Vorkurs Mathematik für Informatiker Montag, 26. Oktober 2020
Wintersemester 2020/21
Dirk Hachenberger, Tobias Mömke, Kathrin Gimmi

Übungsblatt 5

Aufgabe 1 Zeigen Sie mit vollständiger Induktion die beiden folgenden Formeln für alle $n \in \mathbb{N}$:

a) $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b) $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Aufgabe 2 Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n^3 - n$ durch 3 teilbar.

Aufgabe 3 Beweisen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass folgende Formel für alle $n \in \mathbb{N}^*$ gültig ist:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Aufgabe 4 Es sei r eine reelle Zahl mit $r \geq -1$. Zeigen Sie (mit vollständiger Induktion), dass für alle $n \in \mathbb{N}^*$ gilt:

$$(1+r)^n \geq 1 + nr.$$

Machen Sie deutlich, an welcher Stelle Ihres Beweises die Voraussetzung $r \geq -1$ eingeht.

Aufgabe 5 Die Folge der FIBONACCI-*Zahlen* ist durch folgende Vorschriften *rekursiv* definiert:

$$F_0 := 0,\ F_1 := 1,\ F_n := F_{n-1} + F_{n-2} \text{ für } n \geq 2.$$

Die ersten elf Folgenglieder sind somit

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Beweisen Sie, dass die n-te Fibonacci-Zahl F_n durch folgende *explizite* Formel gegeben ist:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (a^n - b^n),$$

wobei

$$a := \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad b := \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Hinweise: Zeigen Sie zunächst, dass $a^2 = a + 1$ und $b^2 = b + 1$ gilt und verwenden Sie dann vollständige Induktion.

Aufgabe 6 Für $n \in \mathbb{N}^*$ ist die n-te *harmonische Zahl* H_n definiert durch

$$H_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}.$$

Zeigen Sie (mit vollständiger Induktion), dass für alle $n \in \mathbb{N}^*$ die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$\sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)H_n - n.$$

Aufgabe 7 Zeigen Sie (mit Hilfe der vollständigen Induktion), dass es **genau eine** natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$2^n < n^2.$$

Aufgabe 8 Ein Land habe n Städte, so dass je zwei Städte durch eine Einbahnstraße verbunden sind. Zeigen Sie, dass es eine Route gibt, die jede Stadt genau einmal besucht.

Aufgabe 9 Was ist falsch am folgenden Beweis?

Behauptung: Alle Autos auf dem Uniparkplatz haben dieselbe Farbe.

Beweis: Wir zeigen induktiv für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$, dass in jeder Menge von n Autos, alle dieselbe Farbe haben. Die Behauptung folgt, da es nur endlich viele Autos auf dem Uniparkplatz gibt.

I.A. $(n = 1)$**:** In jeder Menge bestehend aus einem einzigen Auto haben alle offenbar dieselbe Farbe.

I.S. $(n \to n+1)$**:** Nehmen wir als Induktionsvoraussetzung an, die Behauptung stimme für eine natürliche Zahl $n \geq 1$, und betrachten wir eine Menge von $n+1$ Autos. Fahren wir ein Auto A weg, so haben die verbleibenden n Autos nach I. V. dieselbe Farbe.

Fahren wir ein anderes Auto B aus derselben Menge (die also wieder n Autos enthält, darunter auch A), so haben alle Autos in dieser Menge ebenfalls nach I. V. dieselbe Farbe. Insbesondere hat also A dieselbe Farbe wie die restlichen Autos, die ja - wie gerade gesehen - alle dieselbe Farbe haben. Damit haben alle $n+1$ Autos dieselbe Farbe. Somit ist die Behauptung für $n+1$ bewiesen.

Aufgabe 10 Was halten Sie von der folgenden Behauptung (und ihrem angeblichen Beweis)?

Behauptung: Alle natürlichen Zahlen sind gleich.

Beweis: Um diese Behauptung zu zeigen, zeigen wir folgende Hilfsaussage per Induktion:

> Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Sind x und y zwei natürliche Zahlen kleiner gleich n, so gilt $x = y$.

I. A. $(n = 1)$**:** Dann gilt also $x \leq 1$ und $y \leq 1$. Da 1 die kleinste natürliche Zahl ist, muss dann aber bereits $x = 1$ und $y = 1$ gelten. Und deswegen natürlich auch $x = 1 = y$.

I. V. $(n \to n+1)$**:** Wir nehmen an, die Aussage gilt bereits für n und wollen zeigen, dass sie auch für $n+1$ gilt. Wir haben also $x \leq n+1$ und $y \leq n+1$. Dann gilt aber auch $x - 1 \leq n$ und $y - 1 \leq n$. Und für n gilt unsere Behauptung ja bereits, also ist $x - 1 = y - 1$ und damit natürlich auch $x = y$.