

Vorlesung 09: Wahrscheinlichkeitsverteilungen

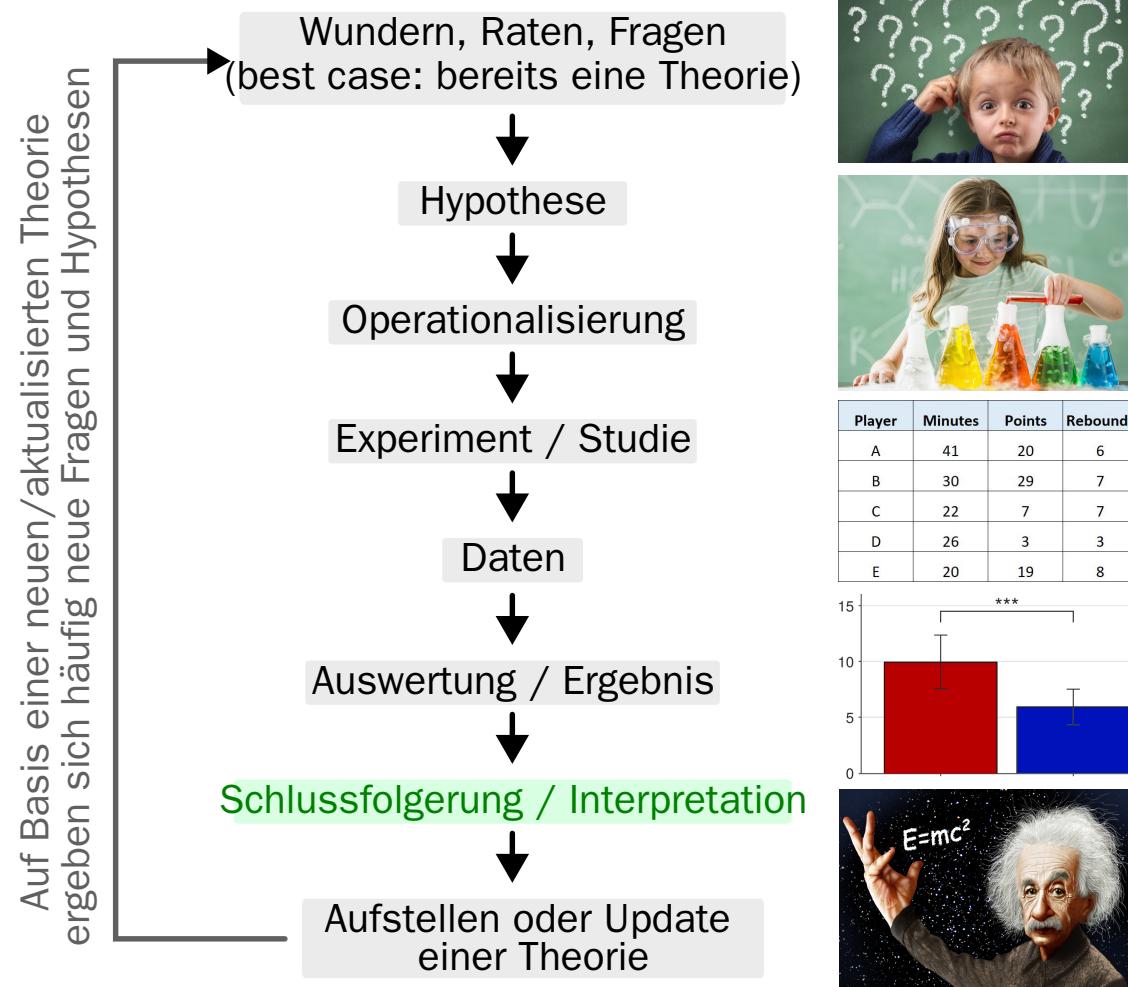
Prof. Matthias Guggenmos

Health and Medical University Potsdam

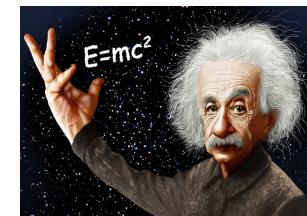
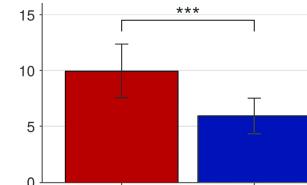
12.12.2024



Der Forschungsprozess

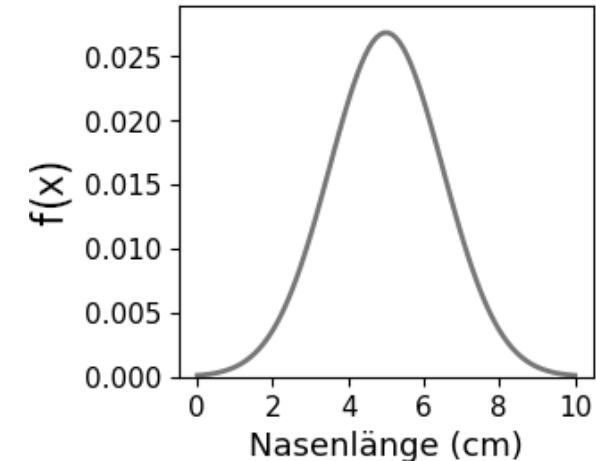


Player	Minutes	Points	Rebounds
A	41	20	6
B	30	29	7
C	22	7	7
D	26	3	3
E	20	19	8



Wahrscheinlichkeitsverteilung

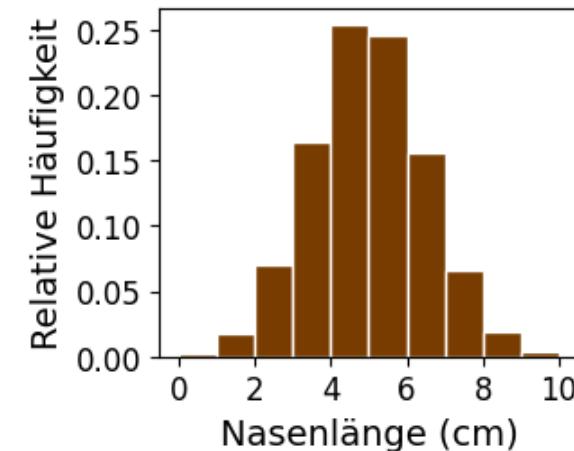
Wir kennen nun die Form und die Formparameter (Mittelwert, Standardfehler) der theoretischen Stichprobenverteilung. Mathematisch handelt es sich bei der Funktion, die diese Verteilung beschreibt, um eine **Wahrscheinlichkeitsverteilung**.



Definition Eine **Wahrscheinlichkeitsverteilung** ist eine **mathematische Funktion**, die jeder Merkmalsausprägung auf der x -Achse einen Häufigkeitswert $f(x)$ auf der y-Achse zuweist.

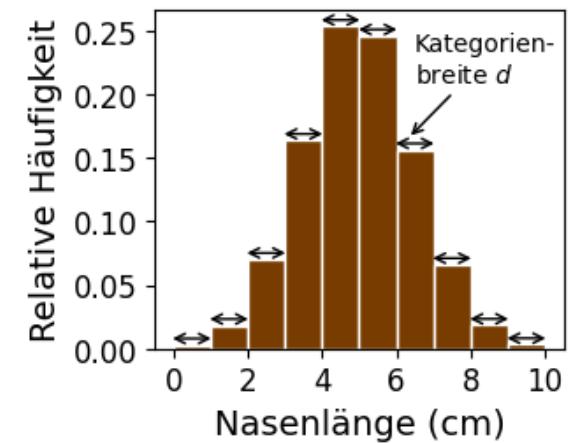
Um dieses Konzept zu verstehen, verlassen wir kurz die Idee der Stichprobenverteilung und gehen zurück zu einem Konzept, das wir bereits kennen: **relative Häufigkeiten, dargestellt als Histogramme**.

Zur Erinnerung: Histogramme stellen die Häufigkeit der *ursprünglichen Merkmalsvariable* in einer Stichprobe oder Population dar. Wird die **relative Häufigkeit** aufgetragen, handelt es sich dabei um eine **empirische Wahrscheinlichkeitsverteilung**.



Wahrscheinlichkeitsverteilung

- Bei der **relativen Häufigkeit in Histogrammdarstellung** wird für jedes Intervall der untersuchten Variable abgetragen, welcher Anteil der Versuchspersonen das Merkmal im jeweiligen Wertebereich trägt.
- Die Breite des Intervalls – auch **Kategorienbreite d** genannt – ist dabei im Fall von *empirischen* Daten immer ein Kompromiss zweier Faktoren:
 - Auflösung:** je schmäler das Intervall, desto besser die Auflösung.
 - Fallzahl:** je breiter das Intervall, desto höher die Zahl der Fälle in diesem Intervall, desto besser die Schätzung für die Häufigkeit.



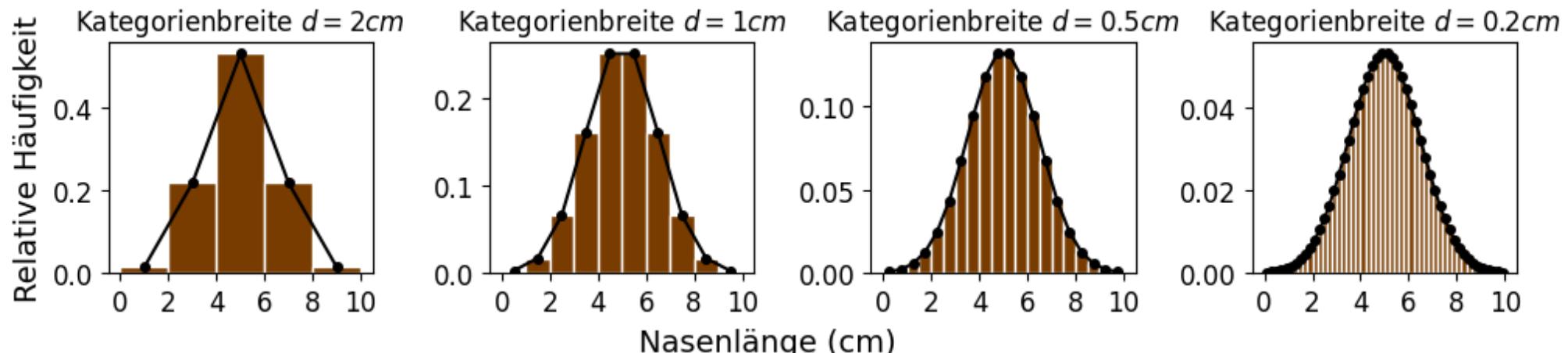
Wahrscheinlichkeitsverteilung

Wie ist es nun, wenn wir die **mathematische Funktion** kennen, die eine Wahrscheinlichkeitsverteilung beschreibt?

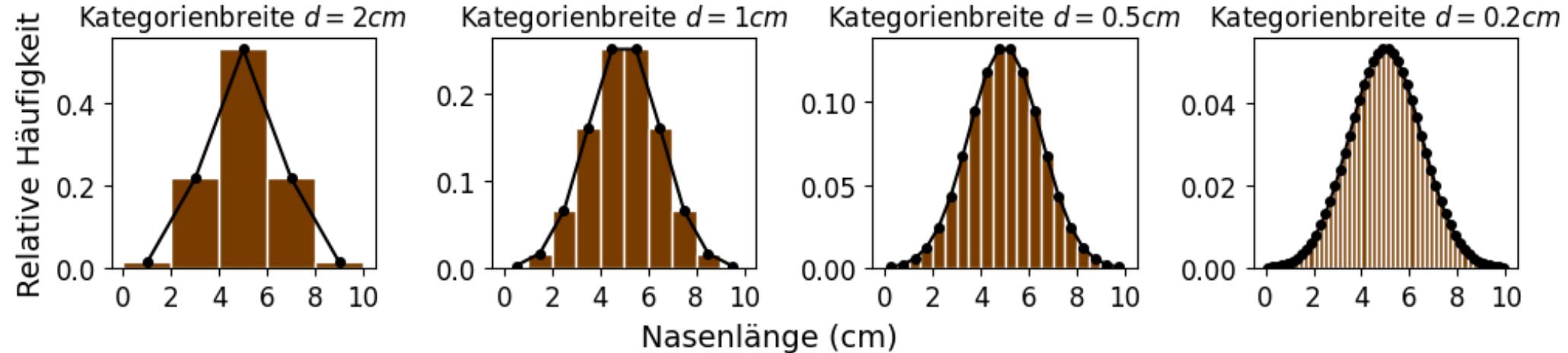
Beispiel Normalverteilung:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

- In diesem Fall ist uns für *jedes Intervall* und für *jede noch so kleine Kategorienbreite* der *wahre y-Wert* bekannt ist (wir kennen ja die Funktion).
- Wir können also die Kategorienbreite beliebig klein wählen, und wüssten immer noch den präzisen Wahrscheinlichkeitswert.



Wahrscheinlichkeitsverteilung



- Je kleiner die Kategorienbreite, desto geringer werden die relativen Häufigkeiten
 - Beispiel: die relative Häufigkeit, dass ein Merkmal im Intervall $[6; 8]$ liegt ist größer, als die relative Häufigkeit, dass das Merkmal im Intervall $[6; 7]$ liegt.
 - Für jede gewählte Kategorienbreite ist die Summe aller Balken allerdings weiterhin 1, denn die Wahrscheinlichkeit, dass das Merkmal *irgendeinen* der Werte annimmt, muss 1 sein.
- Für $d \rightarrow 0$ gehen die y-Werte gegen Null
 - Beispiel: die Wahrscheinlichkeit, dass Nasen eine bis auf die unendlichste Nachkommastelle präzise Länge haben (z.B. $4,318264812357218735\dots\text{cm}$) ist Null.
- Diese Überlegung führt uns zur **Dichtefunktion**

Wahrscheinlichkeitsdichte

Geht die Kategorienbreite gegen 0, wird die Wahrscheinlichkeit(sverteilung) zur **Wahrscheinlichkeitsdichte(Verteilung)**.

Wie kann man sich “Wahrscheinlichkeitsdichte” vorstellen?

- Wir kennen das Konzept der “Dichte” bei Stoffen: z.B. ist die Dichte von Eis ca. $0,918 \text{ g/cm}^3$, d.h. dass sich in einem 1cm^3 Würfel ein knappes Gramm Eis befindet.
- Eine Dichte ist also immer eine bestimmte Masse *pro* Maßeinheit.

Wir können daher Wahrscheinlichkeitsdichte wie folgt definieren:

Definition Wahrscheinlichkeitsdichte = Wahrscheinlichkeits(masse) *pro* Maßeinheit

- Die Maßeinheit ist durch die Skala unseres Merkmals gegeben:
Wahrscheinlichkeit *pro* Zentimeter Nasenlänge, Wahrscheinlichkeit *pro* IQ-Punkt,
Wahrscheinlichkeit *pro* Fragebogenpunkt

Wahrscheinlichkeitsdichte

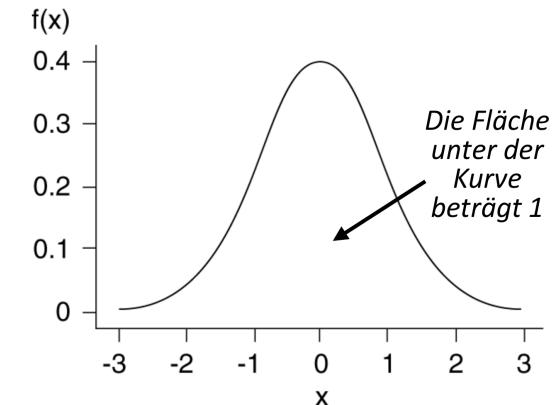
Da die Funktion der Normalverteilung

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

für beliebig “feine” x definiert ist, handelt es sich bei ihr in der Tat um eine **Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion**.

- Wichtig: Die Fläche unter Dichtefunktionen ist gleich 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$



.. im Fall der Normalverteilung sorgt dafür der Normalisierungsfaktor $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

Wahrscheinlichkeitsdichte

Um aus einer Wahrscheinlichkeitsdichte eine Wahrscheinlichkeit zu erhalten, muss die Dichte über einen bestimmten Wertebereich des Merkmals summiert (integriert) werden.



Wäre die Wahrscheinlichkeitsdichte für Nasenlängen im Intervall $[2\text{cm}; 4\text{cm}]$ konstant gleich 0,1, so wäre die Wahrscheinlichkeit einer Nasenlänge in diesem Intervall gleich:

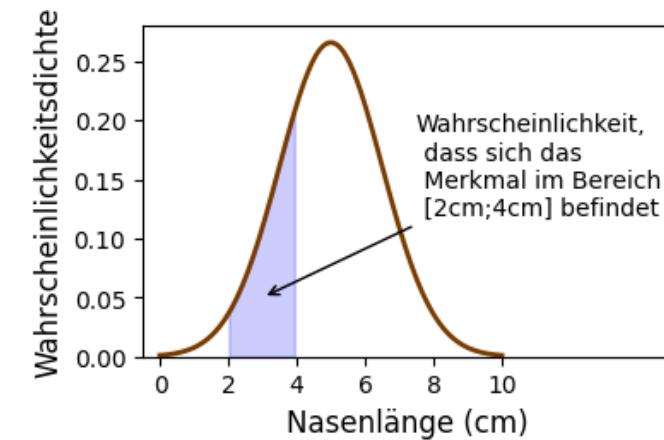
Beispiel

$$\text{Wahrscheinlichkeit} = \text{Intervallgröße} \cdot \text{Wahrscheinlichkeitsdichte} = 2\text{cm} \cdot 0,1\text{cm}^{-1} = 0,2$$

- Mathematisch beschreiben wir diese Operation als ein Integral:

$$P(x_0 < x < x_1) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$$

- P ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Merkmal einen Wert zwischen x_0 (Untergrenze) und x_1 (Obergrenze) aufweist.
- Das Integral setzt die Wahrscheinlichkeit $P(x_0 < x < x_1)$ mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x)$ in Verbindung.



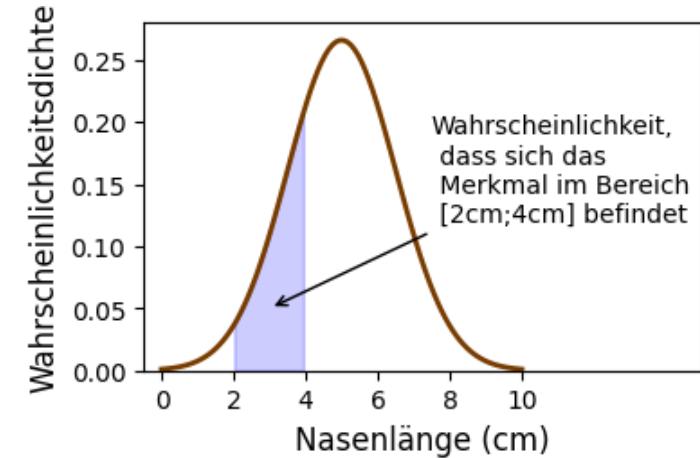
Beachte, dass im Bild die Wahrscheinlichkeitsdichte (anders als im Beispiel oben) nicht konstant zwischen 2cm und 4cm ist.

Wahrscheinlichkeitsdichte: Beispiel

Lassen wir die Vereinfachung im vorherigen Beispiel fallen, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte im Bereich $[2\text{cm}; 4\text{cm}]$ konstant ist. Stattdessen nehmen wir an, dass Nasenlängen in der Population normalverteilt sind, mit Mittelwert $\mu = 5$ und Standardabweichung $\sigma = 1,5$.

Frage: wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig gezogene Nase aus der Population eine Länge zwischen 2cm und 4cm hat?

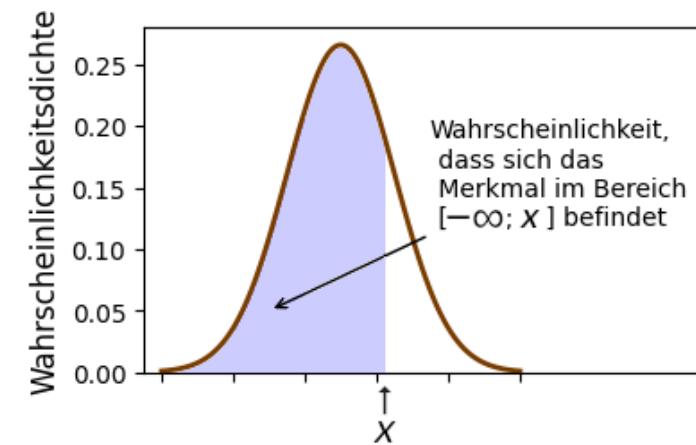
$$\begin{aligned} P(2 \leq x \leq 4) &= \int_2^4 f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_2^4 \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \\ &= \frac{1}{1,5\sqrt{2\pi}} \int_2^4 \exp\left(-\frac{(x-5)^2}{2 \cdot 1,5^2}\right) dx \stackrel{\text{(Computer!)}}{\approx} 0,23 \end{aligned}$$



Verteilungsfunktion

Die Integration einer Wahrscheinlichkeitsdichte *bis zu einem bestimmten Wert x* ist ein sehr häufiger Fall im Umgang mit Wahrscheinlichkeitsdichten. Daher definieren wir dafür eine eigene Funktion, die **Verteilungsfunktion $F(x)$** :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x') dx'$$



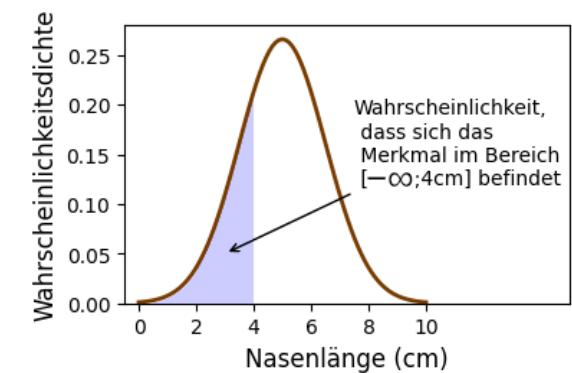
Die Verteilungsfunktion F gibt uns den Flächeninhalt der Dichtefunktion f "links von x " an.



Beispiel

Nehmen wir wieder die normalverteilte Nasenlängen-Population an mit Mittelwert $\mu = 5$ und Standardabweichung $\sigma = 1,5$. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig gezogene Nase eine Länge von höchstens 4cm hat, ist gegeben durch den Wert $F(4)$ der Verteilungsfunktion dieser Normalverteilung:

$$\begin{aligned} F(4) &= \int_{-\infty}^4 f(x') dx' = \\ &= \frac{1}{1,5\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^4 \exp\left(-\frac{(x' - 5)^2}{2 \cdot 1,5^2}\right) dx' \stackrel{\text{(Computer!)}}{\approx} 0,25 \end{aligned}$$



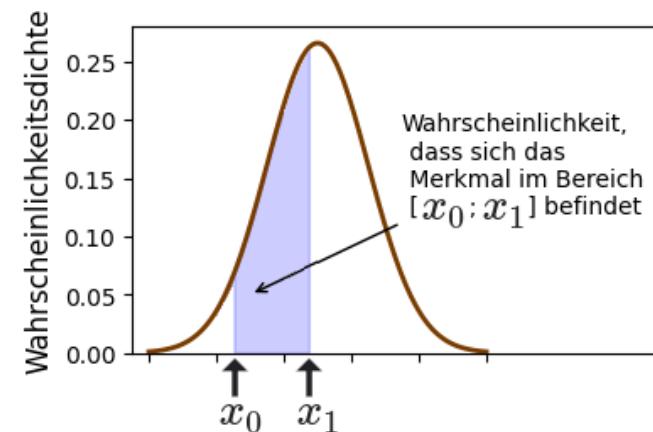
Verteilungsfunktion

Mithilfe der Verteilungsfunktion, lässt sich nun das Integral

$$P(x_0 < x < x_1) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$$

mit dem wir die Fläche zwischen einer Untergrenz x_0 und Obergrenze x_1 berechnen, auch folgendermaßen aufstellen:

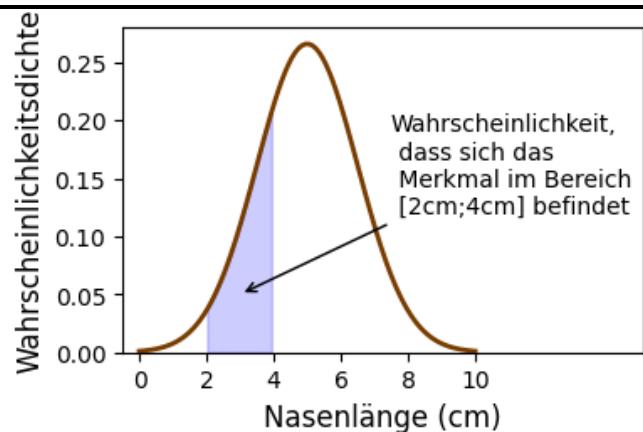
$$P(x_0 < x < x_1) = F(x_1) - F(x_0)$$



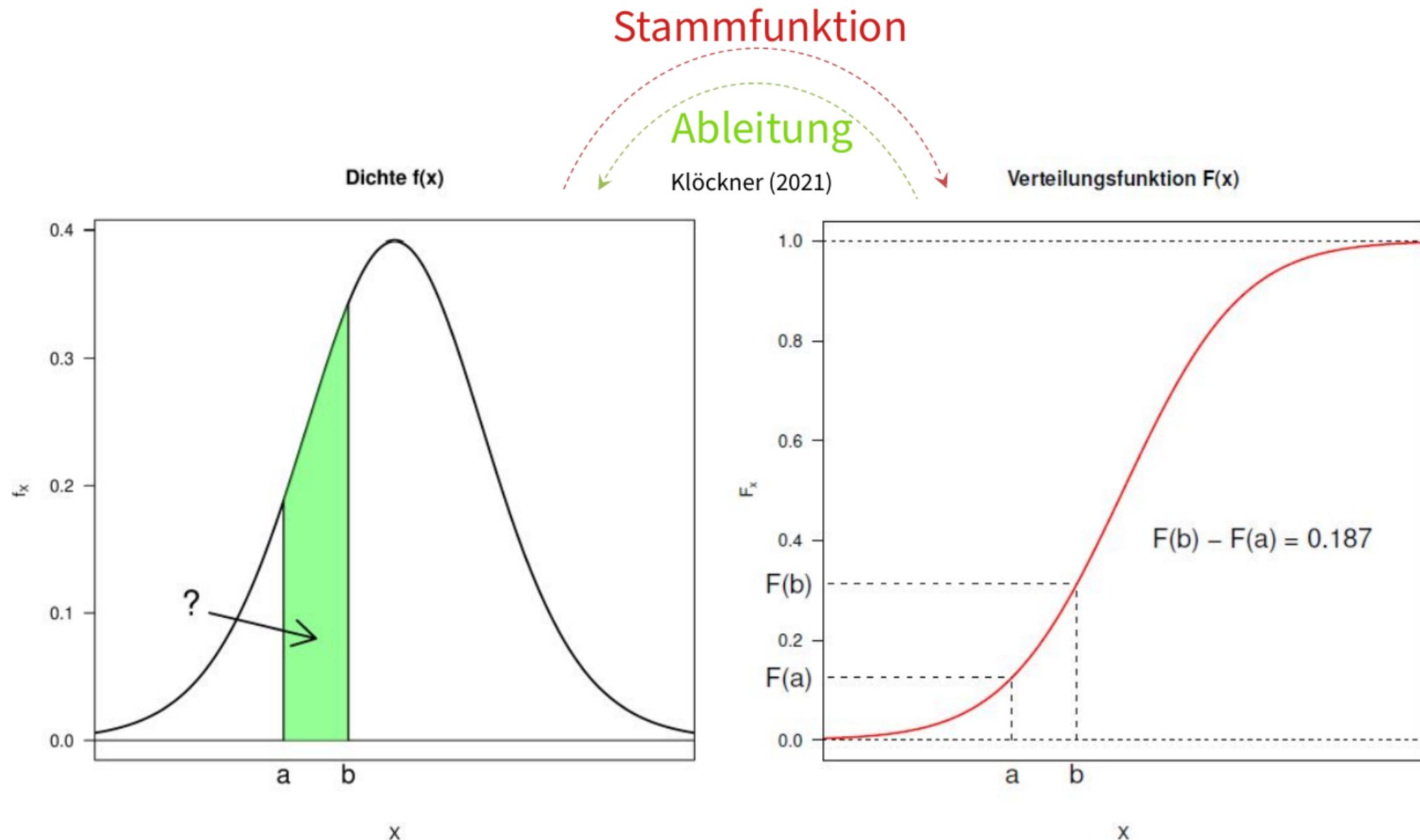
Die eingezeichnete Fläche aus unserem vorherigen Beispiel lässt sich berechnen als:

Beispiel

$$P(2 < x < 4) = F(4) - F(2) \stackrel{(Computer!)}{\approx} 0,23$$



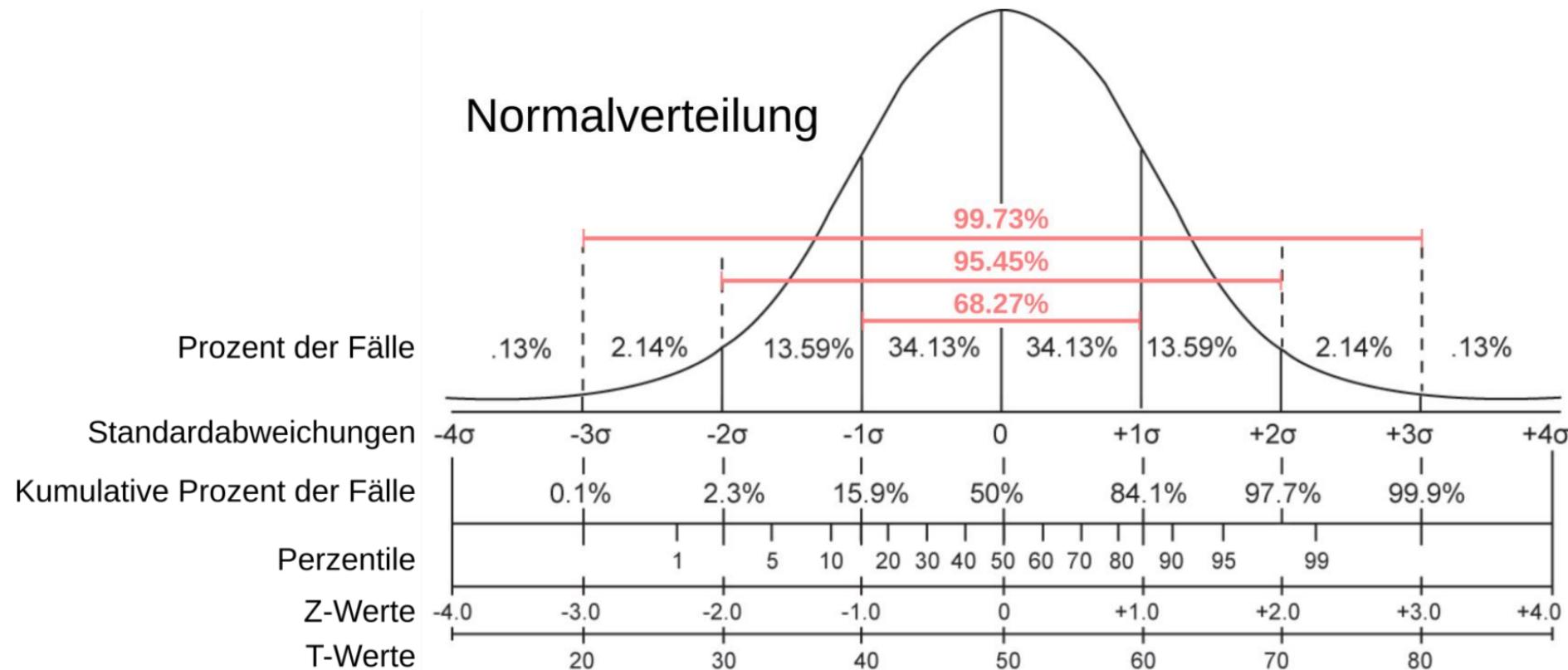
Verteilungsfunktion



68-95-99.7-Prozentregel

Um ein Gefühl für die Flächeninhalte der Normalverteilung zu bekommen, gilt als Faustregel die **68-95-99.7-Prozentregel**:

- Der Bereich Mittelwert \pm eine Standardabweichung ($\mu \pm 1\sigma$) umfasst **68%** der Daten
- Der Bereich Mittelwert \pm zwei Standardabweichungen ($\mu \pm 2\sigma$) umfasst **95%** der Daten
- Der Bereich Mittelwert \pm drei Standardabweichungen ($\mu \pm 3\sigma$) umfasst **99.7%** der Daten



Vorschau

Im nächsten Schritt kehren wir zurück zur **theoretischen Stichprobenverteilung**. Alle Erkenntnisse über die Normalverteilung lassen sich auch auf die theoretische Stichprobenverteilung übertragen. Dies wird uns bis zum Ende des Semesters zwei wesentliche Methoden der Inferenzstatistik eröffnen:

- Hypothesentestung bzw. Signifikanztestung (u.a. auch Idee des p-Wertes)
- Konfidenzintervalle (Verallgemeinerung des Standardfehlers)

