

Versuch 241: Wechselstromeigenschaften von RLC-Gliedern

Matthias Kuntz

06. & 13.05.2024

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	3
1.1 Physikalische Grundlagen	3
1.1.1 Einfaches RC-Glied bei Gleichspannung	3
1.1.2 Impedanz	4
1.1.3 RC-GLieder im Wechselstromkreis	4
1.1.4 RC-Glied als Integrator und Differentiator	5
1.1.5 Elektrischer Schwingkreis (RLC-GLied)	5
1.1.6 Frequenzabhängigkeit des Schwingkreises und Resonanz .	6
1.1.7 Resonanzkurven im Parallelschwingkreis	7
1.2 Versuchsaufbau	8
2 Versuchsprotokoll mit Messdaten	9
3 Auswertung	22
3.1 Zeitkonstanten der RC-Kombinationen	23
3.2 RC-Glied als Integrator und Differentiator	24

3.3	Grenzfrequenzen des Hoch- und Tiefpassfilters	25
3.3.1	Bestimmung aus den Frequenzgängen	25
3.3.2	Bestimmung aus dem Phasengang	28
3.3.3	Vergleich mit Theoretischen Werten	29
3.4	Induktivität und Innenwiderstand	30
3.5	Auswertung der Frequenzgänge	33
3.5.1	Erneute Berechnung der Induktivität L1	33
3.5.2	Bestimmung des Logarithmischen Dekrements	34
3.5.3	Gesamtwiderstand mit dem Logarithmischen Dekrement .	36
3.5.4	Vergleich der Resonanzfrequenzen mit den theoretischen Werten	36
3.6	Qualitative Analyse der verschiedenen Filterschaltungen	38
4	Zusammenfassung der Endergebnisse	39
5	Diskussion	41
6	Python-Code	42

1 Einleitung

In diesem Versuch soll es um die Grundlagen von einfachen Schaltkreisen bestehend aus ohmschen Widerständen, Kapazitäten und Spulen gehen. Dabei betrachten wir sowohl Gleich- als auch Wechselspannung sowie in einem Versuchsteil sogar komplexere Spannungssignale. Es werden verschiedene Messungen physikalischer Größen wie der Zeitkonstante, Resonanzfrequenz oder Dämpfungskonstante durchgeführt und diese mit den theoretisch zu erwartenden Werten verglichen. Zudem werden Aufnahmen verschiedener Frequenzgänge qualitativ und quantitativ analysiert und ausgewertet, was im Endeffekt zu einem besseren Verständnis der zugrundeliegenden Theorie sowie den Funktionsweisen verschiedener Schaltungen führen soll.

1.1 Physikalische Grundlagen

1.1.1 Einfaches RC-Glied bei Gleichspannung

Betrachtet man einen einfachen Schaltkreis bestehend aus einer Gleichspannungsquelle U_E , einem ohmschen Widerstand R sowie einer Kapazität C in Reihe geschaltet, so kann man den zeitlichen Verlauf der Spannung über dem Kondensator folgendermaßen betrachten: Beginnt Strom zu fließen, so lädt sich der Kondensator langsam mit der Spannung U_C auf bis diese die Eingangsspannung erreicht. Mathematisch wird der Ladevorgang über die Kirchoff'sche Maschenregel folgendermaßen beschrieben:

$$U_E = U_C + U_R = U_C + IR = U_C + \dot{Q}R = U_C + RC \dot{U}_C. \quad (1)$$

Dies ist eine inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung. Definiert man die Zeitkonstante $\tau = RC$ kann man unter der Annahme, dass der Ladevorgang bei $t = 0$ beginnt, die folgende elementare Lösung finden:

$$U_C(t) = U_E \cdot (1 - e^{-t/\tau}). \quad (2)$$

Hierbei bestimmt die Zeitkonstante das zeitliche Verhalten und sie kann durch Messung der Halbwertszeit $T_{1/2}$ der Kondensatorspannung berechnet werden:

$$\begin{aligned} \frac{U_E}{2} &= U_E \cdot (1 - e^{-T_{1/2}/\tau}) \\ \Rightarrow \tau &= \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \end{aligned} \quad (3)$$

Wird keine Gleichspannung sondern beispielsweise ein Rechtecksignal an den Schaltkreis angeschlossen, so kann man ein durch die Zeitkonstante bestimmtes Wechselen von Lade- und Entladevorgängen beobachten.

1.1.2 Impedanz

Es sollen kurz die Wechselstromwiderstände Z (Impedanzen) der drei verwendeten Bauteile ohmscher Widerstand R , Kapazität C und Spule L genannt werden. Diese ergeben sich aus dem Verhältnis der Spannung $U(t)$ zum Stromfluss $I(t)$ über dem jeweiligen Bauteil folgendermaßen:

$$\begin{aligned} Z_R &= R \\ Z_C &= -\frac{i}{\omega C} \\ Z_L &= i\omega L \end{aligned} \tag{4}$$

1.1.3 RC-GLieder im Wechselstromkreis

Betreibt man die im ersten Kapitel erläuterte Schaltung mit einer Wechselspannung und beobachtet wieder den Spannungsverlauf über dem Kondensator, so muss nun dessen Impedanz Z_C berücksichtigt werden:

$$\begin{aligned} U_C(t) &= \frac{Z_C}{R+Z_C} U_E(t) = \frac{-i/(\omega C)}{R-i/(\omega C)} U_0 e^{i\omega t} \\ \Rightarrow |U_C| &= \frac{|U_E|}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \end{aligned} \tag{5}$$

Der Betrag der Spannung verhält sich hierbei wie ein Tiefpassfilter, da er für hohe Frequenzen ω abnimmt und für $\omega \rightarrow 0$ gegen $|U_E|$ geht. Zusätzlich beobachtet man eine frequenzabhängige Phasenverschiebung zwischen Eingangs- und Ausgangssignal. Vertauscht man Kondensator und Widerstand und misst die Spannung über dem Widerstand U_R , so beobachtet man ein Hochpassverhalten:

$$|U_R| = \frac{|U_E|}{\sqrt{1+1/(\omega RC)^2}} \tag{6}$$

Eine wichtige Größe ist hier die Grenzfrequenz ω_g , die angibt, bei welcher Frequenz das Eingangssignal auf das $1/\sqrt{2}$ -fache angestiegen bzw. abgefallen ist:

$$\omega_g = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau} \quad (7)$$

1.1.4 RC-Glied als Integrator und Differentiator

Wählt man die Komponenten eines RC-Glieds so, dass $\tau \gg T$ gilt, wobei T die Periodendauer des Signals ist, so entspricht das Ausgangssignal U_A dem Integral des Eingangssignals U_E . Entsprechen gilt umgekehrt bei $\tau \ll T$, dass das Ausgangssignal der Ableitung des Eingangssignals entspricht. Im ersten Fall spricht man von einem Integrator, im Zweiten von einem Differentiator. Da in diesem Versuch nur qualitative Beobachtungen zu diesem Aspekt gemacht werden ist die Herleitung hier nicht weiter interessant und wird dem Umfang zuwillen ausgelassen.

1.1.5 Elektrischer Schwingkreis (RLC-GLied)

Eine Schaltung aus Kondensator und Spule wird Schwingkreis genannt, da sich die beiden Bauteile aufgrund ihrer physikalischen Bauweise immer wieder gegenseitig entladen und beladen, wodurch eine sinusförmige Oszillation der Spannung über diesen beobachtbar ist. Bei einer Reihenschaltung von ohmschem Widerstand R , Induktivität L und Kapazität C ergibt sich die folgende mathematische Beschreibung über die Maschenregel:

$$\begin{aligned} U_R + U_C - U_L &= 0 \\ \Rightarrow L \frac{d^2}{dt^2} I + R \frac{d}{dt} I + \frac{1}{C} I &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Wenn der ohmsche Widerstand verschwindet, $R = 0$, so ist der Schwingkreis ungedämpft und oszilliert sinusförmig mit der Eigenfrequenz

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (9)$$

Ist jedoch ein Widerstand $R > 0$ vorhanden so erhalten wir einen gedämpften Schwingkreis, dessen allgemeine Beschreibung recht komplex ist, weshalb wir uns hier auf den sogenannten Schwingfall mit schwacher Dämpfung beschränken, bei dem die Amplitude mit der Zeit exponentiell abnimmt. In diesem Fall ergibt sich für die Frequenz des gedämpften Schwingkreises

$$\omega_f = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}, \quad (10)$$

was stets kleiner als die Frequenz ω_0 des freien Oszillators ist.

Wie bereits erwähnt sinkt die Amplitude proportional zu $e^{-\delta t}$, wobei die Dämpfungskonstante δ die Abnahme bestimmt. Sie ist zusätzlich der Kehrwert zur Relaxionszeit bzw. Abklingzeit τ_r :

$$\delta = \frac{R}{2L} = \frac{1}{\tau_r}. \quad (11)$$

Die Abnahme der Amplituden zweier benachbarter Peaks A_n und A_{n+1} kann auch mit dem sogenannten logarithmischen Dekrement Λ und darüber mit der Dämpfungskonstante in Verbindung gebracht werden:

$$\Lambda = \ln \left(\frac{A_n}{A_{n+1}} \right) = \delta T. \quad (12)$$

1.1.6 Frequenzabhängigkeit des Schwingkreises und Resonanz

Wird der Schwingkreis von außen mit einer Frequenz angeregt, so übernimmt dieser, wie im klassisch mechanischen Fall, nach einiger Zeit die anregende Frequenz. Aus der Gesamtimpedanz $Z_g = Z_R + Z_C + Z_L$ lässt sich der Gesamtstrom im Schwingkreis mithilfe des Ohmschen Gesetzes $I = U_E/Z_g$ berechnen:

$$I(t) = \frac{1}{R + i(\omega L - 1/(\omega C))} U_0 e^{i(\omega t - \phi)} \\ \Rightarrow |I(\omega)| = \frac{|U_0|}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}} \quad (13)$$

Diese Amplitude wird maximal bei der Resonanzfrequenz

$$\omega_R = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \quad (14)$$

bei der der Strom im Schwingkreis einfach $I(\omega_R) = U_0/R$ entspricht und Strom und Spannung in Phase sind. Man kann nun die Amplitude der Spannung über die einzelnen Bauteile gemäß $|U| = |Z|/|I|$ berechnen. Hierbei ergibt sich:

$$\begin{aligned}
|U_R| &= \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}} U_0, \\
|U_C| &= \frac{1/(\omega C)}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}} U_0, \\
|U_L| &= \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}} U_0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Es ergibt sich ein sogenanntes Bandpassverhalten, bei dem die Amplituden bei einer Resonanzfrequenz maximal werden und etwa der Eingangsamplitude entsprechen, dafür aber bei anderen Frequenzen gedämpft werden. Aufgrund der leicht unterschiedlichen Formen ergeben sich auch leicht unterschiedliche Resonanzfrequenzen. Die des ohmschen Widerstands entspricht noch dem vorherigen Fall, jedoch unterscheiden sich die anderen leicht:

$$\begin{aligned}
\omega_C &= \sqrt{\omega_R^2 - 2\delta^2}, \\
\omega_L &= \sqrt{\omega_R^2 + 2\delta^2}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Bei diesen beiden Bauteilen tritt auch das Phänomen der Resonanzüberhöhung auf, bei dem die Amplitude der Spannung bei der Resonanzfrequenz deutlich höher ist als die Eingangsamplitude.

1.1.7 Resonanzkurven im Parallelschwingkreis

Betrachtet man nun den Fall, in dem ein Schwingkreis aus einer Parallelschaltung von Kapazität und Widerstand aufgebaut ist, welche danach in Reihe mit einem ohmschen Widerstand verbunden ist über welchen die Spannung gemessen wird, so ergibt sich das praktisch umgekehrte Bild, bei dem im Resonanzfall die Spannung über dem ohmschen Widerstand verschwindet und der LC-Kreis eine gegen unendlich gehende Impedanz aufweist. Dieses Verhalten wird auch als Isolator bezeichnet. Die Resonanzfrequenz ergibt sich hier erneut als

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{17}$$

1.2 Versuchsaufbau

Herzstück des Aufbaus ist ein Steckbrett, auf welches verschiedenste Widerstände, Kapazitäten, Spulen und andere Bauteile gesteckt werden können. Betrieben und ausgemessen wird das ganze von einem digitalen Frequenzgenerator und Speicheroszilloskop, welches mit der PC-Software 'CASSY Lab 2' betrieben wird. Ein zusätzlicher Impedanzwandler dient dem Ausgleich des Innenwiderstands des Funktionsgenerators, sodass dieser über die vielen verschiedenen Konfigurationen des Versuchs ein konstantes Verhalten aufzeigt. Die Software dient auch gleichzeitig zum Abspeichern der Messdaten sowie von Bildern der Messungen, welche nach dem Messprotokoll zu sehen sind.

Während dem Versuch werden also immer auf dem Steckbrett die richtigen Schaltkreise aufgebaut, diese über den Funktionsgenerator mit einer Spannungsquelle versehen und die Spannungen über einzelne Bauteile mit dem Oszilloskop vermessen.

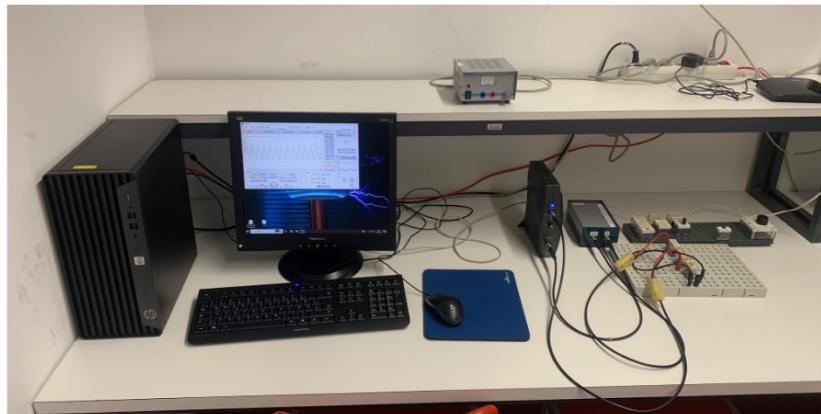


Abbildung 1: Versuchsaufbau [Quelle: PAP2.2 Skript, S.2, Stand: 09.06.2024]

2 Versuchsprotokoll mit Messdaten

Versuch 241: RLC-Glieder

Tutor: Lukas Fabrizio Klassen

Nicole Schreit

Matthias Kunz

6. 5.24 & 13. 5.24

Benutzte Instrumente:

- PC-gesteuerter Funktionsgenerator & Speicheroszilloskop
- Widerstände, Spulen, Kondensatoren, Diode
- Steckbrett zum Aufbau von Schaltungen
- Impedanzwandler mit Netzteil
- Niedelfrequenz-Verstärker mit Netzteil
- Langdrahtantenne, Erdleitung
- 2 Kopfhörer mit unterschiedl. Impedanz
- Computer

Durchführung

Aufgabe 1:

Wir stellen am Frequenzgenerator die Signalform Rechtecke und die Amplitude auf 1 V_{pp} ein.

Wir bestimmen für folgende RC-Kombinationen die Halbwertzeit T_{1/2}:



RC-Kombinationen	T _{1/2}
C = 470 nF R = 1 kΩ	(0,33 ± 0,03) ms
C = 4,7 nF R = 10 kΩ	(32,9 ± 0,5) μs
C = 47 nF R = 1 kΩ	(34,4 ± 0,5) μs

Tabelle 1: Bestimmung Halbwertzeiten

Die Ziffern in Tabelle 1 sind anhand von Ablesefehlern abgeschätzt.

Wir notieren den Wert der eingestellten Frequenz f:

$$f = 100,00 \text{ Hz}$$

Auch speichern wir die Signalform für die letzte RC-Kombination ab.

Wir vertauschen nun den Kondensator mit dem

KW - Normierung ab.

Wir vertauschen nun den Kondensator mit dem Widerstand ($C = 47\text{nF}$, $R = 1\text{k}\Omega$), und speichern den Signalverlauf erneut ab. Die Halbwertszeit lautet hier:

$$T_{1/2} = (37,6 \pm 0,5) \mu\text{s}$$

Aufgabe 2:

Wir stellen am Frequenzgenerator ein Rechtecksignal von 10kHz ein und bauen einen Integrator.

Wir beobachten, wie durch Erhöhung des Widerstands die Ausgangsspannung dem Integral der Eingangsspannung entspricht.

Wir schauen uns die Integration von anderen Signalen an:

- Beim Gaußischen Signal entsteht wieder ein gaußförmiges Ausgangssignal.
- Beim Säge-Signal bildet sich eine halbkreisförmige Integralform.

Der Kondensator wird nun mit dem Widerstand vertauscht.

Wir stellen am Funktionsgenerator ein Dreiecksignal ein.

Wir lassen ein Rechtecksignal entstehen und untersuchen die Differenzierung dieses und eines gaußförmigen Signals. Die Bilder werden abgespeichert.

Aufgabe 3

Wir nehmen den Frequenzgang eines Hochpass- ($C = 47\text{nF}$, $R = 1\text{k}\Omega$) und Tiefpassfilter ($C = 47\text{nF}$, $R = 1\text{k}\Omega$) mit dem Circuit Analyzer auf.

Hierbei betrachten wir Cutofffrequenz f_g und speichern den Frequenzgang ab.

$$f_{g,\text{Hoch}} = (3,25 \pm 0,10)\text{kHz}$$

$$f_{g,\text{Tief}} = (2,99 \pm 0,10)\text{kHz}$$

Nun betrachten wir den Phasengang des RC-Gliedes:

$f [\text{kHz}]$ | st

1	$(0,22 \pm 0,03)\text{ms}$
2	$(0,08 \pm 0,03)\text{ms}$
3	$(56,4 \pm 0,5)\mu\text{s}$
4	$(28,6 \pm 0,5)\mu\text{s}$
5	$(17,2 \pm 0,5)\mu\text{s}$
6	$(11,9 \pm 0,5)\mu\text{s}$

5	$(11,2 \pm 0, > 1\mu s)$
6	$(11,9 \pm 0, 5\mu s)$
7	$(10,4 \pm 0, 5\mu s)$
8	$(7,7 \pm 0, 5\mu s)$
9	$(5,8 \pm 0, 5\mu s)$
10	$(4,9 \pm 0, 5\mu s)$

Tabelle 2: Phasenversetzung

Aufgabe 4

Wir bauen aus $C = 47\text{nF}$, $R = 1k\Omega$, L_1 einen Serienschwingkreis auf.
Wir messen für $R = 1k\Omega$, 220Ω und 47Ω den Frequenzgang und stellen die Kurven in einem Diagramm dar.

$R(\Omega)$	$f_R(\text{kHz})$	$\Delta f_{(kHz)}$	$U_{eff.~AVG}$	$U_{eff.~ein} [V]$
1000	3,85	4,91	0,64	0,65
220	3,77	1,49	0,43	0,60
47	3,80	0,79	0,18	0,51

Tabelle 3: Serienschwingkreis

Wir speichern das Diagramm ab.

Aufgabe 5

Wir messen mit dem Circuit Analyzer den Frequenzgang eines Serienschwingkreises mit $C = 47\text{nF}$, $R = 220\Omega$, L_1 und Amplitude des Signalgenerators $0,9\text{Vpp}$.

Wir erstellen wieder ein Diagramm und bestimmen die jeweiligen Resonanzfrequenzen:

$$f_R = 3,80 \text{ kHz} \quad (\text{über Widerstand})$$

$$f_C = 3,61 \text{ kHz} \quad (\text{über Kondensator})$$

$$f_L = 3,94 \text{ kHz} \quad (\text{über Spule})$$

mit $\Delta f = 0,03\text{kHz}$ Ablesefehler

Aufgabe 6

Wir bauen einen Serienschwingkreis mit $C = 47\text{nF}$, $R = 47\Omega$ und L_1 .

Wir stellen ein Rechtecksignal aus und notieren den eingesetzten

Wir bauen einen Schwingkreis mit $C = 47 \text{ nF}$, $k = 4752 \text{ N/m}$.
Wir stellen ein Rechtecksignal aus und notieren den eingestellten Frequenzwert $f = 175 \text{ Hz}$.

Weiterhin messen wir die Amplituden A_i von 5 benachbarten Schwingungen und bestimmen daraus die Schwingzeit T :

Nr.	$A_i [\text{V}]$
1	1,59
2	0,72
3	0,25
4	-0,03
5	-0,19

Wir schätzen als Messfehler der Amplitude den Fehler:

$$\Delta A_i = 0,03 \text{ V}$$

Tabelle 4: Amplitude

$$T = \frac{1,35 \text{ ms}}{5} = 0,27 \text{ ms}, \Delta T = 0,03 \text{ ms} \text{ (abgemessen aus der Zeit für 5 Perioden)}$$

Wir beobachten qualitativ den Schwingungsgang in Abhängigkeit von der Dämpfung.

Wir sehen, wie erwartet, dass ab einem gewissen Widerstandswert keine Schwingung zu erkennen ist.

Aufgabe 7

Wir bauen einen Parallelschwingkreis ($C = 47 \text{ nF}$, $k = 1 \text{ kN/m}$, L_1) und messen den Frequenzgang zwischen 100 kHz und 100 kHz (je 10%).

Wir speichern das Diagramm wieder ab und messen die Resonanzfrequenz:

$$f_{\text{Res}} = (3,68 \pm 0,10) \text{ kHz}$$

Aufgabe 8

Unter verschiedenen Einstellungen am Signalegenerator schauen wir uns das Signal am Oszilloskop an.

Mit dem Spectrum Analyzer messen wir Frequenz f_s und Amplitude A_s der drei stärksten Signalelemente und speichern das Spektrum ab.

Nr	$f_s [\text{kHz}]$	$A_s [\text{V}]$
1	0,106	-2,75
2	3,629	-8,38
3	8,010	-8,69

Wir schätzen als Messfehler ab:
 $\Delta f_s = 0,010 \text{ kHz}$, $\Delta A_s = 0,25 \text{ V}$

Tabelle 5: f_s und A_s der stärksten Signalelemente

3 | 8,010 | - 8,69

Tabelle 5: f_3 und A_3 der stärksten Signale.

Wir speichern für verschiedene Filterschaltungen das Oszilloskopbild und Frequenzspektrum ab.

Wir messen bei verschiedenen Filtern jeweils die folgenden drei Amplituden:

Filter	$A_i [CV]$
Hochpass	-31,94
	-10,69
	-5,12
RC-Tiefpass	-2,56
	-11,94
	-17,125
LC-Tiefpass	-2,56
	-7,44
	-21,62
Bandpass $-R = 1\text{ k}\Omega$	-31,62
	-8,19
	-14,12
$-R = 47\text{ }\Omega$	-58,04
	-18,98
	-40,23

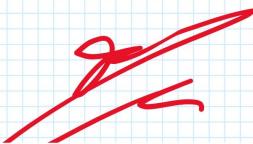
Tabelle 6: verschiedene Filter

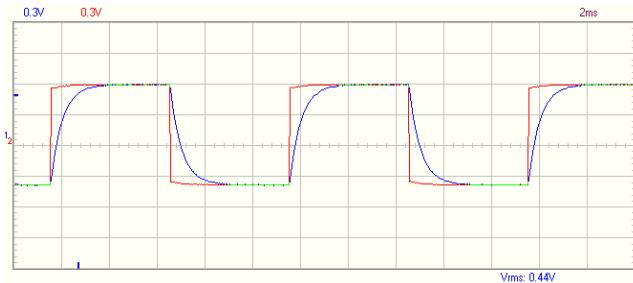
Als Messfehler nehmen wir wieder $\Delta A_3 = 0,25\text{ V}$.

Aufgabe 3

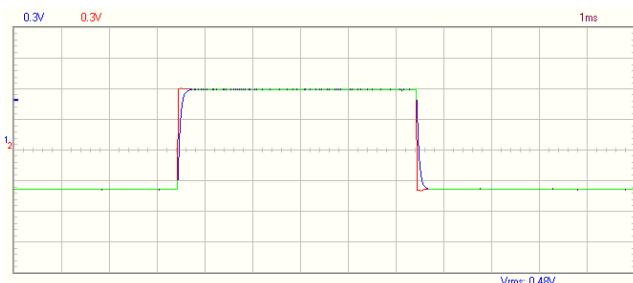
Zu Pkt. + betrachten wir einen AM-Empfänger.

Wir bauen einen Parallelkreis mit L_2 und dem Dreikondensator (500 pF) und schließen ihn an die Antenne an. Mit über einer Diode angeschlossenen Kopfhörern versuchen wir verschiedene Signale abzuhören.





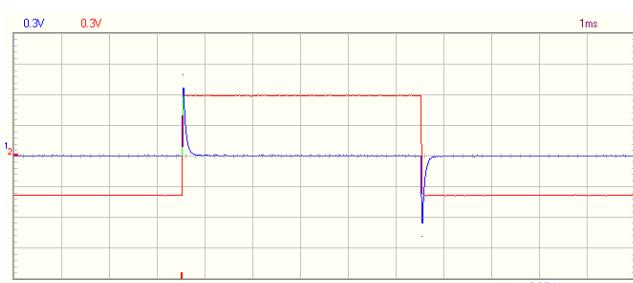
(a) $R=1\text{k}\Omega$; $C=470\text{nF}$



(b) $R=10\text{k}\Omega$; $C=4.7\text{nF}$

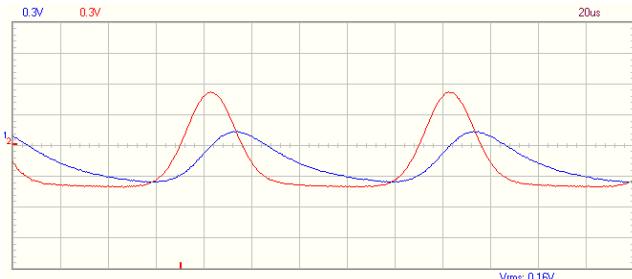


(c) $R=1\text{k}\Omega$; $C=47\text{nF}$

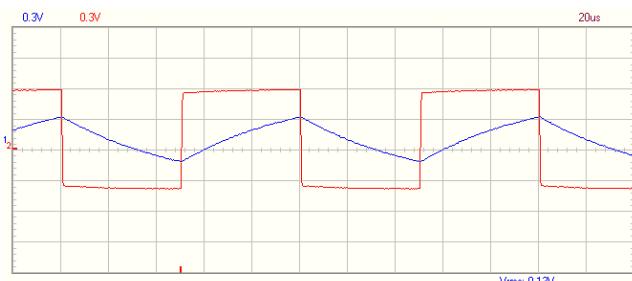


(d) $R=1\text{k}\Omega$; $C=47\text{nF}$ - C und R getauscht

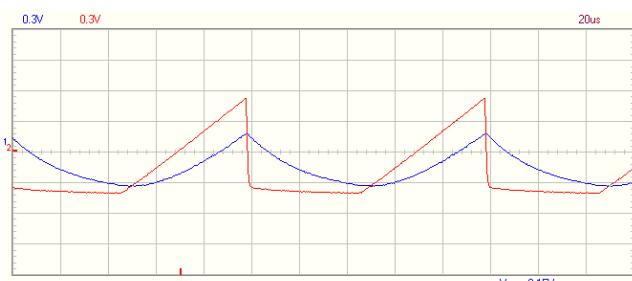
Abbildung 2: A1 - RC-Kombination - Rechtecksignal



(a) Gaußsignal

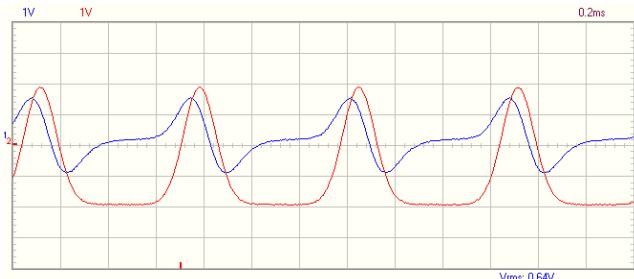


(b) Rechtecksignal

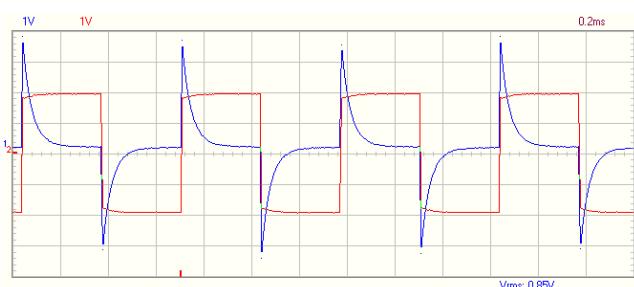


(c) Sägesignal

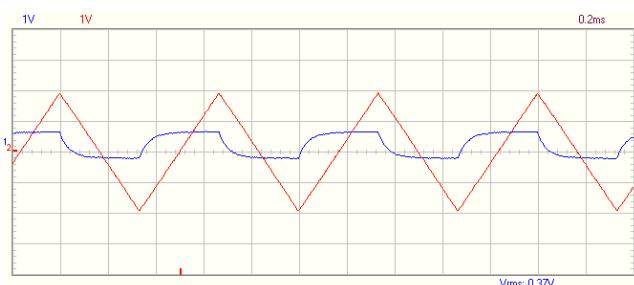
Abbildung 3: A2 - Integrator



(a) Gaußsignal

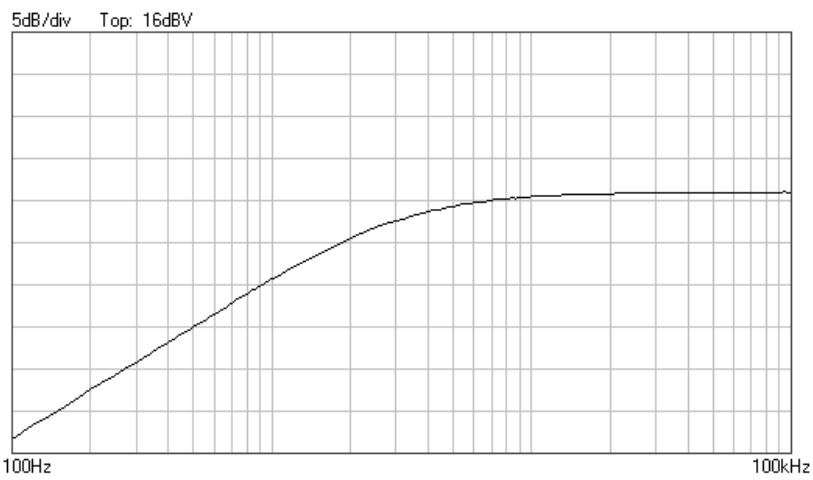


(b) Rechtecksignal



(c) Dreiecksignal

Abbildung 4: A2 - Differentiator



(a) Hochpass



(b) Tiefpass

Abbildung 5: A3 - Frequenzgänge Hoch- und Tiefpass

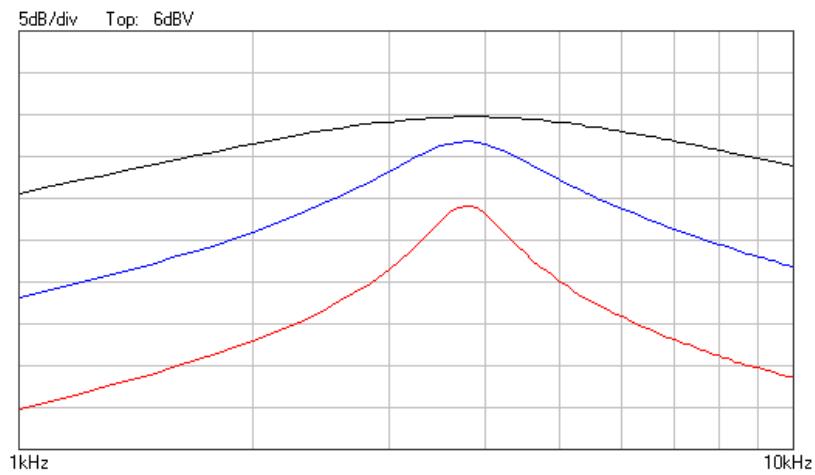


Abbildung 6: A4 - Frequenzgang Serienschwingkreis

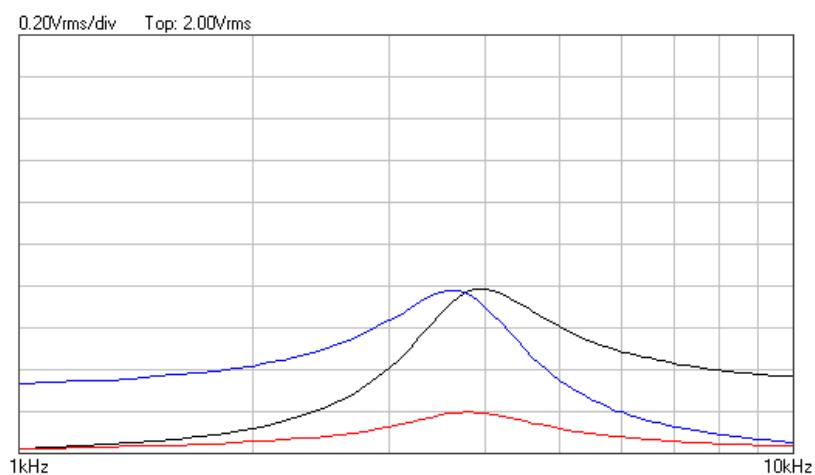


Abbildung 7: A5 - Frequenzgang Resonanzüberhöhung

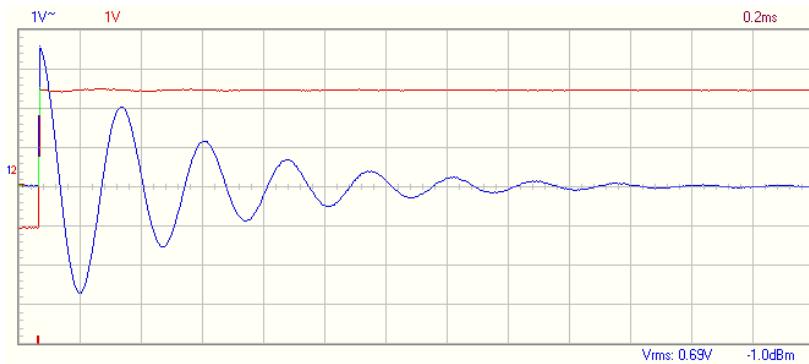


Abbildung 8: A6 - Gedämpfter Schwingkreis

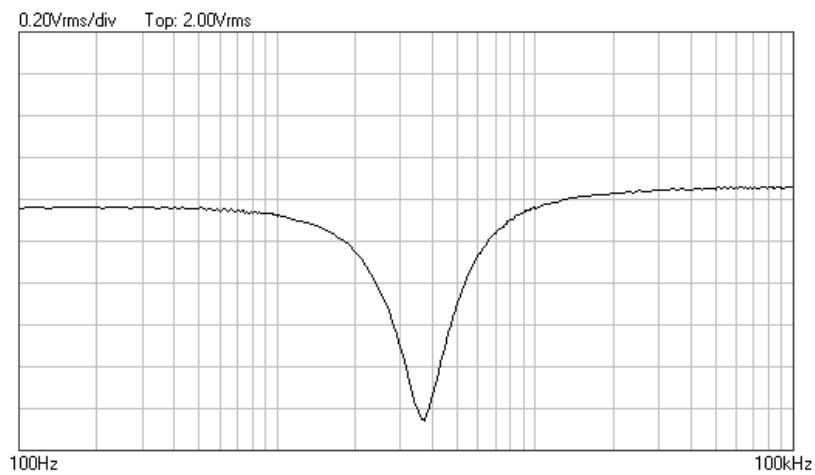


Abbildung 9: A7 - Frequenzgang Bandsperre

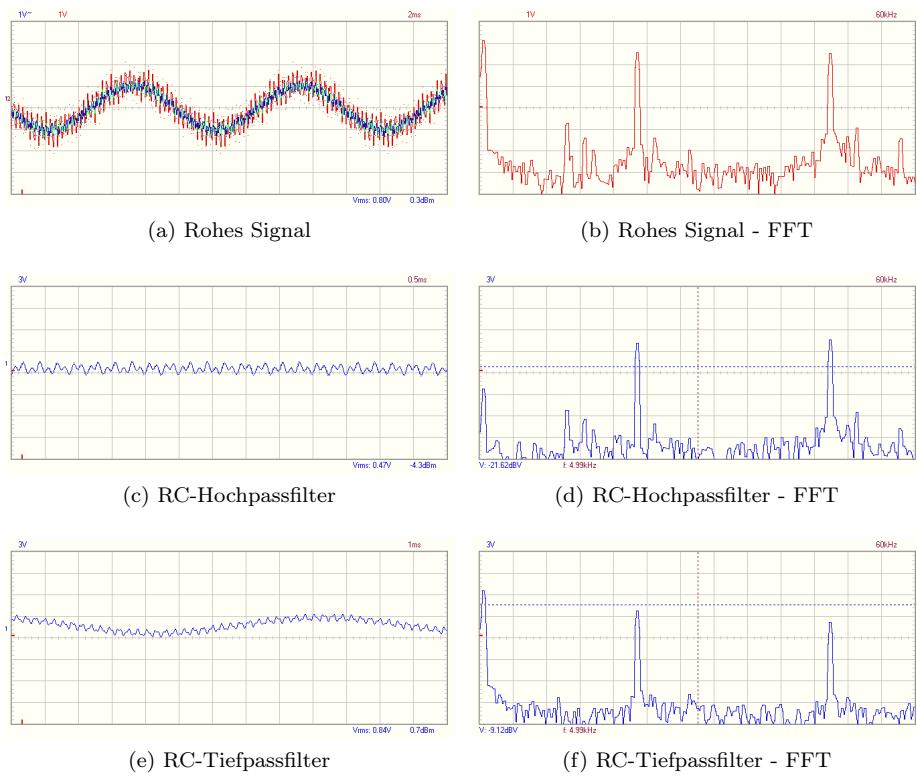


Abbildung 10: A8 - Signalformung Teil 1

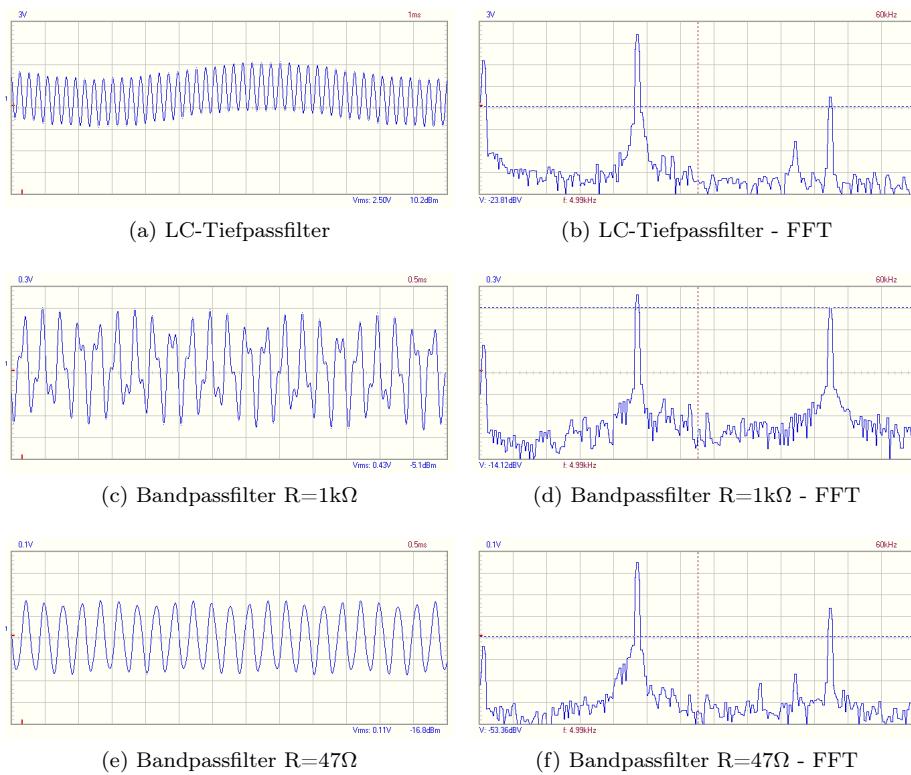


Abbildung 11: A8 - Signalformung Teil 2

3 Auswertung

In dieser Evaluation werden alle Fehler, sofern keine spezifische Angabe gemacht wird, mithilfe der Gauss'schen Fehlerfortpflanzung berechnet. Dies bedeutet, dass ein Wert F , der mit der Formel $f(a_1, \dots, a_n)$ berechnet wird, den Fehler ΔF annimmt:

$$\Delta F = \sqrt{\sum_n \left(\frac{\partial f}{\partial a_n} \cdot \Delta a_n \right)^2}. \quad (18)$$

Des Weiteren erfolgen Signifikanztests von zwei Werten a und a' über die folgende Formel:

$$\sigma = \frac{|a - a'|}{\sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta a')^2}}. \quad (19)$$

Die Auswertung sowie Berechnung erfolgen über das dem Dokument angehängte Python-Programm. Hierbei erfolgen Fits von Funktionen mithilfe der 'curve_fit'-Funktion des 'SciPy'-Packages und Plots werden mit 'matplotlib' erstellt.

3.1 Zeitkonstanten der RC-Kombinationen

Wir beginnen und werten die Ergebnisse des ersten Versuchsteils aus. Aus den gemessenen Halbwertszeiten $T_{1/2}$ bestimmen wir die Zeitkonstanten τ für jede Konfiguration nach Gleichung 3. Die Fehler berechnen sich nach Gauß gemäß $\Delta\tau = \Delta T_{1/2} / \ln 2$ und die Ergebnisse τ_{exp} sind in Tabelle 7 eingetragen. Ebenso sind die Theoretisch zu erwarteten Zeitkonstanten $\tau_{theo} = RC$ mit Signifikanztests der experimentell bestimmten Werte verzeichnet. Die Fehler der Theoretischen Werte ergeben sich aus den angegebenen Toleranzen von 10% für die Kondensatoren und 5% für die Widerstände gemäß

$$\Delta\tau_{theo} = \tau_{theo} \sqrt{0,1^2 + 0,05^2}. \quad (20)$$

C [nF]	R [kΩ]	f [Hz]	τ_{exp} [10^{-5} s]	τ_{theo} [10^{-5} s]	σ
470 ± 47	$1,00 \pm 0,05$	100	48 ± 4	47 ± 5	0,09
$4,7 \pm 0,5$	$10,0 \pm 0,5$	100	$4,75 \pm 0,07$	$4,7 \pm 0,5$	0,09
47 ± 5	$1,00 \pm 0,05$	100	$4,96 \pm 0,07$	$4,7 \pm 0,5$	0,50

Tabelle 7: Experimentelle und theoretische Zeitkonstanten

Bei den Ergebnissen sind keine signifikanten Abweichungen außerhalb der 3σ -Grenze vorhanden. Dies zeigt, dass die experimentell gemessenen Werte gut zu den aus der Theorie Erwarteten passen, was eine positive Bestätigung der Messergebnisse darstellt.

3.2 RC-Glied als Integrator und Differentiator

Wir wollen hier kurz auf die aufgenommenen Oszilloskopbilder eingehen, bei denen das RC-Glied als Differentiator und Integrator verwendet wurde. Die Bilder des Integrators sind dem Messprotokoll angehängt in Abbildung 3 und die des Differentiators in Abbildung 4.

Beim Integrator ist die rote Kurve jeweils das Eingangssignal und die blaue das Ausgangssignal. Bei allen drei Signalen, ergo bei Gaußsignal, Rechtecksignal und Sägesignal, stimmt der Verlauf der Ausgangskurve gut mit dem aus der Analysis erwarteten Verlauf überein. Die blauen Kurven sind in gleicher Weise periodisch wie die Eingangssignale und weisen die richtigen Merkmale an den richtigen Stellen auf, wie beispielsweise die Knicks an den Kanten des Rechteck- und Sägesignals.

Ebenso zufriedenstellend sind die Ergebnisse der Differentiator-Bilder. Auch hier sind die Eingangssignale rot und die Ausgangssignale blau. Analog zum Integrator weisen die blauen Kurven die richtigen Verläufe und Merkmale wie Knicks an den richtigen Stellen, auf und passen somit gut zu den theoretisch erwarteten Beobachtungen.

Bei beiden Betriebsweisen wurden also passende Ergebnisse gefunden welche bestätigen, dass man mit einem RC-Glied tatsächlich Signale integrieren und differenzieren kann.

3.3 Grenzfrequenzen des Hoch- und Tiefpassfilters

3.3.1 Bestimmung aus den Frequenzgängen

Aus unseren aufgenommenen Frequenzgängen des Hoch- und Tiefpasses, zu sehen in Abbildung 5, wollen wir die Grenzfrequenzen bestimmen. Dazu fitten wir lineare Funktionen an die linear verlaufenden Bereiche der Frequenzgänge an. Zu beachten ist, dass durch die doppellogarithmische Darstellung die Fitfunktionen die Form $y = \alpha \cdot x^\beta$ annehmen. Wir führen also für beide Frequenzgänge die Fits durch, dargestellt in Abbildung 12 und erhalten die folgenden Fitfunktionen für den Hochpass:

$$\begin{aligned} f_{const}(x) &= (0,560 \pm 0,007) \cdot x^{(0,0166 \pm 0,0011)} \\ f_{lin}(x) &= (3,08 \pm 0,05) \cdot 10^{-4} \cdot x^{(0,9416 \pm 0,0026)} \end{aligned} \quad (21)$$

Und die Folgenden für den Tiefpass:

$$\begin{aligned} g_{const}(x) &= (0,767 \pm 0,008) \cdot 10^3 \cdot x^{-(0,0196 \pm 0,0016)} \\ g_{lin}(x) &= (1,43 \pm 0,05) \cdot 10^3 \cdot x^{-(0,957 \pm 0,004)} \end{aligned} \quad (22)$$

Die x-Werte der Schnittpunkte dieser Funktionen sind unsere Grenzfrequenz und berechnen sich mit der oben genannten Fitfunktion folgendermaßen:

$$x = \exp \underbrace{\left(\frac{\ln \alpha_2 - \ln \alpha_1}{\beta_1 - \beta_2} \right)}_{=\xi} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \Delta x &= \Delta \xi \cdot \exp(\xi) \\ \Delta \xi &= \xi \sqrt{\left(\frac{\Delta A}{A} \right)^2 + \left(\frac{\Delta B}{B} \right)^2} \end{aligned}$$

$$\text{mit: } A = \ln \alpha_2 - \ln \alpha_1 \quad (24)$$

$$\Rightarrow \Delta A = \sqrt{\left(\frac{\Delta \alpha_1}{\alpha_1} \right)^2 + \left(\frac{\Delta \alpha_2}{\alpha_2} \right)^2}$$

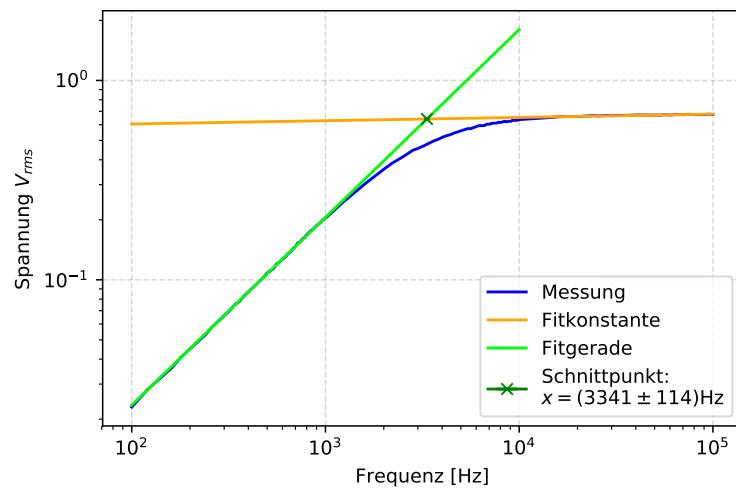
$$\text{und: } B = \beta_1 - \beta_2$$

$$\Rightarrow \Delta B = \sqrt{(\Delta \beta_1)^2 + (\Delta \beta_2)^2}$$

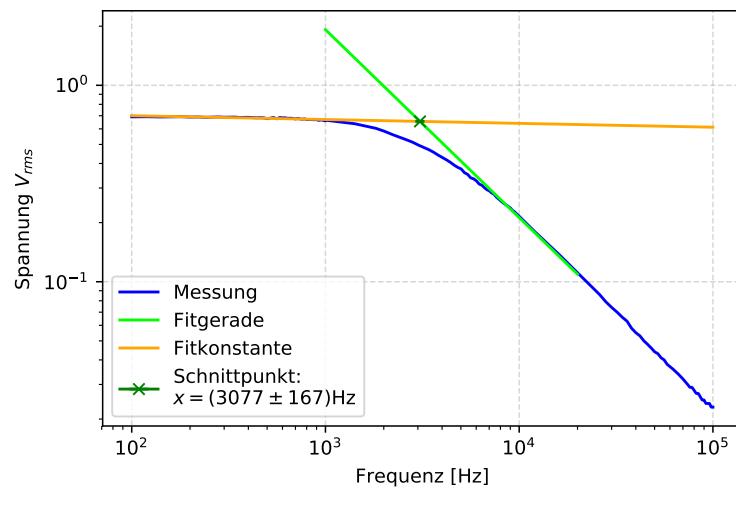
So erhalten wir die folgenden Werte für die Grenzfrequenzen von Hoch- und Tiefpass:

$$\begin{aligned}f_{g,hp} &= (3,34 \pm 0,11)\text{kHz} \\f_{g,tp} &= (3,08 \pm 0,17)\text{kHz}\end{aligned}\tag{25}$$

Verglichen mit den im Messprotokoll notierten direkt beim Versuch gemessenen Werten von $f_{g,hp} = (3,25 \pm 0,10)\text{kHz}$ und $f_{g,tp} = (2,99 \pm 0,10)\text{kHz}$ ergeben sich Sigmaabweichungen von $\sigma_{hp} = 0,60$ und $\sigma_{tp} = 0,45$. Dies sind beide insignifikante Abweichungen, was zeigt, dass das Ablesen der Grenzfrequenz bei dem $1/\sqrt{2}$ -fachen des Maximalwerts und die Methode über den Schnittpunkt der Geraden miteinander verträgliche Ergebnisse liefern und diese somit bestätigen.



(a) Hochpass



(b) Tiefpass

Abbildung 12: Grenzfrequenz aus den Frequenzgängen

3.3.2 Bestimmung aus dem Phasengang

Eine weitere Methode zur Bestimmung der Grenzfrequenz folgt aus den aufgenommen Daten des Phasengangs aus Tabelle 2 des Messprotokolls. Indem wir die Phase als Funktion der Frequenz in ein Diagramm eintragen und annehmen, dass wir uns nur im mittleren annähernd linearen Teil des theoretischen Verlaufs befinden, können wir eine Gerade an die Messwerte fitten und den Wert bei einer Phase von 45° als Grenzfrequenz ablesen. Da wir diesmal nur auf der x-Achse eine logarithmische Skala haben nimmt unsere Gerade die Form $y = \alpha \cdot \ln x + \beta$ an und unser Fit, zu sehen in Abbildung 13 ergibt die folgenden Fitparameter:

$$\begin{aligned}\alpha &= -(40,2 \pm 0,9)^\circ/\text{Hz} \\ \beta &= (380 \pm 7)^\circ\end{aligned}\tag{26}$$

Der Wert x bei einer Phase von 45° ergibt sich nun folgendermaßen:

$$x = \exp \underbrace{\left(\frac{45^\circ - \beta}{\alpha} \right)}_{=\xi}\tag{27}$$

$$\begin{aligned}\Delta x &= \Delta \xi \cdot \exp(\xi) \\ \Delta \xi &= \xi \sqrt{\left(\frac{\Delta \alpha}{\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\Delta \beta}{\beta} \right)^2}\end{aligned}\tag{28}$$

Somit erhalten wir hier eine Grenzfrequenz von

$$f_g = (4,1 \pm 1,0)\text{kHz.}\tag{29}$$

Beim Vergleich mit den Werten des Messprotokolls ergeben sich hier Abweichungen von $\sigma_{hp} = 0,72$ und $\sigma_{tp} = 0,97$. Diese guten Sigmas sind hauptsächlich dem enormen Fehler der Grenzfrequenz aus dem Phasengang geschuldet. Somit lässt sich zwar sagen, dass insgesamt ein Wert in der ungefähr gleichen Größenordnung rauskommt, diese Methode aber im allgemeinen nicht sehr akkurat ist und gröbere Fehler aufzeigt.

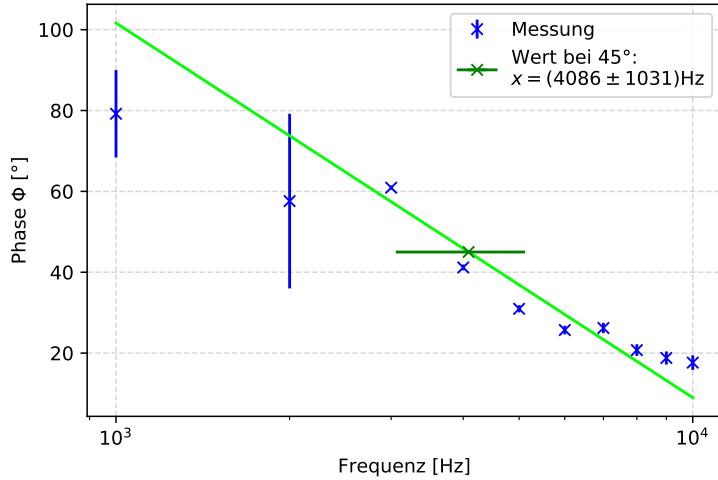


Abbildung 13: Grenzfrequenz aus dem Phasengang

3.3.3 Vergleich mit Theoretischen Werten

Zuletzt berechnen wir erneut theoretischen Werte zum Vergleich für unsere so eben bestimmten Werte der Grenzfrequenz. Die Grenzfrequenz lässt sich folgendermaßen berechnen, wobei die gleichen Toleranzen für Kondensatoren und Widerstände wie zuvor angenommen werden ($C = 47\text{nF}$; $R = 1\text{k}\Omega$):

$$\begin{aligned} f_{g,\text{theo}} &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{RC} \\ \Rightarrow \Delta f_{g,\text{theo}} &= f_{g,\text{theo}} \cdot \sqrt{0,1^2 + 0,05^2} \end{aligned} \quad (30)$$

$$\Rightarrow f_{g,\text{theo}} = (3,4 \pm 0,4)\text{kHz}$$

Wir vergleichen diesen Wert mit den in Kapitel 3.3.1 bestimmten Grenzfrequenzen und erhalten $\sigma_{hp} = 0,35$ und $\sigma_{tp} = 1,01$. Dies sind beides erneut insignifikante Abweichungen, was unsere Ergebnisse positiv bestätigt und zeigt, dass unsere Messung hier gut mit den theoretisch erwarteten Werten übereinstimmt. Ein Vergleich mit der Grenzfrequenz aus dem Phasengang wurde ausgelassen, da dieser auf Grund des bereits diskutierten hohen Fehlers nicht sinnvoll ist.

3.4 Induktivität und Innenwiderstand

Zunächst berechnen wir aus den in Tabelle 3 des Messprotokolls notierten Werten die Induktivität der Spule L1 gemäß $L1 = 1/(C\omega^2)$, wobei $\omega = 2\pi f$ die Kreisfrequenz ist. Somit gilt die folgende Fehlerformel unter Berücksichtigung der 10%-igen Toleranz der Kondensatoren:

$$\Delta L1 = L1 \sqrt{\left(2 \frac{\Delta \omega}{\omega}\right)^2 + 0,1^2}. \quad (31)$$

C [nF]	ω [kHz]	L1 [H]
47 ± 5	24,19 ± 0,19	0,036 ± 0,004
47 ± 5	23,69 ± 0,19	0,038 ± 0,004
47 ± 5	23,88 ± 0,19	0,037 ± 0,004

Tabelle 8: Berechnung der Induktivität L1

Wir erhalten die in Tabelle 8 dargestellten Ergebnisse, aus denen sich der folgende Mittelwert für die Induktivität $\bar{L}1$ ergibt:

$$\bar{L}1 = (0,037 \pm 0,004) \text{H} \quad (32)$$

Der Fehler des Mittelwerts errechnet sich dabei folgendermaßen aus dem statistischen Fehler sowie den Messfehlern:

$$\Delta \bar{L}1 = \sqrt{\sigma_{std}^2 + \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta L1_i\right)^2} \quad (33)$$

mit $\sigma_{std} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (\bar{L}1 - L1_i)^2}$.

Des Weiteren möchten wir die bisher unbeachteten Verluste des Schwingkreises durch den Kondensator, die Spule und mögliche andere Effekte qualitativ bestimmen. Aus unseren Messungen der Bandbreite $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$ können wir mit folgender Formel den Gesamtwiderstand $R + R_V$ und somit den Verlustwiderstand R_V aus der Differenz mit dem eingestellten ohmschen Widerstand R bestimmen:

$$\begin{aligned}
R + R_V &= \Delta\omega \cdot L1 \\
\Rightarrow \Delta(R + R_V) &= \sqrt{(\Delta(\Delta\omega) \cdot L1)^2 + (\Delta\omega \cdot \Delta L1)^2} \\
R_V &= (R + R_V) - R \\
\Rightarrow \Delta R_V &= \sqrt{(\Delta(R + R_V))^2 + (0,05 \cdot R)^2}
\end{aligned} \tag{34}$$

Wir erhalten somit die in Tabelle 9 eingetragenen Ergebnisse.

$\Delta\omega$ [kHz]	$L1$ [H]	$R + R_V$ [k Ω]	R [k Ω]
$30,85 \pm 0,19$	$0,036 \pm 0,004$	$1,12 \pm 0,11$	$0,12 \pm 0,12$
$9,36 \pm 0,19$	$0,038 \pm 0,004$	$0,36 \pm 0,04$	$0,13 \pm 0,04$
$4,96 \pm 0,19$	$0,037 \pm 0,004$	$0,185 \pm 0,020$	$0,138 \pm 0,020$

Tabelle 9: Berechnung der Verlustwiderstände

Es ist kurz anzumerken, dass sich hier für die Werte R_V enorm hohe Fehler ergeben, was im Endeffekt mathematisch begründet ist, da man die Differenz mit dem eingestellten Ohmschen Widerstand nimmt, sich also bei den ersten beiden Fällen der Wert stark verringert, der Fehler aber ungefähr gleich groß bleibt. Dies ist später bei den Signifikanztests zu beachten.

Ebenso können wir den Verlustwiderstand R_V aus den Spannungsdifferenzen der Eingangsspannung U_E und Ausgangsspannung U_A berechnen, wobei der Fehler aus der Toleranz des Widerstands von 5% abgeschätzt wird:

$$\begin{aligned}
R_V &= R \cdot \left(\frac{U_E}{U_A} - 1 \right) \\
\Rightarrow \Delta R_V &= 0,05 \cdot R_V
\end{aligned} \tag{35}$$

So erhalten wir die in Tabelle 10 dargestellten Ergebnisse, welche direkt über einen Signifikanztest mit den zuvor berechneten verglichen werden.

Es sind zwar gerade so keine signifikanten Abweichungen vorhanden, jedoch sind die Verlustwiderstände hier systematisch kleiner als die zuvor berechneten. Gründe hierfür könnten zum einen die Frequenz- und Stromabhängigkeit des kapazitiven Widerstands bei Wechselspannung sein oder Wärmeverluste in der Spule. Grund für letzteres ist vor allem das ständige Ummagnetisieren im

R [kΩ]	U_E [V]	U_A [V]	R_V [Ω]	σ
1,00 ± 0,05	0,65	0,61	66 ± 3	0,45
0,220 ± 0,011	0,6	0,43	87 ± 4	1,25
0,0470 ± 0,0024	0,51	0,18	86 ± 4	2,53

Tabelle 10: Berechnung der Verlustwiderstände aus den Spannungsdifferenzen

Kern der Spule, was insbesondere bei festen Kernen der Spule Wärme generiert. Beim Kondensator treten vorüberwiegender Verluste im Dielektrikum zwischen den Kondensatorplatten auf. Der ständige Feldwechsel bei Wechselspannung sorgt für einen hohen Energieverlust und bei hohen Frequenzen treten Skinneffektverluste auf, bei denen Hochfrequenzströme Verdrängungseffekte bewirken und den effektiven Leitungsquerschnitt verringern. Letzteres ist somit auch bei allen anderen Bauteilen der Fall.

All diese Effekte sorgen für verschiedene Verluste und können somit als Erklärung für die beobachteten Unterschiede dienen.

3.5 Auswertung der Frequenzgänge

3.5.1 Erneute Berechnung der Induktivität L1

Wir berechnen erneut die Induktivität der Spule L1, diesmal aus der in Teil 6 gemessenen Periodendauer T , aus der wir zunächst die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T$ und anschließend mit der Formel für den gedämpften Schwingkreis, Gleichung 10, die Induktivität berechnen:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2C\omega^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2C\omega^2}\right)^2 - \frac{R^2}{4\omega^2}} \\ &= \frac{1}{2C(2\pi/T)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2C(2\pi/T)^2}\right)^2 - \frac{R^2}{4(2\pi/T)^2}} \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \Delta L &= \left\{ \left(\frac{2RT^2}{16\pi^2\xi} \Delta R \right)^2 + \dots \right. \\ &\quad + \left(\left[\frac{T(4\xi - R^2C)}{16\pi^2C\xi} + \frac{T^3}{32\pi^4C^2\xi} \right] \Delta T \right)^2 + \dots \\ &\quad \left. + \left(\left[\frac{T^2}{8\pi^2C^2} + \frac{3T^4}{128\pi^4C^3\xi} \right] \Delta C \right)^2 \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (37)$$

$$\text{mit } \xi = \sqrt{\frac{T^4}{64\pi^4C^2} - \frac{T^2R^2}{16\pi^2}}$$

Somit erhalten wir den folgenden Wert:

$$L1 = (0,039 \pm 0,010) \text{H} \quad (38)$$

Wir vergleichen den Wert für $L1$ mit dem im vorherigen Kapitel bestimmten Mittelwert und erhalten eine Abweichung von $\sigma_{L1} = 0,19$. Dies ist eine insignifikante Abweichung, was die Ergebnisse zwar bestätigt, jedoch ist auch hier zu beachten, dass der Fehler der Induktivität hier etwa 1/3 des Gesamtwertes ist, was die Aussagekraft dieses Wertes etwas anzweifelt.

3.5.2 Bestimmung des Logarithmischen Dekrements

Für unsere weiteren Berechnungen müssen wir zunächst das logarithmische Dekrement des Serienschwingkreises bestimmen. Dazu dienen die in Tabelle 4 des Messprotokolls aufgelisteten Amplituden. Normalerweise würde man dieses aus den Verhältnissen der Amplituden berechnen. Da aber bei unseren Amplitudewerten einige negative Werte auftauchen, höchstwahrscheinlich hat sich hier ein ungewünschter offset der Messwerte eingeschlichen, ist es genauso zielführend eine Exponentialfunktion anzufitten, da die Dämpfungskonstante δ des Exponentialverlaufs der Amplitude $A(t)$ uns die Berechnung ermöglicht:

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} + bkg \quad (39)$$

Unser in Abbildung 14 dargestellter Fit ergibt:

$$\delta = (2,12 \pm 0,16) \cdot 10^3 \text{ 1/s} \quad (40)$$

Ebenso wird die Vermutung vom Anfang bestätigt. Der Fit berechnet einen Hintergrundwert von $bkg = -(0,39 \pm 0,6)V$, welcher für die Verschiebung nach Unten und somit die teils negativen Werte der Amplitude verantwortlich ist.

Das logarithmische Dekrement Λ berechnet sich nun folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \delta T \\ \Rightarrow \Delta\Lambda &= \sqrt{(\delta \cdot \Delta T)^2 + (T \cdot \Delta\delta)^2} \\ \Rightarrow \Lambda &= 0,57 \pm 0,08 \end{aligned} \quad (41)$$

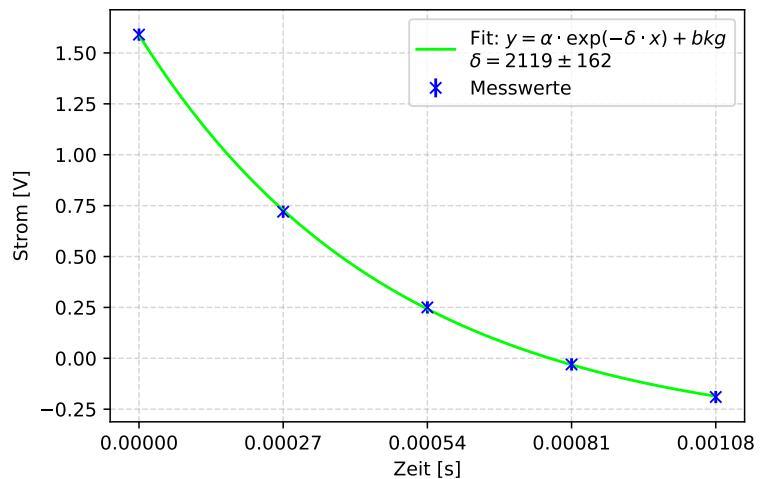


Abbildung 14: Exponentialfit zur Bestimmung der Dämpfungskonstante

3.5.3 Gesamtwiderstand mit dem Logarithmischen Dekrement

Mithilfe der Dämpfungskonstante können wir nun erneut den Widerstand R_V bestimmen. Dieser ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned} R_V &= 2\delta L \\ \Rightarrow \Delta R_V &= 2\sqrt{(L \cdot \Delta\delta)^2 + (\delta \cdot \Delta L)^2} \end{aligned} \tag{42}$$

Wir verwenden sie soeben berechnete Induktivität L1 und erhalten somit:

$$R_V = (0,17 \pm 0,04)k\Omega \tag{43}$$

Wir vergleichen diesen Wert zum einen mit dem berechneten Wert aus der Bandbreitenmessung mit gleichem ohmschen Widerstand (220Ω) und erhalten $\sigma_R = 0,54$ sowie zum Anderen mit dem berechneten Wert aus der Spannungsdifferenz, wobei wir $\sigma_R = 1,78$ erhalten. Hierbei sind beide Abweichungen insignifikant, die zweite ist jedoch etwas erhöht. Erneut lässt sich hier wieder der recht hohe Fehlerwert identifizieren, der sich aufgrund der verwendeten Induktivität L1 ergibt. Man kann aber auch allgemein sagen, dass die Werte selbst ohne Betrachtung der Fehler ungefähr in derselben Größenordnung landen, was an und für sich schonmal eine Bestätigung darstellt.

3.5.4 Vergleich der Resonanzfrequenzen mit den theoretischen Werten

Wir beenden diesen Teil der Auswertung, indem wir die in Teil 5 des Messprotokolls aufgenommenen Resonanzfrequenzen f_R , f_C und f_L mit den theoretischen Werten vergleichen. Dies geschieht erst am Ende, da dafür die Dämpfungskonstante δ benötigt wird. Ebenso brauchen wir L1, wofür wir den Mittelwert aus Kapitel 3.4 verwenden, sowie die eingestellte Kapazität $C = 47nF$. Der Fehler für C ist die bereits vermehrt genutzte Toleranz von 10%. Der Wert für ω_R ergibt sich aus der bereits einmal verwendeten Formel und die anderen beiden folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \omega_R &= \frac{1}{\sqrt{CL}} \\ \Rightarrow \Delta\omega_R &= \omega_R \sqrt{\left(0,5 \cdot 0,1\right)^2 + \left(0,5 \frac{\Delta L1}{L1}\right)^2} \end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned}\omega_C &= \sqrt{\omega_R^2 - 2\delta^2} \\ \Rightarrow \Delta\omega_C &= \frac{2}{\omega_C} \sqrt{(\omega_R \cdot \Delta\omega_R)^2 + (2\delta \cdot \Delta\delta)^2}\end{aligned}\tag{45}$$

$$\begin{aligned}\omega_L &= \sqrt{\omega_R^2 + 2\delta^2} \\ \Rightarrow \Delta\omega_L &= \frac{2}{\omega_L} \sqrt{(\omega_R \cdot \Delta\omega_R)^2 + (2\delta \cdot \Delta\delta)^2}\end{aligned}\tag{46}$$

Die Ergebnisse sind in Tabelle 11 festgehalten, wo auch direkt der Signifikanztest mit den gemessenen Werten umgerechnet in Kreisfrequenzen stattfindet. Wie gut zu erkennen ist ergeben sich hier keine signifikanten Abweichungen. Somit wird unsere Messung bestätigt und die Berechnungen, die in diesem Teil der Auswertungen mit den gemessenen Resonanzfrequenzen durchgeführt wurden, werden zusätzlich auch abgesichert.

ω_R [kHz]	$\omega_{R,\text{theo}}$ [kHz]	σ
$23,88 \pm 0,19$	$23,9 \pm 1,7$	0,02
$22,68 \pm 0,19$	24 ± 3	0,30
$24,76 \pm 0,19$	24 ± 3	0,19

Tabelle 11: Vergleich Resonanzfrequenzen mit Signifikanztests

Zuletzt vergleichen wir noch die Resonanzfrequenz aus der Bandsperre in Versuchsteil 7 des Messprotokolls mit dem theoretisch zu erwartenden Wert. Hier gehen wir analog vor wie für ω_R eben und stellen fest, dass sich durch die verwenden $L1$ sowie die eingestellte Kapazität von $C = 47\text{nF}$ exakt die gleiche Resonanzfrequenz ergibt wie ω_R . Somit erhalten wir für unsere gemessene Resonanzfrequenz von

$$\omega_{\text{Bandsperre}} = (23,1 \pm 0,6)\text{kHz}\tag{47}$$

eine Sigmaabweichung von $\sigma_\omega = 0,44$. Dies ist erneut eine insignifikante Abweichung und bestätigt somit, dass auch bei der Aufnahme und Vermessung des Parallelschwingkreises mit Bandsperre miteinander und vor allem mit der Theorie verträgliche Ergebnisse erzielt wurden.

3.6 Qualitative Analyse der verschiedenen Filterschaltungen

Hier möchten wir nun noch auf den Versuchsteil 8 eingehen, bei welchem verschiedene Filterschaltungen genutzt wurden, um verschiedene Frequenzanteile eines überlagerten Signals herauszufiltern. Die drei dominanten Frequenzen wurden hierbei immer vermessen und bieten somit die Grundlage der folgenden qualitativen Analyse. Zusätzlich dienen die abgespeicherten Oszilloskopbilder in Abbildungen 10 & 11 als visuelle Bestätigungen.

Beim Hochpass lässt sich deutlich erkennen, dass die ersten beiden Peaks bei niedrigerer Frequenz abgeschwächt wurden und insbesondere der erste eine knapp zehnfach geringere Amplitude aufweist. Hier hat der Hochpass also getan was er sollte und die niedrigeren Frequenzen abgeschwächt während er den dritten Peak bei einer höheren Frequenz fast unverändert lässt.

Der RC-Tiefpass zeigt das genau umgekehrte Verhalten auf. Hier wurde der Peak bei niedriger Frequenz wie erwartet praktisch gar nicht verringert, während der Peak bei hoher Frequenz auf das knapp doppelte verringert wurde. Der mittlere Peak wurde auch um ein paar Volt sichtbar abgeschwächt.

Der LC-Tiefpass zeigt den gleichen Effekt wie der RC-Tiefpass, nur deutlich effizienter. Der erste Peak geringerer Frequenz blieb wieder unverändert, der höchste Peak wurde aber diesmal bis aufs circa zweieinhalf-fache verringert. Der mittlere Peak hingegen ist etwas höher geblieben als beim RC-Tiefpass was darauf schließen lässt, dass der LC-Tiefpass eine steilere Kante aufweist, ab der Frequenzen abgeschnitten werden. Auch dieses Verhalten wird so von der Theorie bestätigt.

Zuletzt betrachten wir die Beiden Bandpasskonfigurationen. Bei der ersten werden der erste und dritte Peak deutlich unterdrückt, während der mittlere bei ungefähr der gleichen Amplitude bleibt. Dies lässt darauf schließen, dass diese Konfiguration gerade Frequenzen um den mittleren Peak herum durchlässt, während andere rausgefiltert werden. Bei der zweiten Konfiguration hingegen werden alle drei Peaks sichtbar unterdrückt, die beiden äußeren aber deutlich stärker als der mittlere. Somit lässt sich hier interpretieren, dass dieser Bandpassfilter eine schmalere Bandbreite haben muss. Diese Beobachtung wird erneut von der Theorie bestätigt, da hier ein geringerer Widerstand von 47Ω im Vergleich zu den vorherigen $1 \text{ k}\Omega$ verwendet wurde, was die Trennschärfe des Bandpassfilters erhöht.

Somit lässt sich festhalten, dass die beobachteten Verhaltensweisen der verschiedenen Filter alle den theoretischen Erwartungen entsprechen und keine größeren Abweichungen festgestellt werden konnten.

4 Zusammenfassung der Endergebnisse

In diesem Versuch wurden die Grundlagen verschiedenster Schaltkreise bestehend aus ohmschen Widerständen, Kapazitäten und Spulen bei Gleich- und Wechselspannung betrachtet.

Zuerst bestimmten wir die Zeitkonstanten mehrerer RC-Reihenschaltungen mit unterschiedlichen Bauteilen über eine Halbwertszeitmessung. Beim Vergleich der experimentell bestimmten Werte mit den theoretisch zu erwartenden wurden keine signifikanten Abweichungen festgestellt.

Anschließend wurde das RC-Glied als Integrator sowie Differentiator verwendet und verschiedene Signale quantitativ analysiert. Hier konnte die erwartete Verhaltensweise beobachtet werden, bei der der Verlauf der Ausgangskurven dem integrierten beziehungsweise differenzierten Eingangssignal entsprach und sich mit diesen periodisch korrekt änderte.

Als nächstes bestimmten wir auf verschiedene Weisen die Grenzfrequenzen eines aufgebauten Hoch- und Tiefpassfilters. Aus den ausgenommenen Frequenzgängen wurden die Werte

$$\begin{aligned} f_{g,hp} &= (3,34 \pm 0,11)\text{kHz}, \\ f_{g,tp} &= (3,08 \pm 0,17)\text{kHz} \end{aligned} \quad (48)$$

bestimmt, welche einmal mit dem Wert $f_g = (4,1 \pm 1,0)\text{kHz}$ bestimmt aus dem Phasengang und darauf mit dem theoretischen Wert $f_{g,\text{theo}} = (3,4 \pm 0,4)\text{kHz}$ aus der Bauteilkonfiguration verglichen wurde, wobei sich immerzu insignifikante Abweichungen ergaben. Dies war jedoch Teils den deutlich erhöhten Fehlern geschuldet.

Daraufhin verwendeten wir einen Serienschwingkreis zur Bestimmung der Induktivität der verwendeten unbekannten Spule. Eine erste Mittelwertrechnung aus gemessenen Resonanzfrequenzen ergab den Wert

$$\bar{L} = (0,037 \pm 0,004)\text{H}. \quad (49)$$

Hierbei fand ebenfalls eine Berechnung des Gesamtwiderstands und Analyse des Verlustwiderstands des Schwingkreises statt. Zuerst wurden diese mithilfe gemessener Bandbreiten und anschließend aus aufgenommenen Spannungsdifferenzen berechnet. Es ergaben sich hierbei bei der ersten Methode deutlich höhere Werte für den Verlustwiderstand als bei der Zweiten. Der Ursprung dieser Differenz wurde auf die zusätzlichen Verluste in Kondensator und Spule bei verschiedenen Frequenzen und Strömen zurückgeführt.

Anschließend wurde erneut die Induktivität derselben Spule berechnet, diesmal aus einer Periodendauermessung, die den Wert

$$L1 = (0,039 \pm 0,010)\text{H} \quad (50)$$

ergab, welcher insignifikant vom zuvor bestimmten Wert abweicht. Ebenso wurde aus einer Amplitudenmessung die Dämpfungskonstante des gedämpften Schwingkreises sowie das logarithmische Dekrement berechnet:

$$\begin{aligned} \delta &= (2,12 \pm 0,16) \cdot 10^3 \text{ 1/s,} \\ \Lambda &= 0,57 \pm 0,08 \end{aligned} \quad (51)$$

Damit wurde erneut der Verlustwiderstand des Schaltkreises berechnet, welcher eher mit den zuerst bestimmten Werten übereinstimmte, insgesamt aber dennoch zu beiden Vergleichswerten insignifikante Abweichungen aufwies.

Daraufhin wurden verschiedenste Messungen von Resonanzfrequenzen aus verschiedenen Frequenzgängen mit den theoretisch berechneten Werten aus der Schaltkreis-Konfiguration verglichen. Hierbei ergaben sich bei allen Werten insignifikante Abweichungen.

Zuletzt wurden verschiedene Hoch-, Tief- und Bandpassfilter qualitativ analysiert. Hierbei ergab der Vergleich der Amplituden der drei dominanten Frequenzen immerzu das erwartete Bild. Bei Hochpässen wurden tiefe und bei Tiefpässen hohe Frequenzen sichtbar abgeschwächt und die Bandpassfilter schwächten alle Frequenzen um die mittlere herum deutlich ab. Ebenso ergaben die Vergleiche verschiedener Filter eines Typs, ergo der Vergleich eines RC- mit einem LC-Tiefpass oder der zweier Bandpassfilter, Sinn und zeigten erwartete Verhaltensweisen.

5 Diskussion

Wie in der Zusammenfassung zu sehen konnten größtenteils zufriedenstellende Ergebnisse erzielt werden. Kein Wert überschritt im Vergleich die 3σ -Grenze und alle qualitativen Beobachtungen und Analysen zeigten erwartete Verhaltensweisen.

Jedoch wurden in allen Versuchsteilen immer wieder hohe Fehler sichtbar, welche häufig übermäßig dazu beitrugen, dass diese positiven Ergebnisse erzielt werden konnten, wodurch die Aussagekraft und Verlässlichkeit dieser Ergebnisse in Frage gestellt wird. Angefangen bei den angegebenen Toleranzen der Kapazitäten und Widerstände von 10 beziehungsweise 5 Prozent. Diese recht hohen relativen Fehler sorgten von vornherein für eher unsichere theoretische Werte, wenn diese aus den Bauteileigenschaften berechnet wurden. Somit fallen die Signifikanztests hier von vornherein besser aus und dienen daher eher als Abschätzung, ob die Werte aus den Messungen in der richtigen Größenordnung landen. Bauteile, deren Induktivitäten genauer bestimmt werden können, würden hier einen qualitativeren Vergleich erlauben. Allerdings würden sich hier die im Versuch nur nebenbei erwähnten Auswirkungen von beispielsweise Temperaturschwankungen dann auch bemerkbar machen, sodass strenger geregelte Umgebungsbedingungen erforderlich wären, die den Rahmen des Physikalischen Anfängerpraktikums mehr als sprengen würden. Somit sind die hier verwendeten Toleranzen natürlich etwas ungenau, im Kontext dieses Versuchs aber angemessen und ausreichend für den am Ende gezogenen Vergleich der Werte.

Eine Weitere erwähnenswerte potentielle Fehlerquelle ist der Fakt, dass dieser Versuch über insgesamt zwei Termine, die eine Woche auseinander lagen, durchgeführt wurde. Hierbei konnte von uns nicht garantiert werden, dass wir beim zweiten Termin exakt die gleichen Bauteile verwenden und dass die gleichen Umgebungsbedingungen herrschen wie eine Woche zuvor. Somit können leichte Differenzen zwischen der ersten und zweiten Hälfte des Versuchs auch auf hierbei entstandene Abweichungen zurückzuführen sein, auch wenn bei uns keine auffälligen Messergebnisse dieser Art festzustellen waren.

Zusammenfassend lässt sich also sagen, dass in diesem Versuch Ergebnisse erzielt wurden, die im Kontext des Physikalischen Anfängerpraktikums durchaus zufriedenstellend sind und der durch den Aufbau bedingten Genauigkeit mehr als genügten. Sowohl die qualitativen als auch die quantitativen Teile ergaben mit der Theorie und untereinander vereinbare Ergebnisse, die für ein grundlegendes Verständnis der Thematik und somit eine angemessene Einführung sorgten.

In [1]:

```
%matplotlib inline
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.mlab as mlab
from scipy.optimize import curve_fit
from scipy.stats import chi2
from scipy.stats import norm
import scipy.constants as scp
from scipy.integrate import quad
from tabulate import tabulate
from scipy import signal
import scipy.constants as const
```

In [2]:

```
def sigma(x, y, dx, dy, label):
    s = np.abs(x-y)/np.sqrt(dx**2 + dy**2)
    print('Sigmaabweichung {} ='.format(str(label)), s)
    return s
```

Zu Aufgabe 1

In [3]:

```
A1_C = np.array([470e-9, 4.7e-9, 47e-9]) #F
A1_R = np.array([1000, 10000, 1000]) #ohm
A1_T = np.array([0.33e-3, 32.9e-6, 34.4e-6]) #s
A1_dT = np.array([0.03e-3, 0.5e-6, 0.5e-6]) #s
A1_f = 100.00 #Hz
A1_T_hochpass = 37.6e-6 #s
A1_dT_hochpass = 0.5e-6 #s
```

In [4]:

```
A1_tau = A1_T /np.log(2)
A1_dtau = A1_dT /np.log(2)

A1_tau_theo = A1_R * A1_C
A1_dtau_theo = np.sqrt((0.05 * A1_R * A1_C)**2 + (A1_R * 0.10 * A1_C)**2)

A1_sigma_tau = sigma(A1_tau, A1_tau_theo, A1_dtau, A1_dtau_theo, 'Zeitkonstante')

Sigmaabweichung Zeitkonstante = [0.08944814 0.08760621 0.49560511]
```

In [5]:

```
head1 = ['C', 'dC', 'R', 'dR', 'f', 'tau', 'dtau', 'ttau', 'dttau', 'sigs']
tab1 = zip(A1_C, 0.1*A1_C, A1_R, 0.05*A1_R, np.full(3, A1_f), A1_tau, A1_dtau, A1_tau_theo, A1_dtau_theo, A1_sigma_tau)

print(tabulate(tab1, headers=head1, tablefmt="latex"))

\begin{tabular}{rrrrrrrrr}
\hline
& C & dC & R & dR & f & tau & dtau & ttau & dttau & s \\
\hline
4.7e-07 & 4.7e-08 & 1000 & 50 & 100 & 0.000476089 & 4.32809e-05 & 0.00047 & 5.25476e-05 & 0.0894 \\
481 & 4.7e-09 & 4.7e-10 & 10000 & 500 & 100 & 4.74647e-05 & 7.21348e-07 & 4.7e-05 & 5.25476e-06 & 0.0876 \\
062 & 4.7e-08 & 4.7e-09 & 1000 & 50 & 100 & 4.96287e-05 & 7.21348e-07 & 4.7e-05 & 5.25476e-06 & 0.4956 \\
05 & \hline
\end{tabular}
```

Zu Aufgabe 3

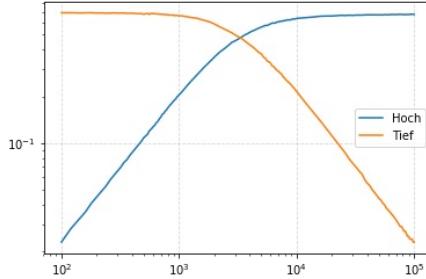
Grenzfrequenz

```
In [6]:
```

```
a3_hp_hz, a3_hp_v, _ = np.loadtxt('./data/A3-hochpass.txt', unpack=True, skiprows=1)
a3_tp_hz, a3_tp_v, _ = np.loadtxt('./data/A3-tiefpass.txt', unpack=True, skiprows=1)
```

```
In [7]:
```

```
plt.grid(alpha=0.5, linestyle='--')
plt.plot(a3_hp_hz, a3_hp_v, label='Hoch')
plt.plot(a3_tp_hz, a3_tp_v, label='Tief')
plt.legend()
plt.xscale('log')
plt.yscale('log')
```



```
In [8]:
```

```
#Fitfunctions:
def linfit(x,a,b):
    return a*x+b

def constfit(x,a):
    return a+x*0

def logfit(x,a,b):
    return a * np.log(x) + b

def loglogfit(x,a,b):
    return a * x**b
```

```
In [9]:
```

```
#Fits:
#1. Hochpass:
a3_hp_popt_const = curve_fit(loglogfit, a3_hp_hz[92:], a3_hp_v[92:])
a3_hp_popt_lin, a3_hp_pcov_lin = curve_fit(loglogfit, a3_hp_hz[:47], a3_hp_v[:47])

#2. Tiefpass
a3_tp_popt_lin, a3_tp_pcov_lin = curve_fit(loglogfit, a3_tp_hz[78:], a3_tp_v[78:])
a3_tp_popt_const, a3_tp_pcov_const = curve_fit(loglogfit, a3_tp_hz[:47], a3_tp_v[:47])
```

```
In [10]:
```

```
print("Fit 'Konstante' Hochpass: y = ({}) +/- ({}) * x^({}) +/- ({})".format(a3_hp_popt_const[0], np.sqrt(a3_hp_pcov_const[0][0]), a3_hp_popt_const[1], np.sqrt(a3_hp_pcov_const[1][1])))
print("Fitgerade Hochpass: y = ({}) +/- ({}) * x^({}) +/- ({})".format(a3_hp_popt_lin[0], np.sqrt(a3_hp_pcov_lin[0][0]), a3_hp_popt_lin[1], np.sqrt(a3_hp_pcov_lin[1][1])))
print("Fitgerade Tiefpass: y = ({}) +/- ({}) * x^({}) +/- ({})".format(a3_tp_popt_lin[0], np.sqrt(a3_tp_pcov_lin[0][0]), a3_tp_popt_lin[1], np.sqrt(a3_tp_pcov_lin[1][1])))
print("Fit 'Konstante' Tiefpass: y = ({}) +/- ({}) * x^({}) +/- ({})".format(a3_tp_popt_const[0], np.sqrt(a3_tp_pcov_const[0][0]), a3_tp_popt_const[1], np.sqrt(a3_tp_pcov_const[1][1])))

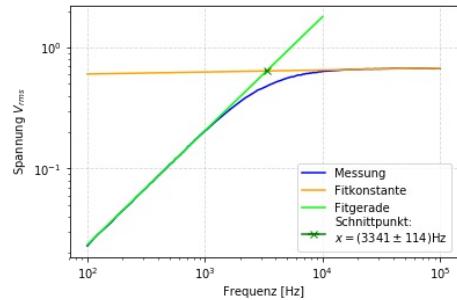
Fit 'Konstante' Hochpass: y = (0.5601015301497043 +/- 0.0066562102456978285) * x^(0.0165532385130154
27 +/- 0.0010983307696223142)
Fitgerade Hochpass: y = (0.00030794302002854 +/- 5.3862611631352545e-06) * x^(0.9416027840732759 +/- 0.0026496571819489907)
Fitgerade Tiefpass: y = (1425.4101064872516 +/- 51.71243640487423) * x^(-0.9568752912744914 +/- 0.003919334068749732)
Fit 'Konstante' Tiefpass: y = (0.7665991064811735 +/- 0.007784609635530628) * x^(-0.0195891723993796
32 +/- 0.001641279388427333)
```

In [11]:

```
#Schnittpunkte:  
#Hochpass:  
da1 = np.log(a3_hp_popt_lin[0]) - np.log(a3_hp_popt_const[0])  
dd1 = np.sqrt((np.sqrt(a3_hp_pcov_lin[0][0]) / a3_hp_popt_lin[0])**2 + (np.sqrt(a3_hp_pcov_const[0][0]) / a3_hp_popt_const[0])**2)  
  
db1 = a3_hp_popt_const[1] - a3_hp_popt_lin[1]  
ddb1 = np.sqrt((np.sqrt(a3_hp_pcov_const[1][1]))**2 + (np.sqrt(a3_hp_pcov_lin[1][1]))**2)  
  
ratio1 = da1/db1  
dratio1 = ratio1 * np.sqrt((ddb1/db1)**2 + (dd1/da1)**2)  
  
a3_x_hp = np.exp(ratio1)  
a3_dx_hp = a3_x_hp * dratio1  
  
#Tiefpass  
da2 = np.log(a3_tp_popt_lin[0]) - np.log(a3_tp_popt_const[0])  
dd2 = np.sqrt((np.sqrt(a3_tp_pcov_lin[0][0]) / a3_tp_popt_lin[0])**2 + (np.sqrt(a3_tp_pcov_const[0][0]) / a3_tp_popt_const[0])**2)  
  
db2 = a3_tp_popt_const[1] - a3_tp_popt_lin[1]  
ddb2 = np.sqrt((np.sqrt(a3_tp_pcov_const[1][1]))**2 + (np.sqrt(a3_tp_pcov_lin[1][1]))**2)  
  
ratio2 = da2/db2  
dratio2 = ratio2 * np.sqrt((ddb2/db2)**2 + (dd2/da2)**2)  
  
a3_x_tp = np.exp(ratio2)  
a3_dx_tp = a3_x_tp * dratio2
```

In [12]:

```
X = np.linspace(100, 100000, 100)  
Y = np.linspace(100, 10000, 100)  
  
plt.figure()  
plt.grid(alpha=0.5, linestyle='--')  
plt.plot(a3_hp_hz, a3_hp_v, color='blue', label='Messung')  
plt.plot(X, loglogfit(X, *a3_hp_popt_const), color='orange', zorder=3, label='Fitkonstante')  
plt.plot(Y, loglogfit(Y, *a3_hp_popt_lin), color='lime', zorder=5, label='Fitgerade')  
plt.errorbar(a3_x_hp, loglogfit(a3_x_hp, *a3_hp_popt_lin), xerr=a3_dx_hp, marker='x', color='green', zorder=10,  
            label="\n".join([r"Schnittpunkt:",  
                           r'$x = {:.0f} \pm {:.0f} \text{Hz}'.format(a3_x_hp, a3_dx_hp)]))  
plt.xscale('log')  
plt.yscale('log')  
plt.xlabel('Frequenz [Hz]')  
plt.ylabel('Spannung $V_{rms}$')  
plt.legend()  
plt.savefig('./plots/A3-hochpass.pdf', format='PDF')
```

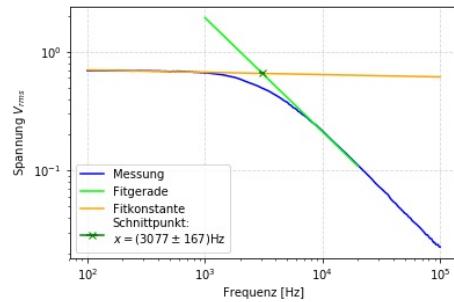


In [13]:

```
X = np.linspace(100, 100000, 100)
Y = np.linspace(1000, 20000, 100)

plt.figure()
plt.grid(alpha=0.5, linestyle='--')
plt.plot(a3_tp_hz, a3_tp_v, color='blue', label='Messung')
plt.plot(Y, loglogfit(Y, *a3_tp_popt_lin), color='lime', zorder=3, label='Fitgerade')
plt.plot(X, loglogfit(X, *a3_tp_popt_const), color='orange', zorder=5, label='Fitkonstante')
plt.errorbar(a3_x_tp, loglogfit(a3_x_tp, *a3_tp_popt_lin), xerr=a3_dx_tp, marker='x', color='green', zorder=10,
             label="\n".join([r'Schnittpunkt:', r'$x = ({:.0f} \pm {:.0f})\text{Hz}'.format(a3_x_tp, a3_dx_tp)]))

plt.xscale('log')
plt.yscale('log')
plt.xlabel('Frequenz [Hz]')
plt.ylabel(r'Spannung $V_{rms}$')
plt.legend()
plt.savefig('./plots/A3-tiefpass.pdf', format='PDF')
```



In [14]:

```
#Messung:
a3_fghp = 3.25e3
a3_dfghp = 0.10e3
a3_fgtp = 2.99e3
a3_dfgtp = 0.10e3
```

In [15]:

```
_ = sigma(a3_fghp, a3_x_hp, a3_dfghp, a3_dx_hp, 'Grenzfreq. Hochpass')
_ = sigma(a3_fgtp, a3_x_tp, a3_dfgtp, a3_dx_tp, 'Grenzfreq. Tiefpass')
```

Sigmaabweichung Grenzfreq. Hochpass = 0.6033150577541566
Sigmaabweichung Grenzfreq. Tiefpass = 0.44711922784907493

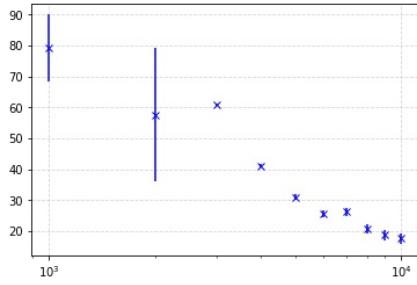
Phasengang

In [16]:

```
a3_f = np.arange(1,11) * 1000 #Hz
a3_t = np.array([0.22e-3, 0.08e-3, 56.4e-6, 28.6e-6, 17.2e-6, 11.9e-6, 10.4e-6, 7.2e-6, 5.8e-6, 4.9e-6]) #s
a3_dt = np.array([0.03e-3, 0.03e-3, 0.5e-6, 0.5e-6, 0.5e-6, 0.5e-6, 0.5e-6, 0.5e-6, 0.5e-6, 0.5e-6])
a3_phi = 360 * a3_f * a3_t
a3_dphi = 360 * a3_f * a3_dt
```

In [17]:

```
plt.grid(alpha=0.5, linestyle='--')
plt.errorbar(a3_f, a3_phi, yerr=a3_dphi, color='blue', fmt='x', label='Messung')
plt.xscale('log')
```



In [18]:

```
a3_phi_popt, a3_phi_pcov = curve_fit(logfit, a3_f, a3_phi, sigma=a3_dphi, absolute_sigma=True)
print(a3_phi_popt[0], '+/-', np.sqrt(a3_phi_pcov[0][0]))
print(a3_phi_popt[1], '+/-', np.sqrt(a3_phi_pcov[1][1]))
```

```
-40.241849419456386 +/- 0.859192027778671
379.6282432002763 +/- 7.217307063142067
```

In [19]:

```
#wert bei 45°:
db3 = 45 - a3_phi_popt[1]
ddb3 = np.sqrt(np.sqrt(a3_phi_pcov[1][1])**2)

da3 = a3_phi_popt[0]
dda3 = np.sqrt(np.sqrt(a3_phi_pcov[0][0])**2)

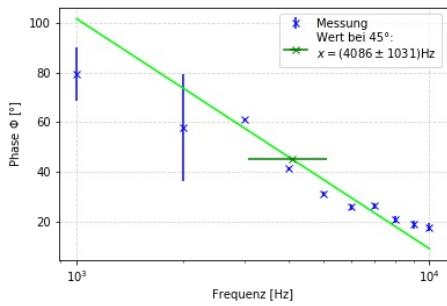
a3_x_45 = db3 /da3
a3_dx_45 = a3_x_45 * np.sqrt((ddb3/db3)**2 + (dda3/d3)**2)

a3_x_45_exp = np.exp(a3_x_45)
a3_dx_45_exp = np.exp(a3_x_45) * a3_dx_45
```

In [20]:

```
X = np.linspace(1000, 10000, 100)

plt.grid(alpha=0.5, linestyle='--')
plt.errorbar(a3_f, a3_phi, yerr=a3_dphi, color='blue', fmt='x', label='Messung')
plt.plot(X, logfit(X, *a3_phi_popt), color='lime')
plt.errorbar(a3_x_45_exp, logfit(a3_x_45_exp, *a3_phi_popt), xerr=a3_dx_45_exp, marker='x', color='green', zorder=10,
            label="\n".join([r"Wert bei 45°:",
                           r'$x = ({} \pm {}) \text{ Hz}'.format(a3_x_45_exp, a3_dx_45_exp)]))
plt.legend()
plt.xlabel('Frequenz [Hz]')
plt.ylabel('Phase $\Phi$ [°]')
plt.xscale('log')
plt.savefig('./plots/A3-phasengang.pdf', format='PDF')
```



In [21]:

```
_ = sigma(a3_x_45_exp, a3_x_hp, a3_dx_45_exp, a3_dx_hp, 'Grenzfreq. Hochpass')
_= sigma(a3_x_45_exp, a3_x_tp, a3_dx_45_exp, a3_dx_tp, 'Grenzfreq. Tiefpass')

Sigmaabweichung Grenzfreq. Hochpass = 0.7182083529469852
Sigmaabweichung Grenzfreq. Tiefpass = 0.9662845425454517
```

Vergleich mit Theoretischem Wert

In [22]:

```
a3_R = 1000 #ohm
a3_C = 47e-9 #farad

#Bauteiltoleranzen:
a3_dR = 0.05 * a3_R
a3_dC = 0.1 * a3_C
```

In [23]:

```
a3_wg = 1/(2*np.pi) * 1/(a3_R*a3_C) #Hz
a3_dwg = a3_wg * np.sqrt((a3_dR/a3_R)**2 + (a3_dC/a3_C)**2)

print("Theoretische Grenzfrequenz = ({}) +/- ({})Hz".format(a3_wg, a3_dwg))

Theoretische Grenzfrequenz = (3386.2753849339438 +/- 378.5970975623283)Hz
```

In [24]:

```
_ = sigma(a3_fghp, a3_wg, a3_dfghp, a3_dwg, 'gemess. Grenzfreq. Hochpass')
_= sigma(a3_fgtp, a3_wg, a3_dfgtp, a3_dwg, 'gemess. Grenzfreq. Tiefpass')

Sigmaabweichung gemess. Grenzfreq. Hochpass = 0.3480131777971806
Sigmaabweichung gemess. Grenzfreq. Tiefpass = 1.011988012805914
```

Zu Aufgabe 4

In [25]:

```
#Messwerte
a4_R = np.array([1e3, 220, 47]) #ohm

a4_fr = np.array([3.85, 3.77, 3.80]) * 1000 #Hz
a4_dfr = np.array([0.03, 0.03, 0.03]) * 1000

a4_wr = a4_fr * 2 * np.pi #kreisfreq.
a4_dwr = a4_dfr * 2 * np.pi

a4_C = 47e-9 #Farad

a4_Ueff_aus = np.array([0.61, 0.43, 0.18]) #V
a4_Ueff_ein = np.array([0.65, 0.60, 0.51]) #V
```

In [26]:

```
#Induktivitäten L1:
a4_L1 = 1/(a4_C * a4_wr**2)
a4_dL1 = a4_L1 * np.sqrt((2 * a4_dwr/a4_wr)**2 + 0.1**2)

for i in range(0,3):
    print("L1 = ({}) +/- ({})".format(a4_L1[i], a4_dL1[i]))
```

```
L1 = (0.036359754844503135 +/- 0.0036798647910273514)
L1 = (0.037919247034922346 +/- 0.003839647424405579)
L1 = (0.03732288546971245 +/- 0.0037785265068404836)
```

In [27]:

```
#mean:
a4_L1m = np.mean(a4_L1)
a4_dL1m = np.sqrt((np.std(a4_L1, ddof=1)/np.sqrt(3))**2 + (1/3 * np.sum(a4_dL1))**2)

print("L1 = ({}) +/- ({})".format(a4_L1m, a4_dL1m))

L1 = (0.037200629116379315 +/- 0.003793317527424841)
```

In [28]:

```
head4_1 = ['C', 'dC', 'w', 'dw', 'L', 'dL']
tab4_1 = zip(np.full(3, a4_C), np.full(3, a4_C)*0.1, a4_wr, a4_dwr, np.round(a4_L1, 3), np.round(a4_dL1, 3))
print(tabulate(tab4_1, headers=head4_1, tablefmt="latex"))

\begin{tabular}{rrrrrr}
\hline
C & dC & w & dw & L & dL \\
\hline
4.7e-08 & 4.7e-09 & 24190.3 & 188.496 & 0.036 & 0.004 \\
4.7e-08 & 4.7e-09 & 23687.6 & 188.496 & 0.038 & 0.004 \\
4.7e-08 & 4.7e-09 & 23876.1 & 188.496 & 0.037 & 0.004 \\
\hline
\end{tabular}
```

In [29]:

```
#Gesamtwiderstand R + R_V:
a4_deltaf = np.array([4.91, 1.49, 0.79]) * 1000 #Hz
a4_ddeltaf = np.array([0.03, 0.03, 0.03]) * 1000

a4_deltaw = a4_deltaf * 2 * np.pi
a4_ddeltaw = a4_ddeltaf * 2 * np.pi

a4_Rges = a4_deltaw * a4_L1
a4_dRges = np.sqrt((a4_ddeltaw * a4_L1)**2 + (a4_deltaw * a4_dL1)**2)

for i in range(0,3):
    print("R + R_V = ({}) +/- {}".format(a4_Rges[i], a4_dRges[i]))

print('---')

#berechne nur R_V:
a4_Rv1 = a4_Rges - a4_R
a4_dRv1 = np.sqrt(a4_dRges**2 + (0.05*a4_R)**2)

for i in range(0,3):
    print("R_V = ({}) +/- {}".format(a4_Rv1[i], a4_dRv1[i]))

R + R_V = (1121.7144300911223 +/- 113.73214041132259)
R + R_V = (354.99794718541443 +/- 36.65029851579114)
R + R_V = (185.26021842782654 +/- 20.031576759466812)
---
R_V = (121.71443009112227 +/- 124.23767448942691)
R_V = (134.99794718541443 +/- 38.26544630990997)
R_V = (138.26021842782654 +/- 20.16895057930409)
```

In [30]:

```
head4_2 = ['dw', 'ddw', 'l', 'dl', 'R+Rv', 'dr+rv', 'rv', 'drv']
tab4_2 = zip(a4_deltaw, a4_ddeltaw, np.round(a4_L1, 3), np.round(a4_dL1, 3), np.round(a4_Rges, 0), np.round(a4_dRges, 0), np.round(a4_Rv1, 0), np.round(a4_dRv1, 0))
print(tabulate(tab4_2, headers=head4_2, tablefmt="latex"))

\begin{tabular}{rrrrrrrr}
\hline
dw & ddw & l & dl & R+Rv & dr+rv & rv & drv \\
\hline
30850.4 & 188.496 & 0.036 & 0.004 & 1122 & 114 & 122 & 124 \\
9361.95 & 188.496 & 0.038 & 0.004 & 355 & 37 & 135 & 38 \\
4963.72 & 188.496 & 0.037 & 0.004 & 185 & 20 & 138 & 20 \\
\hline
\end{tabular}
```

In [31]:

```
#Widerstand aus Spannungsdifferenz:  
a4_Rv2 = a4_R * (a4_Ueff_ein/a4_Ueff_aus - 1)  
  
#schätze fehler ab mit der toleranz des widerstands:  
a4_dRv2 = a4_Rv2 * 0.05  
  
for i in range(0,3):  
    print("R_V = ({}) +/- {}".format(a4_Rv2[i], a4_dRv2[i]))  
  
R_V = (65.57377049180334 +/- 3.2786885245901676)  
R_V = (86.97674418604652 +/- 4.348837209302326)  
R_V = (86.166666666666667 +/- 4.30833333333334)
```

In [32]:

```
a4_Rv_sigma = sigma(a4_Rv1, a4_Rv2, a4_dRv1, a4_dRv2, 'Gesamtwiderstand {}'.format(i+1))
```

```
Sigmaabweichung Gesamtwiderstand 3 = [0.45172385 1.24692263 2.52587361]
```

In [33]:

```
head4_3 = ['R', 'dR', 'Ue', 'Ua', 'Rv', 'dRv', 'sigma']  
tab4_3 = zip(a4_R, 0.05*a4_R, a4_Ueff_ein, a4_Ueff_aus, np.round(a4_Rv2, 0), np.round(a4_dRv2, 0), np.round(a4_Rv_sigma, 2))  
  
print(tabulate(tab4_3, headers=head4_3, tablefmt="latex"))  
  
\begin{tabular}{rrrrrrr}  
\hline  
R & dR & Ue & Ua & Rv & dRv & sigma \\\hline  
1000 & 50 & 0.65 & 0.61 & 66 & 3 & 0.45 \\\hline  
220 & 11 & 0.6 & 0.43 & 87 & 4 & 1.25 \\\hline  
47 & 2.35 & 0.51 & 0.18 & 86 & 4 & 2.53 \\\hline  
\end{tabular}
```

In []:

Zu Aufgabe 5 (6)

Induktivität aus f_R

In [34]:

```
a5_fr = 3.80e3 #Hz  
a5_fc = 3.61e3  
a5_fl = 3.94e3  
a5_df = 0.03e3  
  
a5_wr = a5_fr * 2 * np.pi #kreisfreq.  
a5_vc = a5_fc * 2 * np.pi  
a5_wl = a5_fl * 2 * np.pi  
a5_dw = a5_df * 2 * np.pi  
  
a5_C = 47e-9 #farad  
a5_R = 47 #ohm  
  
a5_T = 0.27e-3 #Periodendauer  
a5_dt = 0.03e-3  
  
a5_w = 2 * np.pi / a5_T #Resonanzfrequenz  
a5_dw = a5_w * np.sqrt((a5_dt/a5_T)**2)
```

In [35]:

```
#Berechne Induktivität (gedämpft)
a5_L = 1/(2 * a5_w**2 * a5_C) + np.sqrt((1/(2 * a5_w**2 * a5_C))**2 - a5_R**2/(4 * a5_w**2))

x1 = np.sqrt(a5_T**4/(64*np.pi**4*a5_C**2) - a5_T**2 * a5_R**2/(16 * np.pi**2))
a5_dL = np.sqrt((2*a5_R*a5_T**2 * 0.05*a5_R/(16*np.pi**2 *x1))**2 +
                ((a5_T*(4*x1-a5_R**2*a5_C)/(16*np.pi**2 * a5_C * x1) + a5_T**3 /(32 * np.pi**4 * a5_C**2 * x1)) *
                a5_dT)**2 +
                ((a5_T**2 /(8*np.pi**2 * a5_C**2) + 3*a5_T**4 /(128*np.pi**4 * a5_C**3 * x1))*a5_C*0.1)**2)

print("L1 = ({}) +/- {}".format(a5_L, a5_dL))

L1 = (0.039262932864662495 +/- 0.01001925719239872)
```

In [36]:

```
_ = sigma(a5_L, a4_L1m, a5_dL, a4_dL1m, 'Induktivität')

Sigmaabweichung Induktivität = 0.19249941352760397

a5_L1r = 1/(a5_C * a5_wr**2)a5_dL1r = a5_L1r * np.sqrt((0.1)**2 + (2 * a5_dw/a5_wr)**2)a5_L1c = 1/(a5_C * a5_wc**2)a5_dL1c = a5_L1c * np.sqrt((0.1)**2 + (2 * a5_dw/a5_wc)**2)a5_L1l = 1/(a5_C * a5_wl**2)a5_dL1l = a5_L1l * np.sqrt((0.1)**2 + (2 * a5_dw/a5_wl)**2) print("L1 = {} +/- {}".format(a5_L1r, a5_dL1r)) print("L1 = {} +/- {}".format(a5_L1c, a5_dL1c)) print("L1 = {} +/- {}".format(a5_L1l, a5_dL1l))for i in range(0,3): sigma(a5_L1r, a4_L1[i], a5_dL1r, a4_dL1[i], 'Induktivität L1 4&5')_= sigma(a5_L1r, a4_L1m, a5_dL1r, a4_dL1m, 'Induktivität L1 mean')
```

Log. Dekrement

In [37]:

```
a5_A = np.array([1.59, 0.72, 0.25, -0.03, -0.19])
a5_dA = np.full(5, 0.03)
a5_T = 0.27e-3 #
a5_dT = 0.03e-3

a5_TT = a5_T * np.arange(0,5)
a5_dTT = a5_dT * np.arange(0,5)
```

In [38]:

```
def exp_bkg(x,a,d,bkg):
    return a * np.exp(-d * x) - bkg
```

In [39]:

```
a5_ampfit_opt, a5_ampfit_cov = curve_fit(exp_bkg, a5_TT, a5_A, sigma=a5_dA, absolute_sigma=True)
```

In [40]:

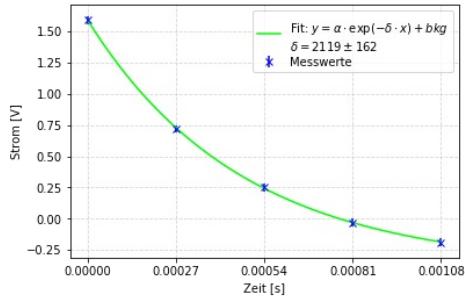
```
#bkg:
print("Background = ({}) +/- {}".format(a5_ampfit_opt[-1], np.sqrt(a5_ampfit_cov[-1][-1])))

Background = (0.3865361736584472 +/- 0.060595510119687446)
```

In [41]:

```
X = np.linspace(0, a5_TT[-1], 100)

plt.grid(alpha=0.5, linestyle='--')
plt.errorbar(a5_TT, a5_A, yerr=a5_dA, fmt='x', color='blue', label='Messwerte')
plt.plot(X, exp_bkg(X, *a5_ampfit_opt), color='lime',
         label="\n".join([r'Fit: $y = \alpha \cdot \exp\{-\delta \cdot x\} + bkg$',
                         r'$\delta = {:.0f} \pm {:.0f}$'.format(a5_ampfit_opt[1], np.sqrt(a5_ampfit_cov[1][1]))]))
plt.xticks(a5_TT)
plt.ylabel('Strom [V]')
plt.xlabel('Zeit [s]')
plt.legend()
plt.savefig('./plots/A4-logDekr.pdf', format='PDF')
```



In [42]:

```
a5_damp = a5_ampfit_opt[1]
a5_ddamp = np.sqrt(a5_ampfit_cov[1][1])
```

In [43]:

```
#log. Dekrement:
a5_logD = a5_damp * a5_T
a5_dlogD = np.sqrt((a5_ddamp * a5_T)**2 + (a5_damp * a5_dT)**2)

print("Log. Dekrement = ({}) +/- ({})".format(a5_logD, a5_dlogD))
Log. Dekrement = (0.572160519602459 +/- 0.07721175102504124)
```

Gesamtwiderstand:

In [44]:

```
a5_R = a5_damp * 2 * a5_L
a5_dR = 2 * np.sqrt((a5_ddamp * a5_L)**2 + (a5_damp * a5_dL)**2)

print("Gesamtwiderstand = ({}) +/- ({})".format(a5_R, a5_dR))
Gesamtwiderstand = (166.405185696013 +/- 44.33500201156478)
```

In [45]:

```
#Vergleich mit Widerstand aus Bandbreite mit gleichem eingestellten R=220ohm:
_ = sigma(a4_Rv1[1], a5_R, a4_dRv1[1], a5_dR, 'Gesamtwiderstand aus Bandbreite')

Sigmaabweichung Gesamtwiderstand aus Bandbreite = 0.536281759655896
```

In [46]:

```
#Vergleich mit Widerstand aus Spannungsdiff:
_ = sigma(a4_Rv2[1], a5_R, a4_dRv2[1], a5_dR, 'Gesamtwiderstand aus Spannungsdifferenz')

Sigmaabweichung Gesamtwiderstand aus Spannungsdifferenz = 1.782994344470715
```

Zu Aufgabe 6 (5)

In [47]:

```
#gemessen (eigentlich sind das die messungen von a5; fehler im skript):
a6_f = np.array([3.8,3.61,3.94]) * 1e3 #Hz
a6_df = np.full(3, 0.03e3)

a6_w = 2 * np.pi * a6_f #kreisfreq.
a6_dw = 2 * np.pi * a6_df

a6_C = 47e-9 #F
a6_R = 220 #ohm

#vom vorherigen teil:
a6_L = a4_L1m #L1
a6_dL = a4_dL1m

a6_d = a5_damp #dämpfungskonstante
a6_dd = a5_ddamp
```

In [48]:

```
#theoretische werte:
a6_wr = 1/np.sqrt(a6_C * a6_L)
a6_dwr = a6_wr * np.sqrt((0.1/2)**2 + (a6_dL/(2 * a6_L))**2)

a6_wc = np.sqrt(a6_wr**2 - 2 * a6_d**2)
a6_dwc = 2/a6_wc * np.sqrt((a6_wr * a6_dwr)**2 + (2 * a6_d * a6_dd)*2)

a6_wl = np.sqrt(a6_wr**2 + 2 * a6_d**2)
a6_dwl = 2/a6_wl * np.sqrt((a6_wr * a6_dwr)**2 + (2 * a6_d * a6_dd)*2)
```

In [49]:

```
a6_wtheo = np.array([a6_wr, a6_wc, a6_wl])
a6_dwtheo = np.array([a6_dwr, a6_dwc, a6_dwl])
```

In [50]:

```
#signifikanztests:
a6_sigs = sigma(a6_w, a6_wtheo, a6_dw, a6_dwtheo, 'Resonanzfrequenzen')

Sigmaabweichung Resonanzfrequenzen = [0.02281562 0.30293606 0.1924986 ]
```

In [51]:

```
head6 = ['w', 'dw', 'wtheo', 'dwtheo', 'sig']
tab6 = zip(a6_w, a6_dw, a6_wtheo, a6_dwtheo, a6_sigs)

print(tabulate(tab6, headers=head6, tablefmt="latex"))

\begin{tabular}{rrrrr}
\hline
w & dw & wtheo & dwtheo & sig \\
\hline
23876.1 & 188.496 & 23915.3 & 1707.8 & 0.0228156 \\
22682.3 & 188.496 & 23726.8 & 3442.74 & 0.302936 \\
24755.8 & 188.496 & 24102.3 & 3389.09 & 0.192499 \\
\hline
\end{tabular}
```

Zu Aufgabe 7

In [52]:

```
#gemessen:
a7_f = 3.68e3 #Hz
a7_df = 0.10e3 #Hz

a7_w = a7_f * 2 * np.pi
a7_dw = a7_df * 2 * np.pi

#eingestellt:
a7_L = a4_L1m
a7_dL = a4_dL1m
a7_C = 47e-9 #farad

print("gemessene Resonanzfrequenz = ({}) +/- ({})".format(a7_w, a7_dw))
gemessene Resonanzfrequenz = (23122.12193042088 +/- 628.3185307179587)
```

In [53]:

```
a7_wtheo = 1/np.sqrt(a7_L * a7_C)
a7_dwtheo = np.sqrt((a7_L)/(2*(a7_C*a7_L)**(3/2)) * 0.1*a7_C)**2 + ((a7_C)/(2*(a7_C*a7_L)**(3/2)) * a7_dL)**2
print("theoretische Resonanzfrequenz = ({}) +/- ({})".format(a7_wtheo, a7_dwtheo))
theoretische Resonanzfrequenz = (23915.305266436197 +/- 1707.7986729271686)
```

In [54]:

```
_ = sigma(a7_wtheo, a7_w, a7_dwtheo, a7_dw, 'Resonanzfrequenz')
Sigmaabweichung Resonanzfrequenz = 0.43588342089540577
```