Vorkurs Mathematik für Informatiker Donnerstag, 22. Oktober 2020
Wintersemester 2020/21
Dirk Hachenberger, Tobias Mömke, Kathrin Gimmi

Übungsblatt 4

Aufgabe 1 Bestimmen Sie alle Elemente von $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\})) \cap \mathcal{P}(\{\emptyset, 1\})$.

Aufgabe 2 Es sei M eine Menge mit n Elementen, $a \notin M$. Um wie viele Elemente ist $\mathcal{P}(M \cup \{a\})$ größer als $\mathcal{P}(M)$?

Aufgabe 3 Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y) = \mathcal{P}(X \cap Y)$ und $\mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y) \subset \mathcal{P}(X \cup Y)$ für alle Mengen X und Y gilt. Geben Sie ein einfaches Beispiel dafür an, dass im zweiten Fall i.A. nicht die Gleichheit gilt.

Aufgabe 4 Seien A und B zwei endliche Mengen. Zeigen Sie: Ist $|A \times B|$ eine Primzahl, so ist entweder A oder B eine einelementige Menge.

Aufgabe 5 Bestimmen Sie die konkreten Zahlwerte der folgenden Terme; dabei ist die *Fakultätsfunktion* ! durch $n! := \prod_{j=1}^{n} j$ für $n \in \mathbb{N}^*$ und durch $0! := 1$ definiert.

a) $\sum_{n=1}^{4} \frac{2^n}{n!}$

b) $\sum_{n=0}^{5} \frac{(-1)^n \cdot n}{n+1}$

c) $\sum_{n=2}^{4} \left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{2}\right)$

d) $\sum_{m=1}^{3} \sum_{n=1}^{2} m! \cdot n$

Aufgabe 6 Vereinfachen Sie die folgenden Terme so weit, dass keine $\sum -$ oder $\prod -$Zeichen mehr vorkommen. Dabei ist m stets eine natürliche Zahl aus $\mathbb{N}^*$.

a) $\sum_{i=1}^{m} \frac{i}{2} + \sum_{j=1}^{m} \frac{m-j+1}{2}$,

b) $\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} (\frac{i}{m} + \frac{j}{m})\right)$,

c) $\prod_{j=1}^{m} \frac{j(j+2)}{(j+1)(j+3)}$.

<u>Hinweis:</u> Aus (a) kann man leicht folgern, dass $\sum_{k=1}^{m} k = \frac{m(m+1)}{2}$ gilt. Diese Formel darf in (b) (nicht aber in (a)) verwendet werden.

Aufgabe 7 Zu $m \in \mathbb{Z}$ sei $M_m = \{ x \in \mathbb{R} : m - 1 < x \leq m + 1 \}$. Bestimmen Sie:

a) $M_{-2} \cup M_0$

b) $M_3 \cap M_4$

c) $\bigcap_{m=1}^{5} M_m$

d) $\bigcup_{m=-1}^{4} M_{m+n}$, $n \in \mathbb{Z}$ (fest)

e) $\bigcup_{-m \in \mathbb{N}} M_m$

f) $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} M_{m+5}$

Aufgabe 8 Formulieren Sie zunächst die folgenden Aussagen als logische Formel mit Existenz- und Allquantoren. Entscheiden Sie anschließend, welche der Aussagen wahr sind und begründen Sie dies.

a) Für alle natürlichen Zahlen n gilt, dass für alle natürlichen Zahlen m gilt, dass $n = 2m$.

b) Für alle natürlichen Zahlen n existiert eine natürliche Zahl m, sodass $n = 2m$.

c) Es existiert eine natürliche Zahl n, sodass für alle natürlichen Zahlen m gilt, dass $n = 2m$.

d) Es existiert eine natürliche Zahl n, sodass eine natürliche Zahl m existiert, sodass $n = 2m$.

e) Für alle natürlichen Zahlen m gilt, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt, dass $n = 2m$.

f) Für alle natürlichen Zahlen m existiert eine natürliche Zahl n, sodass $n = 2m$.

g) Es existiert eine natürliche Zahl m, sodass für alle natürlichen Zahlen n gilt, dass $n = 2m$.

h) Es existiert eine natürliche Zahl m, sodass eine natürliche Zahl n existiert, sodass $n = 2m$.

Aufgabe 9

a) Wir betrachten die folgende Definition einer auf ihrem Definitionsbereich stetigen Funktion:

> Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *stetig auf* $D(f)$, wenn es für alle $x \in D(f)$ und alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $y \in D(f)$ mit $|x - y| < \delta$ gilt.

Schreiben Sie die Definition zunächst als logische Formel mit All- und Existenzquantoren. Negieren Sie anschließend die Formel.

b) Betrachten Sie nun die folgende Definition gleichmäßiger Stetigkeit:

> Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig auf* $D(f)$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für alle $x, y \in D(f)$ mit $|x - y| < \delta$ gilt.

Schreiben Sie nun die Definition gleichmäßiger Stetigkeit als logische Formel mit All- und Existenzquantoren. Was hat sich im Vergleich zur Definition aus Aufgabenteil (a) geändert? Wie verhalten sich Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit folglich zueinander?