

Versuch 211: Gekoppelte Pendel

Matthias Kuntz

21.02.2024

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	3
1.1 Physikalische Grundlagen	3
1.1.1 Bewegung schwingender Pendel	3
1.1.2 Symmetrische Schwingungen	4
1.1.3 Antisymmetrische Schwingung	5
1.1.4 Schwebungsschwingung	5
1.1.5 Kopplungsgrad	6
1.1.6 Elektrischer Schwingkreis	6
1.2 Versuchsaufbau	7
2 Versuchsprotokoll mit Messdaten	8
3 Auswertung	16
3.1 Vergleich der reinen Frequenzen	17
3.2 Vergleich der Schwebungsfrequenzen	18
3.3 Analyse der Kopplungsgrade	20
3.4 Beobachtungen am Schwingungskreis	21

4	Zusammenfassung der Endergebnisse	22
5	Diskussion	24

1 Einleitung

Eines der wichtigsten in der Physik beschriebenen Phänomene sind gekoppelte, schwingungsfähige Systeme. Seien es Atomgruppen innerhalb eines Moleküls, die elektromagnetischen Verbindungen einer Kristallstruktur oder sogar die Herzschrittmacherzellen im menschlichen Körper. All diesen Systemen liegt ein gekoppeltes Schwingungssystem zugrunde. Ziel dieses Versuches ist, anhand der Betrachtung eines einfachen Systems von zwei gekoppelten Schwingpendeln die Grundlagen der Kopplung sowie verschiedene Schwingtypen zu verstehen und analysieren.

1.1 Physikalische Grundlagen

1.1.1 Bewegung schwingender Pendel

Die Beschreibung eines einfachen ungekoppelten Schwingpendels lässt sich einfach als harmonischer Oszillator herleiten. Für ein Pendel mit Trägheitsmoment J , Direktionsmoment $D = mgL$, Masse m und Pendellänge L , g ist wie gewohnt die Erdbeschleunigung, gilt für kleine Winkel auslenkungen ϕ :

$$J\ddot{\phi} + D\phi = 0. \quad (1)$$

Die Lösung ist hierbei altbekannt eine harmonische Schwingung mit der Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{J}} = \sqrt{\frac{g}{L}}. \quad (2)$$

Werden nun zwei solche Pendel über eine Feder aneinandergekoppelt, so kann der Feder das zusätzliche Direktionsmoment $D' = D_F l^2$ zugewiesen werden, wobei D_F die Federkonstante und l die Länge der Feder bezeichnen. Somit wirken die zusätzlichen Drehmomente $M_1 = D'(\phi_2 - \phi_1)$ auf Pendel 1 sowie $M_2 = D'(\phi_1 - \phi_2)$ auf Pendel 2 und es ergibt sich das folgende System gekoppelter Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} J\ddot{\phi}_1 &= -D\phi_1 + D'(\phi_2 - \phi_1) \\ J\ddot{\phi}_2 &= -D\phi_2 + D'(\phi_1 - \phi_2). \end{aligned} \quad (3)$$

Dieses System kann man lösen, indem man die beiden Gleichungen $\ddot{\phi}_1 + \ddot{\phi}_2$

sowie $\ddot{\phi}_1 - \ddot{\phi}_2$ bestimmt und diese mit den Substitutionen $u = \phi_1 + \phi_2$ und $v = \phi_1 - \phi_2$ zu zwei unabhängigen Gleichungen für u und v entkoppelt. Man erhält die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} J\ddot{u} + Du &= 0 \\ J\ddot{v} + (D + 2D')v &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

deren Lösungen harmonische Schwingungen mit den Kreisfrequenzen ω_1 und ω_2 sind:

$$\begin{aligned} u(t) &= A_1 \cos(\omega_1 t) + B_1 \sin(\omega_1 t) \quad \text{mit } \omega_1 = \sqrt{\frac{D}{J}} \\ v(t) &= A_2 \cos(\omega_2 t) + B_2 \sin(\omega_2 t) \quad \text{mit } \omega_2 = \sqrt{\frac{D + 2D'}{J}}. \end{aligned} \tag{5}$$

Substituiert man wieder zurück zu ϕ_1 und ϕ_2 so erhält man die beiden Gleichungen für die Auslenkungswinkel der Pendel.

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= \frac{1}{2} (A_1 \cos(\omega_1 t) + B_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t) + B_2 \sin(\omega_2 t)) \\ \phi_2(t) &= \frac{1}{2} (A_1 \cos(\omega_1 t) + B_1 \sin(\omega_1 t) - A_2 \cos(\omega_2 t) - B_2 \sin(\omega_2 t)) \end{aligned} \tag{6}$$

Im folgenden werden wir betrachten, wie verschiedene Anfangsbedingungen verschiedene Schwingtypen erzeugen und sich die Gleichungen nochmal deutlich vereinfachen.

1.1.2 Symmetrische Schwingungen

Werden beide Pendel am Anfang in die gleiche Richtung gleich weit ausgelenkt und zur gleichen Zeit ($t = 0$) mit derselben Startgeschwindigkeit ($\dot{\phi} = 0$) losgelassen, so entsteht eine symmetrische Schwingung. Diese Anfangsbedingungen lassen sich mathematisch Folgendermaßen formulieren:

$$\begin{aligned} \phi_1(0) &= \phi_2(0) = \phi_0 \\ \dot{\phi}_1(0) &= \dot{\phi}_2(0) = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Vereinfacht man die Bewegungsgleichungen mit diesen Bedingen so erhält man:

$$\phi_1(t) = \phi_2(t) = \phi_0 \cos(\omega_1 t). \quad (8)$$

Es bewegen sich also beide Pendel exakt gleich mit ω_1 und sind somit unabhängig von der Kopplung. Dies ist auch intuitiv, da bei der gleichförmigen symmetrischen Schwingung die Feder niemals gestreckt oder gestaucht wird.

1.1.3 Antisymmetrische Schwingung

Erneut müssen beide Pendel um den gleichen Anfangswert ausgelenkt werden, diesmal aber gegenphasig:

$$\begin{aligned} \phi_1(0) &= -\phi_2(0) = \phi_0 \\ \dot{\phi}_1(0) &= \dot{\phi}_2(0) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Mit diesen Bedingungen nehmen die Bewegungsgleichungen folgende Form an:

$$\phi_1(t) = -\phi_2(t) = \phi_0 \cos(\omega_2 t). \quad (10)$$

Somit schwingen die Pendel zwar immer noch mit gleicher Frequenz, nun aber gegenphasig mit der von der Kopplung abhängenden Frequenz ω_2 . Man kann es sich so vorstellen, dass die Feder die Schwingung antreibt, indem sie beim Gegeneinanderlaufen der beiden Pendel immer wieder gestaucht und gestreckt wird.

1.1.4 Schwebungsschwingung

Zu guter Letzt setzt die Schwebung voraus, dass das eine Pendel anfangs ausgelenkt wird, während das andere zunächst in der Ruhelage gehalten wird.

$$\begin{aligned} \phi_1(0) &= 0, & \phi_2(0) &= \phi_0 \\ \dot{\phi}_1(0) &= \dot{\phi}_2(0) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Es entstehen die folgen Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned}\phi_1(t) &= \phi_0 \sin(\omega_I t) \sin(\omega_{II} t) \\ \phi_2(t) &= \phi_0 \cos(\omega_I t) \cos(\omega_{II} t).\end{aligned}\tag{12}$$

Neu definiert wurden hierbei die Frequenzen $\omega_I = \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)$, mit der beide Pendel einzeln schwingen, sowie $\omega_{II} = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)$, die sogenannte Schwebungsfrequenz, mit der die Energie eines Einzelpendels oszilliert.

Bei einer Schwebung beginnt das am Anfang ausgelenkte Pendel nach und nach seine Schwingenergie über die Kopplung auf das andere Pendel zu übertragen, wodurch dieses zur Schwingung angeregt wird. Dieser Prozess geht soweit, bis praktisch die gesamte Energie im anderen Pendel steckt und ein Zustand erreicht wird, indem das anfänglich ausgelenkte Pendel ruht und das andere schwingt. An diesem Punkt kehrt sich der Prozess um.

Die Frequenzen ω_1 und ω_2 werden als Eigenfrequenzen der Schwingung bezeichnet und die zu diesen Eigenfrequenzen gehörenden Schwingungen werden wiederum als Normalschwingungen bezeichnet. Allgemein gilt, dass bei einem gekoppelten System von N Oszillatoren N Normalschwingungen existieren und jede mögliche Schwingung eines Oszillators sowie damit auch die Schwebungsschwingung selbst als Linearkombination dieser Normalschwingungen beschrieben werden kann.

1.1.5 Kopplungsgrad

Der Kopplungsgrad κ quantifiziert die Stärke einer Kopplung. Man kann ihn sowohl über die Direktionsmomente mit

$$\kappa = \frac{D'}{D + D'},\tag{13}$$

als auch über die Frequenzen oder Periodendauer der Schwingung definieren:

$$\kappa = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2} = \frac{T_2^2 - T_1^2}{T_2^2 + T_1^2}.\tag{14}$$

1.1.6 Elektrischer Schwingkreis

Ein weiteres gekoppeltes System ist der elektrische Schwingkreis. Hier werden zwei Spulen induktiv gekoppelt indem sie so nebeneinander gelegt werden, dass ihre Achsen auf einer Linie liegen. Befinden sich nun beide Spulen jeweils in

einem eigenen Schwingkreis, bestehend aus der jeweiligen Spule und einem Kondensator, so kann man beobachten, dass eine im einen Schwingkreis angeregte Schwingung analog zum mechanischen Fall über die hier induktive Kopplung auf den anderen Schwingkreis übertragen wird. Somit beginnt der zweite Schwingkreis zu schwingen und die Schwingung im Ersten lässt nach, bis auch hier der Umkehrpunkt erreicht wird, an dem der erste Schwingkreis nicht mehr schwingt und nun wieder vom Zweiten angeregt wird, der nun die Rolle des ursprünglichen Schwingkreises übernimmt.

1.2 Versuchsaufbau

Der Aufbau besteht aus zwei fest aufgehängten Pendeln, deren Auslenkung unter Verwendung des Hall-Effekts mithilfe einer Software digital aufgezeichnet werden kann. Ein Sensor in der Pendelachse misst hierbei die zum Sinus des Auslenkungswinkel proportionale Hall-Spannung, die dadurch entsteht, dass das in der Halterung angelegte Magnetfeld eine Spannung in dem sich drehenden Sensor induziert. An den Pendeln sind drei verschiedene Stellen, an denen die Kopplungsstange angebracht werden kann, wodurch drei verschiedene Kopplungsgrade, schwach, mittel und stark, untersucht werden können.

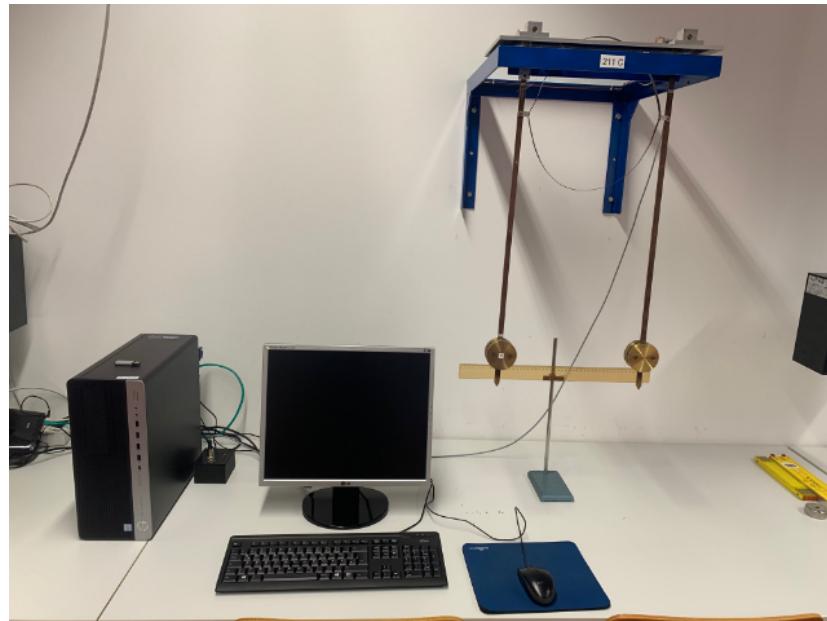


Abbildung 1: Versuchsaufbau [Quelle: Skript PAP2.1, S. 2, Stand: 23.02.2024]

2 Versuchsprotokoll mit Messdaten

Messprotokoll Versuch 21.1 - gekoppelte Pendel

Tutor: Simone Aumüller

21.02.2024, 9⁰⁰-12⁰⁰ Uhr

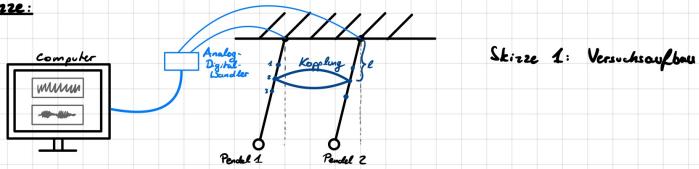
Nicole Schorleit

Matthias Kuntz

Materialien:

- zwei Pendel aus Messing (Dichte $\rho = 7,5 \text{ g cm}^{-3}$)
- Kopplungsfeder (Ring aus Federbronze band)
- fest montierter magnetischer Winkelauflnehmer
- Analog-Digital-Wandler
- Computer

Skizze:



Skizze 1: Versuchsaufbau

Teil 1: Messung der Eigenschwingsungsfrequenzen

Mithilfe des gegebenen Python-Programms werden zunächst die Schwingungsfrequenzen beider ungetkoppelter Pendel mithilfe einer Fouriertransformation bestimmt.

Die Daten werden als Text- & Bild-Datei gespeichert.

→ gemessene Frequenz: $(3,86 \pm 0,06) \text{ rad/s}$

(Fehler aus Standardabweichung der gefiteten Gauß im FFT.)

Teil 2: Messung der symmetrischen & antisymmetrischen Eigenschwingungen

Wir messen die symmetrischen und antisymmetrischen Schwingungen für drei verschiedene Kopplungsgrade und notieren die Abstände der Kopplungsfedern zur Schwingachse in Tabelle 1.

Position	Länge l [cm]
1	$15,45 \pm 0,05$
2	$25,45 \pm 0,05$
3	$40,50 \pm 0,05$

Fehler abgeschätzt aus
Meßgenauigkeit.

Tabelle 1: Positionen der Kopplungsfeader

Die gemessenen Daten werden erneut als Text & Bild gespeichert.

Schwingart	Kopplung	Frequenz [%]
symmetrisch	1	$3,88 \pm 0,05$
	2	$3,88 \pm 0,05$
	3	$3,88 \pm 0,05$
antisymmetrisch	1	$3,98 \pm 0,06$
	2	$4,17 \pm 0,06$
	3	$4,63 \pm 0,06$

Tabelle 2: gemessene Frequenzen bei symm./
asymm. Schwingungen

Teil 3: Messung der gemischten Anregung

Bei erneut drei verschiedenen Kopplungsgraden wird nun eine Schwingung vermessen.

Die gemessenen Daten werden erneut als Text & Bild gespeichert.

Schwingart	Kopplung	Frequenz 1 [%]	Frequenz 2 [%]
Schwingung	1	$3,869 \pm 0,019$	$3,923 \pm 0,029$
	2	$3,871 \pm 0,028$	$4,16 \pm 0,03$
	3	$3,873 \pm 0,028$	$4,62 \pm 0,03$

Tabelle 3: Frequenzen der Schwingung

Teil 4: qualitative Beobachtung elektrischer Schwingkreise

Wir beobachten qualitativ die induktive Kopplung zweier elektrischer Schwingkreise mithilfe eines Oszilloskops bei verschiedenen Kopplungen, ergo Spulenabständen.

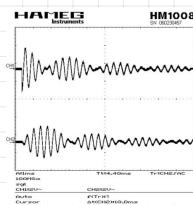


Bild 1:
Spulen komplett zusammen

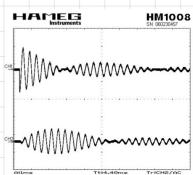


Bild 2:
Spulen leicht auseinander

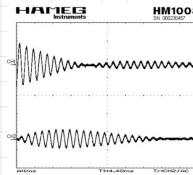
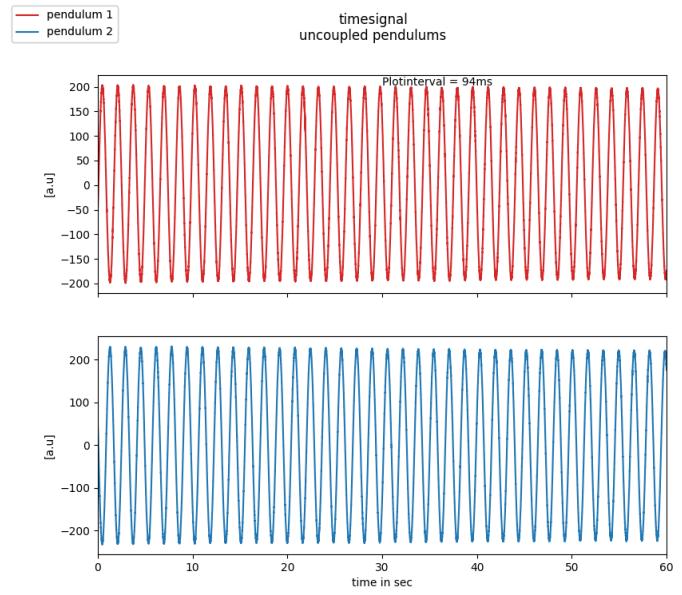
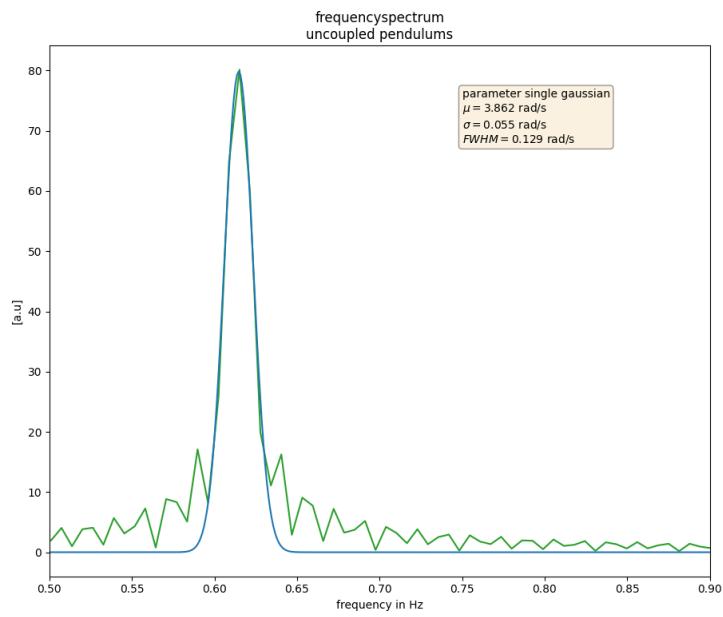


Bild 3:
Spulen weit auseinander

Simon Helle



(a)



(b) (FFT)

Abbildung 2: Gemessene ungekoppelte Schwingung

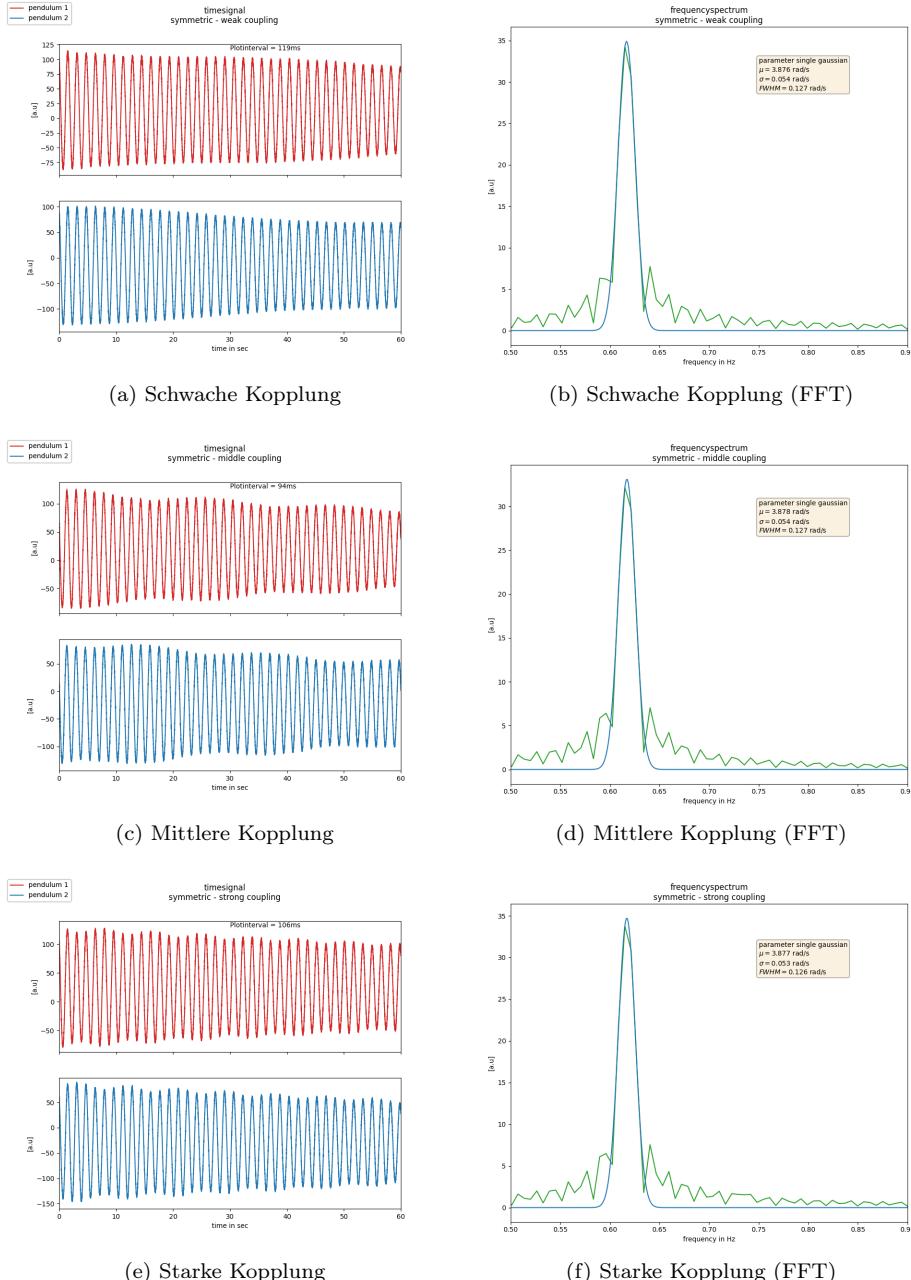


Abbildung 3: Gemessene Symmetrische Swingungen

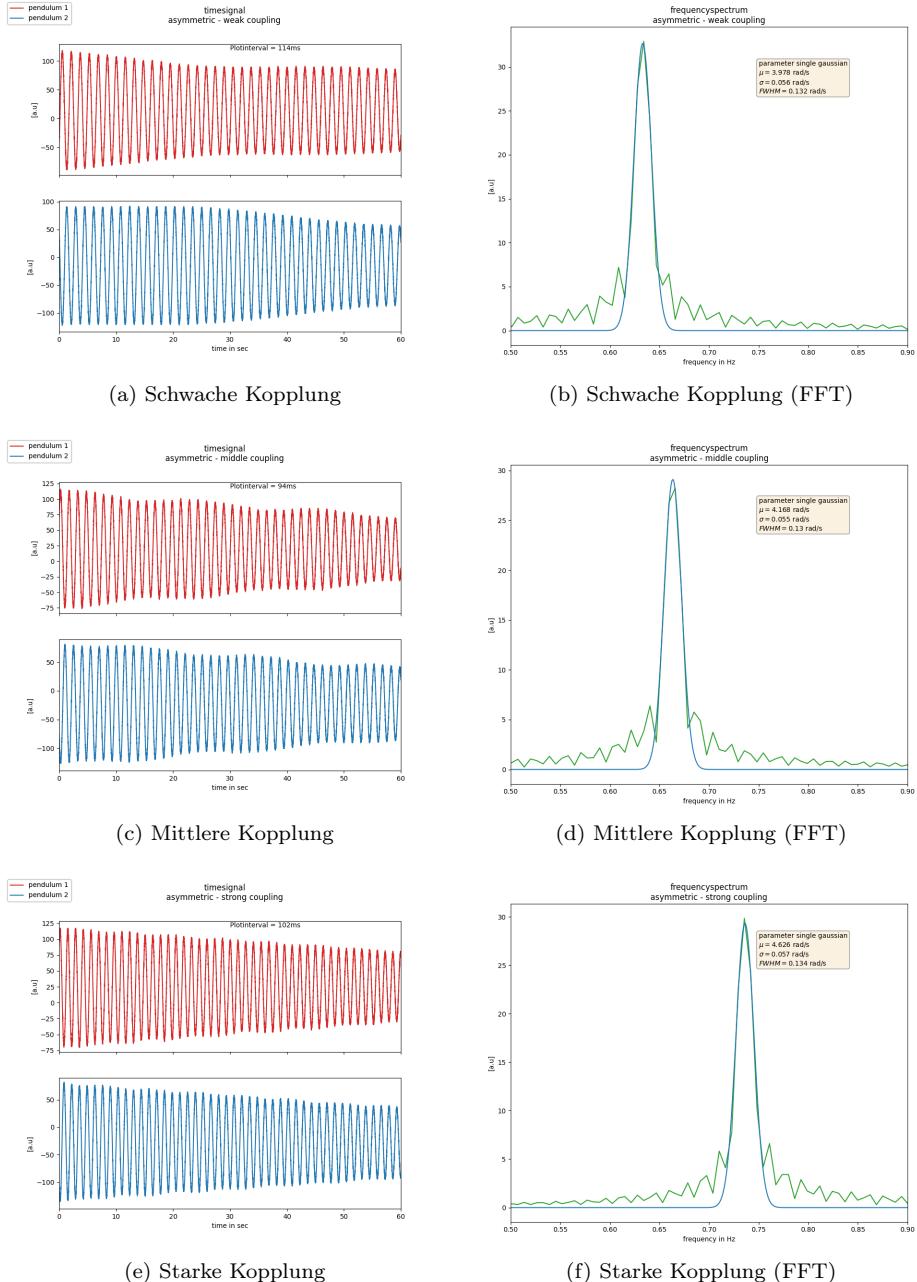


Abbildung 4: Gemessene Antisymmetrische Swingungen

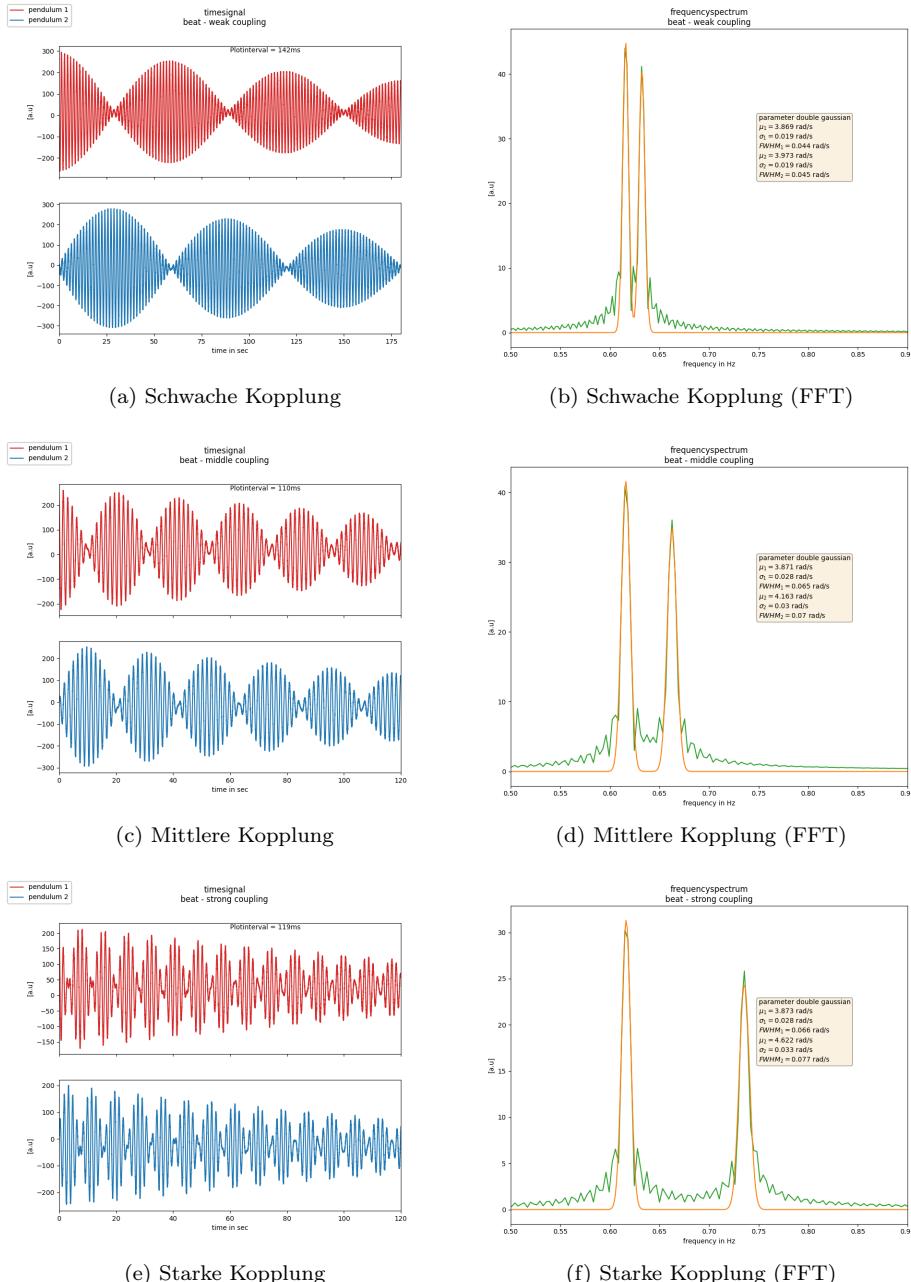
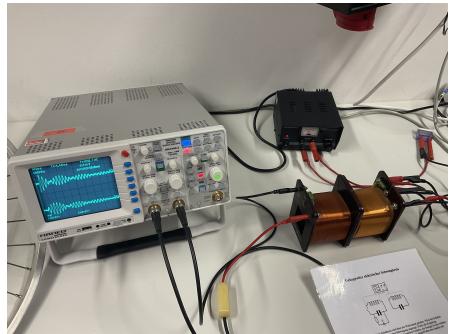
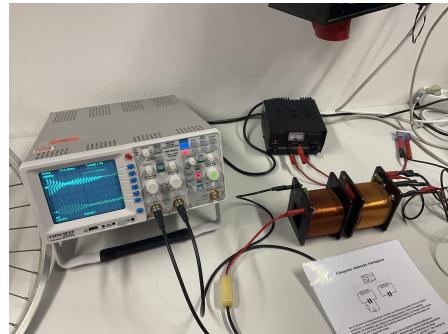


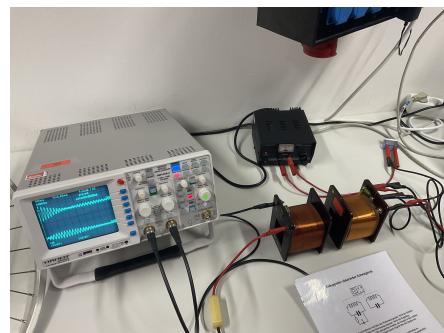
Abbildung 5: Gemessene Schwebungen



(a) kein Abstand - siehe Bild 1



(b) kleiner Abstand - siehe Bild 2



(c) großer Abstand - siehe Bild 3

Abbildung 6: Konfigurationen des elektrischen Schwingkreises - verschiedene Abstände der Spulen

3 Auswertung

In dieser Evaluation werden alle Fehler, sofern keine spezifische Angabe gemacht wird, mithilfe der Gauss'schen Fehlerfortpflanzung berechnet. Dies bedeutet, dass ein Wert F , der mit der Formel $f(a_1, \dots, a_n)$ berechnet wird, den Fehler ΔF annimmt:

$$\Delta F = \sqrt{\sum_n \left(\frac{\partial f}{\partial a_n} \cdot \Delta a_n \right)^2}. \quad (15)$$

Des Weiteren erfolgen Signifikanztests von zwei Werten a und a' über die folgende Formel:

$$\sigma = \frac{|a - a'|}{\sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta a')^2}}. \quad (16)$$

Die Güte eines Fits wird mit der χ^2 -Summe bewertet:

$$\chi^2 = \sum_i^N \left(\frac{\text{Funktionswert}_i - \text{Messwert}_i}{\text{Fehler}_i} \right)^2 \quad (17)$$

Auch verwendet wird $\chi_{red}^2 = \chi^2/f$, wobei der Freiheitsgrad f die Anzahl der Messwerte minus die Anzahl der Fitparameter ist. Der auf die Freiheitsgrade normierte Wert soll bei einem guten Fit ungefähr 1 sein.

3.1 Vergleich der reinen Frequenzen

Zunächst betrachten wir die reinen Frequenzen, beginnend bei der Eigenschwingung der beiden Pendel ohne Kopplung. Der hier vom Gaußfit der Fouriertransformation berechnete Wert ist

$$\omega_0 = (3,86 \pm 0,06) \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad (18)$$

wobei der Fehler aus der Halbwertsbreite des Fits kommt. Analog lesen wir aus den Fits der symmetrischen und antisymmetrischen Schwingungen die Frequenzen für jede Kopplung aus. Dabei bezeichnet ω_1 die symmetrischen und ω_2 die antisymmetrischen Schwingungen. Da die symmetrische Schwingung unabhängig von der Kopplung ist, sollte sie für alle drei Kopplungsgrade die gleiche Frequenz wie das ungekoppelte Pendel mit ω_0 aufweisen. Wir vergleichen also die Frequenzen ω_1 mit ω_0 über einen Signifikanztest und tragen alle berechneten Ergebnisse in Tabelle 4 ein.

Kopplung	ω_1 [rad/s]	ω_2 [rad/s]	$\sigma_{\omega_1, \omega_0}$
schwach	$3,88 \pm 0,05$	$3,98 \pm 0,06$	0,26
mittel	$3,88 \pm 0,05$	$4,17 \pm 0,06$	0,26
stark	$3,88 \pm 0,05$	$4,63 \pm 0,06$	0,26

Tabelle 4: Reine Frequenzen & Vergleich von ω_0 mit ω_1

Alle Signifikanztests weisen insignifikante Werte auf, somit stimmen die Frequenzen der ungekoppelten und der symmetrischen Schwingungen gut überein. Auch ist zu erkennen, dass die Frequenzen der asymmetrischen Schwingungen wie erwartet größer sind als die der symmetrischen Schwingungen und mit zunehmender Kopplungsstärke größer werden, was zu den theoretischen Erwartungen passt. Die Kopplung treibt wie erwartet die Schwingung an.

3.2 Vergleich der Schwebungsfrequenzen

Wir beginnen, indem wir aus den durch die Gaußfits der Fouriertransformen bestimmten Frequenzen der Schwingungen die Werte von den Schwebungsschwingungen ω_I und ω_{II} bei jeder Kopplungsstärke bestimmen. Dazu ordnen wir erneut die Frequenz der symmetrischen Schwingung ω_1 und die der antisymmetrischen ω_2 zu und nutzen die gegebenen Gleichungen für ω_I und ω_{II} . Analog nutzen wir ω_1 und ω_2 der Fouriertransformierten der Schwebungsmessung. Der Fehler der Schwebungsfrequenzen ist gegeben als:

$$\Delta\omega_{I/II} = \frac{1}{2}\sqrt{(\Delta\omega_1)^2 + (\Delta\omega_2)^2} \quad (19)$$

Die Ergebnisse sind in Tabelle 5 aufgetragen und über einen Signifikanztest werden die Werte aus den antisymmetrischen und symmetrischen Messungen mit denen der Schwebungsmessung verglichen. Der Index 'AS' bezeichnen die Werte der (anti-)symmetrischen Messungen und der Index 'B' die der Schwebungsmessung ('Beat').

Kopplung	Nr.	ω_{AS} [rad/s]	ω_B [rad/s]	σ
schwach	I	$3,93 \pm 0,04$	$3,921 \pm 0,013$	0,15
schwach	II	$0,05 \pm 0,04$	$0,052 \pm 0,013$	0,024
mittel	I	$4,02 \pm 0,04$	$4,017 \pm 0,021$	0,14
mittel	II	$0,15 \pm 0,04$	$0,146 \pm 0,021$	0,023
stark	I	$4,25 \pm 0,04$	$4,248 \pm 0,022$	0,09
stark	II	$0,38 \pm 0,04$	$0,375 \pm 0,022$	10^{-14}

Tabelle 5: Vergleich berechneter Schwebungsfrequenzen - AS & B

Wie zu erkennen ist, sind alle Werte deutlich unterhalb der 1σ -Grenze und passen somit gut zusammen. Zudem kann man erkennen, dass mit steigender Kopplungsstärke die Frequenzen ansteigen, was die Theorie bestätigt.

Wir wollen noch einen zweiten Vergleich machen, diesmal, indem wir manuell die Periodendauer der Schwebungswelle und den eingehüllten Wellen auslesen und somit die Frequenz berechnen:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad \Delta\omega = \frac{2\pi}{T^2}\Delta T. \quad (20)$$

Die Messungen der Periodendauern erfolgen über das Ablesen der Zeitpunkte zu Beginn t_i und Ende t_f einer Periode. Somit ergibt sich:

$$T = t_f - t_i, \quad \Delta T = \sqrt{(\Delta t_f)^2 + (\Delta t_i)^2}. \quad (21)$$

Die Ergebnisse der Ausmessung sind in Tabelle 6 verzeichnet. Es ist anzumerken, dass immer die Daten des ersten Pendels zur Ausmessung verwendet wurden.

Kopplung	Nr.	t_i [s]	t_f [s]	T [s]
schwach	I	53,76 ± 0,10	55,37 ± 0,10	121,8 ± 1,4
schwach	II	28,9 ± 1,0	150,7 ± 1,0	1,608 ± 0,014
mittel	I	38,59 ± 0,10	40,16 ± 0,10	42,9 ± 1,4
mittel	II	31,3 ± 1,0	74,2 ± 1,0	1,568 ± 0,014
stark	I	21,79 ± 0,10	23,28 ± 0,10	17,0 ± 1,4
stark	II	19,64 ± 1,0	36,6 ± 1,0	1,483 ± 0,014

Tabelle 6: Ausmessung der Periodendauern

Aus den Periodendauern werden die Frequenzen berechnet (Index 'T') und diese mit den oben bestimmten Werten aus der Schwebung (Index 'B') verglichen.

Kopplung	Nr.	ω_T [rad/s]	ω_B [rad/s]	σ
schwach	I	3,91 ± 0,03	3,921 ± 0,013	0,3
schwach	II	0,0516 ± 0,0006	0,052 ± 0,013	0,03
mittel	I	4,01 ± 0,04	4,017 ± 0,021	0,23
mittel	II	0,146 ± 0,005	0,146 ± 0,021	0,018
stark	I	4,24 ± 0,04	4,248 ± 0,022	0,26
stark	II	0,37 ± 0,03	0,0375 ± 0,022	0,12

Tabelle 7: Vergleich berechneter Schwebungsfrequenzen - T & B

Auch hier liegen alle Abweichungen weit unterhalb der 1σ -Grenze und sind somit wieder nicht signifikant.

3.3 Analyse der Kopplungsgrade

Wir verwenden die bestimmten Frequenzen ω_1 und ω_2 der Schwebung sowie der symmetrischen und antisymmetrischen Schwingungen um die Kopplungsgrade der verschiedenen Federpositionen nach Formel 14 zu berechnen. Für die schwache Kopplung ($D \gg D'$) nähern wir diese Gleichung mit

$$\kappa_{\sim} = \frac{D'}{D} = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\omega_1^2}. \quad (22)$$

Damit bekommen wir für die genäherte und exakte Kopplung die Fehler:

$$\begin{aligned} \Delta\kappa_{\sim} &= \kappa_{\sim} \sqrt{\left(\frac{\Delta\omega_2}{\omega_2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\omega_1}{\omega_1}\right)^2}, \\ \Delta\kappa &= \sqrt{\left(\frac{4\omega_1^2\omega_2}{(\omega_2^2 + \omega_1^2)^2}\Delta\omega_2\right)^2 + \left(\frac{4\omega_2^2\omega_1}{(\omega_2^2 + \omega_1^2)^2}\Delta\omega_1\right)^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Wir bestimmen also die Kopplungsgrade einmal aus den Werten der Schwebung und einmal aus denen der symmetrischen und antisymmetrischen Schwingungen und bilden den Mittelwert aus beiden für unser Ergebnis.

Kopplung	κ_{AS}	κ_B	κ_{mean}
schwach	$0,026 \pm 0,020$	$0,027 \pm 0,007$	$0,026 \pm 0,010$
mittel	$0,072 \pm 0,019$	$0,073 \pm 0,010$	$0,072 \pm 0,011$
stark	$0,175 \pm 0,018$	$0,175 \pm 0,010$	$0,175 \pm 0,010$

Tabelle 8: Kopplungsgrade aus gemessenen Frequenzen

Wie zu erwarten nehmen die Kopplungsgrade für stärkere Kopplungen zu.

Wir betrachten nun das Verhältnis zweier Kopplungsgrade und erkennen, dass dieses aufgrund der Proportionalität von D' zu l^2 gleich dem Verhältnis der Koppellängen ist:

$$\frac{\kappa_1}{\kappa_2} = \frac{l_1^2}{l_2^2} \quad (24)$$

Wir bestimmen also einmal das Verhältnis der eben berechneten Kopplungsgrade aus Tabelle 8 für die drei Möglichkeiten schwach/mittel, schwach/stark und mittel/stark sowie das Verhältnis der im Messprotokoll in Tabelle 1 aufgezeichneten Kopplungslängen und vergleichen diese mithilfe eines Signifikanztests. Die Fehler der Verhältnisse berechnen sich mit:

$$\Delta \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right) = \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \sqrt{\left(\frac{\Delta \kappa_1}{\kappa_1} \right)^2 + \left(\frac{\Delta \kappa_2}{\kappa_2} \right)^2} \quad (25)$$

$$\Delta \left(\frac{l_1^2}{l_2^2} \right) = \frac{l_1^2}{l_2^2} \sqrt{\left(\frac{2 \cdot \Delta l_1}{l_1} \right)^2 + \left(\frac{2 \cdot \Delta l_2}{l_2} \right)^2}$$

Verhältnis	$\frac{\kappa_1}{\kappa_2}$	$\frac{l_1^2}{l_2^2}$	σ
schw/med	$0,36 \pm 0,15$	$0,3685 \pm 0,0028$	0,03
schw/stark	$0,15 \pm 0,06$	$0,1455 \pm 0,0010$	0,07
med/stark	$0,41 \pm 0,07$	$0,3949 \pm 0,0018$	0,28

Tabelle 9: Vergleich der Verhältnisse

Auch hier liegen alle Signifikanztests weit unterhalb der 1σ -Grenze.

3.4 Beobachtungen am Schwingungskreis

In Abbildung 6 sind die verschiedenen Konfigurationen des Schwingkreises und in den Bildern 1-3 des Messprotokolls die zugehörigen Aufnahmen der Schwingungen zu sehen. Man kann zunächst gut erkennen, dass bei einer stärkeren Kopplung, ergo dem Fall, wo die Spulen näher zusammen stehen, die Schwingungsfrequenz analog zum mechanischen Fall größer wird. Ebenso ist gut die Phasenverschiebung von $\frac{\pi}{2}$ zwischen den Schwingungen der einzelnen Schwingkreise zu erkennen. Wie zu erwarten sieht man also ein analoges Muster zum mechanischen Fall, was die Theorie bestätigt.

4 Zusammenfassung der Endergebnisse

In diesem Versuch wurden verschiedene Schwingarten eines gekoppelten Pendels untersucht, indem die Auslenkung in Abhängigkeit der Zeit von einer symmetrischen und antisymmetrischen Schwingung sowie einer Schwebung bei verschiedenen Kopplungseinstellungen aufgenommen wurde. Eine Fouriertransform der aufgezeichneten Signale mit Gaußfit ermöglichte eine Berechnung der Eigenfrequenzen der Schwingungen.

Wir begannen, indem wir die reinen Schwingungsfrequenzen untersuchten. Hierbei wurde die bestimmte Frequenz der ungekoppelten Schwingung $\omega_0 = (3,86 \pm 0,06) \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ als Referenz genutzt und mit den Frequenzen der symmetrischen Schwingung verglichen, die sich alle zu $\omega_1 = (3,88 \pm 0,05) \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ergaben. Der Vergleich über Signifikanztests ergab somit eine insignifikante Abweichung für alle Werte von 0,26. Zudem wurden die symmetrischen mit den antisymmetrischen Frequenzen verglichen und man konnte die erwartete Beobachtung machen, dass die asymmetrischen Schwingungen höhere Frequenzen haben und diese mit stärkeren Kopplungen ansteigen, was auf die Abhängigkeit der asymmetrischen Schwingfrequenz vom Direktionsmoment der Kopplung zurückzuführen ist.

Darauffolgend haben wir aus den aufgezeichneten Frequenzen die Schwebungsfrequenzen errechnet, einmal mit den Ergebnissen der symmetrischen und antisymmetrischen Schwingungen sowie mit den Ergebnissen der Schwebung. Beim Vergleich der jeweiligen Resultate lagen alle innerhalb insignifikanter Abweichungen voneinander und es konnte die Beobachtung gemacht werden, dass eine größere Kopplungsstärke eine höhere Frequenz ergibt. Auch konnte klar der Unterschied zwischen den Schwebungsfrequenzen ω_{II} und den Frequenzen der einzelnen Pendel ω_I aufgezeigt werden, indem zu erkennen ist, dass die einhüllenden Wellen mit einer kleineren Frequenz die eingehüllten, schnell oszillierenden Wellen umschließen.

Anschließend errechneten wir die Schwebungsfrequenzen aus manuell abgelesenen Periodendauern. Auch hier wies der Vergleich mit den vorher berechneten Werten nur insignifikante Abweichungen auf und es konnten die selben Beobachtungen wie zuvor gemacht werden.

Weiterhin berechneten wir dann noch die Kopplungsgrade aus den gemessenen Frequenzen und verglichen die Verhältnisse der Kopplungsgrade mit den Verhältnissen der Kopplungslängen. Erneut resultierten keine signifikanten Abweichungen und es konnte die theoretisch erwartete Beobachtung gemacht werden, dass eine stärkere Kopplung einen größeren Kopplungsgrad annimmt. Außerdem kann hier beobachtet werden, dass die Kopplung von schwach zu mittel und von mittel zu stark nicht linear zunimmt, was auch den Erwartungen entspricht, da das Direktionsmoment der Kopplung von den quadrierten Koppellängen abhängt und somit bei einer höheren Koppellänge quadratisch zunimmt.

Abschließend werteten wir die Beobachtungen des elektrischen Schwingkreises aus und machten die erwarteten Beobachtungen. Analog zum mechanischen Fall wurden hier der Einfluss der Kopplungsstärke auf die Frequenz sowie die Phasenverschiebung in der Schwebung beobachtet.

5 Diskussion

Aufgrund der mehr als zufriedenstellenden Ergebnisse der Auswertung lässt sich schlussfolgern, dass alle Aspekte des Versuchs eindeutig und problemlos durchzuführen waren. Die Tatsache, dass der größte berechnete Sigma-Wert eines Signifikanztests bei 0,3 liegt und somit alle Werte deutlich innerhalb insignifikanter Abweichungen liegen ist eine eindeutige und aussagekräftige Bestätigung aller im Versuch untersuchten Theorien. Auch zeigt es, dass die Untersuchung eines gekoppelten Pendels mithilfe digitaler Software auf Basis des Hall-Effekts gut funktioniert und verlässliche Ergebnisse liefert. Überraschend waren vor allem die Ergebnisse der manuellen Ablesung der Periodendauern, hier hätten wir allein aufgrund des Fakts, dass man manuell etwas ablesen muss, durchaus größere Abweichungen erwartet, weshalb die guten Ergebnisse eine schöne Überraschung waren. Allgemein kann man sagen, dass die Verwendung digitaler Assistenz bei jedem Schritt von Durchführung bis Auswertung von großer Hilfe war. Eine Zurückerinnerung an das erste physikalische Anfängerpraktikum, wo ein Pendel manuell mit Stoppuhr und dem eigenhändigen Beobachten der Auslenkung analysiert wurde, zeigt wie sehr sich Messergebnisse verbessern, wenn zuverlässige digitale Geräte verwendet werden.

Allgemein lassen sich jedoch noch ein paar Anmerkungen zu theoretischen Fehlerquellen des Versuchs machen. Zunächst muss erwähnt werden, dass der Versuchsaufbau selbst die Pendel über die gemeinsame Aufhängung koppelt. Außerdem wird die Auslenkung per Hand im Allgemeinen wohl den größten Einfluss auf die Messwerte haben. Zum einen kann trotz bester Absicht nicht garantiert werden, dass bei den symmetrischen und antisymmetrischen Schwingungen die Pendel um den gleichen Winkel ausgelenkt werden. Dies ist auch bei uns daran zu sehen, dass bei den beiden aufgezeichneten Schwingungen leichte Schwebungen zu erkennen sind. Zudem kommt, dass die Pendel meist um einen recht großen Winkel ausgelenkt werden mussten, damit die Schwingungen über einen langer Zeitraum gemessen werden konnten, was die von uns gemachten Kleinwinkelnäherungen beim Aufstellen der Differentialgleichungen etwas ausreizt. Dennoch kann man trotz dieser Aspekten sagen, dass sie, obwohl sie wie die leichte Schwebung der symmetrischen und antisymmetrischen Schwingung teils sichtbar waren, bei uns nicht zu signifikanten Fehler geführt haben.

Somit lässt sich abschließend sagen, dass der Versuch über die gesamte Bandbreite realistische und miteinander sehr gut verträgliche Ergebnisse geliefert hat und somit eine lehrreiche Einführung in die Grundlagen gekoppelter Schwingung darstellt.

February 24, 2024

1 Auswertung Versuch 211

```
[1]: %matplotlib inline
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import curve_fit
from scipy.stats import chi2
from tabulate import tabulate
```

2 Vergleich der Schwebungsfrequenzen

```
[2]: #Arrays mit gemessenen Freq.:
symm = np.array([3.876, 3.878, 3.877])
dsymm = np.array([0.054, 0.054, 0.053])

asymm = np.array([3.978, 4.168, 4.626])
dasymm = np.array([0.056, 0.055, 0.057])

beat1 = np.array([3.869, 3.871, 3.873])
dbeat1 = np.array([0.019, 0.028, 0.028])

beat2 = np.array([3.973, 4.163, 4.622])
dbeat2 = np.array([0.019, 0.03, 0.033])
```

2.0.1 Berechnung der Frequenzen

```
[3]: omegaI_AS = 1/2 * (asymm + symm)
domegaI_AS = 1/2 * np.sqrt(dasymm**2 + dsymm**2)
print(omegaI_AS, domegaI_AS)

omegaII_AS = 1/2 * (asymm - symm)
domegaII_AS = 1/2 * np.sqrt(dasymm**2 + dsymm**2)
print(omegaII_AS, domegaII_AS)
```

```

omegaI_B = 1/2 * (beat2 + beat1)
domegaI_B = 1/2 * np.sqrt(dbeat1**2 + dbeat2**2)
print(omegaI_B, domegaI_B)

omegaII_B = 1/2 * (beat2 - beat1)
domegaII_B = 1/2 * np.sqrt(dbeat1**2 + dbeat2**2)
print(omegaII_B, domegaII_B)

#Signifikanztests:
Sign_AS_B_I = []
for i in range(0, len(omegaI_AS)):
    a = abs(omegaI_AS[i] - omegaI_B[i]) / (np.sqrt(domegaI_AS[i]**2 + domegaI_B[i]**2))
    Sign_AS_B_I.append(a)
print(Sign_AS_B_I)

Sign_AS_B_II = []
for i in range(0, len(omegaII_AS)):
    a = abs(omegaII_AS[i] - omegaII_B[i]) / (np.sqrt(domegaII_AS[i]**2 + domegaII_B[i]**2))
    Sign_AS_B_II.append(a)
print(Sign_AS_B_II)

```

```
[3.927  4.023  4.2515] [0.0388973  0.03853894  0.03891658]
[0.051   0.145   0.3745] [0.0388973  0.03853894  0.03891658]
[3.921  4.017  4.2475] [0.01343503  0.02051828  0.02163909]
[0.052   0.146   0.3745] [0.01343503  0.02051828  0.02163909]
[0.14580037798796466, 0.13742360023531322, 0.08983095403371955]
[0.024300062997986913, 0.022903933372557292, 9.973239349229049e-15]
```

2.0.2 Auslesung der Periodendauern

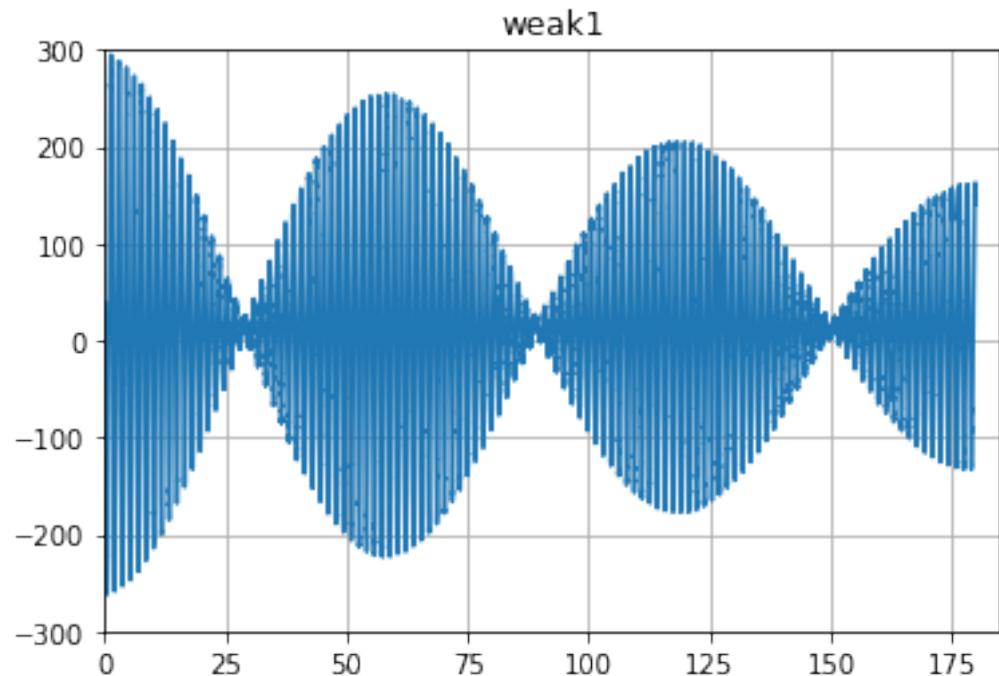
```
[4]: time1w, amp1w, time2w, amp2w = np.loadtxt('./data/beat - weak coupling.txt',
                                              delimiter = ",",
                                              unpack=True)

time1m, amp1m, time2m, amp2m = np.loadtxt('./data/beat - middle coupling.txt',
                                              delimiter = ",",
                                              unpack=True)

time1s, amp1s, time2s, amp2s = np.loadtxt('./data/beat - strong coupling.txt',
                                              delimiter = ",",
                                              unpack=True)
```

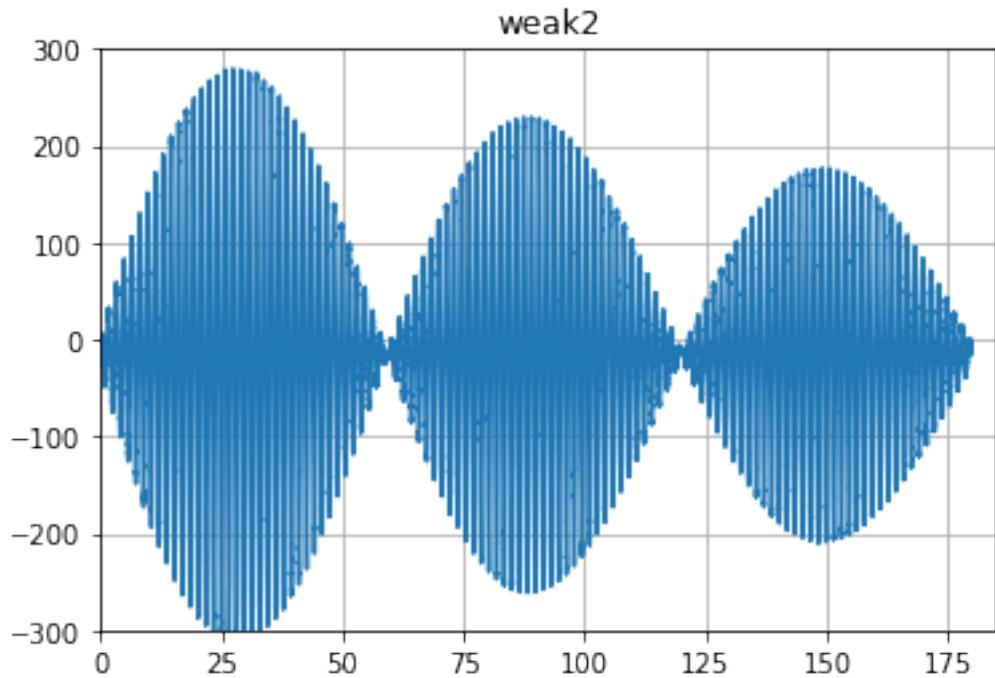
```
[5]: %%matplotlib ipympl  
plt.plot(time1w, amp1w)  
plt.title('weak1')  
plt.grid()  
plt.ylim((-300,300))  
plt.xlim((0,185))
```

[5]: (0, 185)



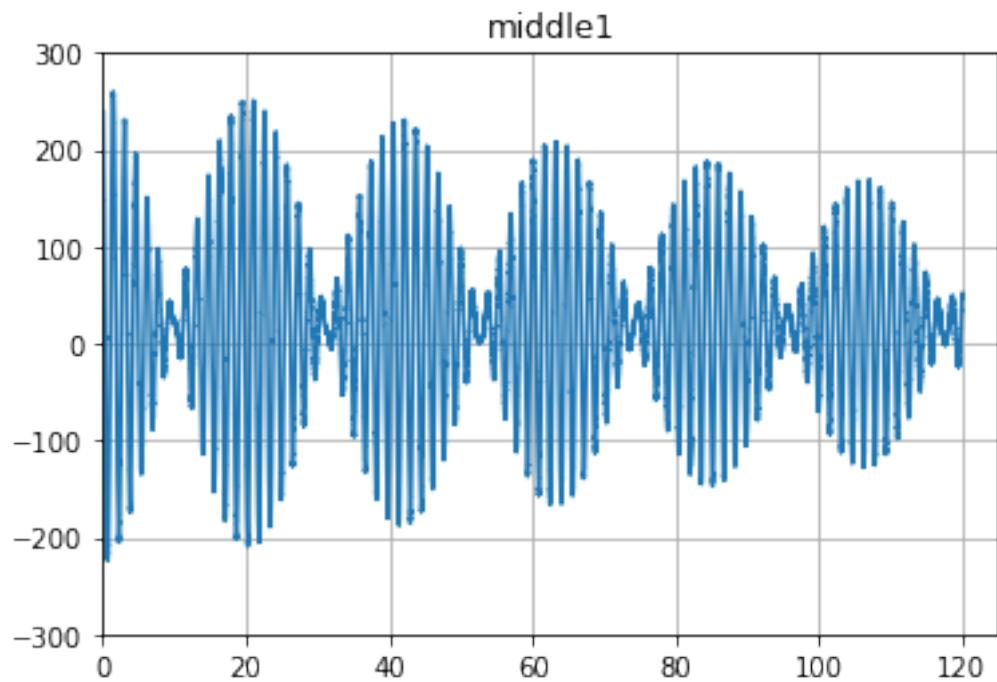
```
[6]: plt.plot(time2w, amp2w)  
plt.title('weak2')  
plt.grid()  
plt.ylim((-300,300))  
plt.xlim((0,185))
```

[6]: (0, 185)



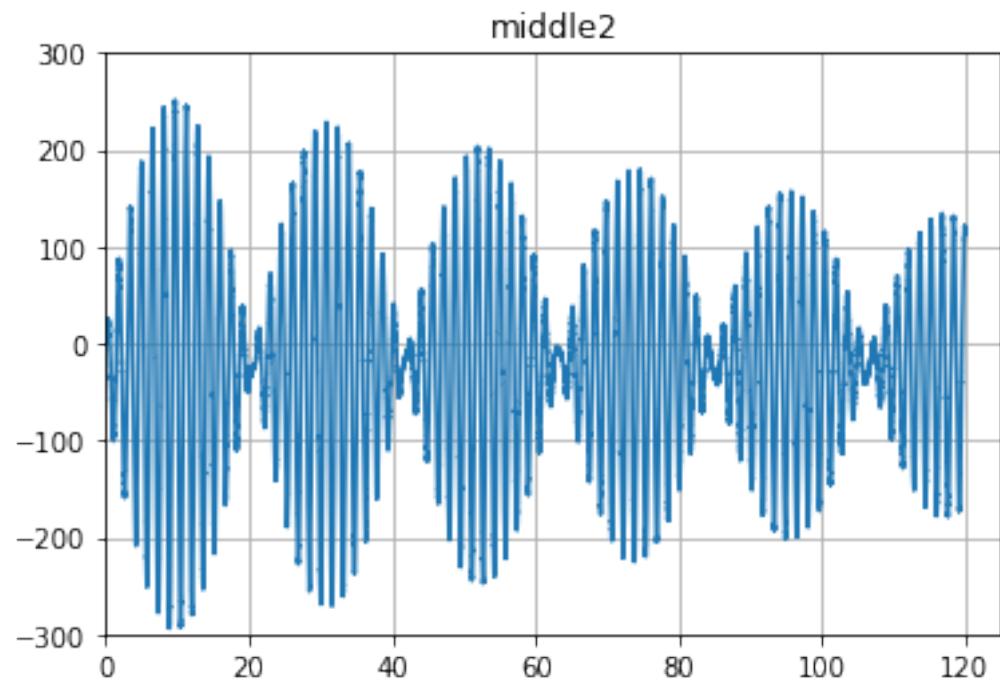
```
[7]: plt.plot(time1m, amp1m)
plt.title('middle1')
plt.grid()
plt.ylim((-300,300))
plt.xlim((0,125))
```

[7]: (0, 125)



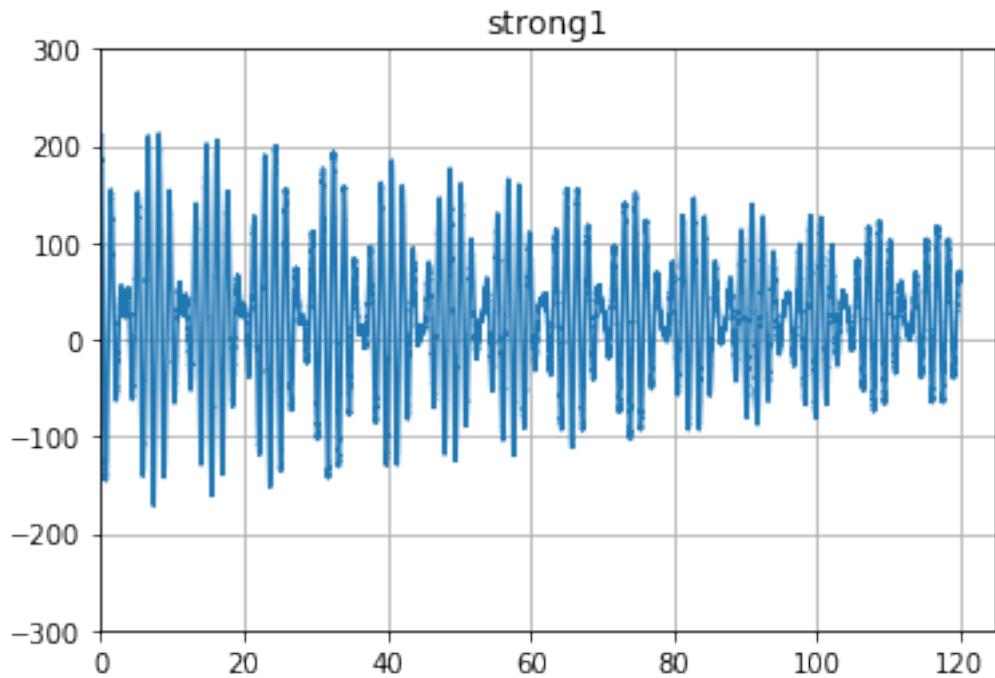
```
[8]: plt.plot(time2m, amp2m)
plt.title('middle2')
plt.grid()
plt.ylim((-300,300))
plt.xlim((0,125))
```

[8]: (0, 125)



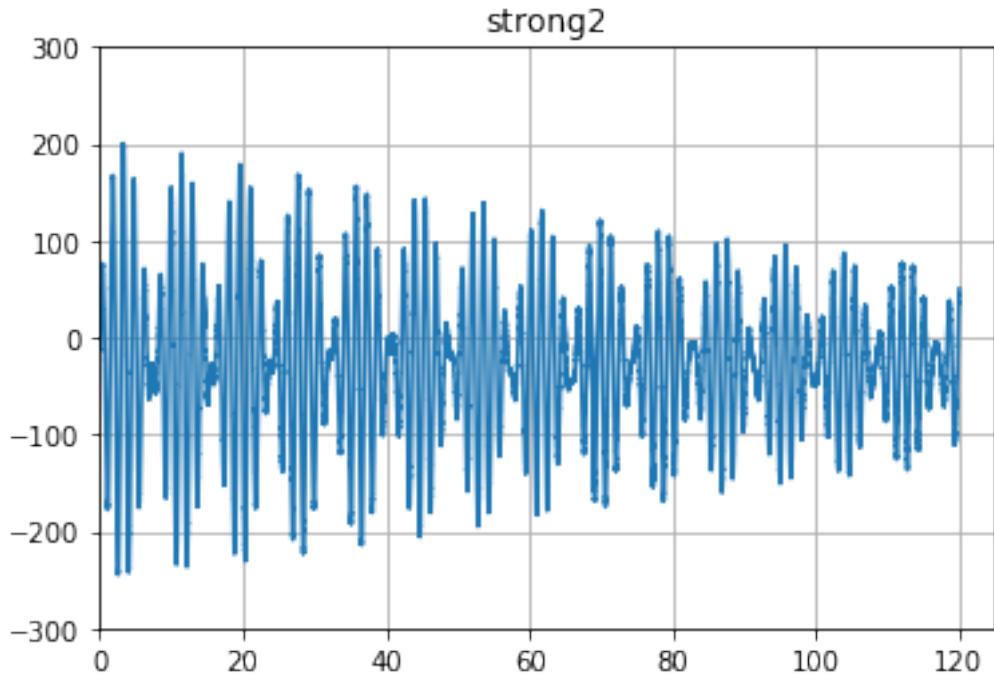
```
[9]: plt.plot(time1s, amp1s)
plt.title('strong1')
plt.grid()
plt.ylim((-300,300))
plt.xlim((0,125))
```

[9]: (0, 125)



```
[10]: plt.plot(time2s, amp2s)
plt.title('strong2')
plt.grid()
plt.ylim((-300,300))
plt.xlim((0,125))
```

[10]: (0, 125)



```
[11]: ti = np.array([28.908, 53.7586, 31.2505, 38.5897, 19.64, 21.792])
tf = np.array([150.7, 55.3664, 74.1725, 40.1576, 36.6155, 23.2754])

#Berechnung Periodendauer:
T = tf - ti
dT = np.array([np.sqrt(2), np.sqrt(2 * 0.01**2), np.sqrt(2), np.sqrt(2 * 0.
˓→01**2), np.sqrt(2), np.sqrt(2 * 0.01**2)])
print(T)
print(dT)
```

```
[121.792    1.6078   42.922     1.5679   16.9755   1.4834]
[1.41421356 0.01414214 1.41421356 0.01414214 1.41421356 0.01414214]
```

```
[12]: #Aufspaltung in Werte für omega1 und omega2
T1 = np.array([T[0], T[2], T[4]])
dT1 = np.array([dT[0], dT[2], dT[4]])
T2 = np.array([T[1], T[3], T[5]])
dT2 = np.array([dT[1], dT[3], dT[5]])
```

```
[13]: omegaII_T = 2 * np.pi /T1
domegaII_T = 2 * np.pi /(T1**2) * dT1
omegaI_T = 2 * np.pi /T2
domegaI_T = 2 * np.pi /(T2**2) * dT2
```

```

print(omegaI_T)
print(domegaI_T)
print(omegaII_T)
print(domegaII_T)

```

```

[3.90793961 4.00738906 4.2356649 ]
[0.03437406 0.03614583 0.04038112]
[0.05158947 0.14638613 0.37013256]
[0.00059904 0.0048232 0.03083541]

```

```

[14]: Sign_T_B_I = []
for i in range(0, len(omegaI_T)):
    a = abs(omegaI_T[i] - omegaI_B[i]) / (np.sqrt(domegaI_T[i]**2 + domegaI_B[i]**2))
    Sign_T_B_I.append(a)
print(Sign_T_B_I)

Sign_T_B_II = []
for i in range(0, len(omegaII_T)):
    a = abs(omegaII_T[i] - omegaII_B[i]) / (np.sqrt(domegaII_T[i]**2 + domegaII_B[i]**2))
    Sign_T_B_II.append(a)
print(Sign_T_B_II)

```

```

[0.3538795291211578, 0.2312353550977651, 0.25833175506387257]
[0.030526007294500855, 0.01831930726228793, 0.1159376402882706]

```

3 Berechnung der Kopplungsgrade

```

[15]: k_as = (asymm**2 - symm**2)/(asymm**2+symm**2)
dk_as = np.sqrt((4 * symm**2 * asymm * dasymm /(asymm**2 + symm**2)**2)**2 +
                 (4 * asymm**2 * symm * dsymm /(asymm**2 + symm**2)**2)**2)

k_b = (beat2**2 - beat1**2)/(beat2**2+beat1**2)
dk_b = np.sqrt((4 * beat1**2 * beat2 * dbeat2 /(beat2**2 + beat1**2)**2)**2 +
                 (4 * beat2**2 * beat1 * dbeat1 /(beat2**2 + beat1**2)**2)**2)

print(k_as, dk_as)
print(k_b, dk_b)

```

```

[0.02596965 0.07199198 0.17481667] [0.01979249 0.01908457 0.01784142]
[0.02651918 0.07259516 0.17497876] [0.00684985 0.01015656 0.00984973]

```

```

[16]: #Mittelwert
k_mean = 0.5 * (k_as + k_b)

```

```

dk_mean = 0.5 * np.sqrt(dk_as**2 + dk_b**2)

print(k_mean, dk_mean)

```

[0.02624441 0.07229357 0.17489772] [0.01047214 0.01080945 0.01018987]

3.0.1 Verhältnisse und Vergleich

```

[17]: #Verhältnisse der Kopplungsgrade:
div_k = np.array([k_mean[0]/k_mean[1], k_mean[0]/k_mean[2], k_mean[1]/
                  ↪k_mean[2]])
def errdivk(k1, k2, dk1, dk2):
    return k1/k2 * np.sqrt((dk1/k1)**2 + (dk2/k2)**2)
ddiv_k = np.array([errdivk(k_mean[0], k_mean[1], dk_mean[0], dk_mean[1]),
                  errdivk(k_mean[0], k_mean[2], dk_mean[0], dk_mean[2]),
                  errdivk(k_mean[1], k_mean[2], dk_mean[1], dk_mean[2])])

#Verhältnisse der Längen:
l = np.array([15.45, 25.45, 40.50])
dl= np.array([0.05, 0.05, 0.05])

div_l = np.array([l[0]**2/l[1]**2, l[0]**2/l[2]**2, l[1]**2/l[2]**2])
def errdivl(l1, l2, dl1, dl2):
    return l1**2/l2**2 * np.sqrt((2 * dl1/l1)**2 + (2 * dl2/l2)**2)
ddiv_l = np.array([errdivl(l[0], l[1], dl[0], dl[1]),
                  errdivl(l[0], l[2], dl[0], dl[2]),
                  errdivl(l[1], l[2], dl[1], dl[2])])

print(div_k, ddiv_k)
print(div_l, ddiv_l)

```

[0.36302554 0.15005578 0.41334774] [0.1546917 0.06051069 0.06633058]
[0.36853725 0.14552812 0.39488035] [0.00279049 0.00100814 0.00183251]

```

[18]: #Signifikanztest:
Sign_div = []
for i in range(0, len(div_k)):
    a = abs(div_k[i] - div_l[i]) / (np.sqrt(ddiv_k[i]**2 + ddiv_l[i]**2))
    Sign_div.append(a)
print(Sign_div)

```

[0.03562453328160898, 0.07481380208048984, 0.27830811046864223]