



UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea Magistrale in INGEGNERIA ROBOTICA E DELL'AUTOMAZIONE  
Robotica - Controllo dei robot

# **Controllo Dinamico per inseguimento di traiettoria di un manipolatore UR10e**

Docenti:  
Antonio Bicchi  
Giorgio Grioli

Supervisor del Progetto:  
Lucia Pallottino  
Paolo Salaris  
Alessandro Palleschi

Studente:  
Marco Borraccino

---

# Contenuti

---

- UR10e: Caratterizzazione Cinematica e Dinamica
- Descrizione della traiettoria
- Manipolatore UR10e
  - Controllore PD con compensazione di gravità
  - Controllore Computed Torque
  - Controllore Backstepping (solo posizione)
  - Controllore Backstepping (posizione e orientazione)
- Manipolare RRR (primi tre link dell'UR10e)
  - Controllore PD con compensazione di gravità
  - Controllore Computed Torque
  - Controllore Backstepping
  - Controllore Adaptive Computed Torque
  - Controllore Adaptive Backstepping



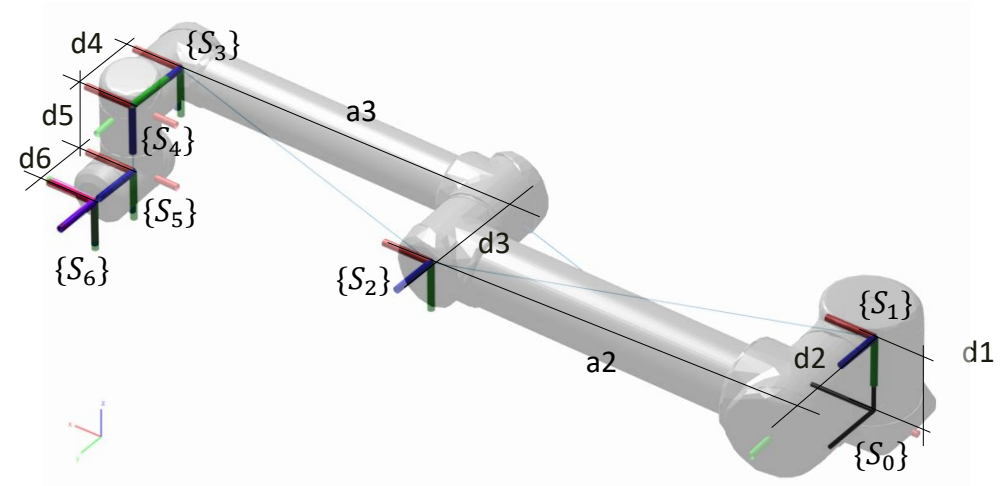
# UR10e

## Caratterizzazione Cinematica e Dinamica

### Parametri DH

Parametri geometrici per parametrizzazione di Denavit – Hartenberg:

DH param.	$a[m]$	$\alpha[rad]$	$d[m]$	$\theta[rad]$
Joint 1	0	$-\pi/2$	0,1273	$q_1$
Joint 2	0,6120	0	0,2209	$q_2$
Joint 3	0,5723	0	0,1719	$q_3$
Joint 4	0	$-\pi/2$	0,1149	$q_4$
Joint 5	0	$\pi/2$	0,1157	$q_5$
Joint 6	0	0	0,0922	$q_6$



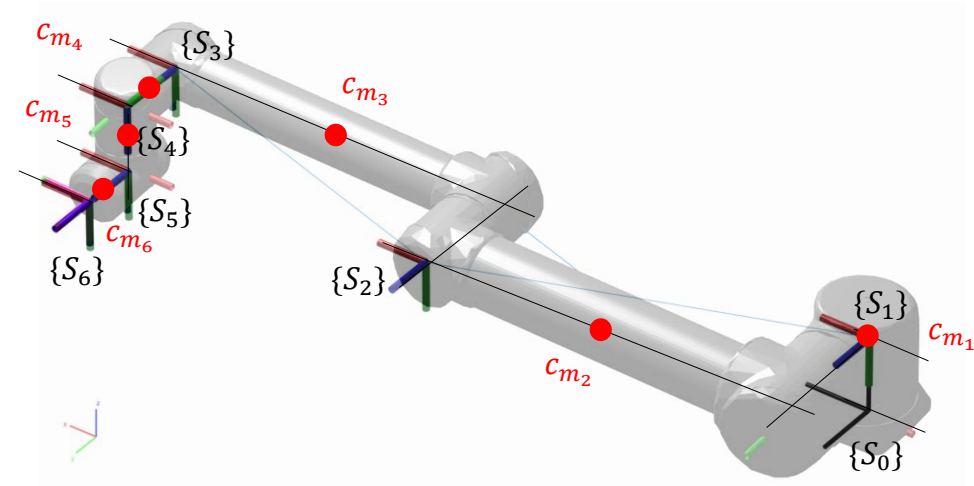
# UR10e

## Caratterizzazione Cinematica e Dinamica

### Parametri dinamici

Dinamica	Mass [kg]	Centre of mass [kg]
Link 1	7,778	[0 0 0]
Link 2	12,93	[-0,3060 0 0]
Link 3	3,87	[-0,28615 0 0]
Link 4	1,96	[0 0,1719 0]
Link 5	1,96	[0 -0,1149 0]
Link 6	0,202	[0 0 0,0922]

Le matrici dei momenti d'inerzia sono prese diagonali per semplicità, approssimando i corpi rigidi dei link come dei cilindri.





# UR10e

## Caratterizzazione Cinematica e Dinamica

Cinematica diretta e Jacobiano geometrico

A partire dalla parametrizzazione D-H si può calcolare la matrice omogenea che lega la posa dell'e-e in riferimento alla terna base, rispetto a tutti gli angoli di giunto.

$$q = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)^T$$

$$T = T_{06}(q) = T_{01}(q_1)T_{12}(q_2)T_{23}(q_3)T_{34}(q_4)T_{45}(q_5)T_{56}(q_6) = \begin{bmatrix} R_{06} & d_{06} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

Similmente si caratterizza il Jacobiano geometrico che lega le velocità dei giunti al twist dell'e-e.

$$J_{06}(q) = [J_{06}^1 \quad \dots \quad J_{06}^6]$$

$$J_{06}^i = \begin{bmatrix} k_{i-1} \times (O_{i-1}O_6) \\ k_{i-1} \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, 6$$



$$\dot{\xi}_{06} = \begin{bmatrix} v_{06} \\ \omega_6 \end{bmatrix} = J(q)\dot{q}$$



# UR10e

## Caratterizzazione Cinematica e Dinamica

### Dinamica inversa

La Dinamica inversa invece propone di calcolare le coppie necessarie da dare al sistema per ottenere un movimento specificato in termini di accelerazioni  $\ddot{q}(t)$ , velocità  $\dot{q}(t)$  e posizioni  $q(t)$ .

$$\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}$$

$\mathbf{B}(\mathbf{q})$  Matrice di inerzia

$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  Matrice delle forze centrifughe

$\mathbf{G}(\mathbf{q})$  Matrice gravitazionale

Calcolate in simbolico tramite l'ausilio della libreria (*Wolfram Mathematica*):

*ScrewCalculusPro* [1]

[1] M. Gabiccini, "ScrewCalculus: a Mathematica Package for Robotics," DIMNP, University of Pisa," <http://www2.ing.unipi.it/~d11181/Personal/Downloads.htm>, 2008.

# Descrizione traiettoria

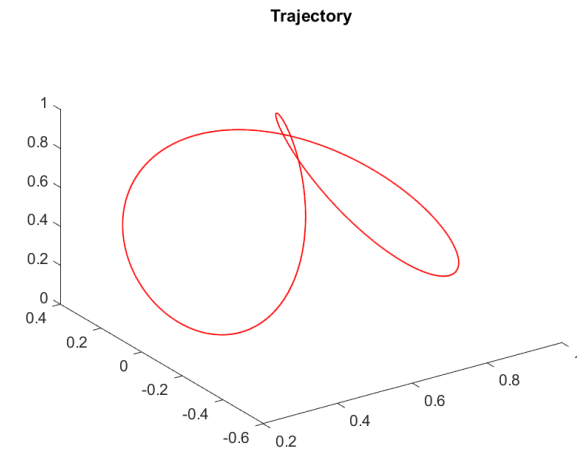
Con lo scopo di esplorare tutta la dinamica del sistema, si è scelta una traiettoria tridimensionale ispirandosi alle curve di *Lissajous* nello spazio.

$$x_{des} = \left[ r_0 \sin\left(\frac{t}{2k}\right), \quad r_1 \sin\left(\frac{t}{k}\right), \quad r_3 \cos\left(\frac{t}{k}\right) \right] + p_0$$

$$p_0 = [0,6 \quad 0 \quad 0,5]$$

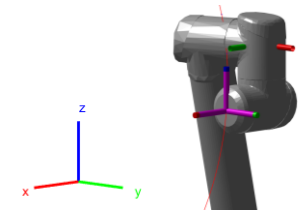
*parametro velocità:*  $k > 0$  (consigliato tra 5 – 30)

*raggi*  $r_0, r_1, r_2$



L'orientazione dell'end-effector è stata scelta coincidente con il *world frame* (comunque modificabile), codificata in un vettore di tre elementi secondo una parametrizzazione di Eulero XYZ.

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix}, \Phi_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$





# Manipolatore UR10e

## Controllore PD con compensazione di gravità

Controllo più semplice possibile,  
ignora la conoscenza delle matrici  
dinamiche  $B$  e  $C$  del manipolatore e  
introduce solo una compensazione  
delle forze di gravità.

$$\tau = K_v \dot{e} + K_p e + G$$

$$e(t) = q_d(t) - q(t)$$

$$K_v = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 \end{bmatrix}$$

$$K_p = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}$$

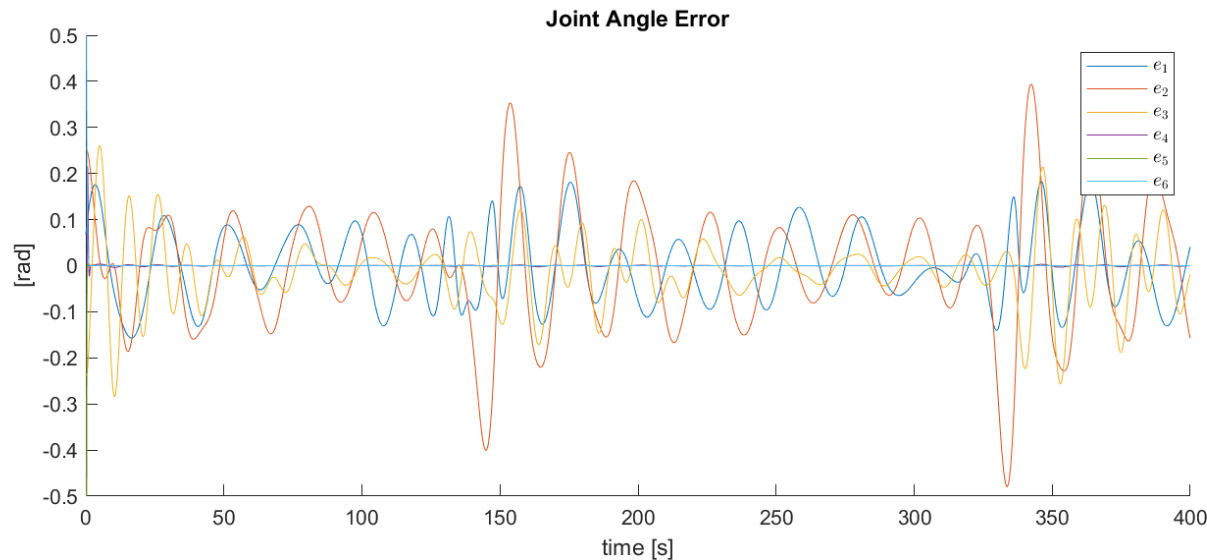


# Manipolatore UR10e

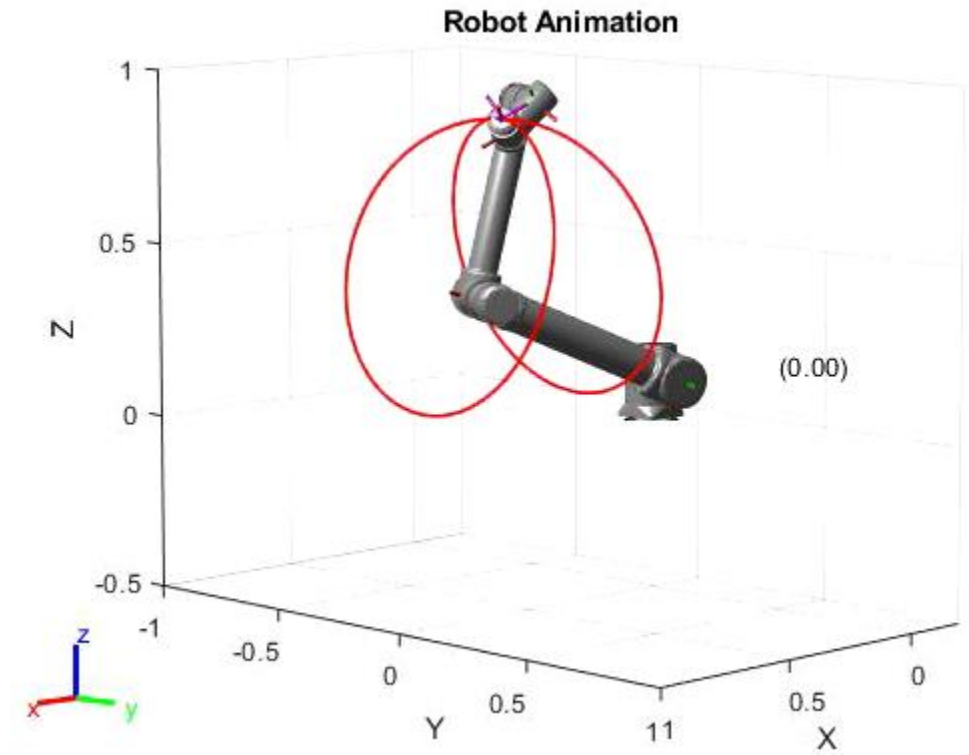
## Controllore PD con compensazione di gravità

$$\tau = K_v \dot{e} + K_p e + G$$

Traiettoria a *velocità standard* ( $k = 15$ )



In un'applicazione reale questo errore è troppo significativo.

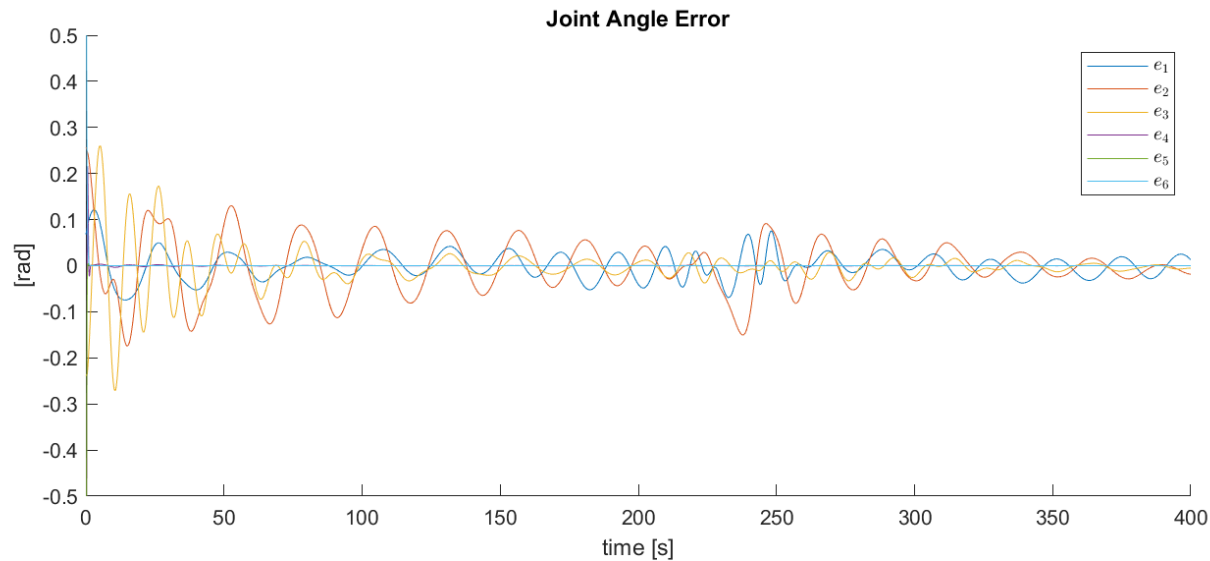


# Manipolatore UR10e

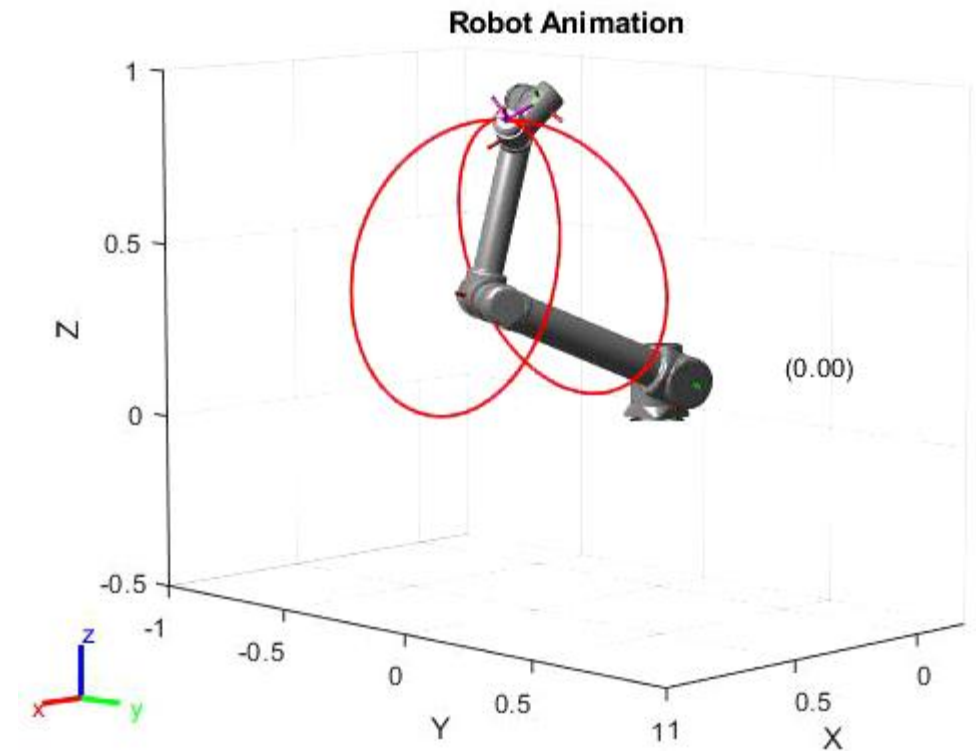
## Controllore PD con compensazione di gravità

$$\tau = K_v \dot{e} + K_p e + G$$

Traiettoria *rallentata* ( $k = 25$ )



Con una traiettoria più lenta l'errore tende a diminuire.





# Manipolatore UR10e

## Controllore Computed Torque

Si basa sul principio del modello interno e inserisce la cancellazione della dinamica ipotizzando la sua **perfetta** conoscenza.

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{B}(\ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{K}_v \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_p \mathbf{e}) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}$$

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{q}_d(t) - \mathbf{q}(t)$$

$$\mathbf{K}_v = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

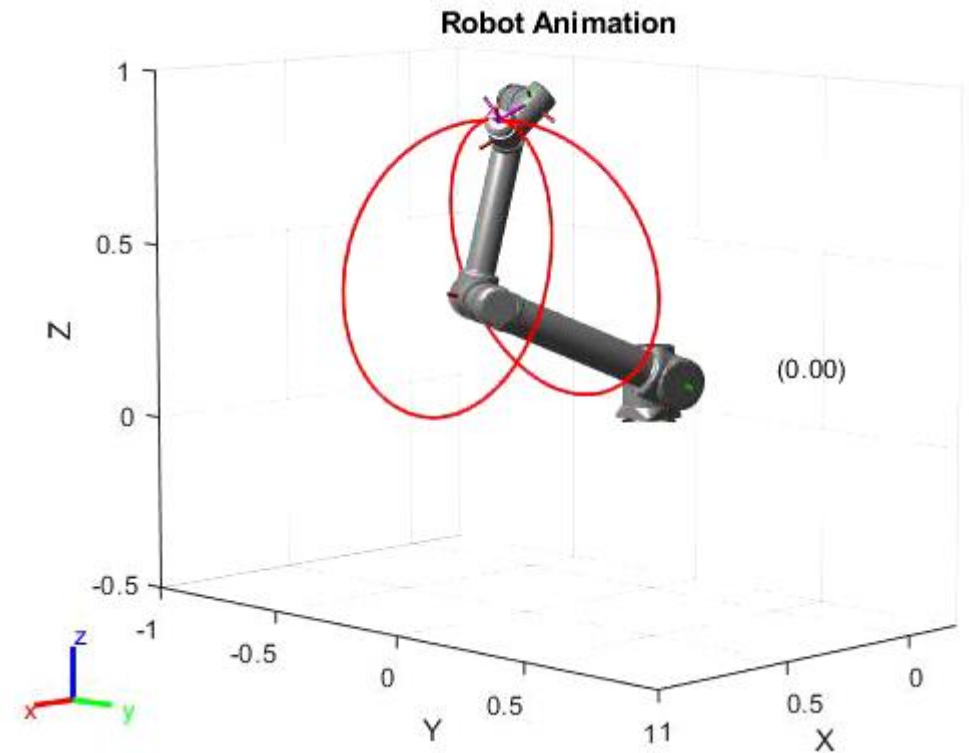
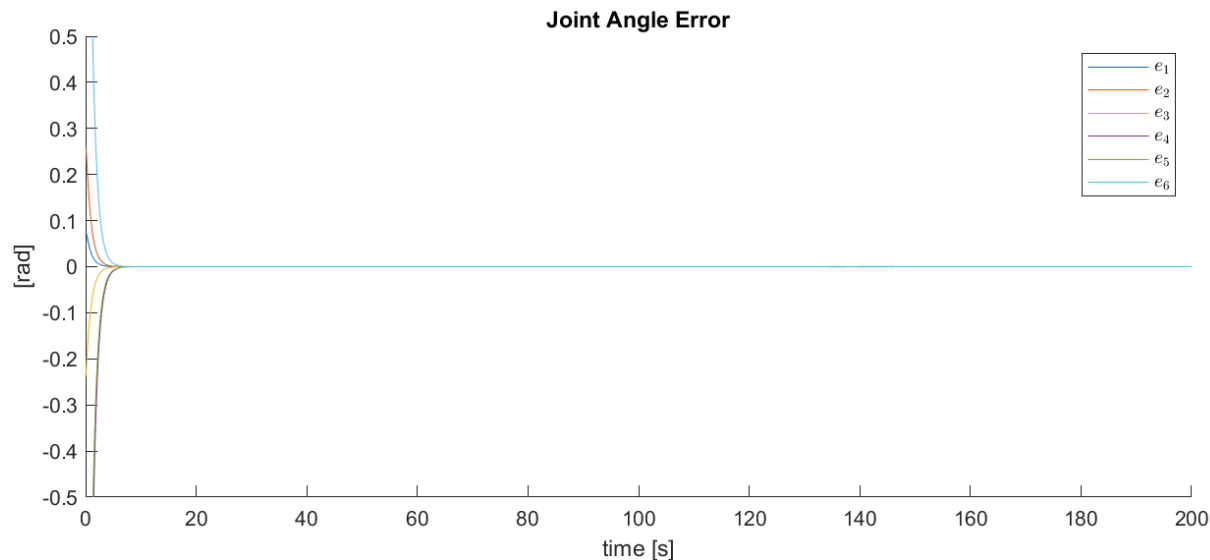
$$\mathbf{K}_p = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

# Manipolatore UR10e

## Controllore Computed Torque

$$\tau = B(\ddot{q}_d + K_v \dot{e} + K_p e) + C\dot{q} + G$$

Traiettoria a *velocità standard* ( $k = 15$ )





# Manipolatore UR10e

## Controllore Backstepping (solo posizione)

In questo caso semplificato, si controlla solo la posizione dell'end-effector.

$$\Lambda_p = \begin{bmatrix} 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 \end{bmatrix} \quad K_s = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

$$e_p = p_d - p = \begin{bmatrix} x_d \\ y_d \\ z_d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\dot{q}_r = J_p^+ (\dot{p}_d + \Lambda_p e_p)$$

$$s = \dot{q}_r - \dot{q}$$

$$J \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$$
$$J_p, J_\omega \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$$

$$J = \begin{bmatrix} J_p \\ J_\omega \end{bmatrix}$$

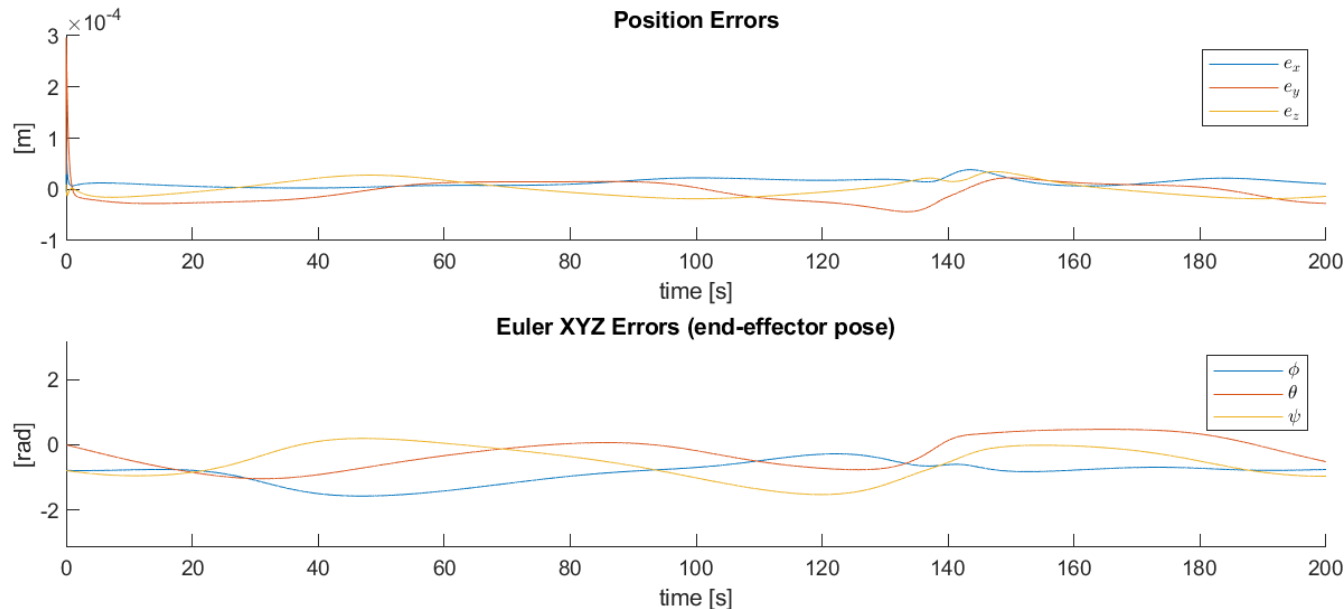
Jacobiano di posizione  
Jacobiano di orientazione

$$\tau = B\ddot{q}_r + C\dot{q}_r + G - K_s s - J_p^T e_p$$

# Manipolatore UR10e

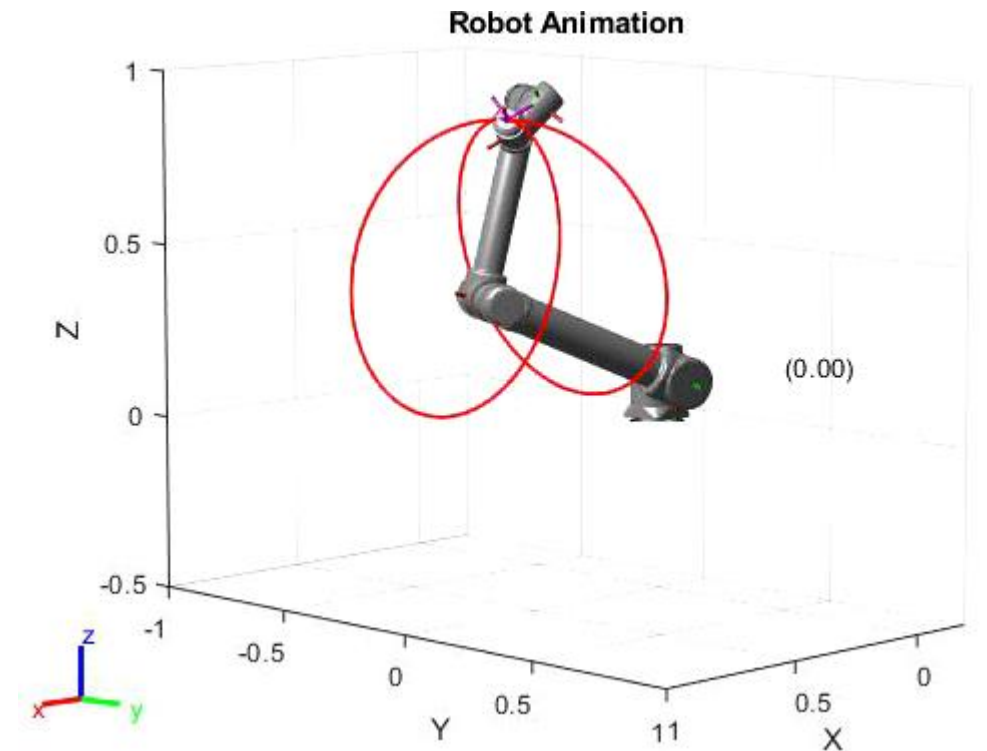
## Controllore Backstepping (solo posizione)

$$\tau = B\ddot{q}_r + C\dot{q}_r + G - K_s s - J_p^T e_p$$



Naturalmente l'errore sull'orientazione non è trascurabile, dato che non la stiamo controllando in nessun modo.

Traiettoria a *velocità standard* ( $k = 15$ )





# Manipolatore UR10e

## Controllore Backstepping Completo

Gestisco l'errore di orientazione passando alla descrizione dello stesso con i *quaternioni unitari*<sup>[2]</sup>, relativi alla posa desiderata e alla posa dell'ultimo frame del manipolatore.

$$\xi_d = \begin{bmatrix} x_d \\ y_d \\ z_d \\ \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Dalla cinematica diretta } R_e(q) \\ R_{XYZ}(\phi, \theta, \psi) = R_d \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{quaternioni}} q_e = (q_{e1}, q_{e2}, q_{e3}, q_{e4}) = (\eta_e, \epsilon_e) \\ \xrightarrow{\quad \quad \quad} q_d = (q_{d1}, q_{d2}, q_{d3}, q_{d4}) = (\eta_d, \epsilon_d) \end{array}$$

$$e_p = p_d - p = \begin{bmatrix} x_d \\ y_d \\ z_d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\dot{q}_r = J^{-1} (\ddot{p}_d + \Lambda_p e_p)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_p & 0 \\ 0 & \Lambda_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,25 \end{bmatrix}$$

$$e_o = \eta_e(q) \epsilon_d - \eta_d \epsilon_e(q) - S(\epsilon_d) \epsilon_e(q)$$

$$e = \begin{bmatrix} e_p \\ e_o \end{bmatrix}$$

$$s = \dot{q}_r - \dot{q}$$

$$K_s = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 \end{bmatrix}$$

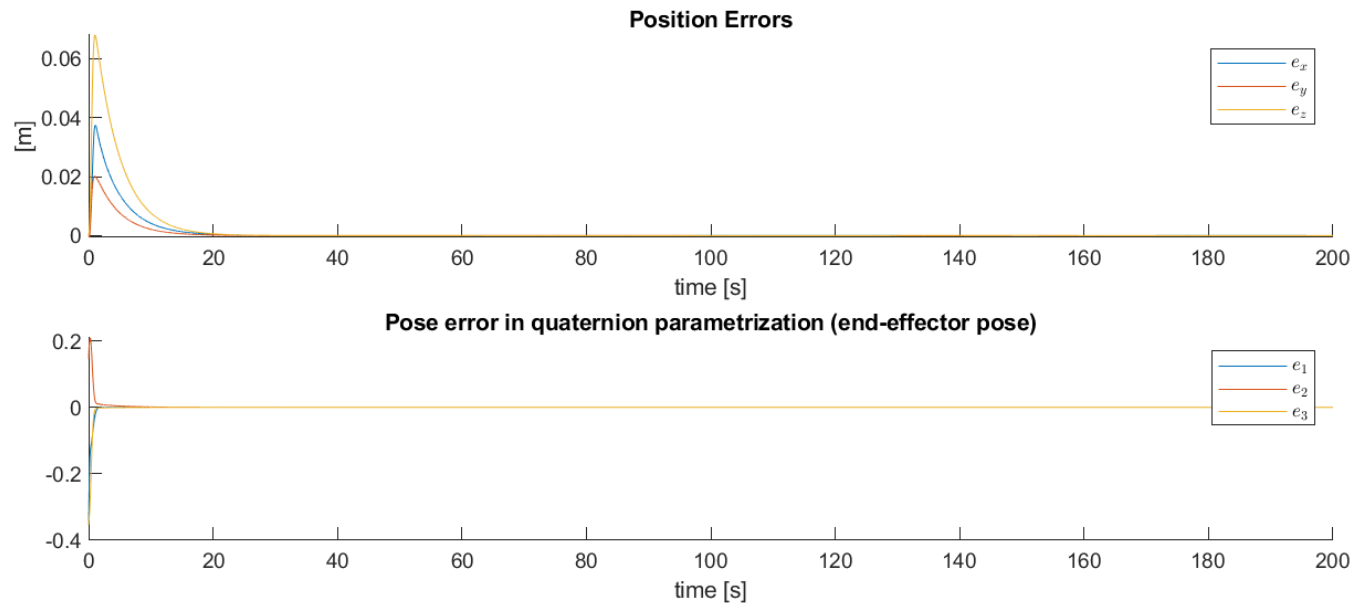
$$\tau = B\ddot{q}_r + C\dot{q}_r + G - K_s s - J^T e$$

[2] Bruno Siciliano, Lorenzo Sciacicco, Luigi Villani, Giuseppe Oriolo, «Robotics Modelling, Planning and Control»

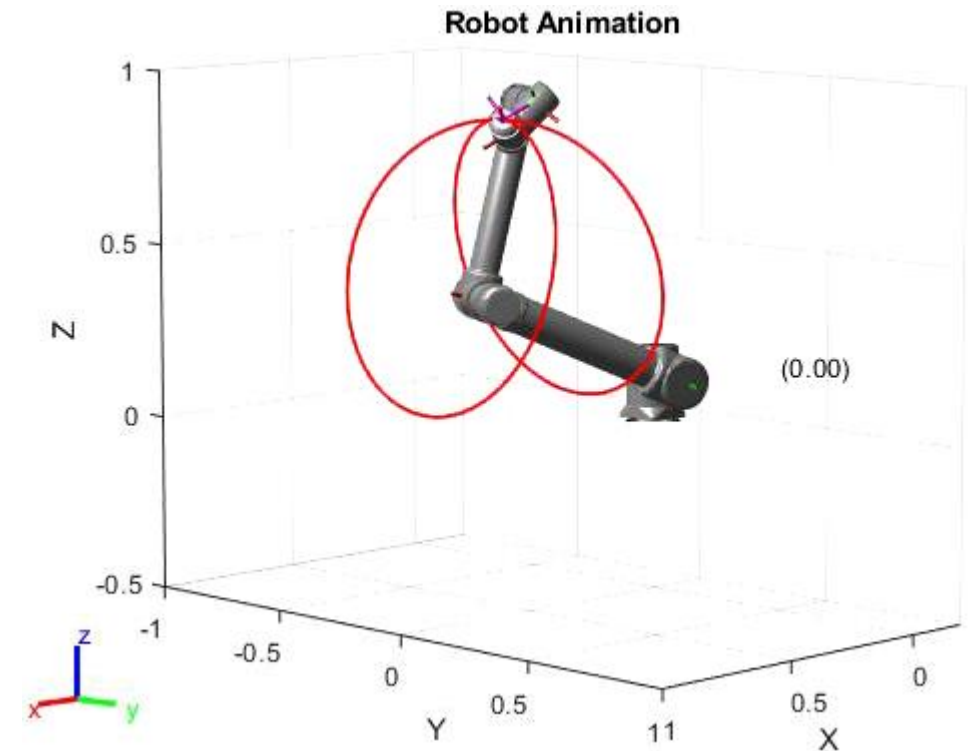
# Manipolatore UR10e

## Controllore Backstepping Completo

$$\tau = B\ddot{q}_r + C\dot{q}_r + G - K_s s - J^T e$$



Traiettoria a *velocità standard* ( $k = 15$ )



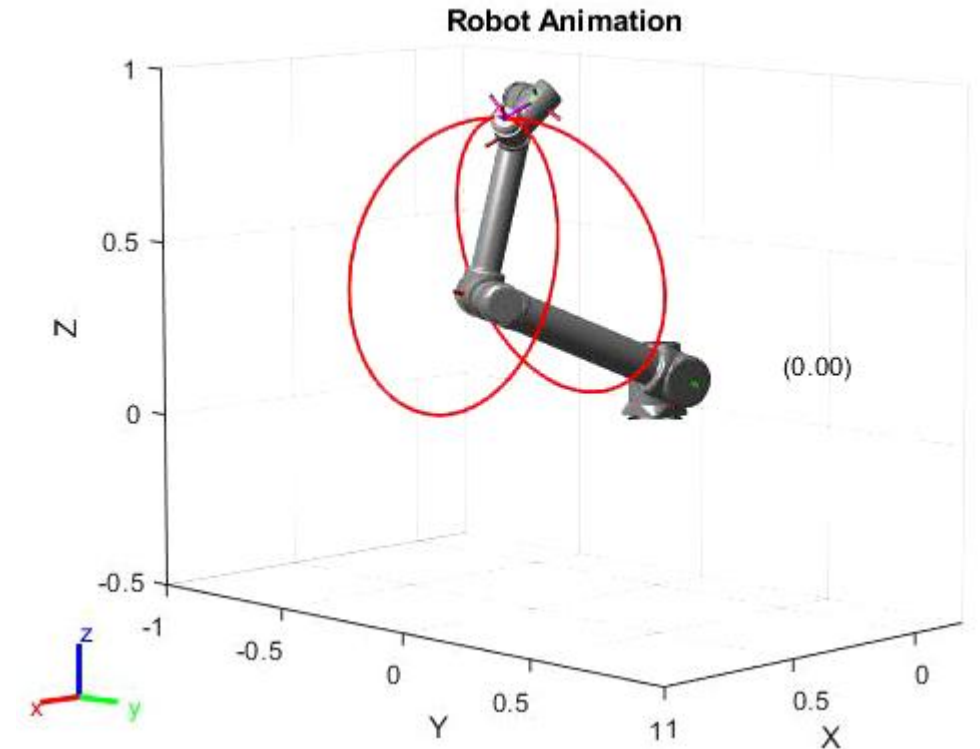
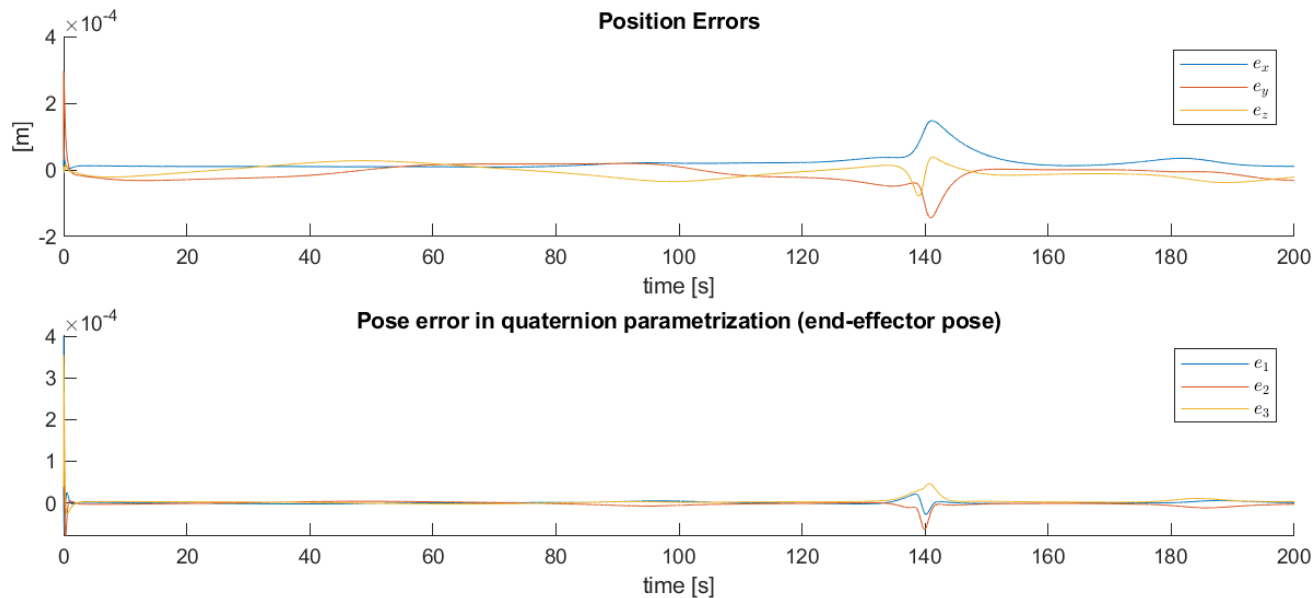


# Manipolatore UR10e

## Controllore Backstepping Completo

Orientazione desiderata (angoli Eulero XYZ)  $\Phi_0 = [\pi/4 \quad 0 \quad \pi/4]$

Traiettoria a *velocità standard* ( $k = 15$ )



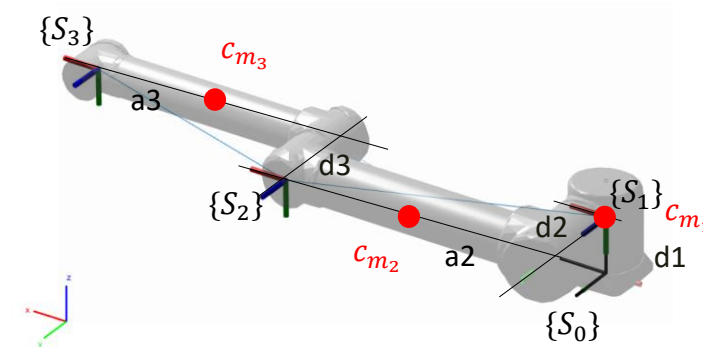
# Manipolatore RRR

## Caratterizzazione Cinematica e Dinamica

Creazione di un modello semplificato per i controllori adattivi.  
Controllo **solo** la posizione del *wrist*.

DH param.	$a[m]$	$\alpha[rad]$	$d[m]$	$\theta[rad]$
Joint 1	0	$-\pi/2$	0,1273	$q_1$
Joint 2	0,6120	0	0,2209	$q_2$
Joint 3	0,5723	0	0,1719	$q_3$

Dinamica	Mass [kg]	Centre of mass [kg]
Link 1	7,778	[0 0 0]
Link 2	12,93	[-0,3060 0 0]
Link 3	3,87	[-0,28615 0 0]





# Manipolatore RRR

## Controllo Adattivo

L'idea è quella di partire dalla descrizione della dinamica del manipolatore e riportarla in forma lineare rispetto dei parametri ignoti  $\hat{\pi}$ :

$$\tau = B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = Y(\ddot{q}, \dot{q}, q)\hat{\pi}$$

Nel nostro caso abbiamo considerato ignoti solo i valori delle masse dei link, supponendo conosciuta e fissa la posizione dei centri di massa e la distribuzione delle masse stesse dei link.

Esempio di tensore d'inerzia con l'approssimazione di *link cilindrico*:

Vettore dei parametri:

$$\hat{\pi} = [m_1 \quad m_2 \quad m_3]^T$$

$$I^1 = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{12}m_1(h_1^2 + 3r_1^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}m_1(3r_1^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}m_1(h_1^2 + 3r_1^2) \end{bmatrix}$$

# Manipolatore RRR

## Controllo Adaptive Computed Torque

Con la notazione usata per il controllo  
computed torque il sistema diventa:

$$e = q_d - q \quad \tilde{\pi} = \pi_d - \hat{\pi}$$

$$\tau = \hat{M}(q)(\ddot{q}_d + K_v \dot{e} + K_p e) + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \hat{G}(q)$$

$$\ddot{e} + K_v \dot{e} + K_p e = \hat{M}(q)^{-1} Y(\ddot{q}, \dot{q}, q) \tilde{\pi}$$



$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{e} \\ \ddot{e} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} + B \hat{M}(q)^{-1} Y(\ddot{q}, \dot{q}, q) \tilde{\pi} \\ \dot{\tilde{\pi}} = -R^{-1} Y^T(\ddot{q}, \dot{q}, q) \hat{M}(q)^{-T} B^T P \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$K_p = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$$

$$R = I_{3 \times 3}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \\ -K_p & -K_v \end{bmatrix}$$

$$K_v = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ I_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

$$Q = I_{6 \times 6}$$

*P* tale che  $A^T P + P A = Q$

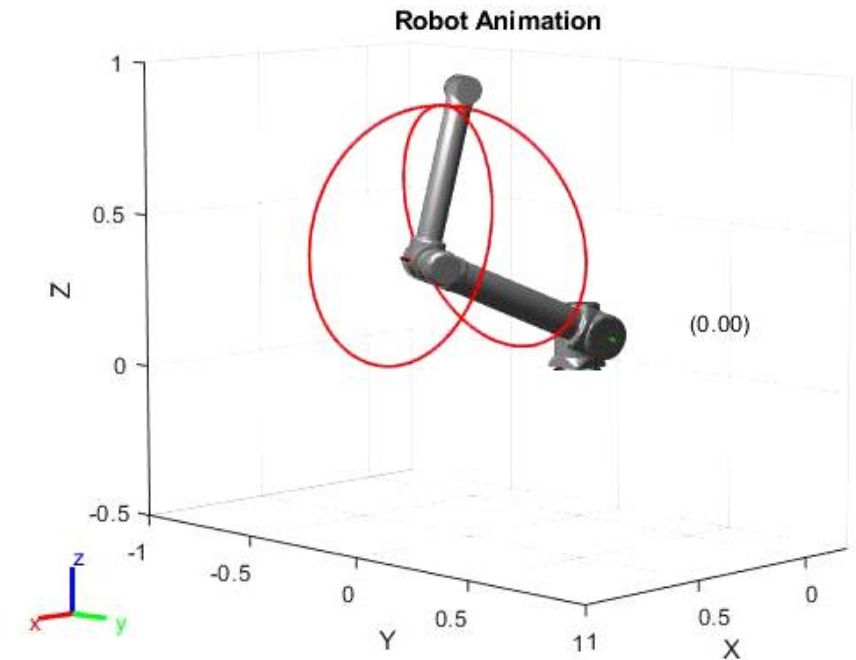
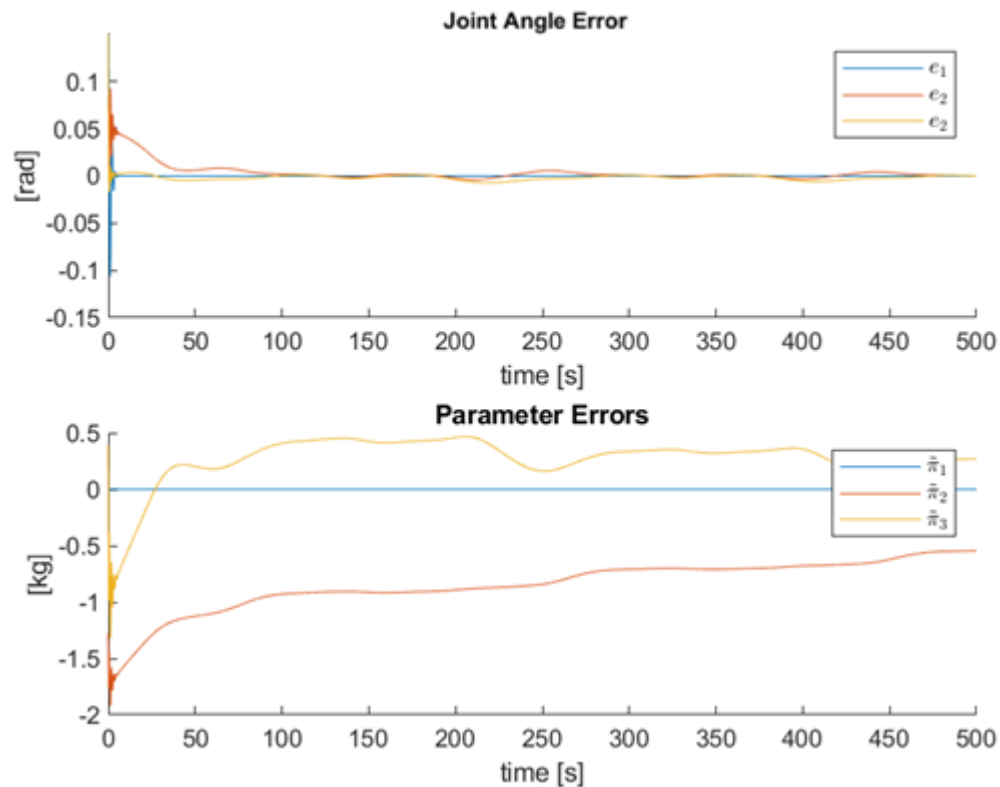
Il valori delle matrici  $K_p$  e  $K_v$  sono empirici.

# Manipolatore RRR

## Controllo Adaptive Computer Torque

Errore iniziale sui parametri:

$$\begin{aligned}\hat{m}_1 &= m_1 \\ \hat{m}_2 &= (1 + 10\%)m_2 \\ \hat{m}_3 &= (1 - 10\%)m_3\end{aligned}$$



Lenta convergenza dell'errore dei parametri



# Manipolatore RRR

## Controllo Adaptive Backstepping

Similmente ricordando la notazione usata per il controllo *backstepping*, il sistema diventa:

$$e = \xi_d - \xi \quad \dot{q}_r = J^{-1}(\dot{\xi}_d + \Lambda e)$$

$$s = \dot{q}_r - \dot{q}$$

$$\tau = \hat{M}(q)\ddot{q}_r + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q}_r + \hat{G}(q) - K_s s - J^T e$$

$$\tau = Y(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)\tilde{\pi} - K_s s - J^T e$$

$$\dot{\tilde{\pi}} = R^{-1}Y^T(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)s$$

Il valori delle matrici  $\Lambda$  e  $K_v$  sono stati trovati empiricamente.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_s = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

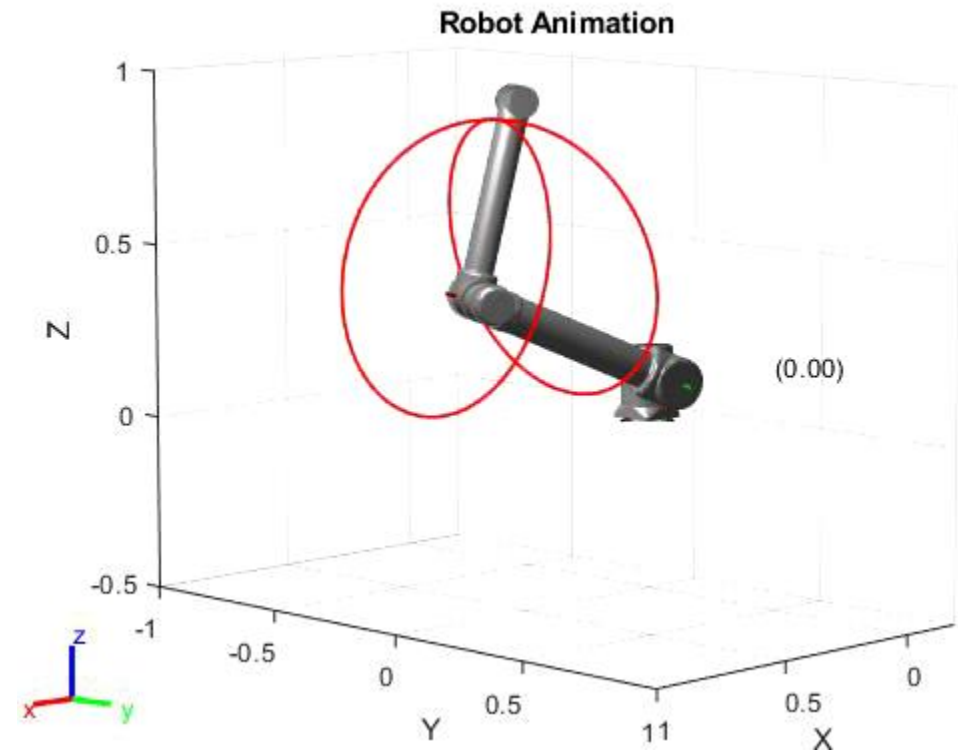
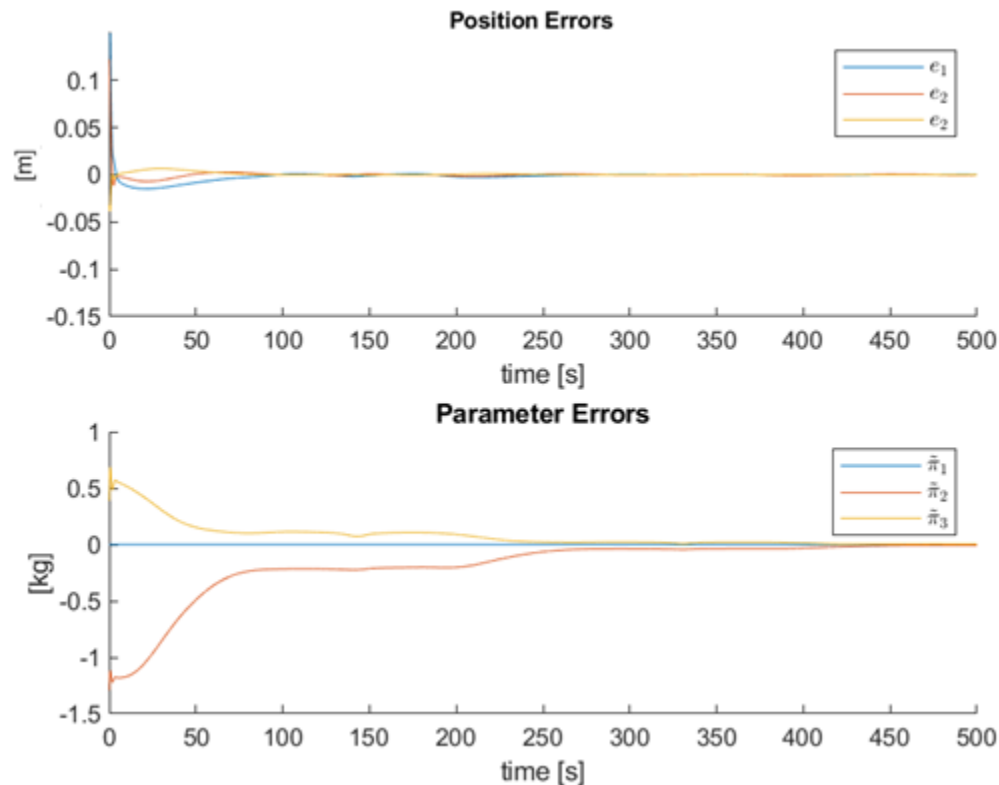
$$R = I_{3 \times 3}$$

# Manipolatore RRR

## Controllo Adaptive Backstepping

Errore iniziale sui parametri:

$$\begin{aligned}\hat{m}_1 &= m_1 \\ \hat{m}_2 &= (1 + 10\%)m_2 \\ \hat{m}_3 &= (1 - 10\%)m_3\end{aligned}$$

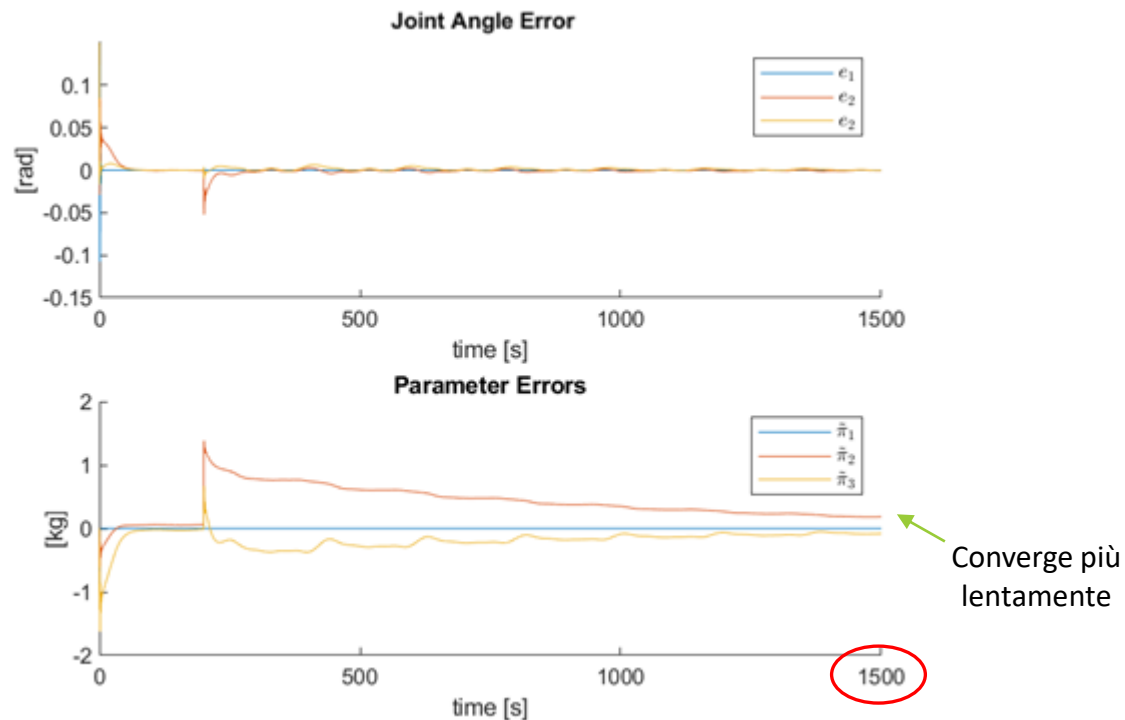


# Manipolatore RRR

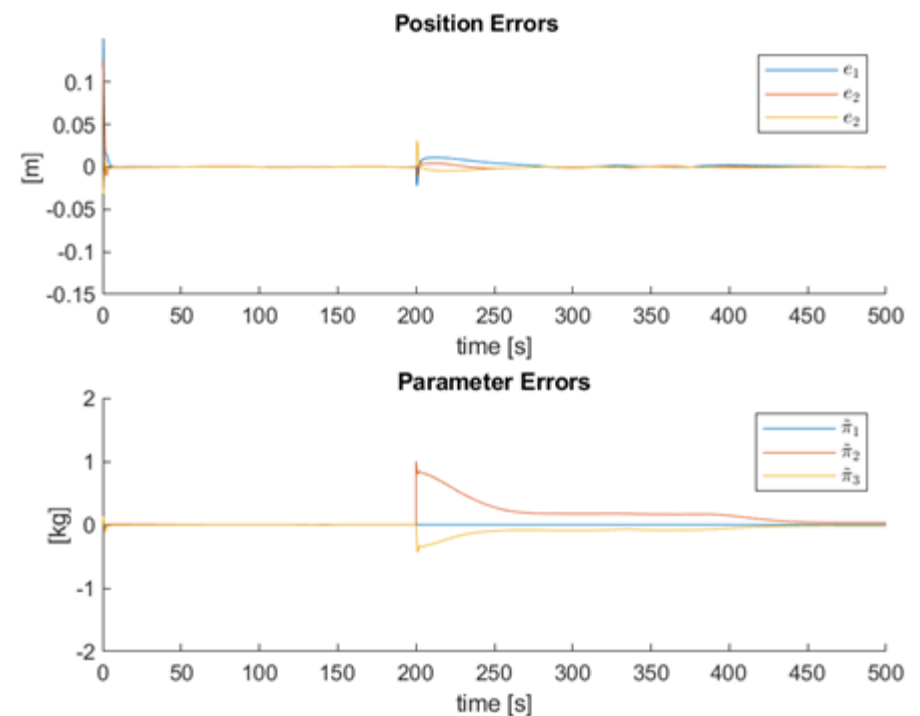
## Controllo Ad. Computed Torque vs. Ad. Backstepping

Ipotizzando noti i parametri al tempo iniziale con errore nullo, **al tempo  $t = 200s$  si aggiunge  $1\text{ kg}$  a  $m_2$ .**

Adaptive Computed Torque



Adaptive Backstepping

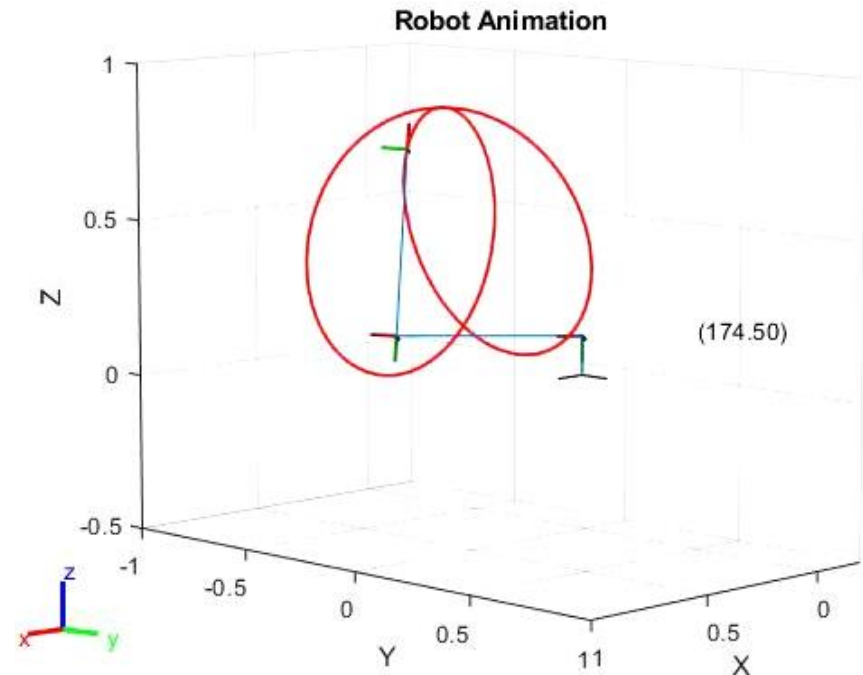
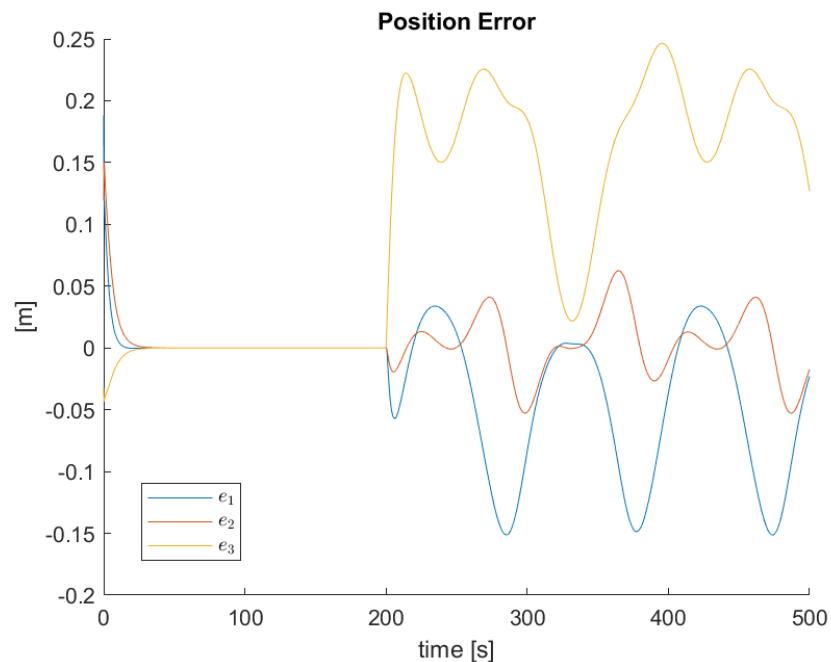




# Manipolatore RRR

## Controllo Backstepping

Come si comporta un controllo non adattivo in questo caso? → Controllore Backstepping



All'errore si aggiunge una quantità dovuta alla differenza tra il modello vero e quello all'interno del controllore.  
 Con guadagni più alti sulla retroazione della posizione l'errore diminuisce.



# Conclusioni

---

## **UR10e**

I controllori Computed Torque e Backstepping risultano i più efficaci se la conoscenza della dinamica è esatta.

I tempi di convergenza all'errore nullo sono pressoché istantanei ad alti valori dei guadagni.

---

## **RRR**

Il controllo Adaptive Backstepping risulta il più veloce e affidabile in termini di convergenza dei parametri dinamici da stimare.

Invece, l'entità dell'errore sulle variabili di giunto è confrontabile tra i due approcci.

*Al variare della traiettoria e delle matrici dei guadagni, si possono ottenere risultati differenti.*



# Bibliografia

---

- [1] M. Gabiccini, “ScrewCalculus: a Mathematica Package for Robotics,” DIMNP, University of Pisa,” <http://www2.ing.unipi.it/~d11181/Personal/Downloads.htm>, 2008.
- [2] Bruno Siciliano, Lorenzo Sciavicco, Luigi Villani, Giuseppe Oriolo, «Robotics Modelling, Planning and Control»
- [3] Appunti di Controllo dei Robot, A. Bicchi, P. Salaris, G. Grioli, M. Garabini, A. Settini, A. Fagiolini et al., 2021
- [4] Appunti di Meccanica dei Robot, M. Gabiccini, 2020-2021