Método de sobre-relajación sucesiva

Kenneth Hernández, Marco Herrera, and Jasson Rodríguez

Instituto Tecnológico de Costa Rica

CE - 3102 Análisis Numérico para Ingeniería

Noviembre 2019

Índice

1. Resumen

De acuerdo con Hageman [1] el método de sobre-relajación sucesiva es uno de los métodos más eficientes y utilizados para encontrar la solución de un sistema de ecuaciones lineales cuando la matriz de coeficientes A es simétrica, positiva definida y consistentemente ordenada. Soto [2] resalta que una matriz simétrica definida positiva es aquella en la que se cumple que $A_{i,j} = A_{j,i}$ y los determinantes de los menores principales de la matriz son positivos.

Para el método de sobre-relajación sucesiva se debe considerar la descomposición de la matriz A de la siguiente forma

$$A = L + D + U \tag{1}$$

Por lo que si se toma ω como una constante real diferente de cero y de acuerdo con Soto [2] al multiplicar a ambos lados y realizar agrupaciones estratégicas se obtiene lo siguiente:

$$\omega A = \omega(L + D + U) \tag{2}$$

$$\omega A = \omega L + \omega D + \omega U + D - D \tag{3}$$

$$\omega A = (\omega L + D) - ((1 - \omega)D - \omega U) \tag{4}$$

De esta manera, al dividir por ω la ecuación anterior.

$$A = \omega^{-1}(\omega L + D) - \omega^{-1}((1 - \omega)D - \omega U) \tag{5}$$

A partir de este punto es de gran utilidad definir el siguiente teorema, para la solución del sistema $Ax = b$.

Teorema 1

Sean $A, M, N \in \mathbf{R}^{nxn}$ tales que $A = M - N$ con A y M matrices y $b \in \mathbf{R}^n$. Entonces si $||M^{-1}N||_\infty < 1$, el método iterativo se encuentra definido de la siguiente manera.

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = \bar{M}^{-1}\bar{N}x^{(k)} + \bar{M}^{-1}b \\ x^{(0)} \end{cases} \tag{6}$$

Para aplicar el teorema anterior, como debe cumplirse que $A = M - N$; entonces, a partir de la ecuación 5 se puede definir

$$\bar{M} = \omega^{-1}(\omega L + D) \tag{7}$$

$$\bar{N} = \omega^{-1}((1-\omega)D - \omega U) \tag{8}$$

De esta forma, a partir de las ecuaciones 6, 7 y 8 se obtiene el **método iterativo de sobre-relajación sucesiva**. Donde $x^{(0)} \in R^n$ es un valor conocido y además se cumple que $D + \omega L$ es invertible.

Es importante definir que la convergencia del presente método ocurre siempre que el valor de ω se encuentre entre 0 y 2 basado en Soto [2]. A pesar de esto, es posible encontrar un valor óptimo de ω para el método de relajación basándose en el radio espectral de la matriz.

El radio espectral de una matriz se representa de la forma $\rho(A)$ y equivale al autovalor más grande en valor absoluto de una matriz; es decir, $\rho(A) = max_i(|\lambda_i|)$. Una vez definido este concepto, se puede calcular el valor óptimo de ω de la siguiente forma:

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(M^{-1}N)^2}} \tag{9}$$

Donde $M = D, N = -(L + U)$

2. Pseudocódigo del método

Entradas: A: matriz de coeficientes
b: matriz de términos independientes
ω: constante real diferente de cero
x_0: vector inicial para el método iterativo
tol: tolerancia
Salidas : x: vector solución

n ← largo de A;
si $x^{(0)}$ *no está definido* **entonces**
    $x^{(0)}$ ← vector de ceros de tamaño n;
fin
obtener descomposición $A = L + D + U$;
si ω *no está definido* **entonces**
    Av ← autovalores de A;
    $\omega \leftarrow \frac{2}{1+\sqrt{1-maximo(Av)^2)}}$;
fin
$M \leftarrow \omega^{-1}(\omega L + D)$;
$N \leftarrow \omega^{-1}((1-\omega)D - \omega U)$;
error ← $||Ax - b||_2$;
mientras *error* $>$ *tol* **hacer**
    $x^{(k+1)} = M^{-1}\bar{N}x^{(k)} + M^{-1}b$;
    error ← $||Ax - b||_2$;
fin
devolver x

Referencias

[1] Hageman, L. A. (2014). Applied Iterative Methods. Saint Louis: Elsevier Science.

[2] Soto, J. P. (2018). Solución de Sistemas de Ecuaciones: Métodos Indirectos (Parte II). Cartago: Instituto Tecnológico de Costa Rica.