Universität Augsburg University

2. Übungsblatt zu Diskrete Strukturen und Logik Wintersemester 2020

Prof. Dr. Tobias Mömke

Abgabe: 16.11.2020 (Montag), 12:00; als pdf über Digicampus

Eine Abgabe pro Übungsgruppe (üblicherweise 3 Studierende).
Bitte schreiben Sie die folgenden Informationen auf jede Übungsabgabe:

- Name + Matrikelnummer für **jedes** Gruppenmitglied
- Übungsblattnummer, Übungsnummer (Ü01 - Ü10), Übungsgruppenleiter

HINWEIS: Einige Übungen benötigen Inhalte, die erst in der Vorlesung am Mittwoch behandelt werden. Die entsprechenden Folien (nicht annotiert) sind schon jetzt auf Digicampus veröffentlicht.

Aufgabe 2.1 (25 Punkte)

(a) Sie haben lange nichts gegessen und finden eine Pizzaria. Dort gibt es fünf Arten von Pizza und Sie können einzelne Stücke zum mitnehmen kaufen. Insgesamt haben Sie Geld für 13 Stücke. Dementsprechend haben Sie beschlossen, genau 13 Stücke zu kaufen. Auf wie viele Arten können Sie Ihre 13 Stücke auswählen?

(b) Sie überlegen weiter und entscheiden, dass Sie zudem von jeder der fünf Sorten mindestes ein Stück probieren möchten. Auf wie viele Arten können Sie Ihre 13 Stücke jetzt auswählen?

Aufgabe 2.2 (25 Punkte)

(a) Nachdem Sie die Pizzastücke aus Aufgabe 2.1 gegessen haben, sind Sie sehr durstig. Sie treffen sich mit Ihrer Übungsgruppe der Größe 3 und zwei weiteren Freunden, so dass Sie genau die im Lockdown erlaubte Gruppengröße von 5 haben. Im Getränkeladen gibt es eine Auswahl von 20 verschiedenen Getränken und jeder in der Gruppe kauft ein Getränk. Sie wollen, dass alle 5 gekauften Getränke paarweise verschieden sind. (Also insgesamt 5 verschieden Getränke.) Auf wie viele verschiedene Arten können Sie die Getränke kaufen? (Sie unterscheiden, wer welches Getränk kauft.)

(b) Die Getränke haben nicht gereicht. Sie haben sich 5 paarweise verschiedene Sorten ausgesucht, wollen aber nun 10 zusätzliche Getränke kaufen. Wie viele Möglichkeiten gibt es nun? (Sie kaufen jetzt also 10 Getränke. Es können von jeder Sorte Null oder mehr Getränke gekauft werden, aber keine anderen Getränke als die ausgesuchten Sorten.)

Aufgabe 2.3 (25 Punkte) Zeigen Sie:

$$S_{n,n-1} = \binom{n}{2}$$

Benutzen Sie dazu (wie immer) nur die Inhalte der Vorlesung/des Vorkurses.

Aufgabe 2.4 (25 Punkte)

Gegeben sind 10 Wähler und 4 Kandidaten $K := \{a, b, c, d\}$. Jeder Wähler gibt jedem Kandidaten eine Bewertung zwischen 0 und 10. Dementsprechend ist eine abgegebene Bewertung für die Kandidaten K ein Tupel $\beta = (\beta_a, \beta_b, \beta_c, \beta_d) \in \{0, 1, \ldots, 10\}^4 =: B$.

Die Bewertungen bestimmen auch eine Ordnung der Kandidaten. Hat Wählerin w beispielsweise dem Kandidaten a 5 Punkte und dem Kandidaten c 10 Punkte gegeben, dann wertet w, dass für sie $c > a$ gilt.

Wir betrachten nun die folgenden Wahlmethoden F_1, F_2, F_3, F_4, Funktionen $B^{10} \to K \cup \{\perp\}$. Das Zeichen $\perp$ steht für undefiniert. Anstatt von Reihenfolgen zu einer Reihenfolge kommen wir also von Bewertungen zu einem Gewinner (oder einem undefinierten Ausgang). Sei $\omega \in B^{10}$ eine Wahl. Wir schreiben $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_{10})$.

F_1: Der Kandidat, der die meisten relativen Erstpräferenzen hat, gewinnt.
Erstpräferenzen von $\beta = \omega_i$, $i \in [10]$ sind die Kandidaten $E_\beta := \{k \in K : \beta_k = \max_{x \in K} \beta_x\}$.
Für jeden Kandidaten $k \in E$ zählen wir den Durschnittswert $1/|E|$.
Insgesamt gewinnt k mit maximaler Bewertung $\sum_{i=1}^{10} \begin{cases} 0 & \text{falls } k \notin E_{\omega_i} \\ 1/|E_{\omega_i}| & \text{sonst} \end{cases}$
Falls zwei Kandidaten das Maximum erreichen, ist das Ergebnis $\perp$.

F_2: Bestimme iterativ die Bewertung von F_1 und streiche den Kandidaten mit **niedrigster** Bewertung, bis nur ein Kandidat übrig ist. Falls es irgendwann gleichbewertete Kandidaten gibt, ist das Ergebnis der Wahl $\perp$.

F_3: Bestimme F_1 für jedes Paar von kandidaten. Falls es genau einen Kandidaten k gibt, der für alle $k' \neq k$ bei Betrachtung der Einschränkung von F_1 auf die Kandidaten $\{k, k'\}$ gewählt wird, dann ist $F_3(\omega) = k$. Falls es keinen solchen Kandidaten gibt, ist das Ergebnis $\perp$.

F_4: Der Kandidat mit höchster durchschnittlicher Bewertung $\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (\omega_i)_k$ gewinnt. Falls es zwei Gewinner gibt, ist das Ergebnis $\perp$.

Finden Sie eine Wahl ω (also Bewertungen von allen Wählern für alle Kandidaten), so dass $F_1(\omega) = a$, $F_2(\omega) = b$, $F_3(\omega) = c$, und $F_4(\omega) = d$ gilt.

Hinweis: Mehrere Wähler können genau die gleiche Bewertung abgeben. Sie können beispielsweise schreiben, 3 Wähler geben die Bewertung $(2, 9, 4, 8)$ ab.