Высшая школа экономики. Факультет математики. Итоговая государственная аттестация.

20 февраля 2020 г.

0.1 Числовые последовательности, пределы, предельные точки, критерий Коши сходимости последовательности.

Определение. Функция $f\colon \mathbb{N} \to X$, областью определения которой является все множество натуральных чисел называется *последовательностью* элементов множества X. Значение $f(n)$ будем обозначать как a_n, а саму последовательность как $\{a_n\}, a_n \in X$.

Определение. Число A называется *пределом* последовательности $\{a_n\}, a_n \in \mathbb{R}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для любого $k > N$ выполнено :

$$|a_k - A| < \varepsilon.$$

Обозначение : $a_n \to A$ или $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

Определение. Число A называется *пределом* последовательности $\{a_n\}, a_n \in \mathbb{R}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для любого $k > N$ выполнено :

$$|a_k - A| < \varepsilon.$$

Предложение 1 (Свойства пределов последовательностей). *Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — две числовые последовательности. Тогда:*

- *Предел последовательости единственнен, если он существует;*
  Если кроме того, если $a_n \to a$ и $b_n \to b$ то:
- *Для любого чила с выполнено $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n +) = a +$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = a$;*
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$;
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$;
- *Если $a \neq 0$ и $a_n \neq 0$ для всех n, то $\frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a}$.*

Теорема 1 (Больцано Вейерштрасс). *Любая ограниченная последовательность имеет по крайней мере одну предельную точку.*

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *фундаментальной* (последовательностью Коши), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для любых номеров $n, m > N$ выполнено: $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Теорема 2 (критерий Коши). *Последовательность действительных чисел $\{x_n\}$ имеет предел тогда и только тогда, когда она является фундаментальной.*

Доказательство. Если $a_n \to a$, то для $\varepsilon > 0$ выберем такой номер N, что для всех номеров $m > N$ выполнено $|a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда для любых номеров $k, l > N$ верно:

$$|a_k - a_l| \leqslant |a_k - a| + |a - a_l| < \varepsilon,$$

то есть последовательность $\{a_n\}$ — фундаментальна.

Пусть наоборот $\{a_n\}$ — фундаментальная последовательность. Для фикированного ε найдем такой номер N, что для каждого $k > N$ верно $|a_N - a_k| < \varepsilon$. Тогда для каждого n и $k > N$ верно

$$a_N - \varepsilon < a_k < a_N + \varepsilon.$$

Поэтому последовательность $\{a_n\}$ ограничена, так как ограничен ее бесконечный "хвост".

Теперь можно воспользоваться Теоремой Больцано-Вейерштрасса, найти предельную точку у $\{a_n\}$ и доказать, что найденная предельная точка и является пределом последовательности. Но мы сделаем иначе: воспользуемя принципом вложенных отрезков.

Обозначим $l_n = \inf\limits_{k \geqslant n} a_k$ и $u_n = \inf\limits_{k \geqslant n} a_k$. Ясно, что для любого n верно $l_n \leqslant l_{n+1} \leqslant$ $\leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$. Таким образом, $\{[l_n, u_n]\}$ — система вложенных отрезков, а значит имеет по крайней мере одну общую точку. Кроме того, для любого ε и подходящего номера N верно:

$$a_N - \varepsilon \leqslant l_N \leqslant u_N \leqslant a_N + \varepsilon.$$

А значит $\lim\limits_{n \to \infty} u_n - l_n = 0$, по лемме о двух сжимающих последовательностях. Тем самым у системы $\{[l_n, u_n]\}$ есть ровно одна общая точка. Докажем, что она и является пределом последовательности. Пусть $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [l_n, u_n]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что $u_N - l_N < \varepsilon$. Тогда для любого $k > N$ верно $|A - a_k| \leqslant u_N - l_N < \varepsilon$, так как $A, a_k \in [l_N, u_N]$. То есть $a_n \to A$ при $n \to \infty$. □

0.2 Предел функции, непрерывность, теорема о промежуточном значении непрерывной функции, равномерная непрерывность непрерывной функуии на отрезке.

0.3 Сходимость числовых рядов. Свойства абсолютно сходящихся рядов (сходимость абсолютно сходящегося ряда, престановка членов). Признаки сходимости Д' Аламбера и Коши. Условно сходящиеся ряды.

0.4 Числовые последовательности, пределы, предельные точки, критерий Коши сходимости последовательности.

0.5 парам-пам-пам