UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea Magistrale in INGEGNERIA ROBOTICA E DELL'AUTOMAZIONE
Robotica - Controllo dei robot

Analisi Non Lineare di un Pendolo inverso con attrito con linearizzazione in feedback e ibrida

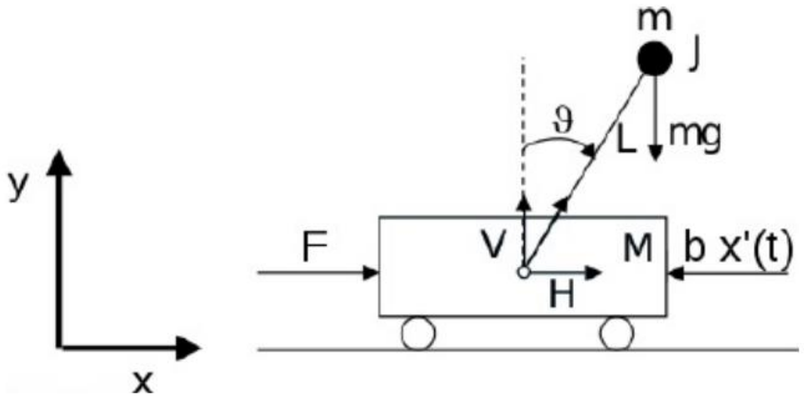
Docenti:
Antonio Bicchi
Giorgio Grioli

Supervisori del Progetto:
Lucia Pallottino
Paolo Salaris
Alessandro Palleschi

Studente:
Marco Borraccino

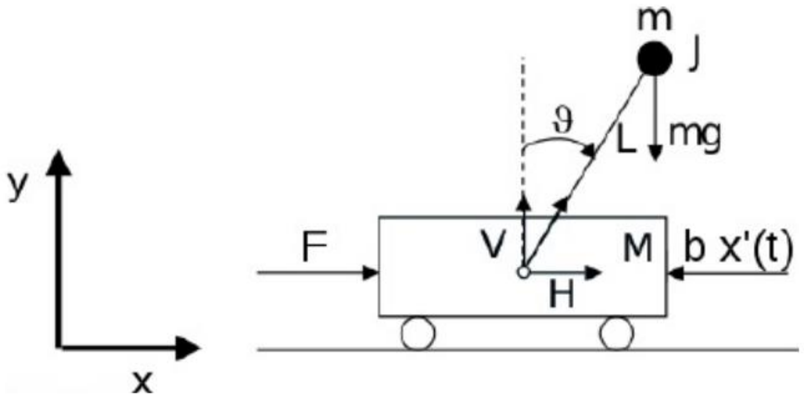
Contenuti

- Modello dinamico
- Accessibilità e Controllabilità
- Osservabilità
- Linearizzazione in feedback
- Zero dinamica
- Simulazioni
- Linearizzazione ibrida



Pendolo inverso

Modello dinamico



Infiniti punti di equilibrio:

$$x_{eq1} = [\, x_d \, 0 \;\; \pm\pi \, 0 \,] \qquad x_{eq2} = [\, x_d \, 0 \, 0 \, 0 \,]$$

Le equazioni dinamiche di un semplice pendolo inverso sono le seguenti:

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + b\dot{x} + mL\ddot{\vartheta}cos(\vartheta) - mL\dot{\vartheta}^2 sin(\vartheta) = F \\ mL^2\ddot{\vartheta} + mL\ddot{x}cos(\vartheta) - mgLsin(\vartheta) = 0 \end{cases}$$

In cui si è considerato:

- Asta di massa e inerzia trascurabile;
- <u>**Attrito lungo la componente x;**</u>
- Unica forza esterna F che agisce direttamente sul carrello.

Pendolo inverso

Modello dinamico

Posto come vettore di stato: $x = [x_1 \; x_2 \; x_3 \; x_4]^T = [x \; \dot{x} \; \vartheta \; \dot{\vartheta}]^T$ e l'unico ingresso: $u(t) = F$

Posso riscrivere il problema in forma di stato come:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{-b\,x_2 - mg\,sin(x_3)\,cos(x_3) + mL\,sin(x_3)x_4^2 + u}{(M + m\sin^2(x_3))} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \dfrac{g(M+m)sin(x_3) + bx_2cos(x_3) - mLsin(x_3)cos(x_3)x_4^2 - u\,cos(x_3)}{L\,(M + m\,sin^2(x_3))} \end{cases}$$

Pendolo inverso

Modello dinamico

Con semplici passaggi posso riportare il sistema nella forma:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \qquad x = [x\ \dot{x}\ \vartheta\ \dot{\vartheta}]^T \quad u(t) = F$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \dfrac{-b\,x_2 - mg\,sin(x_3)\,cos(x_3) + mL\,sin(x_3)x_4^2}{(M + m\sin^2(x_3))} \\ x_4 \\ \dfrac{g(M+m)sin(x_3) + bx_2cos(x_3) - mLsin(x_3)cos(x_3)x_4^2}{L\,(M + m\,sin^2(x_3))} \end{bmatrix} \qquad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{(M + m\sin^2(x_3))} \\ 0 \\ \dfrac{-cos(x_3)}{L\,(M + m\,sin^2(x_3))} \end{bmatrix}$$

$y = \vartheta$ → Solo l'angolo dell'asta!

Pendolo inverso

Accessibilità

Accessibilità locale

Teorema di Chow. Se la dimensione di $<\Delta|\Delta_0> = n$ *in* x_0 *allora il sistema è small-time localmente accessibile.*

$$\Delta_0 = span(g)$$
$$\Delta = span(f, g)$$

$<\Delta|\Delta_0> = n$ è la più piccola $\Delta - invariante$ distribuzione che contiene Δ_0. È un'operazione di *filtrazione* e si calcola con l'ausilio delle *Lie bracket.*

$$\begin{array}{lcl} \Delta_0 & & \\ \Delta_1 & = & \Delta_0 + [\Delta_0, \Delta] \\ \cdots & = & \cdots \\ \Delta_k & = & \Delta_{k-1} + [\Delta_{k-1}, \Delta], \end{array}$$

!

$$\dim\ \Delta_k(\bar{x}) = \dim\ \Delta_{k+1}(\bar{x})$$

Pendolo inverso

Accessibilità

$$x = [x\ \dot{x}\ \vartheta\ \dot{\vartheta}]^T$$

Cerchiamo di valutare l'intero spazio di accessibilità guardando in dettaglio l'operazione di filtrazione.

Passo iniziale, $k = 0$

$$\Delta_0 = span[g]$$

$$g = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{L}{A} \\ 0 \\ -\frac{\cos(x_3)}{LA} \end{bmatrix}$$

$$A = msin^2(x_3) + \mathrm{M}$$

Primo passo, $k = 1$

$$\Delta_1 = span[g, [f, g]]$$

$$[g, [f, g]] = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & -\frac{L}{A} \\ \frac{L}{A} & \frac{b}{\dots} \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 0 & \frac{\cos(x_3)}{LA} \\ \frac{\cos(x_3)}{LA} & \frac{x_4 \sin(x_3)}{LA} - \frac{\mathrm{b}\cos(x_3)}{\dots} \end{matrix} \end{bmatrix}$$

Unico minore sempre di rango 2

$$\det(\cdot) = \frac{L}{(msin^2(x_3) + \mathrm{M})^2} \neq 0$$

Pendolo inverso

Accessibilità

$$x = [x\ \dot{x}\ \vartheta\ \dot{\vartheta}]^T$$

Secondo passo, $k = 2$

$$\Delta_2 = span\left[g, [f,g], \underbrace{[g,[f,g]]}, \underbrace{[f,[f,g]]}\right]$$

$$[g,[f,g]] = \begin{bmatrix} 0 \\ * \\ 0 \\ * \end{bmatrix} \qquad [g,[f,g]]\Big|_{x_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Stesso span del vettore g.
Per cui non compete nell'aumentare il rango della filtrazione.

$$g = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{L}{A} \\ 0 \\ -\frac{\cos(x_3)}{LA} \end{bmatrix}$$

$$[f,[f,g]] = \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \\ * \end{bmatrix} \qquad [g,[f,g],[f,[f,g]]] = \begin{bmatrix} 0 & * & * \\ * & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

Il determinante del minore, valutato in $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ è: $\det(\cdot) = -\frac{g}{M^3L^3} \neq 0$ per cui $rank(\Delta_2)|_{x_0} = 3$

Solo con coeff. d'attrito $b \neq 0$

In generale $\det(\Delta_2)\alpha(x_2, x_3, x_4)$. Per esempio $rank(\Delta_2) = 2$ per valori come x $= \begin{cases} x_1 = qualsiasi \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \pm\sqrt{g/L} \end{cases}$

oppure soluzioni del tipo x $= \begin{cases} x_1 = qualsiasi \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \pm \operatorname{asin}\left(\sqrt{\frac{M}{2M+m}}\right) + k\pi \vee \frac{\pi}{2} + k\pi \ \ (con\ k \in \mathbb{Z}) \\ x_4 = 0 \end{cases}$

Pendolo inverso

Accessibilità

$$x = [x\ \dot{x}\ \vartheta\ \dot{\vartheta}]^T$$

Terzo passo, $k = 3$

$$\Delta_3 = span\left[g, [f,g], [f,[f,g]], \underbrace{[g,[g,[f,g]]], [f,[g,[f,g]]], [g,[f,[f,g]]]}, \underbrace{[f,[f,[f,g]]]}\right]$$

$$[g,[g,[f,g]]] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[f,[g,[f,g]]]\Big|_{x_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[g,[f,[f,g]]]\Big|_{x_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Queste distribuzioni non sono utili ai fini della filtrazione nel punto di equilibrio.

$$\Delta_3 = \left[g, [f,g], [f,[f,g]], [f,[f,[f,g]]]\right] = \begin{bmatrix} 0 & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}$$

$$\det(\Delta_3)\ \alpha\ (x_2, x_3, x_4)$$

$\det(\Delta_3)\,|_{x_0} = \frac{g^2}{M^4 L^4}$ assicurandoci che $rank(\Delta_3)|_{x_0} = 4$

Tuttavia, per alcuni valori dello stato $\det(\Delta_3) = 0$, $rank(\Delta_3) = 3$, per esempio con x = $\begin{cases} x_1 = qualsiasi \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \pm\sqrt{g/L} \vee \pm\sqrt{g/3L} \end{cases}$

oppure x = $\begin{cases} x_1 = qualsiasi \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \pm \operatorname{acos}\left(\sqrt{\frac{M+m}{2M+m}}\right) + k\pi \vee \pm \operatorname{acos}\left(\sqrt{\frac{3(M+m)}{4M+3m}}\right) + k\pi \ \ (con\ k \in \mathbb{Z}) \\ x_4 = 0 \end{cases}$

Per questa bisognerebbe procedere nella filtrazione e infatti diventa accessibile

Con altre distribuzioni questa condizione può diventare accessibile

Pendolo inverso

Accessibilità

L'algoritmo, implementato in simbolico su Matlab, restituisce la matrice:

$$\Delta = span\left[g, [f,g], [f,[f,g]], \left[g,[g,[f,g]]\right], \left[f,[g,[f,g]]\right], \left[g,[f,[f,g]]\right], \left[f,[f,[f,g]]\right] \dots \left[f,\left[f,[f,[f,g]]\right]\right]\right]$$

$$\downarrow$$

$$\Delta(x_0) = span\left[g, [f,g], [f,[f,g]], \left[f,[f,[f,g]]\right], \left[f,\left[f,[f,[f,g]]\right]\right]\right]$$

$$\Delta(x_0) = \begin{bmatrix} 0 & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$ il cui rango è 4

Il sistema è quindi localmente accessibile in x_0.

Per il resto della regione, la meccanica del sistema non suggerisce particolari condizioni patologiche per una perdita di accessibilità del sistema.

Pendolo inverso
Controllabilità

L'accessibilità è solo *necessaria* per la controllabilità. Dato un sistema localmente accessibile, esso è anche **localmente controllabile** se una delle seguenti condizioni è verificata:

i) $f(x) \equiv 0, \forall x \in B_\epsilon(x_0)$;

ii) $f(x) \in \text{span}\left\{g_1(x) \cdots g_m(x)\right\}, \forall x \in B_\epsilon(x_0)$;

iii) $f(x_0) = 0$ and $\dim \Delta_L(x_0) = n$, where $\Delta_L = \text{span}\{g_i, [f, g_i], \ldots, ad_f^{\mu_i} g_i, \ldots\}$, with $i = 1, \ldots, m$ and for all $\mu_i \in \mathbb{N}$;

Il nostro sistema soddisfa la terza condizione, per cui è anche localmente controllabile

Pendolo inverso
Osservabilità

L'**osservabilità** del sistema invece si può valutare calcolando la *codistribuzione di osservabilità* e verificare che valga $dO = n$.

$$\mathrm{d}\mathcal{O} = \mathrm{span}\left\{\mathrm{d}h(x),\, \mathrm{d}L_f h(x),\, \mathrm{d}L_g h(x),\, \mathrm{d}L_f L_g h(x), \dots\right\}$$

Con la scelta della funzione d'uscita:

$$y = h(x) = x_3 = \theta$$

si ottiene

$$\mathrm{rank}(dO) = 3 < n$$

$$\mathrm{d}O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}$$

La prima colonna è sempre nulla.

Per cui il sistema <u>non</u> è localmente osservabile, utilizzando quella funzione d'uscita

Pendolo inverso

Linearizzazione in feedback I/O

Partendo dal sistema in forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u, \quad x(0) = x_0 \\ y &= h(x), \end{aligned}$$

L'idea è quella di derivare l'uscita fin quando non compare una dipendenza dall'ingresso u, ovvero fin quando sono rispettate le condizioni in basso H1 e H2.

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x}\dot{x} = \mathrm{d}h(f(x) + g(x)u) = L_f h(x) + L_g h(x)\, u$$

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \frac{\partial L_f h}{\partial x}\dot{x} = L_f^2 h \\ &\vdots \\ y^{(r)} &= L_f^{(r)} h + L_g L_f^{(r-1)} h\, u. \end{aligned}$$

H1 $L_g L_f^i h(x) \equiv 0, \quad i = 0, 1, \dots, r-2$

H2 $L_g L_f^{(r-1)} h(x_0) \neq 0$

Pendolo inverso

Linearizzazione in feedback I/O

$x = [x \; \dot{x} \; \vartheta \; \dot{\vartheta}]^T$

Calcolando le derivate dell'uscita $y = \phi_1(x) = x_3 = \theta$ si ottiene che il *grado relativo* del sistema è pari a 2

$$
\begin{aligned}
y &= \phi_1(x) = x_3 \\
\dot{y} &= L_f\phi_1 + L_g\phi_1 u = x_4 \\
\ddot{y} &= L_f^2\phi_1 + L_g L_f \phi_1 u
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y &= z_1 = x_3 \\
\dot{y} &= \dot{x}_3 = x_4 \\
\ddot{y} &= \dot{x}_4 = v = \frac{g(M+m)\sin(x_3) + bx_2\cos(x_3) - mLsin(x_3)\cos(x_3)x_4^2 - \cos(x_3)u}{L\left(M + msin^2(x_3)\right)}
\end{aligned}
$$

Scelgo quindi come prime due variabili del nuovo sistema: $\Phi(x) = \begin{cases} z_1 = x_3 \\ z_2 = x_4 \\ \omega_1 = ? \\ \omega_2 = ? \end{cases}$

Pendolo inverso

Linearizzazione in feedback I/O

$$x = [x \; \dot{x} \; \vartheta \; \dot{\vartheta}]^T$$

Le altre due nuove variabili (per un totale di 4) devono essere indipendenti dalle precedenti e devono avere una dinamica indipendente dall'ingresso, devono cioè rispettare le condizioni:

$$L_g \Phi_i(x) = 0 \quad r+1 \leq i \leq n$$

$$\det\left(\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} \Phi_1(x) \\ \vdots \\ \Phi_r(x) \\ \Phi_{r+1}(x) \\ \vdots \\ \Phi_n(x) \end{bmatrix}\right) \neq 0$$

Scelgo quindi la terza variabile $\omega_1 = \phi_3(x) = x_1$, ottenendo:

$$L_g \phi_3 = L_g x_1 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{(M + msin^2(x_3))} \\ 0 \\ \dfrac{-cos(x_3)}{L\big(M + msin^2(x_3)\big)} \end{bmatrix} = 0$$

Pendolo inverso

Linearizzazione in feedback I/O

$$x = [x \ \dot{x} \ \vartheta \ \dot{\vartheta}]^T$$

Per l'ultima, imposto il problema ponendo la derivata l'ultima variabile come: $\dfrac{\partial \phi_4}{\partial x} = [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4]$

Imponendo l'annullarsi di:

$$L_g\phi_4 = [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4]\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{\left(M + msin^2(x_3)\right)} \\ 0 \\ \dfrac{-cos(x_3)}{L\left(M + msin^2(x_3)\right)} \end{bmatrix} = 0$$

La quarta variabile quindi è del tipo di cui sopra, a patto che valga la condizione: $a_2 = \dfrac{a_4 \cos(x_3)}{L}$

Scelgo $a_2 = \cos(x_3), a_4 = L$

Pendolo inverso

Linearizzazione in feedback I/O

$$x = [x\ \dot{x}\ \vartheta\ \dot{\vartheta}]^T$$

Scelgo quindi come quarta variabile: $\omega_2 = x_2\cos(x_3) + Lx_4$

Il sistema nelle nuove variabili è quindi:

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} z \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{cases} z_1 = x_3 \\ z_2 = x_4 \\ \omega_1 = x_1 \\ \omega_2 = x_2\cos(x_3) + Lx_4 \end{cases}$$

Con l'ingresso che linearizza la dinamica ottenuto dall'ultima derivata dell'uscita:

$$\ddot{y} = L_f^2\phi_1 + L_gL_f\phi_1 u$$

$$u = -\frac{L_f h}{L_gL_f^2\,h} + \frac{v}{L_gL_f^2\,h}$$

$$\longrightarrow$$

$$u = \frac{g(M+m)\sin(x_3) + bx_2\cos(x_3) - mL\sin(x_3)\cos(x_3)\,x_4^2}{\cos(x_3)} - \frac{L\left(M + m\sin^2(x_3)\right)}{\cos(x_3)}v$$

$$v(z) = -kz$$

Pendolo inverso

Zero Dinamica

Il sistema è stabile anche internamente?

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_1 = \dfrac{g(M+m)\sin(z_1) + b\omega_2\cos(z_1) - mLsin(z_1)\cos(z_1)z_2^2 - \cos(z_1)u}{L\left(M + msin^2(z_1)\right)} \\ \dot{\omega}_1 = \dfrac{\omega_2 - Lz_2}{\cos(z_1)} \\ \dot{\omega}_2 = \dfrac{\sin(z_1)\left(z^2 - \omega_2 z_2 + g(\cos z_1)\right)}{\cos(z_1)} \end{cases}$$

→ Dinamica stabile dalla retroazione dell'uscita

→ ?
Variabili non osservabili

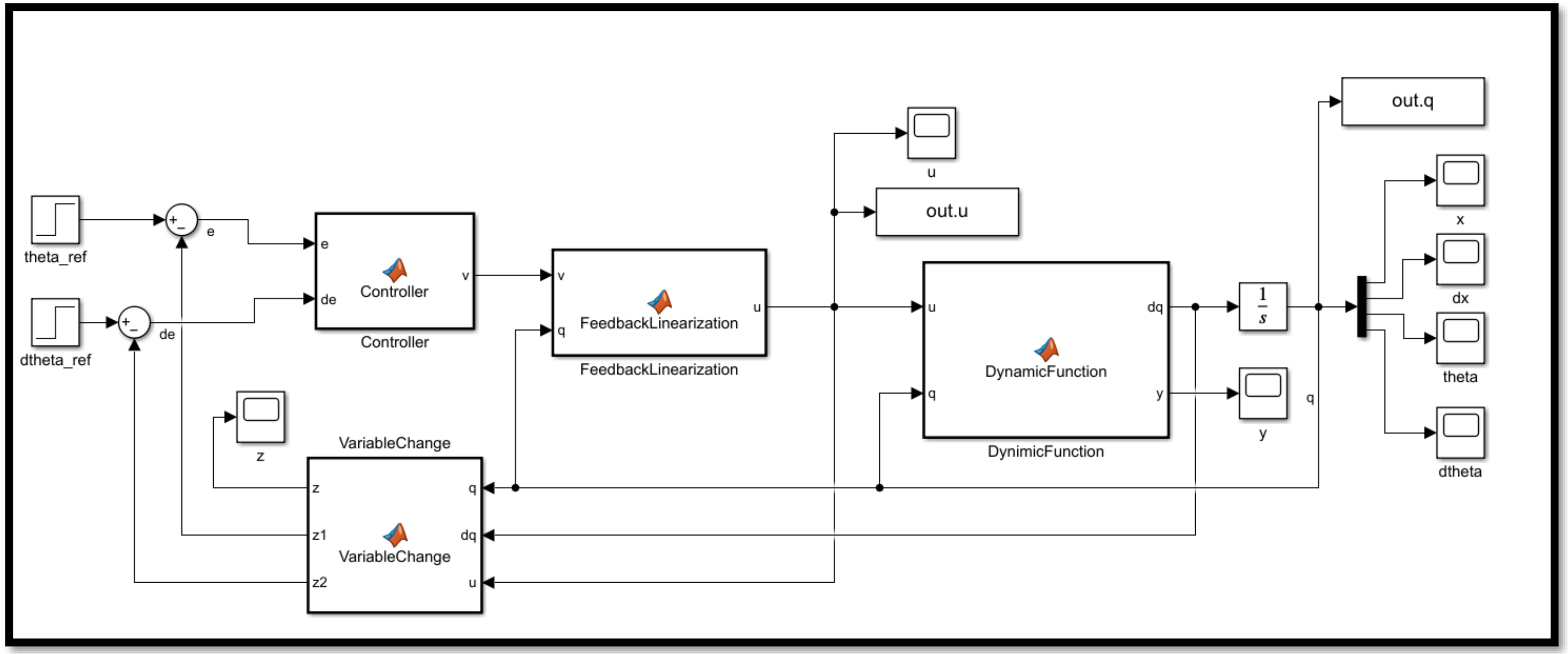
Calcolando il valore della dinamica nel punto di equilibrio con le uscite nulle, si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = \omega_2 \\ \dot{\omega}_2 = 0 \end{cases}$$

Tale comportamento è quello tipico di un doppio integratore, per cui il sistema **non** risulta anche internamente stabile, ma solo esternamente.

Pendolo inverso

Schema Simulink



Condizioni iniziali:

$$q_0 = [0 \quad 0 \quad \theta_0 \quad 0]$$

Parametri del sistema:

$$\begin{cases} g = 9{,}81\, m/s^2 \\ l = 0{,}50\, m \\ M = 1{,}0\, kg \\ m = 0{,}5\, kg \end{cases}$$

$$v = -K\, z = -K_P z_1 - K_D z_2 \longrightarrow v = K_P(\theta_{ref} - \theta) + K_D(\dot{\theta}_{ref} - \dot{\theta})$$

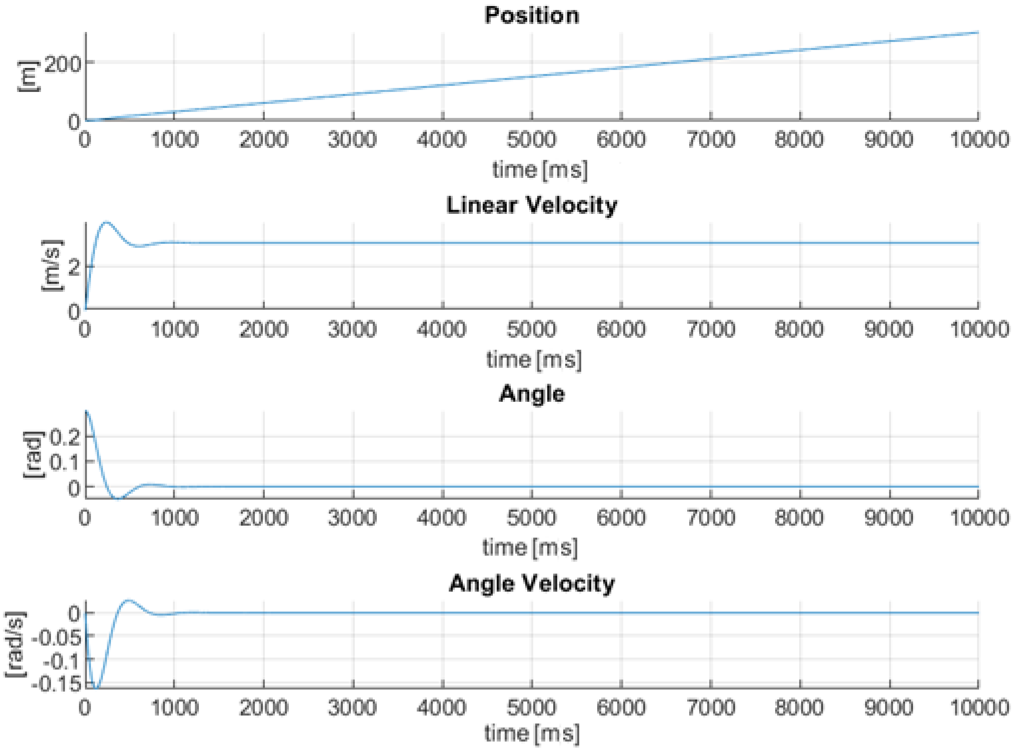
Pendolo inverso

Risultati simulazione

$K_P = 1 \quad K_D = 1$

$q_0 = [0 \quad 0 \quad 0{,}3 \quad 0]$
$q_{fin} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$

$K_P = 3{,}5 \quad K_D = 1$



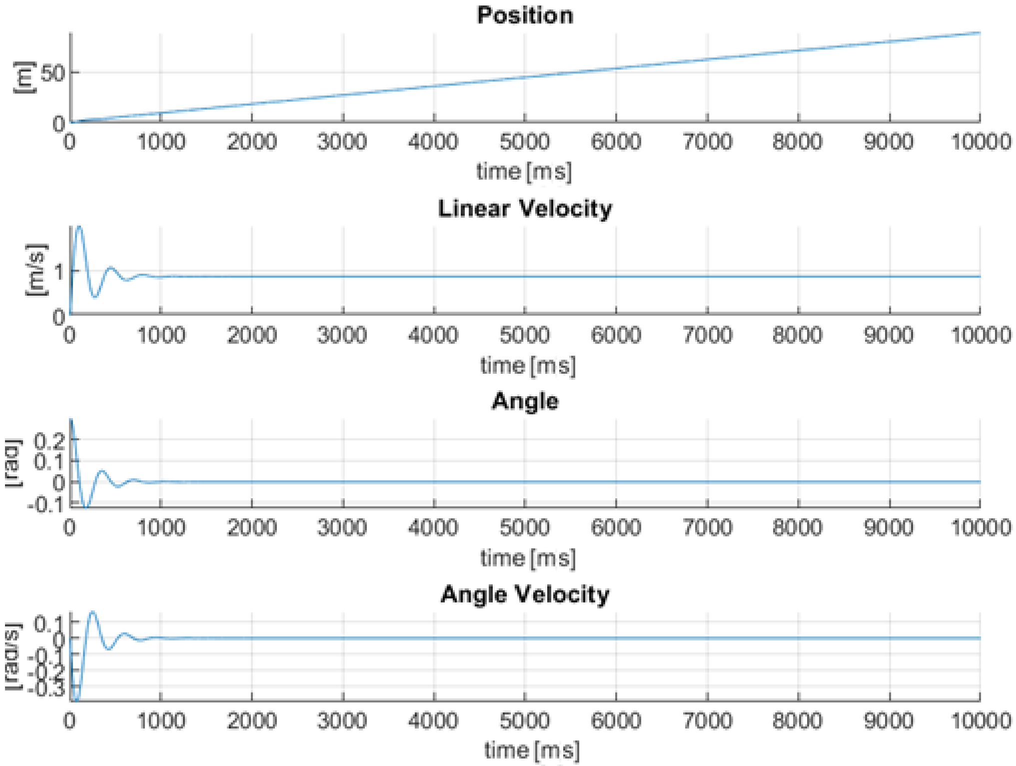
!

L'attrito non attenua questo effetto

$\neq 0$

$\rightarrow 0$

$\rightarrow 0$



Pendolo inverso

Risultati simulazione

Stesso comportamento ma con variabili scambiate se si retroaziona la x e $\dot{x}$.

C'è completa osservabilità linearizzando rispetto un'uscita che contiene tutte le variabili di stato.
Resta il problema di trovare tale espressione…

Metodi alternativi[2]

Per assicurare che la parte non osservabile sia stabile, la si retroaziona come in una retroazione lineare semplice.

$$v = -K\,z - \boldsymbol{\alpha x} - \boldsymbol{\beta \dot{x}} = -K_P\theta - K_D\dot{\theta} - \boldsymbol{K_x x} - \boldsymbol{K_{\dot{x}}}\,\boldsymbol{\dot{x}}$$

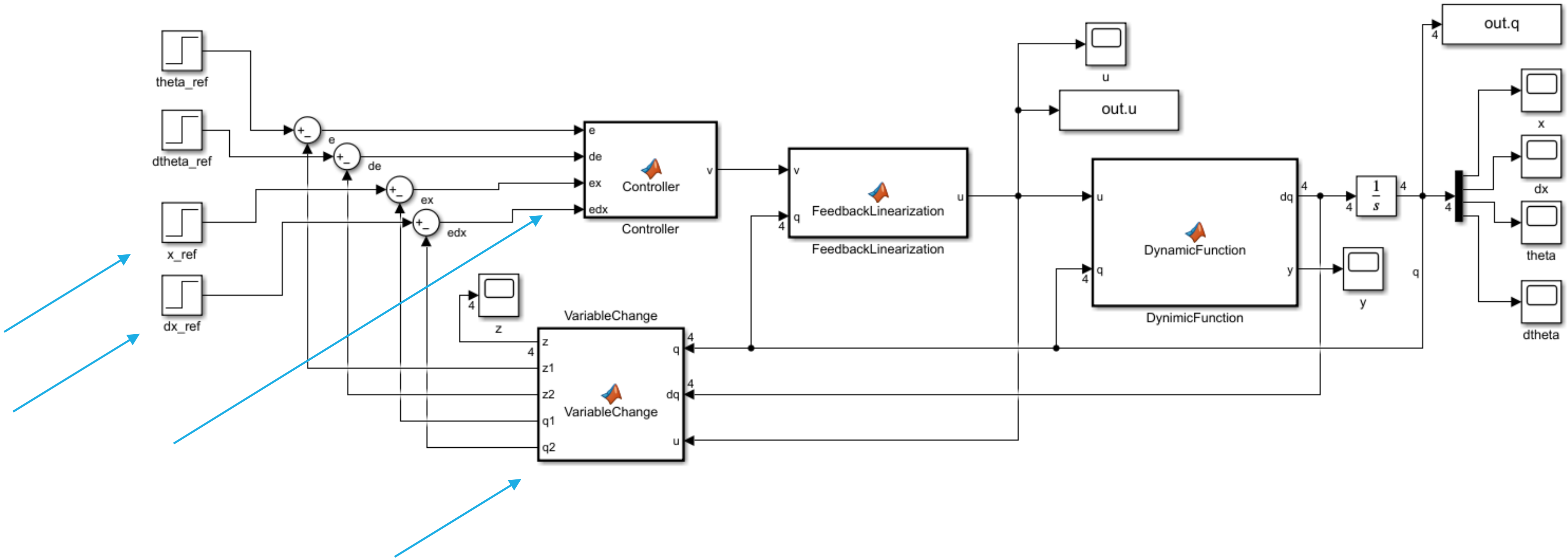
Oppure una retroazione con *guadagno variabile in base al valore degli stati[2]:*

$$v = -K\,z - \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha x} - \boldsymbol{\beta \dot{x}}) \qquad \text{con} \quad \rho(x1, x2, x3, x4)$$

[2] Dong-Hae Yeom, and Jin-Young Choi, "Angle and Position Control of Inverted Pendulum on a Cart Using Partial Feedback Linearization", School of Electrical Engineering and Computer Science, Seoul National University, Seoul, Korea,2003

Pendolo inverso

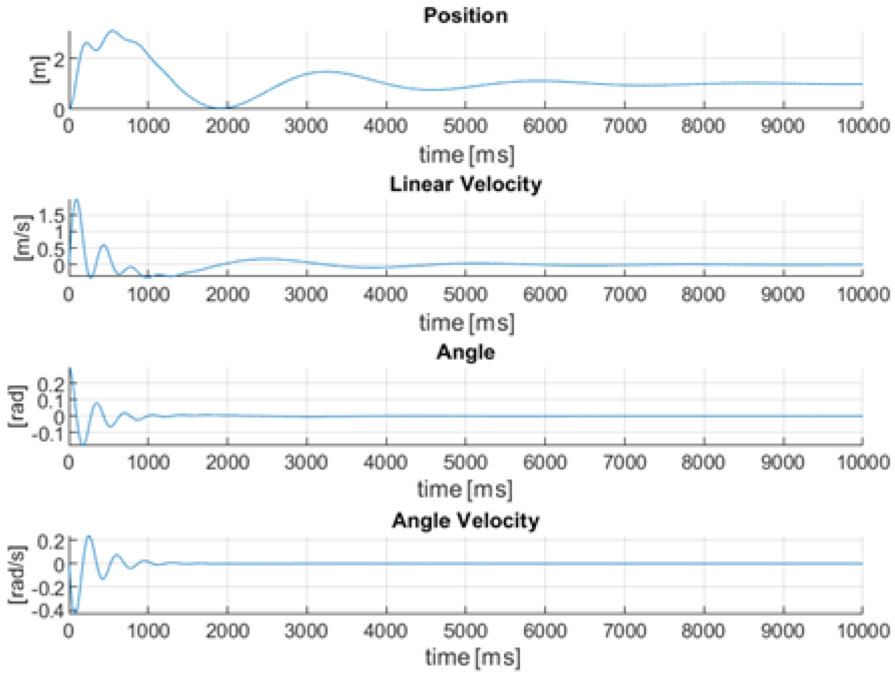
Schema Simulink



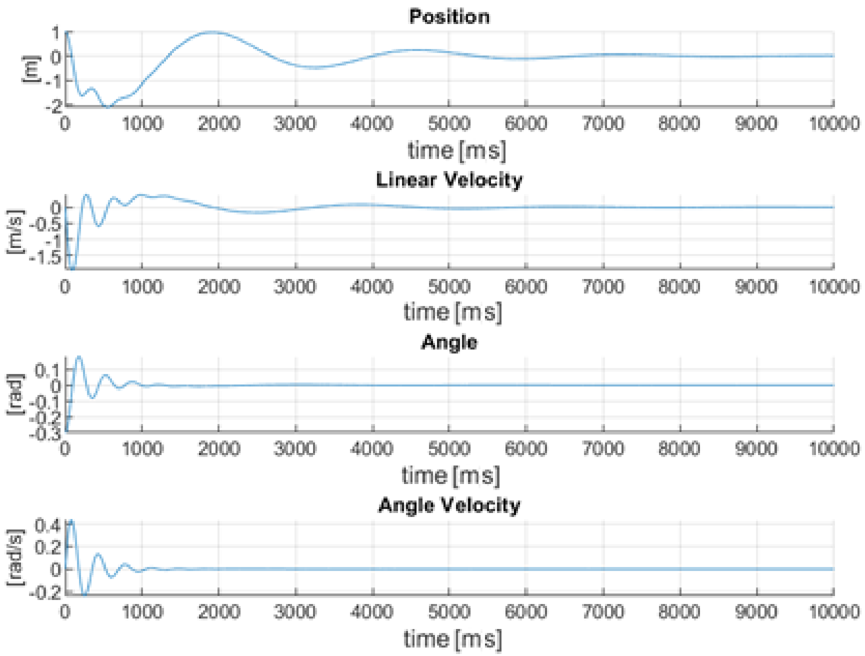
Pendolo inverso

Linearizzazione in feedback ibrida

$$K_P = 3{,}5 \quad K_D = 0{,}8 \quad K_x = 0{,}02 \quad K_{\dot{x}} = 0{,}04$$



$q_0 = [0 \quad 0 \quad 0{,}3 \quad 0]$ $\quad q_{fin} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$



$q_0 = [1 \quad 0 \quad -0{,}3 \quad 0]$ $\quad q_{fin} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$

Conclusioni

Scegliendo quindi di retroazionare il sistema con il **solo** angolo dell'asta o la posizione, il sistema risulta non completamente osservabile e stabile solo esternamente.

Non è comunque esclusa la possibilità di trovare una combinazione delle uscite viste precedentemente che renderebbe il sistema completamente osservabile e controllare sia la posizione del carrello che angolo dell'asta.

Una possibile soluzione è adottare un **metodo ibrido** che assicura comunque una regione di stabilità più grande e migliore di quella che si otterrebbe solo con la linearizzazione standard[2].

Bibliografia

[1] Appunti di Controllo dei Robot, A.Bicchi, P. Salaris, G. Grioli, M. Garabini, A. Settimi, A. Fagiolini et al., Pisa, 2021

[2] Dong-Hae Yeom, and Jin-Young Choi, "Angle and Position Control of Inverted Pendulum on a Cart Using Partial Feedback Linearization", School of Electrical Engineering and Computer Science, Seoul National University, Seoul, Korea,2003

[3] Appunti di Fondamenti di Automatica II , A.Bicchi, Pisa, 2022