Trazador cúbico natural

Kenneth Hernández, Marco Herrera, and Jasson Rodríguez

Instituto Tecnológico de Costa Rica

CE - 3102 Análisis Numérico para Ingeniería

Noviembre 2019

Índice

1. Resumen

El trazador cúbico natural es un método de interpolación que permite obtener una función cúbica definida por partes, la cual caracteriza (interpola) el comportamiento de una serie de pares ordenados.

Para definir el trazador cúbico natural se toma un intervalo entre a y b; y se divide en n subintervalos de manera que el tamaño de paso sea

$$h = \frac{b-a}{n} \tag{1}$$

Según Bellour, Sbibih y Zidna [1] se define $S \in S_3^2(I, \Pi_n)$ como un trazador cúbico generado por condiciones de frontera al interpolar los $(n+1)$ valores $x_i = x(t_i), i = 0, ..., n$. Por ejemplo, $S(t_i) = x_i$, con condiciones de frontera $S''(a) = S''(b) = 0$. Entonces, las restricciones de S para los intervalos $\sigma_i = [t_i, t_{i+1}], i = 0, ..., n-1$, pueden ser escritas de la forma:

$$S_i(t) = \frac{z_{i+1}}{6h}(t-t_i)^3 + \frac{z_i}{6h}(t_{i+1}-t)^3 + \left(\frac{x_{i+1}}{h} - \frac{h}{6}z_{i+1}\right)(t-t_i) + \left(\frac{x_i}{h} - \frac{h}{6}z_i\right)(t_{i+1}-t) \tag{2}$$

donde $z_i = S''(t_i), i = 0, 1, ..., n$.

Además, los valores z_i son determinados por la solución del siguiente sistema lineal:

$$z_{i-1} + 4z_i + z_{i+1} = \frac{6}{h^2}(x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}), i = 1, ..., n-1 \tag{3}$$

con $z_0 = S''(a) = z_n = S''(b) = 0$.

El sistema anterior también puede ser representado matricialmente con el fin de facilitar la utilización de métodos numéricos para encontrar las soluciones de la siguiente manera.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ z_{n-2} \\ z_{n-1} \\ z_n \end{pmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{pmatrix} 0 \\ x_0 - 2x_1 + x_2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-3} - 2x_{n-2} + x_{n-1} \\ x_{n-2} - 2x_{n-1} + x_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

Figura 1: Representación matricial de la ecuación 3

En pocas palabras, el método del trazador cúbico lineal parte de pares ordenados de la forma (t_i, x_i), a partir de los puntos x_i se pueden calcular los puntos z_i mediante la matriz de la figura 1, y posteriormente; basta con sustituir los valores de t_i, z_i, x_i en la ecuación 2.

2. Pseudocódigo del método

Entradas: x: vector de coordenadas en x
y: vector de coordenadas en y

Salidas : S: trazador cúbico natural

n ← largo de x;
$t \leftarrow x$;
$x \leftarrow y$;
$h \leftarrow t_2 - t_1$;
A ← matriz tridiagonal que representa $z_{i-1} + 4z_i + z_{i+1}$;
b ← matriz columna que representa $\frac{6}{h^2}(x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1})$;
S ← 0;
z ← $relajacion(A, b, 0{,}001)$;
para i *entre 1 y* $n-1$ **hacer**
| $S = S + \frac{z_{i+1}}{6h}(t - t_i)^3 + \frac{z_i}{6h}(t_{i+1} - t)^3 + \left(\frac{x_{i+1}}{h} - \frac{h}{6}z_{i+1}\right)(t - t_i) + \left(\frac{x_i}{h} - \frac{h}{6}z_i\right)(t_{i+1} - t)$
fin
devolver S

Referencias

[1] Bellour, A., Sbibih, D., y Zidna, A. (2016). Two cubic spline methods for solving Fredholm integral equations. Applied Mathematics and Computation. 276, 1–11.