Vorkurs Mathematik für Informatiker Donnerstag, 29. Oktober 2020
Wintersemester 2020/21
Dirk Hachenberger, Tobias Mömke, Kathrin Gimmi

Übungsblatt 8

Aufgabe 1 Seien T_n und $\widetilde{T}_n$ definiert wie auf Übungsblatt 7. Bestimmen Sie für die folgenden Mengen jeweils deren Mächtigkeit:

a) T_n b) $\widetilde{T}_n$ c) $\{ f : [m] \to [n] \mid f \text{ ist injektiv} \}$.

Aufgabe 2 Zeigen Sie die folgenden Identitäten für alle $n, m, k \in \mathbb{N}$:

a) $\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$

b) $\sum_{i=0}^{m} \binom{n}{i}\binom{n-i}{m-i} = \binom{n}{m} \cdot 2^m$

Aufgabe 3 Zeigen Sie:

a) Ist p ein Primzahl und $1 \leq i < p$, so teilt p den Binomialkoeffizienten $\binom{p}{i}$.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und Primzahlen p gilt: p teilt $n^p - n$.

Aufgabe 4

a) Seien U, V abzählbar unendlich und disjunkt. Dann ist $U \cup V$ abzählbar.

b) Seien U, V abzählbar unendlich. Dann ist $U \times V$ abzählbar unendlich.

c) Es ist $\{ U \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : |U| < \infty \} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ abzählbar unendlich.

Aufgabe 5 Zeigen Sie:

a) Es gibt keine Menge M, die gleichzeitig endlich und unendlich ist.

b) Sei M eine unendliche Menge und $x \notin M$, so gibt es eine Bijektion $f : M \cup \{ x \} \to M$.

c) Sei M Menge, $x \notin M$ und $f : M \cup \{ x \} \to M$ eine Bijektion. Dann ist M nicht endlich.

Aufgabe 6 Sei $I := [0, 1]$. Zeigen Sie, dass es keine bijektive Abbildung zwischen I und $\mathbb{Q}$ gibt.