Dirk Hachenberger, Tobias Mömke, Kathrin Gimmi

Übungsblatt 3

Aufgabe 1 Welche der folgenden Sprachobjekte sind (logische) Aussagen?

a) Tegucigalpa ist die Hauptstadt von Honduras.

b) $\{\, x \in \mathbb{Z} : x^2 = 9 \,\} = \{\, -3, 3 \,\}$

c) $a < b$

d) Ist die natürliche Zahl n gerade, dann ist $n + 2$ ungerade.

e) $\mathbb{P} := \{\, p \in \mathbb{N} : \text{Für alle } a, b \in \mathbb{Z} \text{ gilt: } p \mid ab \implies p|a \vee p|b \,\}$

f) Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge.

g) Wenn es schneit, ist es draußen kalt.

h) Formulieren Sie den kleinen Satz von Fermat.

i) Welche Mächtigkeit hat die Menge $\{\, x \in \mathbb{Z} : x \text{ teilt } 3 \,\}$?

j) Alle Mathematiker rauchen nicht.

k) $\{\, x \in \mathbb{Z} : -2 < x < 5 \,\}$

Aufgabe 2 Seien A und B zwei logische Aussagen. Stellen Sie die Wahrheitstafeln für die folgenden Aussagen auf:

a) $A \wedge \neg B$

b) $\neg(A \vee \neg B)$

c) $A \Rightarrow (\neg A \vee \neg B)$

d) $(A \vee \neg A) \wedge (B \vee \neg B)$

e) $(A \wedge \neg B) \wedge (A \Leftrightarrow B)$

Aufgabe 3 Seien A, B zwei logische Aussagen. Stellen Sie die Wahrheitstafel zu der Aussage „Höchstens eine der Aussagen A bzw. B ist wahr.“ auf und geben Sie anschließend eine dazu äquivalente Formel an.

Aufgabe 4 Beweisen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstafel die erste und die zweite de Morgan'sche Regel für logische Aussagen: $\neg(X \wedge Y) \Leftrightarrow (\neg X) \vee (\neg Y)$ bzw. $\neg(X \vee Y) \Leftrightarrow (\neg X) \wedge (\neg Y)$.

Aufgabe 5 In einem Kriminalfall mit 3 Tatverdächtigen P, Q und R steht fest:

- Falls P und Q nicht beide beteiligt waren, dann ist auch R außer Verdacht.
- Ist Q schuldig oder R unschuldig, dann kann auch P nicht der Täter sein.
- Mindestens einer der drei war der Täter.

Formalisieren Sie die obigen Aussagen. Folgern Sie dann, wer der/die Täter ist/sind.

Aufgabe 6 Drei Personen machen folgende Aussagen:

- Person A: Entweder B oder C sagt die Wahrheit.
- Person B: C sagt die Wahrheit.
- Person C: A und B sagen die Wahrheit.

Formalisieren Sie die obigen Aussagen. Folgern Sie dann, wer lügt und wer die Wahrheit sagt.

Aufgabe 7

a) Zeigen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstafel, dass, wie in der Vorlesung behauptet, $A \Rightarrow B$ äquivalent zu $\neg A \vee B$ ist.

b) Zeigen Sie nun direkt mit Hilfe der Gesetze aus Satz 11[a] sowie Teilaufgabe a) die Äquivalenz von $A \Rightarrow B$, $\neg B \Rightarrow \neg A$ und $(A \wedge \neg B) \Rightarrow f$.

Aufgabe 8 Sei Q die Menge aller Quadratzahlen und G die Menge aller geraden Zahlen. Beschreiben Sie dann die folgenden Mengen: $Q \cap G$, $Q \Delta G$, $Q \setminus G$, $G \setminus Q$.

Aufgabe 9 Zeigen Sie für beliebige Teilmengen A, B, C einer Menge M:

$$(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) = (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A).$$

Aufgabe 10 Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

a) Ist mn gerade, dann ist m gerade oder n gerade.

b) Ist $m + n$ gerade, dann sind m und n gerade oder m und n ungerade.