Yaminabe -備忘録の闇鍋-

栗原 雅

最終更新日：2025/8/14

README

- この PDF を第三者へ譲渡される場合には、必ず私に許可を取ってください。
- 思いついたことをとりあえずまとめる闇鍋みたいな PDF です。
- 実際の闇鍋みたいにそれぞれの具がコンフリクトして絶望的なまずさになるのかは書いてみないと分からない。
- 誤りや誤植を見つけた際には適宜指摘して頂けると助かります。

目次

1 e^x の定義について

ネイピア数の定義：

$$e \equiv \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{1.1}$$

から出発してはさみうちの定理を用いることで実数 x に関する指数関数

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \tag{1.2}$$

を得る。

e^x のべき級数展開を行う際に一見困ったことが生じる。

$$\begin{aligned} e^x &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{x}{n}\right)^k \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{x^k}{k!} \end{aligned} \tag{1.3}$$

ここまでは問題ない。ここで、見知っている形：

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \tag{1.4}$$

と比較する（導出の観点からは比較する必要はないが）と、各 x のべき毎に展開して考えて

$$\lim_{n\to\infty} 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{x^k}{k!} = \frac{x^k}{k!} \tag{1.5}$$

となるので

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \tag{1.6}$$

を得る（k を固定したまま、n の極限を取ってから k について和を取った)。

ここで生じる疑問点は式 (1.3) では和を取ってから極限を取ったが、式 (1.5)、(1.6) ではそれぞれの項で極限をとってから和をとっていて、この操作は正当化されるのか、ということである。一般に和と極限の操作は交換しない。

例 1.1. [和と極限が交換しない例]

以下の数列を考える：

$$a_{n,k} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{if } k < n, \\ 0 & \text{if } k \geq n. \end{cases}$$

和を取ってから極限を取ると

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$$

となり、正の無限大に発散する。一方、k を固定したまま、n の極限を取ってから k について和を取ると

$$\lim_{n\to\infty} a_{n,k} = 0$$

$$\therefore \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{k=0}^{\infty} 0 = 0$$

となり、0 に収束する。 ◁

このように、安易に和と極限を交換すると怖いことが起こりうる。確認したいことを提示する。

命題 1.2. [先ほどの操作は正当化できるのか？]

$f_{n,k}(x) = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{x^k}{k!}$ について各 k を固定したまま n に関して極限を取ると

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} f_{n,k}(x)$$

が成り立つ。 ◁

実は、数学科の学部 1 年の後期で学習する事実（もはや飛び道具）を用いることで、先に挙げた操作は正当化できる。

定理 1.3. [**Weierstrass の M 判定法**]

I 上の実数値関数列 $\{f_n\}$ に対し、ある数列 $\{M_n\}$ が存在して、$|f_n(x)| \leq M_n$ $(x \in I)$ かつ $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$ ならば、$\sum_{n=1}^{\infty} f_n < \infty$ は I 上絶対一様収束（絶対収束かつ一様収束）する。 ◁

一様収束の強力さは、物理学科が通常お祈りする強力な性質である項別収束が成り立つ（逆に項別収束が成り立つが、一様収束が成り立たない例もある）ところにある。

定理 1.4. [**d'Alembert の収束判定法**]

数列 $\{a_n\}$ に対し、$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ の極限：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r$$

が存在するとする。このとき

- $0 \le r < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束
  （$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束することを $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束するといい、このとき $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する。）
- $r > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散

が成り立つ。 ◁

証明. [命題 **1.2** について]

Weierstrass の M 判定法を用いる。

$$f_{n,k}(x) = 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{x^k}{k!},\quad x\in[-R,R]\quad (R>0)$$

とすると、和を取る範囲から $k \le n$ となり

$$|f_{n,k}(x)| < \frac{R^k}{k!}(\equiv M_k). \qquad ①$$

ここで、$\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ に関して d'Alembert の収束判定法を用いると

$$\left|\frac{M_{n+1}}{M_n}\right| = \frac{\frac{R^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{R^k}{k!}} = \frac{R}{k+1} < \infty \quad (\text{as } k\to\infty)$$

となるので

$$\sum_{k=0}^{\infty} M_k < \infty. \qquad ②$$

①、②から Weierstrass の M 判定法より、$\sum_{k=0}^{\infty} f_{n,k}(x)$ は $[-R,R]$ 上一様収束する。
（d'Alembert の収束判定法を用いた際に、$R\in\mathbb{R}$ で収束したので、収束半径は $\mathbb{R}$、すなわち $\mathbb{R}$ 上一様収束する。）

以上より $\sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{x^k}{k!}$ は項別収束するので

$$1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{x^k}{k!} \to \frac{x^k}{k!} \quad (\text{as } n \to \infty)$$

としてよい。 □

余談だが、$(1 + \frac{1}{n})^n$ が収束することも示せる。

証明.

$b_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ とおくと

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=0}^{n} 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{1^k}{k!} \\ &< \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\ &< 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \\ &< 1 + 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} \\ &< 3. \end{aligned}$$

$\{b_n\}$ は単調増大かつ上に有界な数列なので収束する。この値をネイピア数 e と定義した（収束すれば一意であることに注意)。 □

参考文献

[1] 埼玉大学理学部物理学科、物理学演習 IA 演習問題