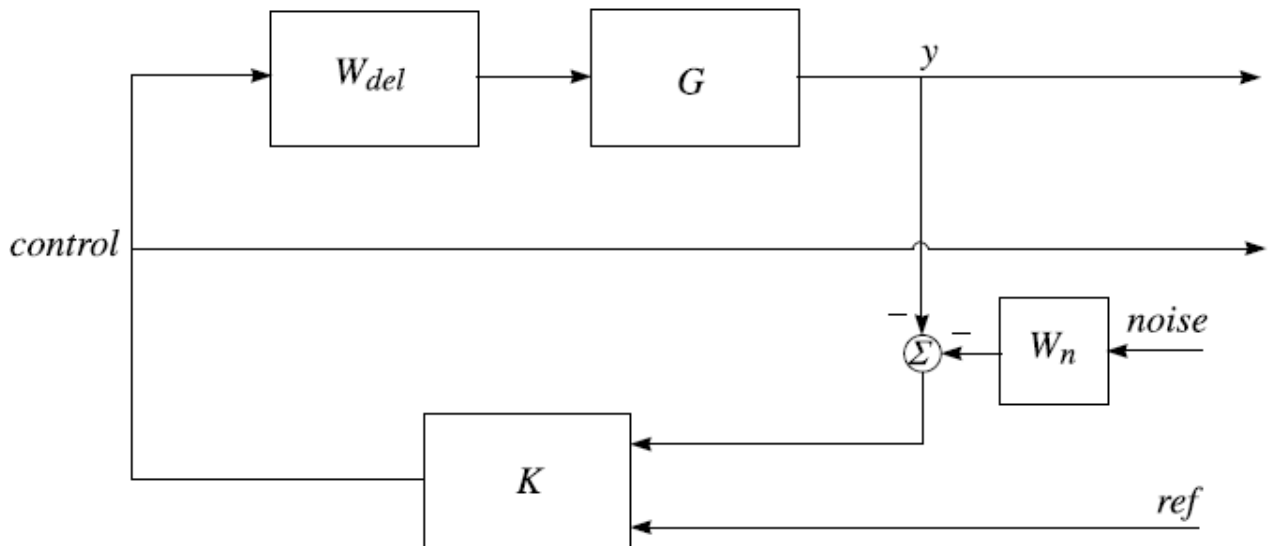


Figura 11: struttura delle interconnessioni del sistema con un controllore a due gradi di libertà

Il blocco W_{del} è una matrice diagonale di funzioni di trasferimento che rappresentano le incertezze già introdotte W_u , in cui il tempo di ritardo è stato sostituito con la sua approssimazione di Padé del sesto ordine.

Progetto controllore H_∞ a 1 e 2 gradi di libertà

Descrizione teorica controllore H_∞

Dato un sistema nella forma P-K come in Fig.12, caratterizzato dalla matrice $P(s)$:

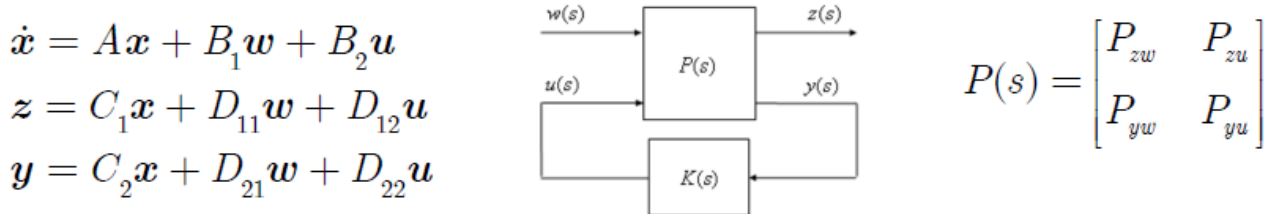


Figura 12: configurazione P-K e equazioni caratteristiche

in cui

- w sono gli ingressi esogeni, cioè disturbi ($noise\{1,2\}$) e segnali di riferimento ($ref\{1,2\}$);
- u sono gli ingressi di controllo ($control\{1,2\}$);
- y le uscite di feedback verso il controllore. In base al *grado di libertà* del controllore stesso possono essere:
 - 1 *DOF*: i due segnali $ref\{1,2\} - y\{1,2\} - noise\{1,2\}$;
 - 2 *DOF*: i quattro segnali $ref\{1,2\}$ e $-y\{1,2\} - noise\{1,2\}$;
- z le uscite da regolare, ovvero gli errori ($e_y\{1,2\}, e_u\{1,2\}$).

La matrice di trasferimento a ciclo $T_{zw}(s)$ chiuso è definita come:

$$z(s) = F[P(s), K(s)]w(s) \quad F[P(s), K(s)] = T_{zw}(s) = \{P_{zw} + P_{zu}K(I - P_{yu}K)^{-1}P_{yw}\}$$

Il problema del controllo H_∞ ottimo è quello di trovare un controllore causale $K(s)$ che stabilizzi l'impianto $P(s)$ e minimizzi la funzione di costo:

$$J_\infty(K) = \|F[P(s), K(s)]\|_\infty$$

dove $\|\cdot\|_\infty$ è la norma H_∞ : $\|T_{zw}(s)\|_\infty := \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{\max}[T_{zw}(j\omega)]$

Minimizzare la norma H_∞ significa minimizzare il *worst case* (nel nostro caso il guadagno della matrice di trasferimento) indotto dal disturbo ω sull'uscita controllata z , più specificatamente fare in modo che i disturbi vengano reiettati e che il sistema segua i riferimenti.

Le ipotesi di esistenza di tale controllore sono le seguenti:

(A, B_2, C_2) stabilizzabile e detectabile.

D_{12} e D_{21} di rango pieno.

$$\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} \text{ di rango pieno per colonne per ogni } \omega.$$

$$\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} \text{ di rango pieno per righe per ogni } \omega.$$

$$D_{11} = 0 \text{ e } D_{22} = 0.$$

Per quanto riguarda la sintesi in Matlab, dato il nostro schema a ciclo aperto a 1 o 2 gradi di libertà (Fig. 6 e Fig. 8) viene calcolata la trasformazione lineare fratta (*linear fractional trasformation LFT*) e quindi ricavato in sistema nella forma P-K tramite il comando `lftdata`. A questo punto, con il comando `hinfsyn` si procede con la sintesi del controllore H_∞ stesso. L'intero codice è contenuto nel file *hin_col.m*.

La sintesi del controllore a due gradi di libertà può migliorare le prestazioni ottenute con il controllore quando una delle uscite del sistema deve seguire una risposta al gradino, definita da uno specifico modello. Per cui l'idea è quella di creare un controllore che si occupi di rispettare la stabilità robusta, reiezione dei disturbi, etc., e un altro controllore per rispettare le specifiche di tracking minimizzando l'errore tra l'uscita del sistema e quella di un modello di riferimento ideale. Come si vedrà questa tecnica potrebbe portare un netto miglioramento della sintesi del controllore.

Risultati

Procedendo con la sintesi di un controllore H_∞ a 1 e 2 gradi di libertà, si notano netti miglioramenti delle prestazioni nel secondo caso. In seguito, verranno mostrati solo i grafici più significativi del caso di controllore $H_\infty - 2DOF$. Per completezza tutti i grafici di entrambe le sintesi sono comunque forniti con il materiale allegato.

Il controllore $H_\infty - 2DOF$ risulta soddisfare la stabilità robusta ma non la performance nominale e robusta, come mostrano i valori singolari strutturati in Fig. 13, Fig. 14 e Fig. 15

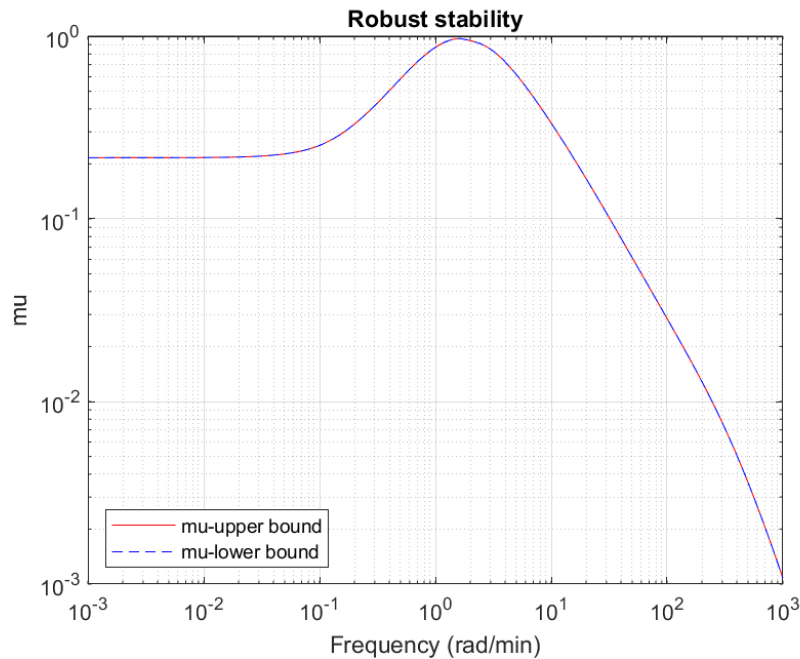


Figura 13: robusta stabilità controllore $H_\infty - 2DOF$

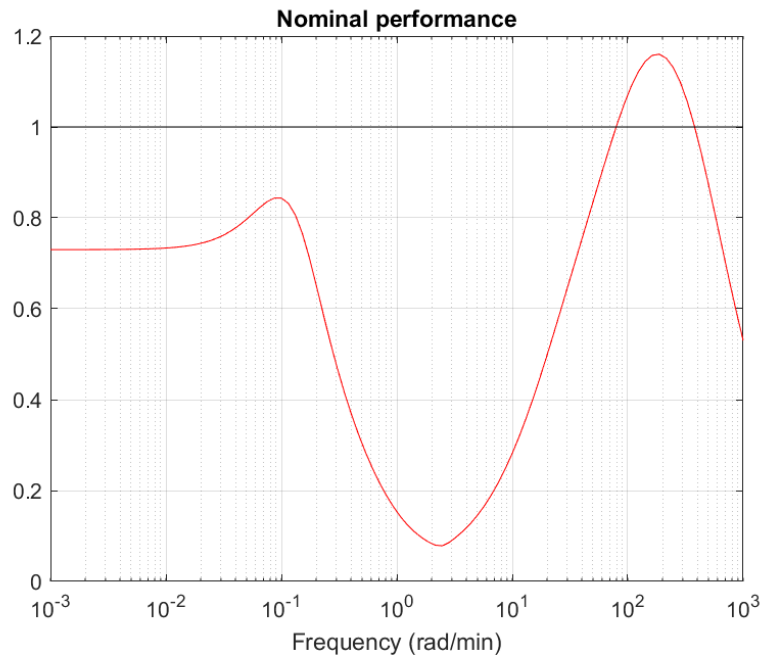


Figura 14: prestazioni nominali controllore H_{∞} -2DOF

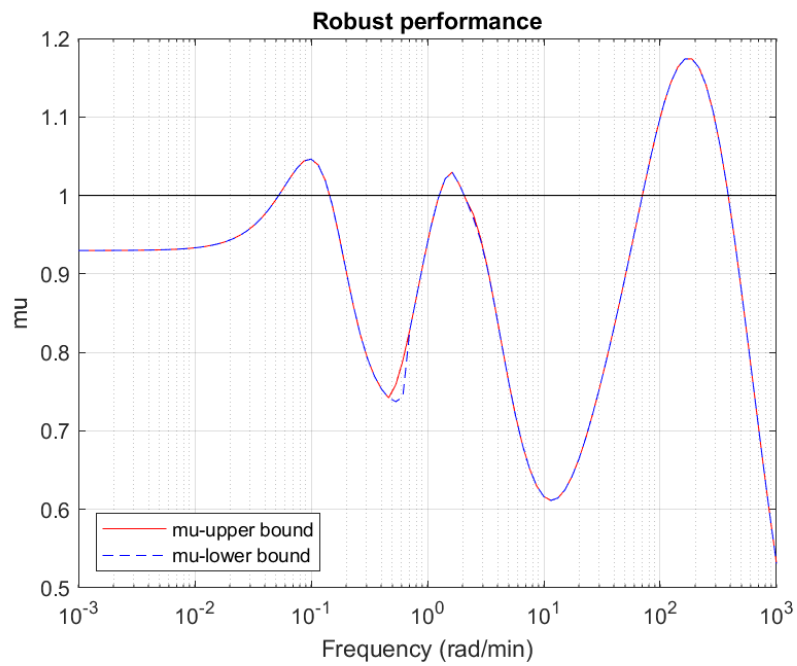


Figura 15: prestazioni robuste H_{∞} -2DOF

Le specifiche in frequenza vengono rispettate entrambe, come si nota in Fig. 16 e Fig. 17.

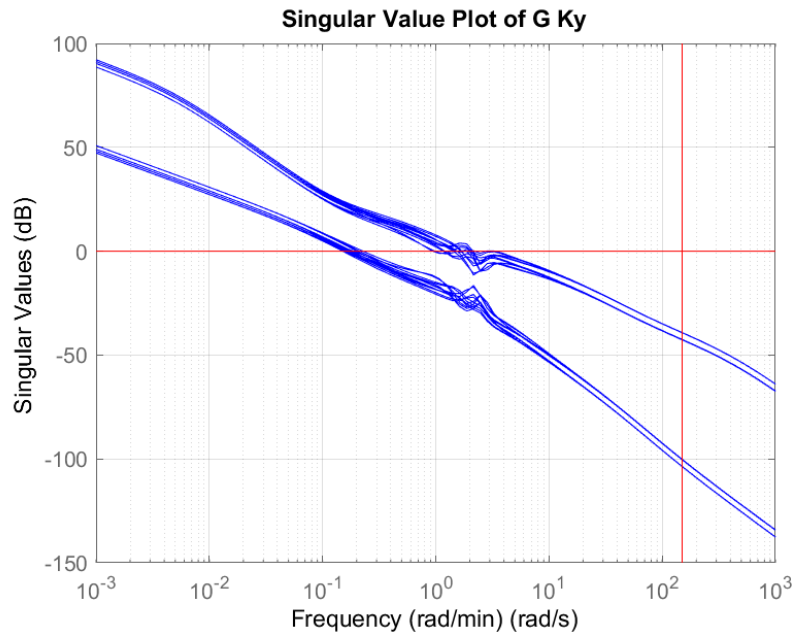


Figura 16 Valori singolari GK

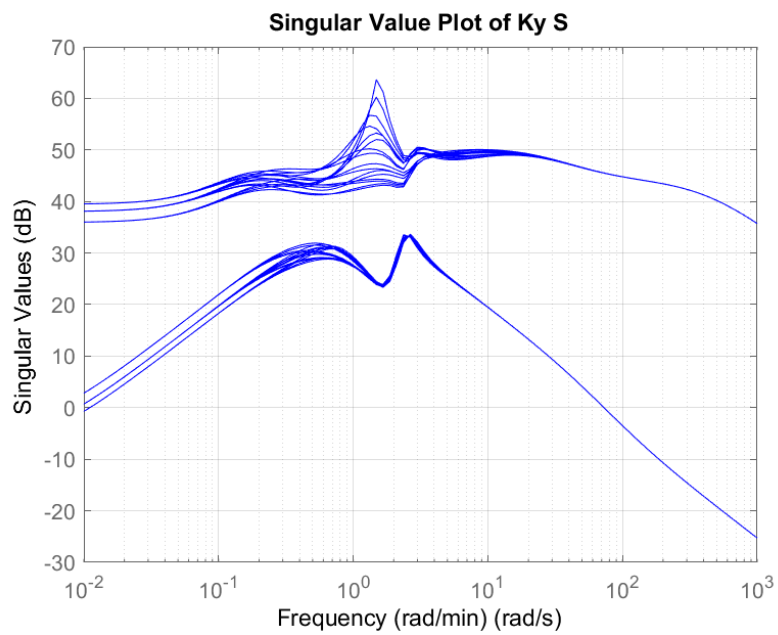


Figura 17: valori singolari KS

La stabilità e comunque delle buone performance si possono valutare anche dai grafici della risposta in frequenza, Fig. 18. È anche interessante il confronto con il controllore $H_\infty - 1DOF$, risultato essere anch'esso stabile ma con valori singolari strutturati di performance maggiori.

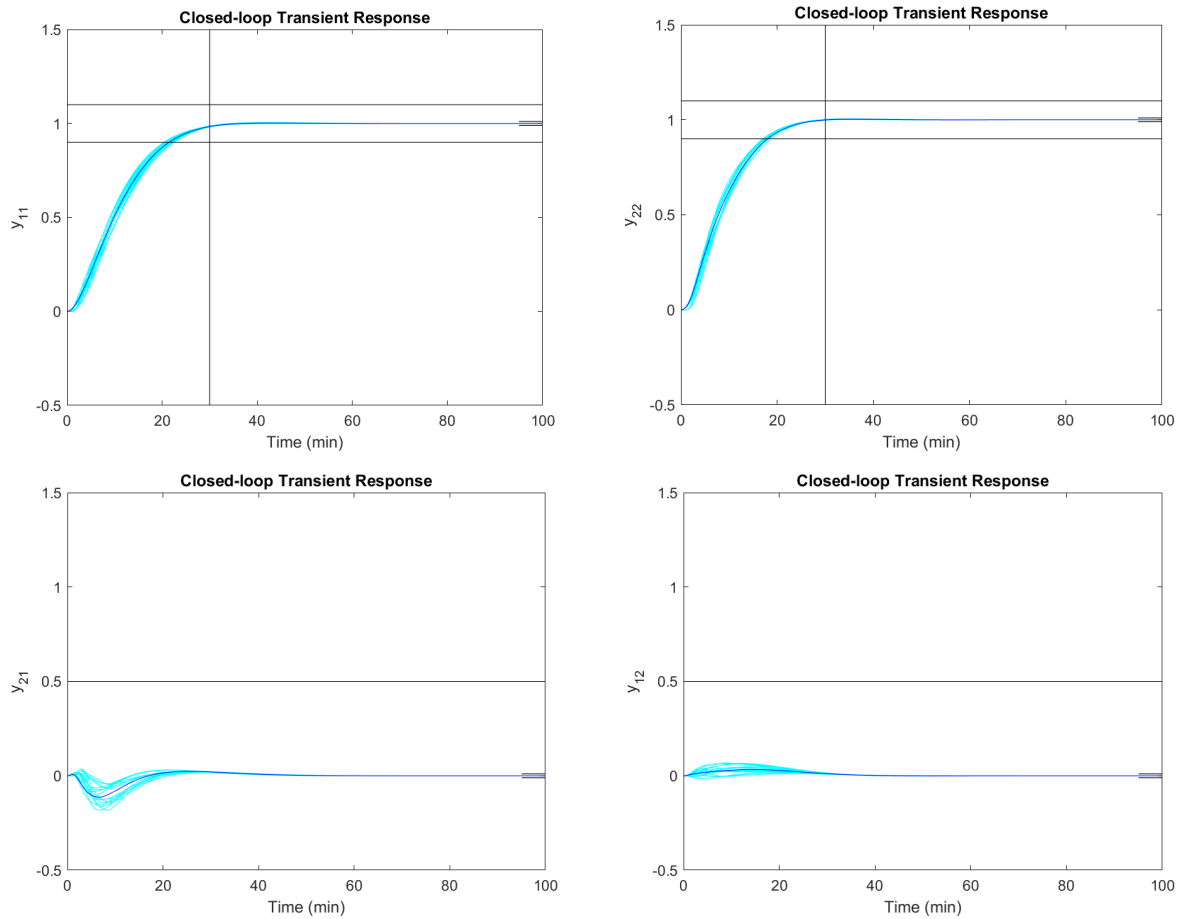


Figura 18: risposta temporale al gradino unitario con controllore H_{∞} -2DOF

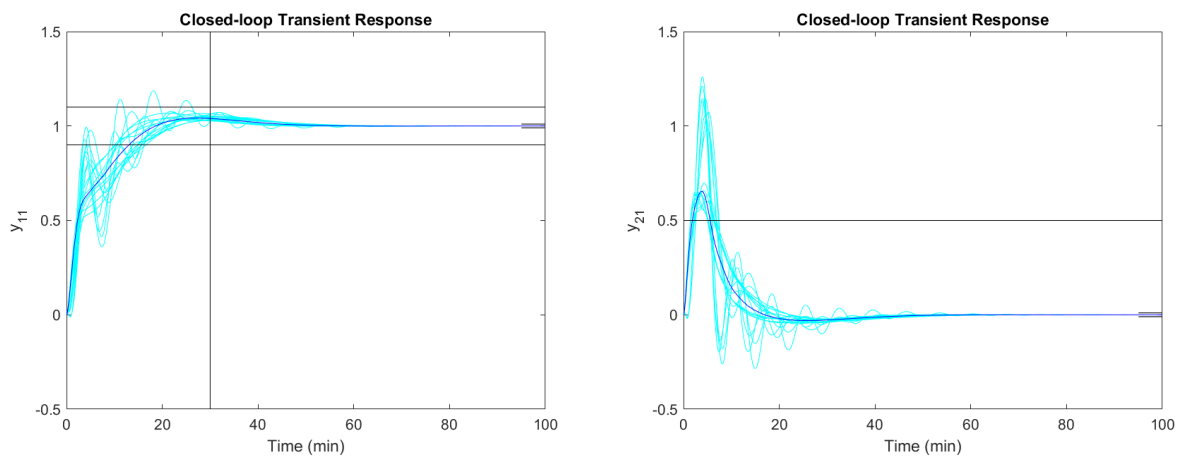


Figura 19: esempi di risposta in frequenza nel caso di controllore H_{∞} -1DOF

Ricapitolando si ottiene:

Controllore	RS	NP	NS	Specifiche risposta in frequenza	Specifiche risposta nel tempo
$H_{\infty} - 1DOF$	SI	NO	NO	SI	NO
$H_{\infty} - 2DOF$	SI	NO	NO	SI	SI

Progetto controllore H_∞ loop-shaping a 1 grado di libertà

Descrizione teorica controllore H_∞ loop-shaping

La procedura di sintesi *loop-shaping* si basa sull'idea di moltiplicare a destra e sinistra la matrice G del sistema (Fig. 20) con lo scopo di raggiungere una forma desiderata della risposta in frequenza a ciclo aperto, o dei suoi valori singolari. Usualmente, si cerca di aumentare a basse frequenze il valore singolare minimo del sistema aumentato, per raggiungere buone prestazioni di tracking, e di diminuire il valore singolare massimo ad alte frequenze, per la reiezione dei disturbi, tenendo anche conto della banda del sistema iniziale. Successivamente si stabilizza in modo robusto il sistema, per esempio rispetto il fattore coprimo delle incertezze, usando l'ottimizzazione H_∞ .

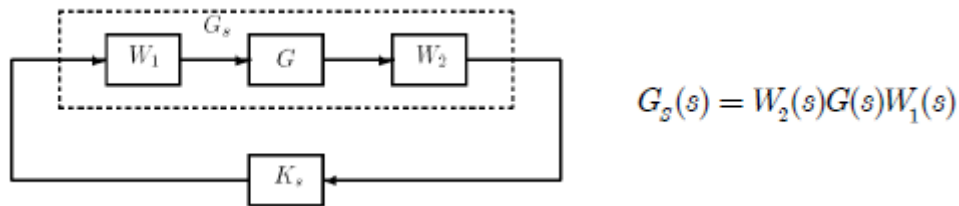


Figura 20: connessioni ed equazione caratteristica loop-shaping controller

Nel nostro caso sono state scelte le matrici peso pari a:

$$W_1 = \begin{bmatrix} 1.7 \frac{1.1s+1}{10s} & 0 \\ 0 & 1.7 \frac{1.1s+1}{10s} \end{bmatrix} \quad W_2 = I_2$$

La scelta di tali coefficienti è per assicurare sufficientemente un piccolo errore a regime. Valori più alti del guadagno avrebbero portato a errori a regime più piccoli ma una peggiore risposta in frequenza. I valori singolari modificati della risposta in catena aperta sono quindi mostrati in Fig. 21.

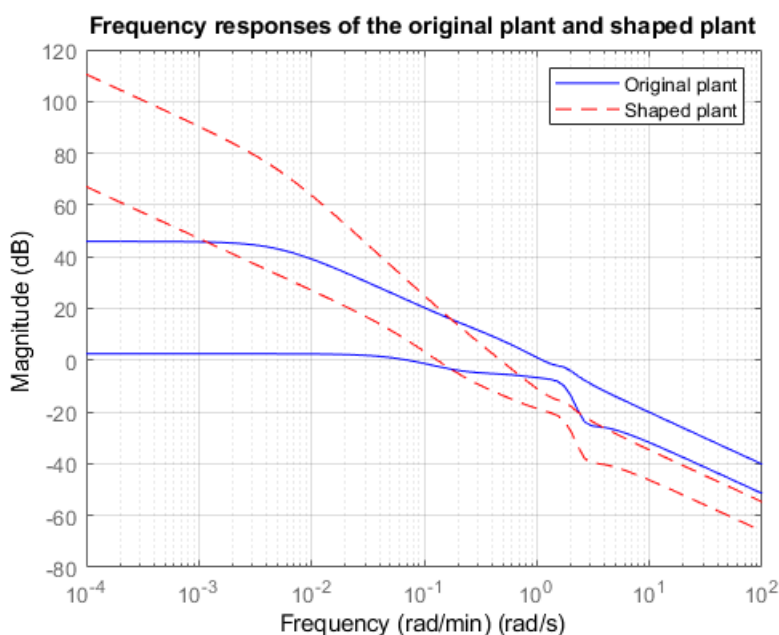


Figura 21: valori singolari della risposta a ciclo aperto con funzioni di peso

Per l'implementazione in Matlab, si usa il comando specifico `ncfsyn`. Il codice è contenuto nel file `lsh_col.m`.

Risultati

Il controllore così sintetizzato risulta soddisfare la stabilità robusta, ma non soddisfa i requisiti per le prestazioni nominali e robuste, come mostrato in Fig. 22 e Fig. 23.

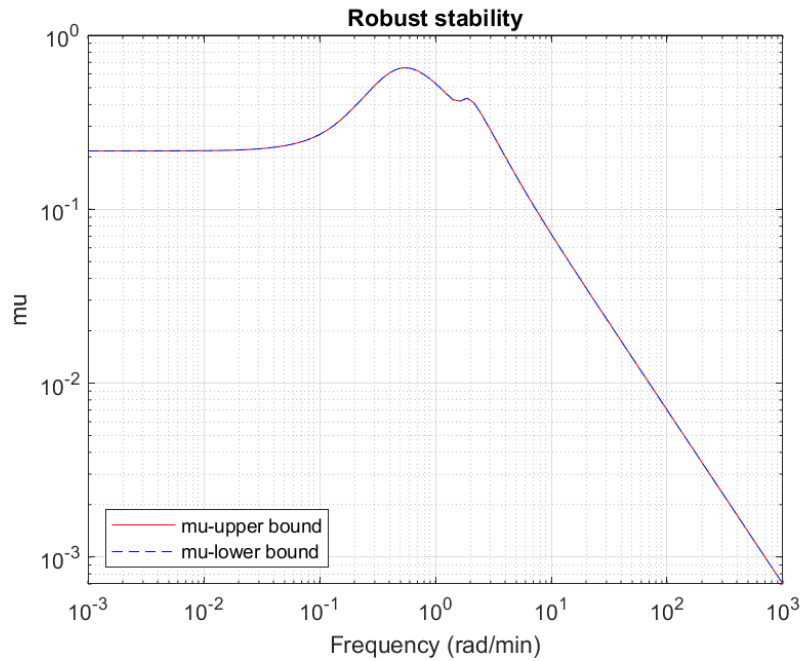


Figura 22: robusta stabilità con controllore LSH

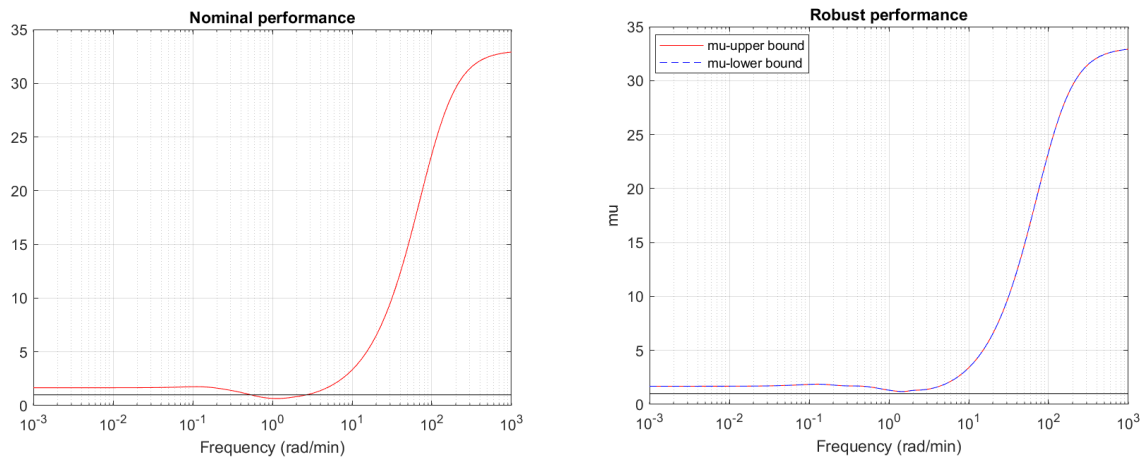


Figura 23: prestazioni nominali e robuste con controllore LSH

I requisiti in frequenza sono rispettati, come mostrano i grafici in Fig. 24 e Fig. 25.

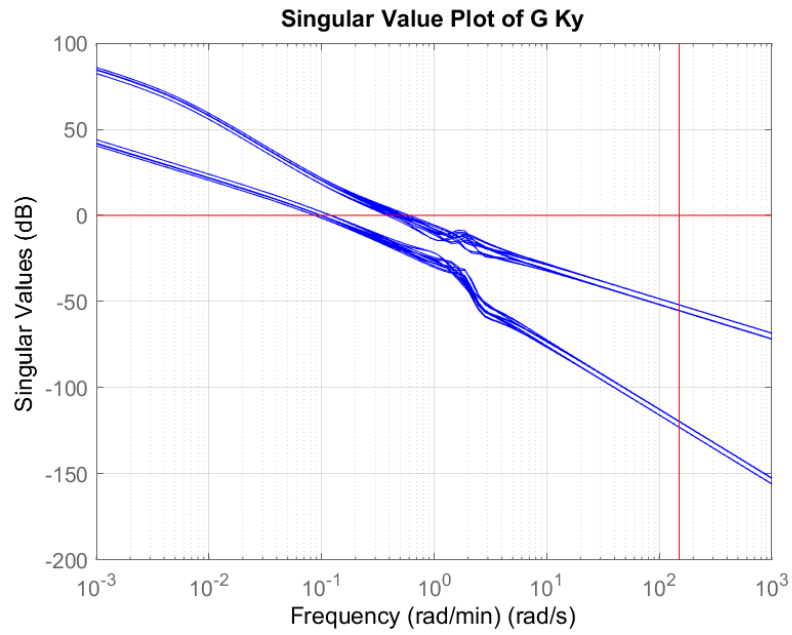


Figura 24: Valori singolari GK

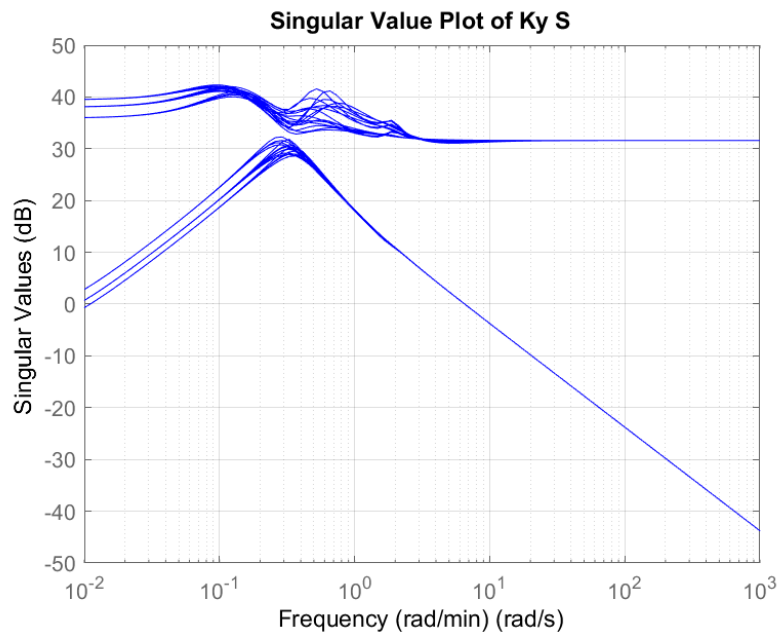


Figura 25: Valori singolari KS

Infine, si nota che le specifiche della risposta temporale non vengono tutte rispettate: in particolare la stabilità robusta assicura la stabilità a regime del sistema ma la prestazione robusta non rispettata comporta dei picchi nelle risposte a gradino che superano i limiti delle specifiche. I grafici in Fig. 26 mostrano l'andamento delle uscite nel tempo e i relativi vincoli.

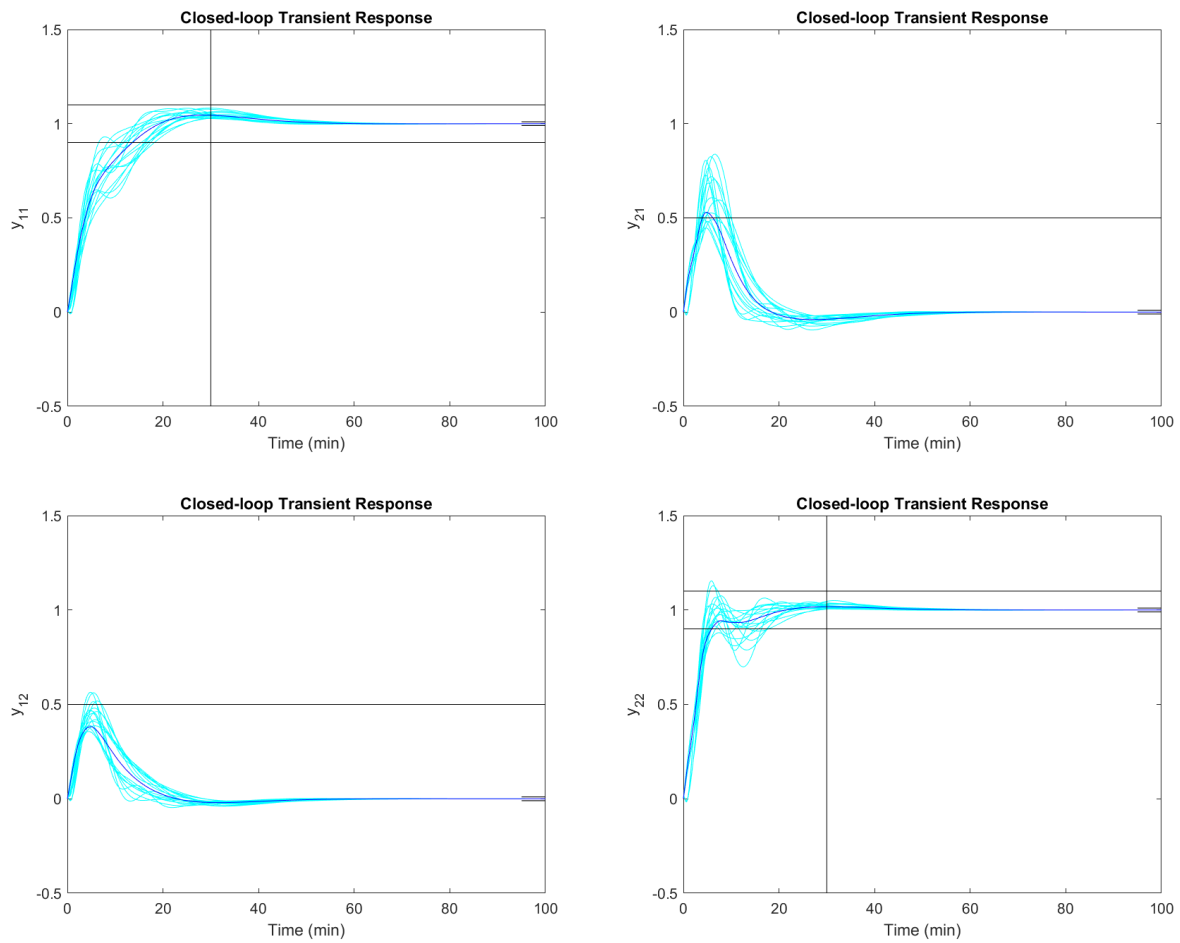


Figura 26: risposta temporale al gradino unitario con controllore LSH

Ricapitolando si ottiene:

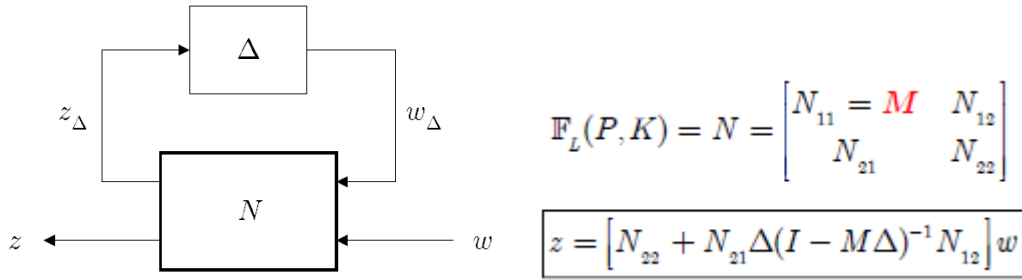
Controllore	RS	NP	NS	Specifiche risposta in frequenza	Specifiche risposta nel tempo
<i>LSH controller</i>	SI	NO	NO	SI	NO

Progetto controllore μ

Descrizione teorica controllore μ

La sintesi di un controllore ottenuto tramite la μ – *Synthesis* si basa essenzialmente sul minimizzare al di sotto di un valore limite, generalmente 1, il valore singolare strutturato del modello, espresso nella forma $N - \Delta$. Considerando in Δ dei pesi fittizi aggiuntivi, tale controllo provvederà a soddisfare sia la robusta stabilità che la robusta performance.

Il sistema è espresso, come per il controllo H_∞ , nella forma $P - K$, e poi nella sua equivalente trasformazione lineare fratta superiore $N - \Delta$.



Il valore singolare strutturato o μ della matrice complessa $M = N_{11}$ è definito come l'inverso del fattore di espansione r delle incertezze ($\Delta \rightarrow r\Delta$) che porta in singolarità la matrice $(I - M\Delta)$, cioè l'inverso del massimo valore di r che mantiene $\det(I - M\Delta) \neq 0$ per ogni valore di $r\Delta$.

$$\mu_\Delta = \frac{1}{r^*} = \frac{1}{\sup \left\{ r \mid \det(I - M\Delta) \neq 0; \forall \Delta \in r\Delta \right\}}$$

Avendo supposto tutte le incertezze non strutturate $|\Delta_i| \leq 1$, secondo il teorema fondamentale della robusta stabilità se si trova un controllore $K(s)$ che stabilizzi $P(s)$ e se vale $\mu_\Delta(M(s)) \leq 1$ per ogni $\omega \in [0, \infty)$, allora il controllore $K(s)$ stabilizza $\mathbb{F}_L\{G(P, K)\}$ rispetto tutte le incertezze Δ .

Per raggiungere tale risultato bisogna perciò impostare il sistema nella forma $N - \Delta$ e aumentare l'ordine della matrice delle incertezze Δ , come in Fig. 27:

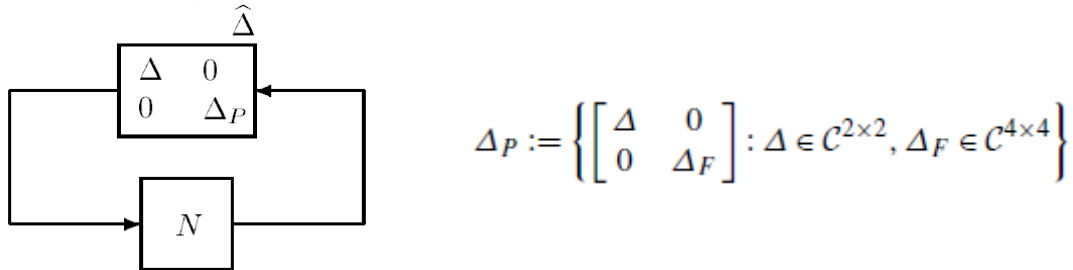


Figura 27: matrice aumentata delle incertezze per la μ – *Synthesis*

Il primo blocco corrisponde al blocco delle incertezze non strutturate viste all'inizio della descrizione del problema (relativo alla matrice $W_{\Delta i}$, Fig. 3). Il secondo blocco Δ_F è un blocco 4×4 fittizio, introdotto per includere gli obiettivi di prestazione all'interno della μ – *Synthesis*. Gli input di

questo blocco sono gli errori dei segnali pesati e_p e e_u , le uscite saranno il riferimento r e il rumore n .

La μ – *Synthesis* è eseguita tramite il file *ms_col.m* e implementa la funzione `dkitopt`. Anche in questo caso è possibile sintetizzare un controllore a 1 o 2 gradi di libertà. Per completezza tutti i grafici di entrambe le sintesi sono comunque forniti con il materiale allegato.

Risultati

Il comando `dkitopt` utilizzato implementa la *D-K iteration* per trovare il controllore che soddisfi tutti i requisiti di robustezza. Di seguito è riportato il processo di tali iterazioni nel caso di controllore a 2 gradi di libertà.

Iteration Summary			
Iteration #	1	2	3
Controller Order	22	28	28
Total D-Scale Order	0	6	6
Gamma Acheived	1.801	0.990	0.985
Peak mu-Value	1.114	0.989	0.983

I valori singolari strutturati di stabilità e prestazioni sono riportati di seguito.

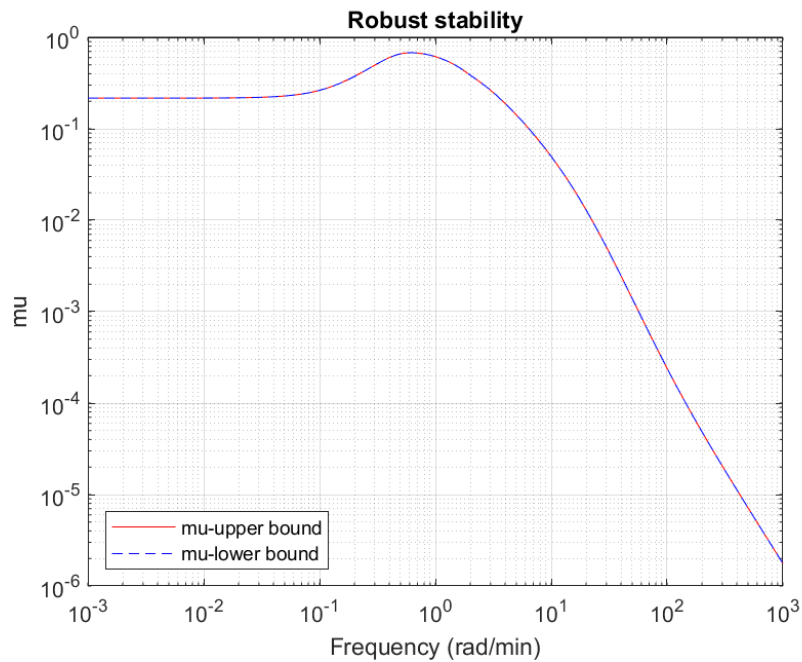


Figura 28: robusta stabilità con controllore μ – *Synthesis* 2DOF

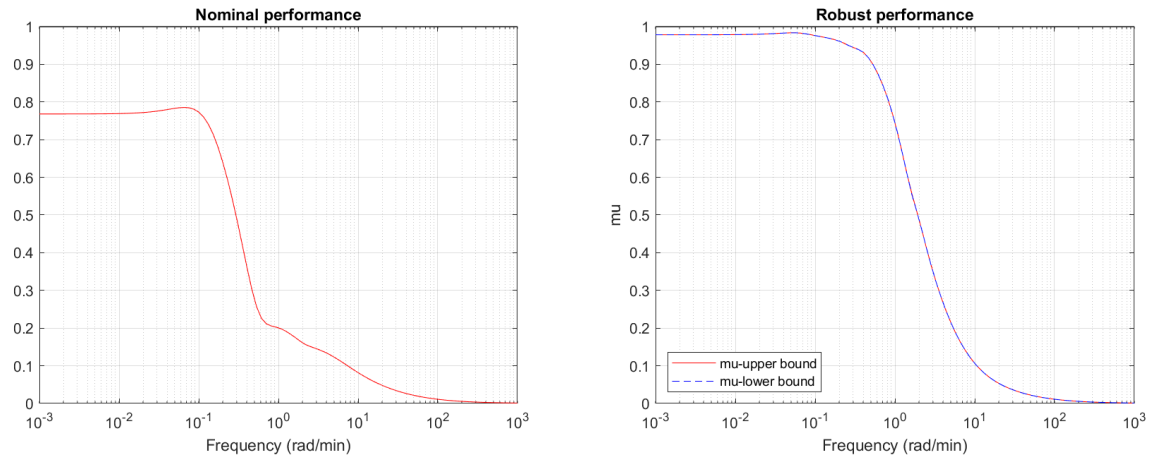


Figura 29: prestazioni nominali e robuste con controllore μ -Synthesis 2DOF

Per il controllore a 1 grado di libertà invece si perdono le prestazioni nominali e robuste, come si vede in Fig. 30 notando che il valore singolare strutturato risulta essere maggiore di 1.

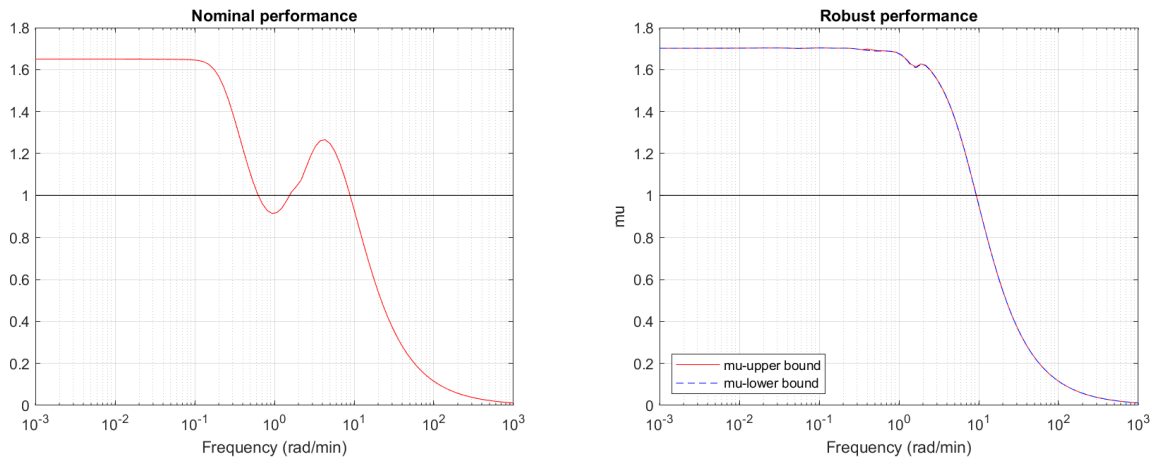


Figura 30: prestazioni nominali e robuste con controllore μ -Synthesis 1DOF

Le specifiche in frequenza sono rispettate da entrambi i controllori. Le specifiche nel tempo sono rispettate solo dal controllore a 2 gradi di libertà, come si vede negli esempi in seguito, in cui si riporta solo una delle uscite controllate del sistema.

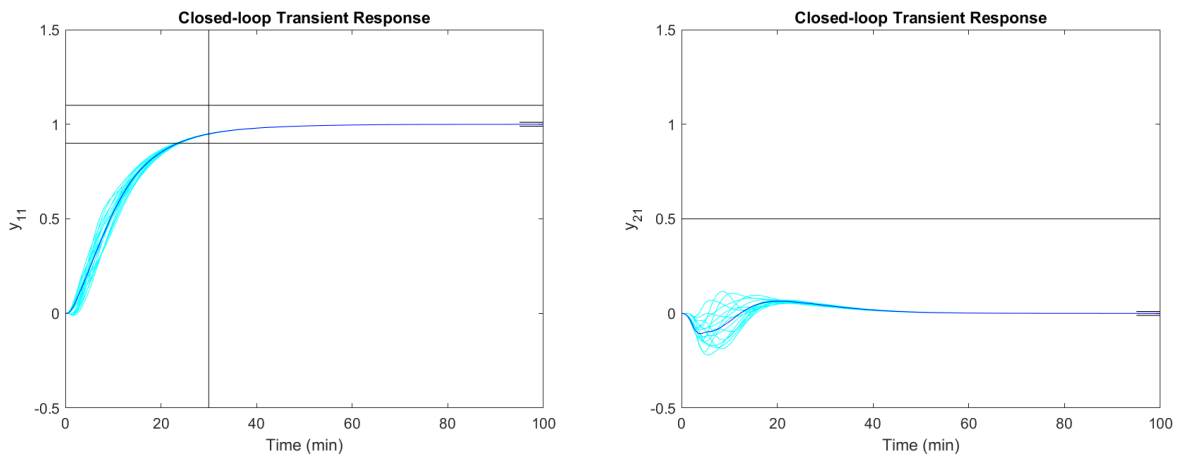


Figura 31: risposta temporale al gradino unitario con controllore μ -Synthesis 2DOF

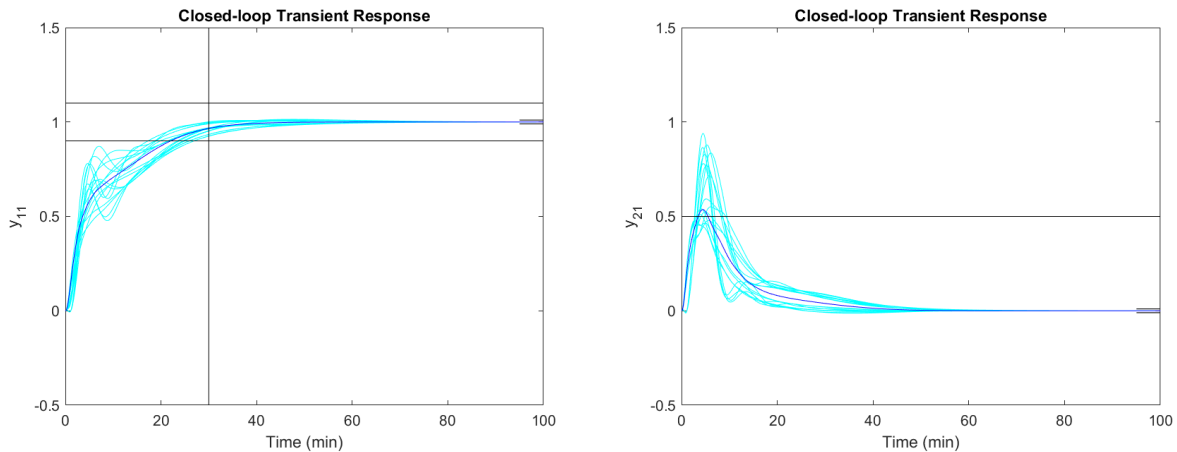


Figura 32: risposta temporale al gradino unitario con controllore μ -Synthesis 1DOF

Il report dell'analisi della robustezza eseguita dal file *mu_col.m* per il controllore a due gradi di libertà è:

```
'Assuming nominal UFRD system is stable...Uncertain system is robustly stable to modeled
uncertainty.'
```

```
  -- It can tolerate up to 147% of the modeled uncertainty.
  -- There is a destabilizing perturbation amounting to 147% of the modeled uncertainty.
  -- This perturbation causes an instability at the frequency 0.614 rad/seconds.
  -- Sensitivity with respect to each uncertain element is:
    52% for Delta_1. Increasing Delta_1 by 25% decreases the margin by 13%.
    64% for Delta_2. Increasing Delta_2 by 25% decreases the margin by 16%.

'Assuming nominal UFRD system is stable...Uncertain system achieves performance robustness to
modeled uncertainty.'
```

```
  -- The tradeoff of model uncertainty and system gain is balanced at a level of 102% of the
modeled uncertainty.
  -- A model uncertainty of 102% can lead to input/output gain of 0.983 at 0.0498 rad/seconds.
  -- Sensitivity with respect to each uncertain element is:
    52% for Delta_1. Increasing Delta_1 by 25% decreases the margin by 13%.
    40% for Delta_2. Increasing Delta_2 by 25% decreases the margin by 10%.
```

Il controllore così sintetizzato è di ordine 28. Eseguendo il file *red_col.m* si è ridotto l'ordine del controllore a 12 e in Fig. 33 è riportato il confronto dei valori singolari della funzione di trasferimento del controllore. Si nota che coincidono fino a circa 23 rad/min , ben oltre la frequenza di taglio del sistema di $0,1 \text{ rad/min}$. Infatti, la risposta temporale, risposta in frequenza e margini di robustezza sono quasi identici a quelle del controllore di ordine pieno.

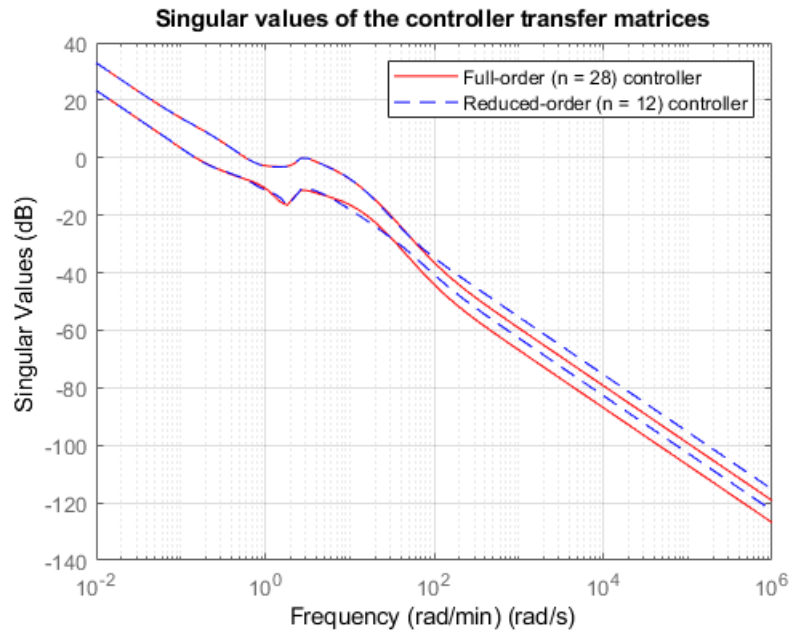


Figura 33: confronto tra valori singolari della matrice di trasferimento del controllore di ordine 28 e 12

Ricapitolando si ottiene:

Controllore	RS	NP	NS	Specifiche risposta in frequenza	Specifiche risposta nel tempo
μ – Synthesis – 1DOF	SI	NO	NO	SI	NO
μ – Synthesis – 2DOF	SI	SI	SI	SI	SI

Progetto controllore LQG/LTR

Descrizione teorica controllore LQG/LTR

Il controllore LQG/LTR si basa sulla sintesi di un controllore LQG e sull'applicazione della tecnica LTR per recuperare robustezza del sistema. Un classico controllore LQG è formato dalla coppia di un controllore lineare quadratico con feedback sullo stato del sistema, più un filtro di Kalman che si occupa della stima dello stato stesso. L'architettura generale del controllo LQG è mostrata in Fig. 34.

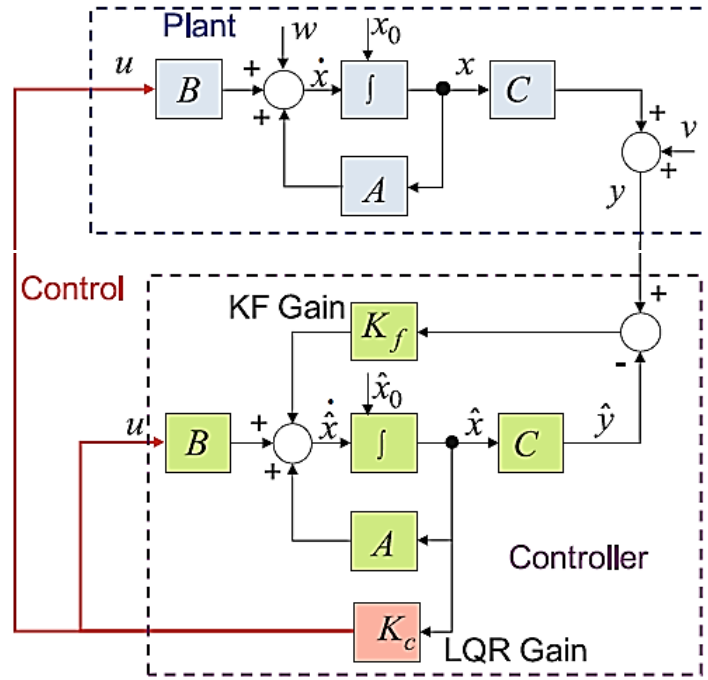


Figura 34: architettura controllore LQG

Plant Dynamics

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + w \\ y = Cx + v \end{cases}$$

Frequency Domain

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= (sI - A)^{-1} \\ G(s) &= C\Phi(s)B \\ K(s) &= K_c (sI - A + BK_c + K_f C)^{-1} K_f \end{aligned}$$

Compensator Dynamics

$$\begin{cases} u = -K_c \hat{x} \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_f (y - C\hat{x}) \\ \hat{x} = (A - BK_c - K_f C)^{-1} K_f y \end{cases}$$

$$K(s) = \left[\begin{array}{c|c} A - BK_c - K_f C & -K_f \\ \hline K_c & 0 \end{array} \right]$$

$$L(s) = K_c (sI - A + BK_c + K_f C)^{-1} K_f C (sI - A)^{-1} B$$

Il controllore LQR è sintetizzato per garantire delle specifiche di robustezza, ed anche l'osservatore KBF preso singolarmente è uno stimatore ottimo. Connettendoli insieme però si perde qualsiasi assunzione fatta sui margini di robustezza. Qui entra in gioco la tecnica dell'LTR (*Loop Transfer Recovery*): in pratica si decide un punto di apertura del sistema (input o output), in base alla posizione delle incertezze, si sintetizza un controllore LQR o KBF che verifichi la robustezza del sistema, si procede con la tecnica LTR per creare l'altro controllo (rispettivamente KBF o LQR) per fare un modo che nel punto di apertura dell'anello venga mantenuta la funzione di trasferimento da entrambi

i lati. Si passa così da un sistema strutturato come un LQG, non più stocastico ma con un controllo deterministico.

I limiti di applicabilità della tecnica LTR sono:

- Impianto quadrato (perché durante la procedura si inverte la matrice A del sistema)
- Sistema a fase minima (esistenza dell'inversa e ben condizionata)
- Osservatore di ordine pieno
- Alto guadagno del parametro q per ottenere il recupero della funzione di trasferimento
- Le perturbazioni sono limitate alle incertezze non strutturate.

Nel nostro caso, come passo preliminare è stato aumentato il sistema nominale G aggiungendo un banco di integratori per soddisfare le specifiche di inseguimento a regime. Successivamente tramite i parametri H e r si è sintetizzato con il comando `lqr` un controllore LQR per garantire la robusta stabilità e robuste prestazioni. La tecnica LTR in questo caso non porta a buoni risultati in quanto il sistema è a fase non minima per la presenza di zeri a parte reale positiva. Con il comando `zpk(G)` si ottiene la forma in s della matrice di trasferimento del sistema. Si fa notare lo zero a fase non minima in G_{21} :

$$G_{21} = \frac{-0.083618 (s - 2.576) (s + 0.283) (s + 0.07304) (s^2 - 4.398s + 8.94)}{(s + 0.07479) (s + 0.005151) (s^2 + 0.9857s + 0.28) (s^2 + 0.8247s + 3.402)}$$

Per questo motivo ci siamo limitati ad un valore basso di recupero q ottenendo un controllore stabile ma senza assicurare robuste prestazioni e prestazioni nominali. In questo modo la tecnica è comunque utilizzata ma in modo molto limitato (codice nel file *LTR_col.m*)

Di seguito è riportato un grafico significativo dei valori singolari delle matrici di trasferimento nel punto di apertura del sistema. Si nota che tramite la sintesi dell'LQR e la scelta dei parametri H e r si ha una risposta in frequenza della matrice di trasferimento che rispetta i vincoli di robustezza (RP e RS) in Fig. 35. Facendo tendere $q \rightarrow \infty$ si dovrebbe raggiungere asintoticamente tale andamento e concludere la sintesi ma la presenza degli zeri positivi rende instabile il controllore. Un buon compromesso è stato comunque trovato “giocando” sui parametri liberi e tenendo il guadagno di recupero q basso.

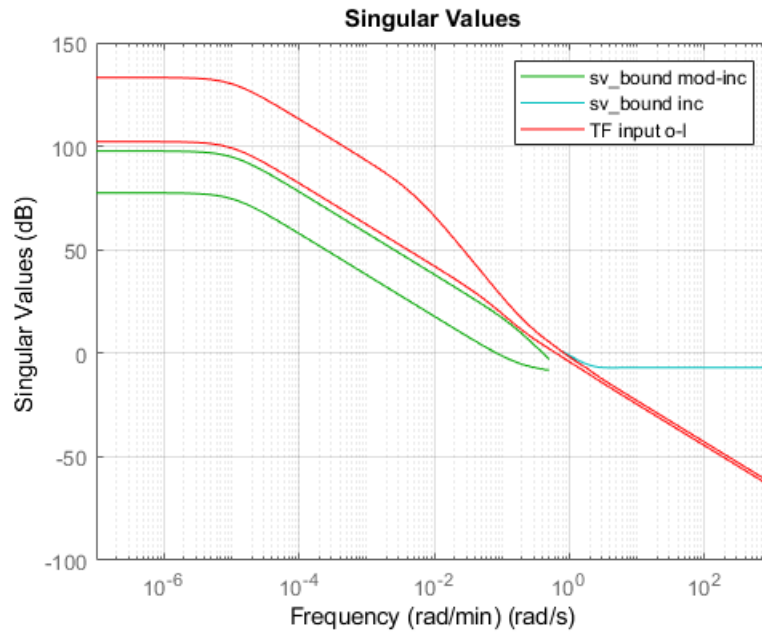


Figura 35: valori singolari della matrice di trasferimento con controllore LQR

In Fig. 36 è riportata la procedura LTR per diversi guadagni (a destra $q = 0.01$, a sinistra $q = 1 \div 10^{15}$).

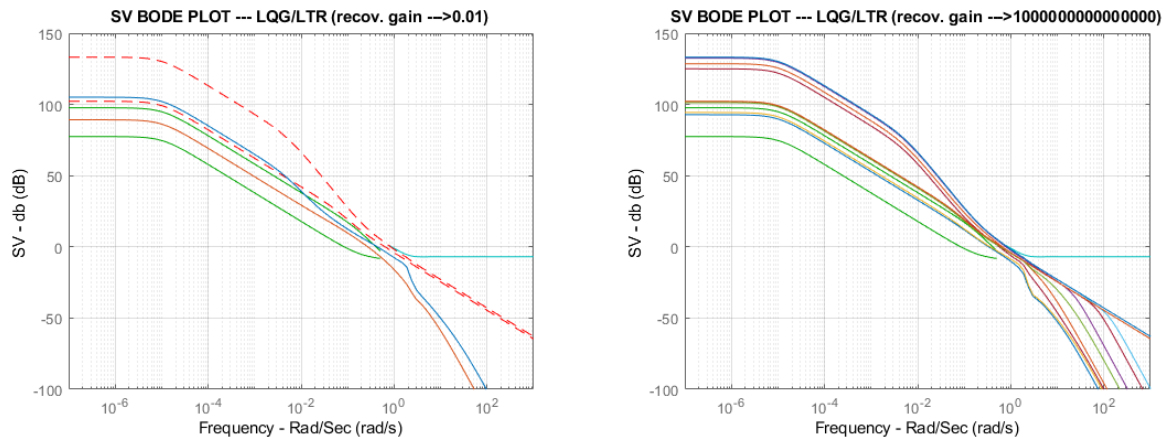


Figura 36: confronto tra i valori singolari della matrice di trasferimento con diversi guadagni di recupero

La linea tratteggiata rossa rappresenta l'andamento dei valori singolari del sistema a ciclo aperto desiderato calcolato con la procedura LQR. In azzurro è riportata la soglia da rispettare per la robusta stabilità. Tramite la procedura si vuole raggiungere quel particolare andamento che porterebbe a soddisfare le condizioni di robusta stabilità e robuste prestazioni. Con un guadagno basso (a sinistra) si nota che si perdono le robuste prestazioni perché l'ampiezza dei valori singolari a bassa frequenza diminuisce, ma si mantiene comunque la robusta stabilità. Differentemente con un guadagno più alto la forma dei valori singolari si avvicina a quella desiderata, ma la presenza dello zero a fase non minima rende il controllo comunque non performante e instabile.

Risultati

Di seguito vengono riportati i risultati ottenuti progettando il controllore con:

- il sistema aumentato con l'aggiunta di un banco di integratori (poli a bassa frequenza in $1/(s - 10^{-5})$);
- ponendo per la sintesi dell'LQR i valori di $H = C$ e $r = 1$;
- scegliendo un recupero basso per la tecnica dell'LTR di $q = 0.01$.

Per il sistema è assicurata la robusta stabilità ma non la prestazione robusta e nominale. Il valore singolare strutturato per le prestazioni nominali e robuste è comunque tale da soddisfare i requisiti per valori delle incertezze sotto il 50% del valore massimo.

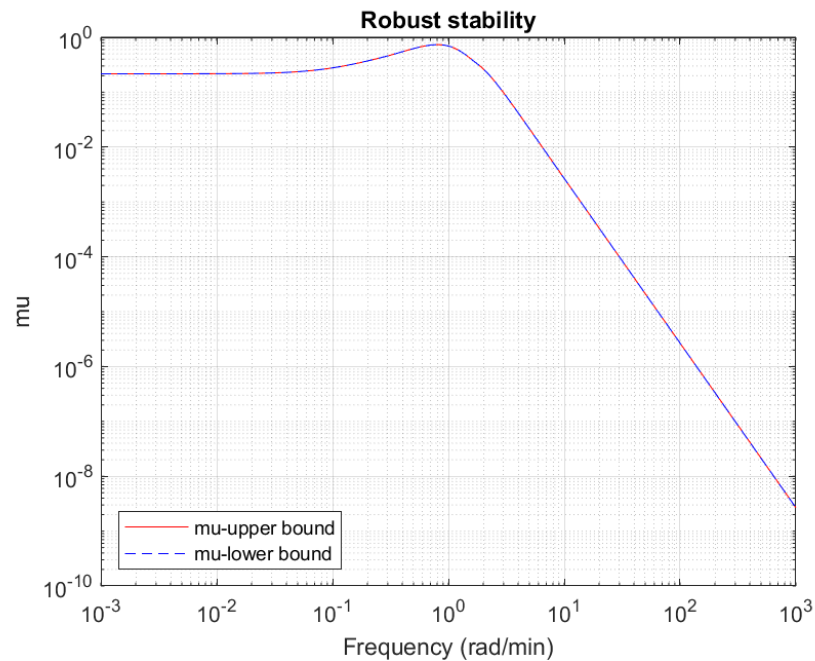


Figura 37: robusta stabilità con controllore LQG/LTR

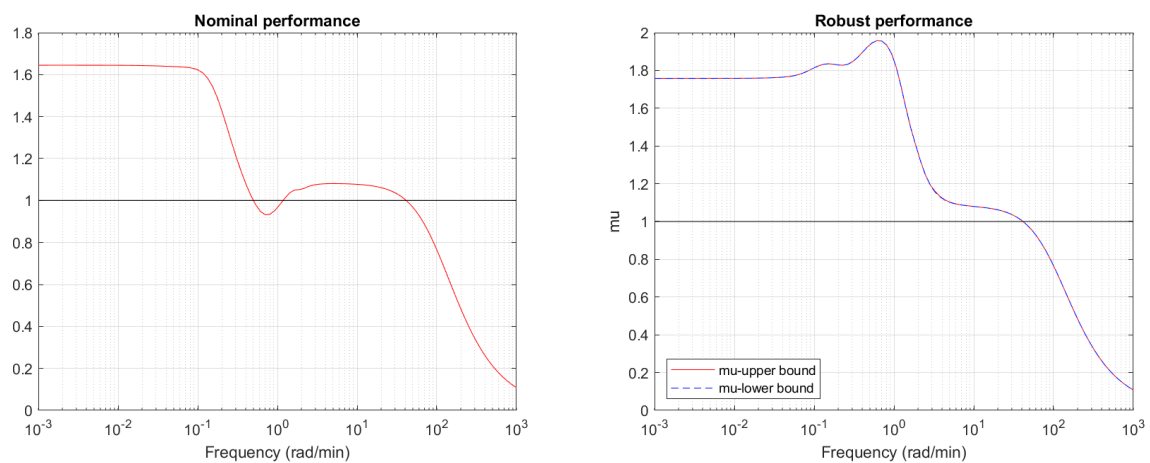


Figura 38: prestazioni nominali e robuste con controllore LQG/LTR

Le specifiche in frequenza sono verificate, in linea con gli altri controllori.

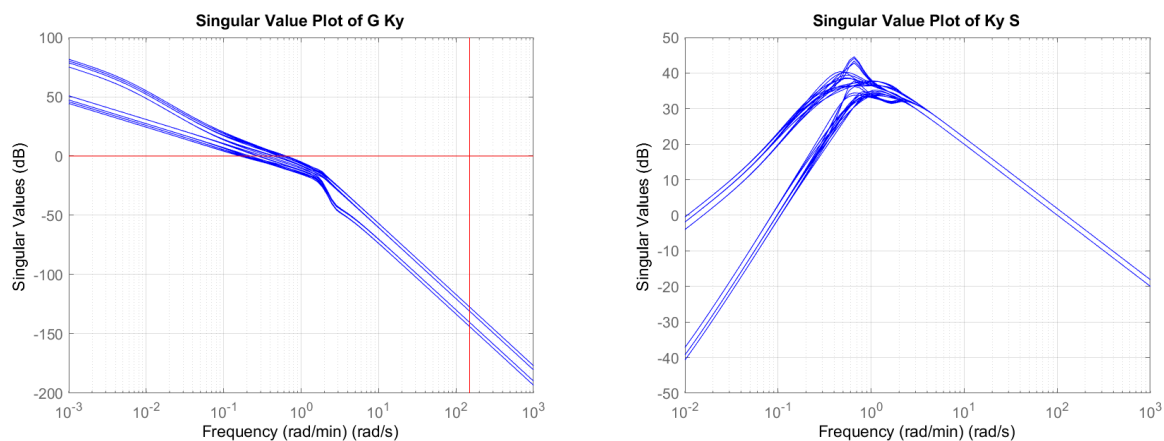


Figura 39: valori soingolari GK e KS con controllore LQG/LTR

Le risposte temporali sono quelle tipiche di un sistema stabile ma che non garantisce le prestazioni robuste.

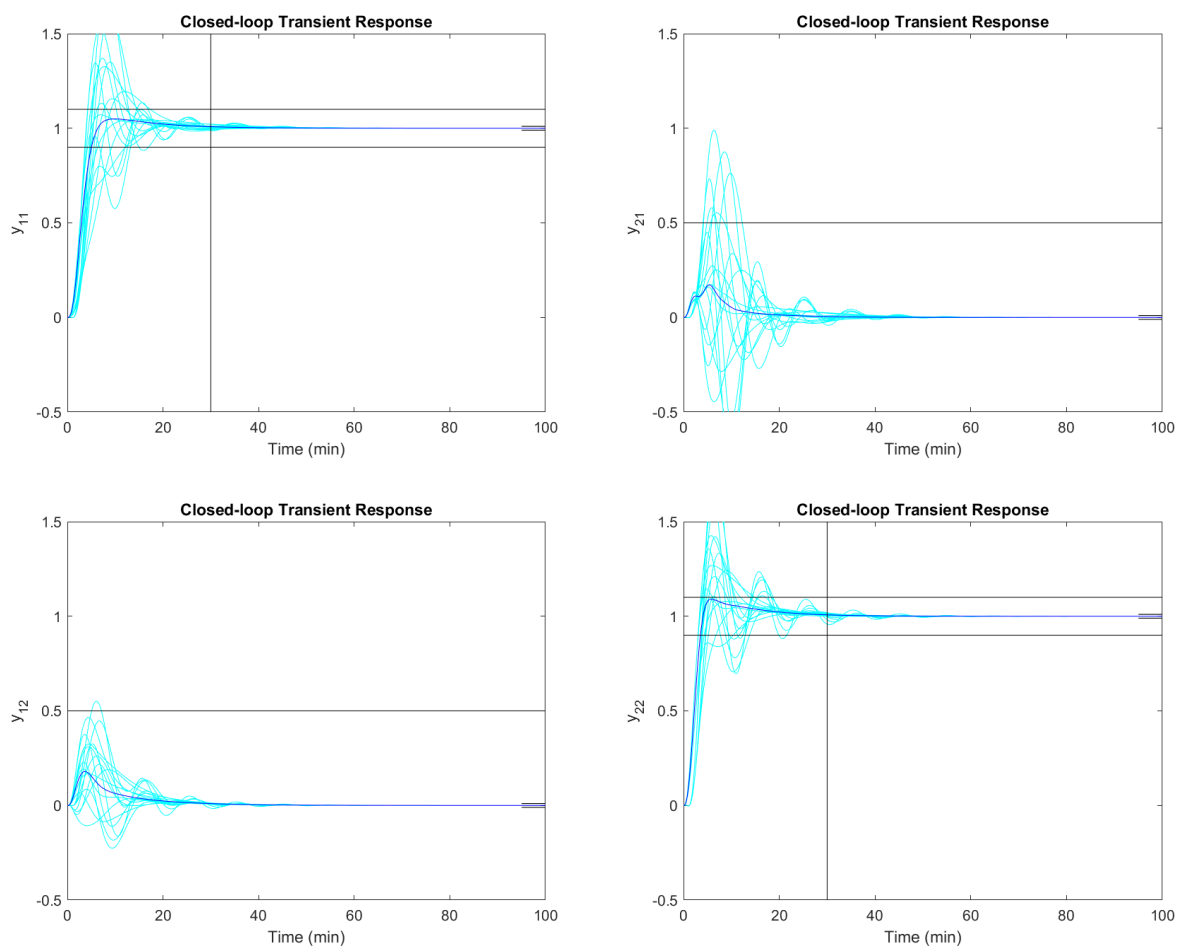


Figura 40: risposta temporale con controllore LQG/LTR

Ricapitolando si ottiene:

Controllore	RS	NP	NS	Specifiche risposta in frequenza	Specifiche risposta nel tempo
LQG/LTR	SI	NO	NO	SI	NO

Aumentare il valore di q nella procedura LTR con questo sistema a fase non minima, porta il sistema a perdere le proprietà di robustezza, ma mantenendo comunque la stabilità robusta. Di seguito sono riportati i valori singolari strutturati di robustezza nel caso in cui, con gli stessi parametri per LQR, si prova la procedura LTR fino ad un valore di $q = 10^{15}$.

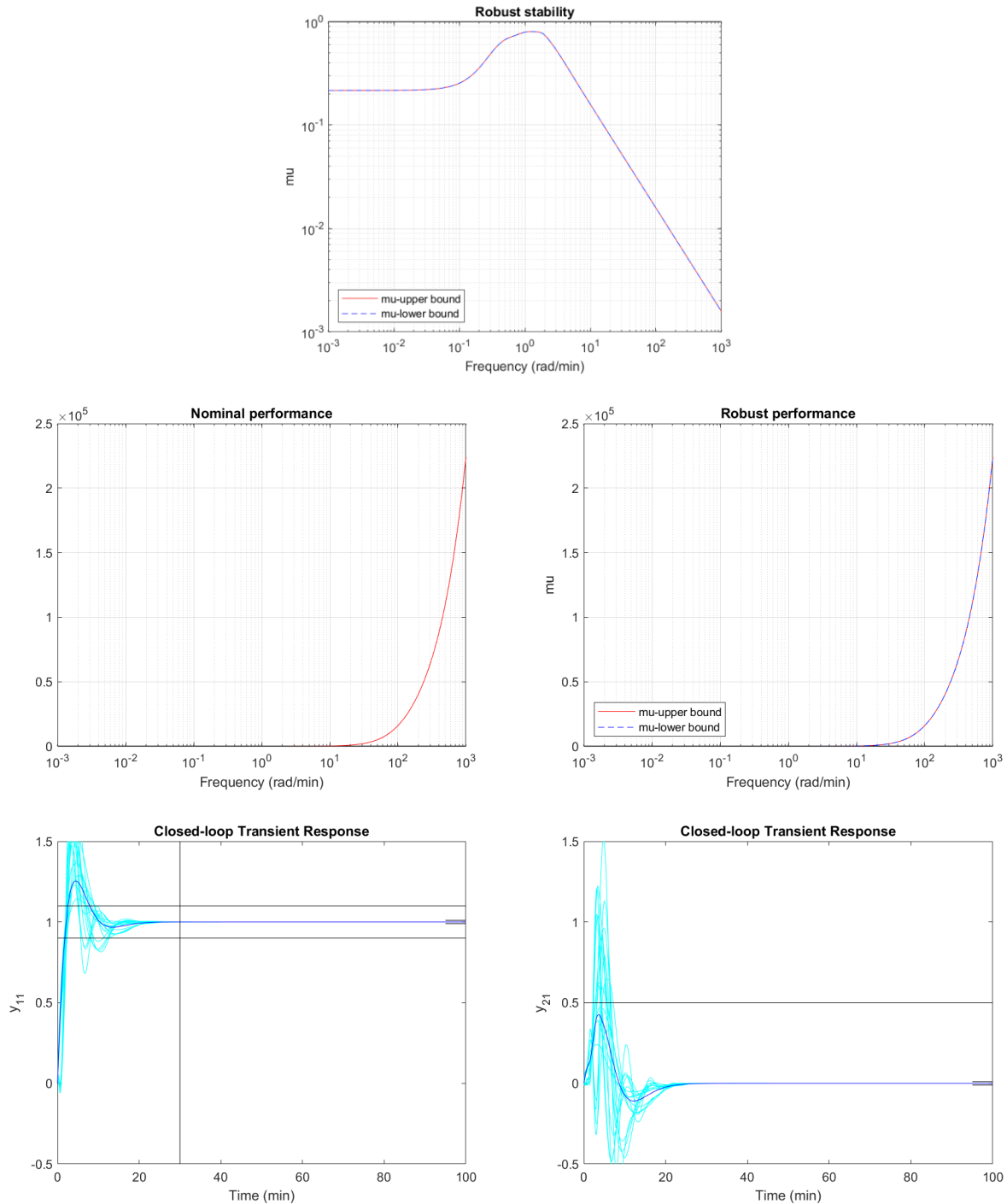


Figura 41: grafici di esempio nel caso di guadagno di recupero alto

La pratica mostra esattamente quello che la teoria ci suggerisce.

Analisi globale dei risultati e Conclusioni

In conclusione, il controllore ottimo che soddisfa tutte le specifiche richieste è il controllore sintetizzato con la procedura μ – *Synthesis* a 2 gradi di libertà.

Controllore	RS	NP	NS	Specifiche risposta in frequenza	Specifiche risposta nel tempo
$H_\infty - 1DOF$	SI	NO	NO	SI	NO
$H_\infty - 2DOF$	SI	NO	NO	SI	SI
<i>LSH controller</i>	SI	NO	NO	SI	NO
μ – <i>Synthesis</i> – 1DOF	SI	NO	NO	SI	NO
μ – <i>Synthesis</i> – 2DOF	SI	SI	SI	SI	SI
<i>LQG/LTR</i>	SI	NO	NO	SI	NO

Scegliendo tale controllore la risposta in frequenza del sistema a ciclo chiuso è molto simile a quella desiderata (risposta della matrice M , capitolo *Descrizione del Problema - Modellazione delle incertezze*), come mostrato in Fig. 42.

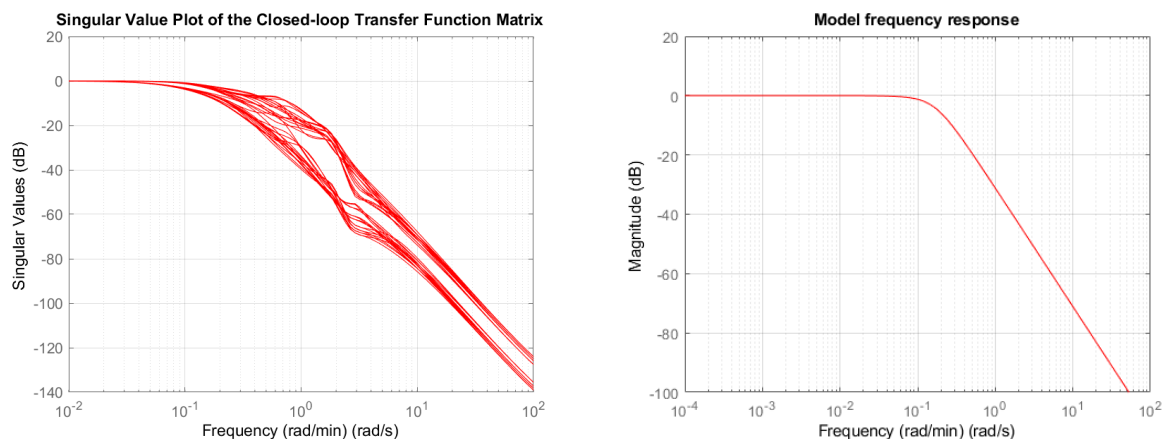


Figura 42: confronto della matrice di trasferimento a ciclo chiuso con controllore μ e desiderata

Il sistema così controllato ha quindi come caratteristiche una frequenza di taglio di circa 0,1 *rad/min*, verifica la robusta stabilità fino al 147% delle incertezze e verifica le condizioni di robusta prestazione fino al 102% delle incertezze.

In aggiunta è stato possibile valutare l'effettiva azione di controllo di questi sistemi utilizzando, eseguendo l'analisi tramite il file *nls_col.mdl*, un modello non lineare del sistema della colonna di distillazione in ambiente Simulink. A valle di tale simulazione si riportano due grafici significativi. In Fig. 43 è riportato l'andamento del segnale y_D che rappresenta la frazione molare del distillato. Tale valore è inizialmente uguale a 0,99, dato dal punto di lavoro del sistema stesso. Nell'istante $t = 200 \text{ min}$ viene dato il riferimento per passare da 0,990 a 0,995 e infatti l'uscita segue il riferimento rispettando tutti i vincoli temporali. Si nota anche che i disturbi provocati dai rumori e dalle incertezze non destabilizzano il sistema che assicura una risposta robusta per tutto il tempo di simulazione. Per la simulazione è stato utilizzato il controllore μ – *Synthesis* – 2DOF. La Fig. 44 riporta l'andamento dell'altra uscita, cioè la frazione molare x_B .

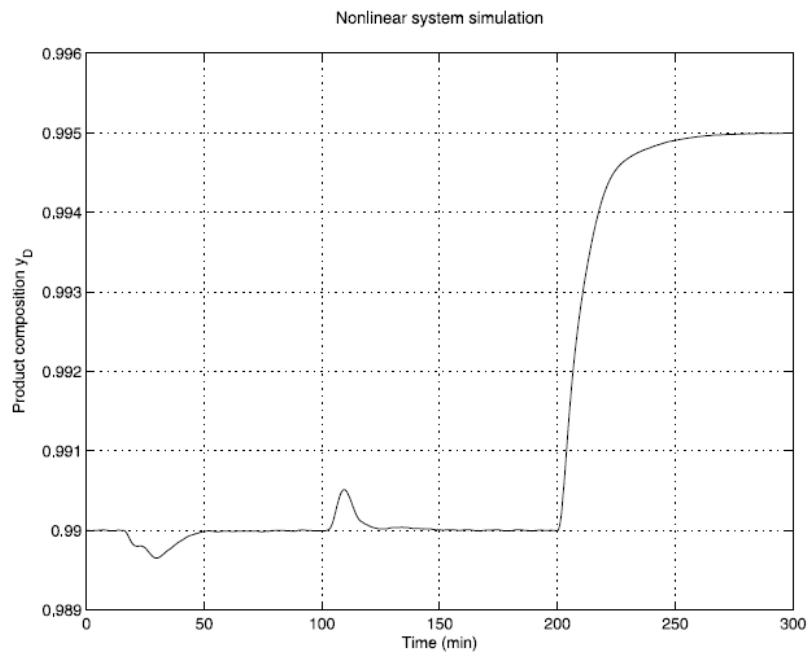


Figura 43: risposta in transitorio del sistema non lineare - y_D

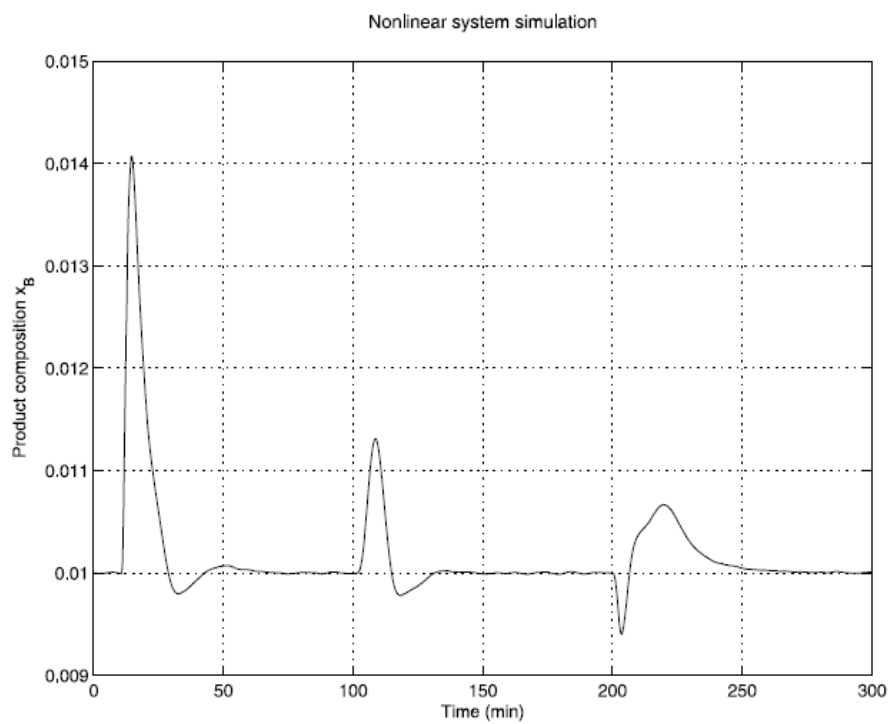


Figura 44: risposta in transitorio del sistema non lineare - x_B

Bibliografia

Robust Control Design with Matlab by Da-Wei Gu, Petko H. Petkov, Mihail M. Konstantinov
2012