Vorkurs Mathematik für Informatiker Dienstag, 20. Oktober 2020
Wintersemester 2020/21
Dirk Hachenberger, Tobias Mömke, Kathrin Gimmi

Übungsblatt 2

Aufgabe 1 Betrachten Sie die folgenden Paare von Mengen. Beweisen Sie, welche der Beziehungen $\subseteq, \supseteq, =$ jeweils gelten.

a) $M_1 = \{ n \in \mathbb{Z} : \text{Es gibt ein } m \in \mathbb{Z} \text{ mit } 3 \cdot m = n \}$
$M_2 = \{ n \in \mathbb{Z} : \text{Es gibt ein } m \in \mathbb{Z} \text{ mit } 6 \cdot m = n \}$

b) $M_3 = \{ n \in \mathbb{Z} : 4 \text{ teilt } n \}$
$M_4 = \{ n \in \mathbb{Z} : \text{Es gibt ein } m \in \mathbb{Z} \text{ mit } n = (2m)^2 \}$

Aufgabe 2 Zeigen oder widerlegen Sie:

a) Die Summe zweier gerader Zahlen ist immer eine gerade Zahl.

b) Die Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist immer durch 2 teilbar.

c) Die Summe einer geraden und einer ungeraden Zahl ist eine ungerade Zahl.

d) Das Produkt zweier ungerader Zahlen ist ungerade.

e) Die Differenz benachbarter Quadratzahlen ist stets eine Primzahl.

f) Für jede natürliche Zahl m gibt es eine natürliche Zahl n sodass $n + m = nm$ ist.

g) Das Produkt einer geraden Zahl mit einer beliebigen anderen ganzen Zahl ist gerade.

Aufgabe 3 Zeigen Sie:

a) Für jede natürliche Zahl n ist $n^2 + n + 1$ eine ungerade natürliche Zahl.
(Hinweis: Fallunterscheidung n ungerade bzw. n gerade.)

b) Für jede natürliche Zahl n und jede ungerade natürliche Zahl u ist $n^2 + un + 1$ eine ungerade natürliche Zahl.

Aufgabe 4 Zeigen Sie:

a) Sei $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie: Gilt $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, dann ist auch $a + b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

b) Sei $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{Q}^*$. Zeigen Sie: Gilt $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, dann ist auch $a \cdot b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Aufgabe 5 Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie, dass es dann keine rationale Zahl x mit $x^2 = p$ gibt.
Hinweis: In der Vorlesung wurde diese Aussage für den Fall $p = 2$ gezeigt (wo?). Sie können hier zunächst analog vorgehen, dürfen dann aber ohne Beweis verwenden, dass für jede Primzahl p und alle natürlichen Zahlen m gilt: Teilt p die Zahl m^2, so teilt p auch m.

Aufgabe 6 Konstruieren Sie auf die in Abschnitt 6 des Skripts beschriebene Weise die Zahlen $-\frac{4}{3}$ und $\frac{5}{2}$ auf der Zahlengeraden.

Aufgabe 7 Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der folgenden Gleichungen:

a) $\frac{x^2+x-1}{2x+1} = \frac{x^2}{x+2}$,

b) $\sqrt{x+1} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x+2} = 0$.