Vorlesung Informatik 1
(Wintersemester 2020/2021)

Kapitel 3: Zahlensysteme

Martin Frieb
Johannes Metzger

Universität Augsburg
Fakultät für Angewandte Informatik

11. November 2020

Universität Augsburg
Institut für Informatik

Motivation

Informationsdarstellung im Arbeitsspeicher

Im Arbeitsspeicher/ Cache wird Information durch Spannungen dargestellt, wobei nur zwei Spannungen unterschieden werden:

- niedrige Spannung: 0 V bis 0,5 V (=0)
- höhere Spannung: 1,0 V bis 1,5 V (=1)
  (Versorgungsspannung 1,5 Volt)

Dadurch lassen sich zwei Ziffern darstellen (0 und 1), also die Zustände von einem Bit

Binäres Zahlensystem

Im **binären Zahlensystem** bestehen Zahlen nur aus den Ziffern 0 und 1. Es wird verwendet, um **Information** (Zahlen, Texte, Bilder, Musik, Videos, ...) durch **Bitfolgen computergerecht** darzustellen

Motivation

Binärzahlen sind für den Menschen sehr lang und unübersichtlich. Man benutzt daher aushilfsweise auch noch andere ähnliche Zahlensysteme: **Oktalsystem**, **Hexadezimalsystem**

Kenntnis von Zahlensystemen ist nützlich

- für (hardwarenahe) Programmierung notwendig (um korrekte Programme zu schreiben)
- für normale Benutzer nützlich (technische Anleitungen, Fehlermeldungen, ...)

Als Informatiker sollte man wissen

- wie Zahlen, Zeichen, Ton, Bilder, usw. durch Bitfolgen **codiert** werden (können)
- was man dabei beachten muss (Möglichkeit der **Decodierung**, **Arithmetik** auf codierten Zahlen usw.)

Einige mathematische Operationen

Arithmetische Vergleichsoperationen auf Zahlen

Bedeutung	Operationszeichen	Beispiele
Kleiner	$<$	$1 < 2$
Kleiner gleich	$\leq$	$1 \leq 1$, $1 \leq 2$
Größer	$>$	$0 > -1$
Größer gleich	$\geq$	$0 \geq 0$, $0 \geq -1$
Gleich	$=$	$0 = 0$
Ungleich	$\neq$	$0 \neq 1$

Wichtig: Diese Operationszeichen gelten **nicht** für Programmiersprachen, sondern für mathematische Formeln in Texten. In Programmiersprachen gibt es diese Operatinen auch, sie werden aber anders bezeichnet (z.B. wird in C == für den Vergelich auf Gleichheit verwendet)

Einige mathematische Operationen

Arithmetische Rechenoperationen auf Zahlen

Bedeutung	Operationszeichen	Beispiele
Addition	$+$	$1+2=3$
Subtraktion	$-$	$1-2=-1$
Multiplikation	$\cdot$	$1\cdot 2=2$
Reelle Division	$/$	$5/2=2.5$
Ganzzahlige Division	$\div$	$5\div 2=2$
Modulo	mod	$5 \bmod 2=1$
Abrundung	$\lfloor\cdot\rfloor$	$\lfloor 5.2\rfloor=5$
Aufrundung	$\lceil\cdot\rceil$	$\lceil 5.2\rceil=6$
Absolutbetrag	$\lvert\cdot\rvert$	$\lvert-6\rvert=6$
Positives Vorzeichen	$+$	$+1$
Negatives Vorzeichen	$-$	-1

Mengen

Definition 3.1 (Menge, Element)

- Eine Menge ist eine Zusammenfassung **unterscheidbarer Objekte** zu einer Gesamtheit.
- Die in einer Menge zusammengefassten Objekte heißen deren **Elemente**. Ist a ein Element einer Menge A, so schreiben wir $a \in A$, andernfalls schreiben wir $a \notin A$.
- Die **leere Menge** hat keine Elemente und wird mit $\emptyset$ bezeichnet.

Definition 3.2 (Teilmenge)

- Ist jedes Element einer Menge A auch Element einer Menge B, so heißt A **Teilmenge von** B. Ist A eine Teilmenge von B, so schreiben wir $A \subseteq B$.
- Gilt $A \subseteq B$ und $A \neq B$, so heißt A **echte Teilmenge von** B. Ist A eine echte Teilmenge von B, so schreiben wir $A \subset B$.
- Mit $P(A) := \{B \mid B \subseteq A\}$ bezeichnen wir die Menge aller Teilmengen von A, die sog. **Potenzmenge von** A.

Mengen

Definition 3.3 (Endliche Menge)

Eine Menge heißt **endlich**, falls sie endlich viele Elemente hat. Die **Mächtigkeit** $|A|$ einer endlichen Menge A ist die Anzahl ihrer Elemente.

Schreibweise für endliche Mengen

Eine endliche Menge A mit $n > 0$ Elementen $a_1, \ldots, a_n$ gibt man durch Aufzählung aller Elemente in geschweiften Klammern in der folgenden Form an:

$$A = \{a_1, \ldots, a_n\}.$$

Beispiel 3.4

- $\{0, 1\}$ ist die Menge mit den Elementen 0 und 1 und hat die Mächtigkeit $|\{0, 1\}| = 2$.
- Die leere Menge hat die Mächtigkeit $|\emptyset| = 0$.

Mengen

Einige feste Symbole für bestimmte (unendliche) Zahlenmengen

- $\mathbb{Z}$: Menge der **ganzen Zahlen**.
- $\mathbb{N} := \{n \mid n \in \mathbb{Z}, n > 0\}$: Menge der **natürlichen Zahlen**.
- $\mathbb{N}_0 := \{n \mid n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}$: Menge der **nicht-negativen** ganzen Zahlen.
- $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$: Menge der **rationalen** Zahlen.
- $\mathbb{R}$: Menge der **reellen** Zahlen.

Schreibweise für unendliche Mengen

Eine unendliche Menge A gibt man durch **Eigenschaften** $E_1, \ldots, E_n$**, die deren Elemente charakterisieren**, in der folgenden Form an:

$$A := \{a \mid E_1, \ldots, E_n\}.$$

Lies: *Menge aller Elemente a* ***mit den Eigenschaften*** $E_1, \ldots, E_n$.
Damit gehören **genau** die Elemente zu A, die **alle** Eigenschaften $E_1, \ldots, E_n$ erfüllen.

Mengen

Mathematische Definitionen

Eine **mathematische Definition** ist die eindeutige Festlegung der Bedeutung und Verwendung eines Begriffs, Symbols oder einer Schreibweise. Ein neues Symbol kann durch Rückführung auf bereits bekannte, vorher definierte Symbole definiert werden. Mit dem Zeichen $:=$ werden linke und rechte Seite **gleich gesetzt**, wobei

- Auf der linken Seite von $:=$ das neue Symbol steht, das man definieren möchte
- Auf der rechten Seite von $:=$ die Bedeutung des neuen Symbols festgelegt wird durch eine Formel, in der nur bereits bekannte Symbole vorkommen

Zum Beispiel wird in

$$\mathbb{N} := \{n \mid n \in \mathbb{Z}, n > 0\}$$

das neue Symbol $\mathbb{N}$ eingeführt (linke Seite). Durch die rechte Seite wird festgelegt, dass es sich bei $\mathbb{N}$ um eine Menge handelt, und zwar um die Menge der **positiven** ganzen Zahlen. $\mathbb{N}$ wird damit zurückgeführt auf $\mathbb{Z}$ durch Hinzunahme des zusätzlichen Merkmals **positiv**. Da es auch nicht-positive ganze Zahlen gibt, unterscheiden sich $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$.

Mengen

Definition 3.5 (Intervalle)

Seien $n, m \in \mathbb{R}$ und $n \leq m$:

- $[n, m] := \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq n, x \leq m\}$.
- $[n, m[:= \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq n, x < m\}$.
- $]n, m] := \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > n, x \leq m\}$.
- $]n, m[:= \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > n, x < m\}$.
- $[n, \infty[:= \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq n\}$.
- $]n, \infty[:= \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > n\}$.
- $]-\infty, m] := \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq m\}$.
- $]-\infty, m[:= \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < m\}$.

Definition 3.6 (Das Symbol ∞)

- ∞ bezeichnet einen Wert, der größer ist als jede ganze Zahl (**unendlich**).
- $-\infty$ bezeichnet einen Wert, der kleiner ist als jede ganze Zahl (**minus unendlich**).

Mengen

Definition 3.7 (Mengen-Operationen)

Seien A, B Mengen.

- Der **Durchschnitt** (die **Schnittmenge**) $A \cap B := \{x \mid x \in A, x \in B\}$ von A und B ist eine Zusammenfassung aller Objekte, die Elemente in A und in B sind.
- Die **Vereinigung(smenge)** $A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B \text{ oder } x \in A \cap B\}$ von A und B ist eine Zusammenfassung aller Objekte, die Elemente in A, in B oder in A und in B sind.
- Die **Differenz** $A \setminus B := \{x \mid x \in A, x \notin B\}$ von A und B ist eine Zusammenfassung aller Objekte, die Elemente in A, aber nicht in B sind.

Beispiel 3.8

- $\{1,2\} \cap \{2,3\} = \{2\}$.
- $\{1,2\} \cup \{2,3\} = \{1,2,3\}$.
- $\{1,2\} \setminus \{2,3\} = \{1\}$.

Was ist die *B*-adische Darstellung?

Definition 3.9 (*B*-adische Darstellung ganzer Zahlen)

Für jedes $x \in \mathbb{N}$ und für jede ganze Zahl $B > 1$ gibt es eindeutige ganze Zahlen $b_0, \ldots, b_k \in \{0, 1, 2, ..., B-1\}$ mit:

$$x = \sum_{i=0}^{k} b_i \cdot B^i =: (b_k \ldots b_0)_B.$$

Man nennt:

- $(b_k \ldots b_0)_B$ die ***B*-adische Darstellung** von x
- B die **Basis** dieser Darstellung
- $b_0, \ldots, b_k$ die **Ziffern** dieser Darstellung

Was ist die *B*-adische Darstellung?

Die Summenschreibweise

Wir definieren die Summenschreibweise $\sum_{i=m}^{n} A_i$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \leq n$, wie folgt **induktiv nach** n:

(1) Induktionsanfang $n = m$: $\sum_{i=m}^{m} A_i := A_m$

(2) Induktionsschritt $n \to n+1$: $\sum_{i=m}^{n+1} A_i := (\sum_{i=m}^{n} A_i) + A_{n+1}$

Beispiel für $m = 1$ und $n = 4$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{4} i &\overset{(2)}{=} (\sum_{i=1}^{3} i) + 4 \\
&\overset{(2)}{=} ((\sum_{i=1}^{2} i) + 3) + 4 \\
&\overset{(2)}{=} (((\sum_{i=1}^{1} i) + 2) + 3) + 4 \\
&\overset{(1)}{=} 1 + 2 + 3 + 4 \\
&= 10
\end{aligned}$$

Was ist die *B*-adische Darstellung?

Induktive Definitionen

Hängt eine Schreibweise von einem Parameter $n \in \mathbb{N}$ ab, so wird diese häufig durch eine sog. **vollständige Induktion nach** n definiert. Diese besteht aus 2 Schritten:

- Definition der Schreibweise für den kleinsten Wert von n (**Induktionsanfang**).
- Definition der Schreibweise für $n+1$ durch Rückführung auf den Fall n (**Induktionsschritt**).

Im Beispiel wird die Summenschreibweise zuerst für $n = m$ definiert (Induktionsanfang) und dann eine Formel angegeben, durch die man die Summenschreibweise für $n+1$ auf die Summenschreibweise für n (für beliebiges n) zurückführen kann (Induktionsschritt). Für konkrete n, m ergibt sich so zum Beispiel durch **wiederholte Anwendung des Induktionsschritts**:

$$\sum_{i=2}^{4} A_i = (\sum_{i=2}^{3} A_i) + A_4 = ((\sum_{i=2}^{2} A_i) + A_3) + A_4 = A_2 + A_3 + A_4$$

Berechnung einer *B*-adischen Darstellung

Beispiel 3.10 (*B*-adische Darstellung)

- $21 = 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 = (21)_{10}$ (Dezimaldarstellung)
- $21 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (10101)_2$ (Binärdarstellung)
- $131 = 2 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 = (203)_8$ (Oktaldarstellung)
- $27 = 1 \cdot 16^1 + 11 \cdot 16^0 = (1B)_{16}$ (Hexadezimaldarstellung)
  (der Buchstabe *B* steht hier für die Ziffer 11 - Details später)

Wie finde ich die *B*-adische Darstellung von *x*?

Beobachtung: $(\sum_{i=0}^k b_i \cdot B^i)/B = b_k \cdot B^{k-1} + \ldots + b_1 \cdot B^0 + b_0 \cdot B^{-1}$

- $(\sum_{i=0}^k b_i \cdot B^i) \bmod B = b_0$
- $(\sum_{i=0}^k b_i \cdot B^i) \div B = \sum_{i=1}^k b_i \cdot B^{i-1}$
- $(\sum_{i=1}^k b_i \cdot B^{i-1}) \bmod B = b_1$
- $(\sum_{i=1}^k b_i \cdot B^{i-1}) \div B = \sum_{i=2}^k b_i \cdot B^{i-2}$
- und so weiter

- $131 \bmod 8 = 3$
- $131 \div 8 = 16$
- $16 \bmod 8 = 0$
- $16 \div 8 = 2$
- $2 \bmod 8 = 2$

Berechnung einer *B*-adischen Darstellung

Wie finde ich die *B*-adische Darstellung von *x*?

Hornerverfahren

```
void horner_nat(int b[], int x, int B)
{
    int i = 0;
    while (x > 0) {
        b[i] = x % B;
        x = x / B; /*ganzzahlige Division!*/
        ++i;
    }
}
```

Beispiel 3.11 ($x = 131$, $B = 8$)

$i = 0$: $b_0 = 131 \bmod 8 = 3$, $x = 131 \div 8 = 16$

$i = 1$: $b_1 = 16 \bmod 8 = 0$, $x = 16 \div 8 = 2$

$i = 2$: $b_2 = 2 \bmod 8 = 2$, $x = 2 \div 8 = 0$

Rechnen in einer *B*-adischen Darstellung

B-adische Darstellungen von Zahlen mit $B \neq 10$ können auf dieselbe Art addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert werden wie im Dezimalsystem durch **stellenweise Ausführung der Operation mit Übertrag**. Beachte dabei: Der Übertrag erfolgt hier bei Ergebnissen $> B-1$ (denn dann entsteht ein Beitrag zur Ziffer der nächsthöheren *B*-Potenz)

Beispiel 3.12 (Stellenweise Addition und Subtraktion mit Übertrag)

Beispiel $(451)_8 - (337)_8$:

Stelle		2	1	0
Ziffer		8^2	8^1	8^0
a		4	5	1
b	$-$	3	3	7
Übertrag		0	1	0
$a-b$		1	1	2

Beispiel $(111)_2 + (11)_2$:

Stelle		3	2	1	0
Ziffer		2^3	2^2	2^1	2^0
a			1	1	1
b	$+$			1	1
Übertrag		1	1	1	0
$a+b$		1	0	1	0

Binärdarstellung

Definition 3.13 (Binärdarstellung)

Die 2-adische Darstellung einer Zahl nennt man **Binärdarstellung**.
Eine Zahl in Binärdarstellung besteht aus den Ziffern 0 und 1.

Einige Binärzahlen

Für die Dezimalzahlen von 0 bis 15 sollte man die Binärdarstellungen auswendig können:

$0 = (0)_2$	$4 = (100)_2$	$8 = (1000)_2$	$12 = (1100)_2$
$1 = (1)_2$	$5 = (101)_2$	$9 = (1001)_2$	$13 = (1101)_2$
$2 = (10)_2$	$6 = (110)_2$	$10 = (1010)_2$	$14 = (1110)_2$
$3 = (11)_2$	$7 = (111)_2$	$11 = (1011)_2$	$15 = (1111)_2$

Es gilt offenbar $2^n = (10\ldots0)_2$ (mit $n+1$ Stellen) und
$2^n - 1 = (1\ldots1)_2$ (mit n Stellen)

Oktaldarstellung

Definition 3.14 (Oktaldarstellung)

Die 8-adische Darstellung einer Zahl nennt man **Oktaldarstellung**. Eine Zahl in Oktaldarstellung besteht aus den Ziffern $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Schnelle Umrechnung zwischen Binär- und Oktaldarstellung

Wegen $8 = 2^3$ stehen jeweils 3 Binärziffern für eine Oktalziffer:

$$\begin{array}{llll} (0)_8 = (000)_2 & (2)_8 = (010)_2 & (4)_8 = (100)_2 & (6)_8 = (110)_2 \\ (1)_8 = (001)_2 & (3)_8 = (011)_2 & (5)_8 = (101)_2 & (7)_8 = (111)_2 \end{array}$$

Beispiel 3.15 (Umrechnung zwischen Binär- und Oktaldarstellung)

$(174)_8 = (001111100)_2$

Hexadezimaldarstellung

Definition 3.16 (Hexadezimaldarstellung)

Die 16-adische Darstellung einer Zahl nennt man **Hexadezimaldarstellung**. Eine Zahl in Hexadezimaldarstellung besteht aus den Ziffern $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F$ ($A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, E = 14, F = 15$).

Schnelle Umrechnung zwischen Binär- und Hexadezimaldarstellung

Wegen $16 = 2^4$ stehen jeweils 4 Binärziffern für eine Hexadezimalziffer:

$(0)_{16} = (0000)_2$	$(4)_{16} = (0100)_2$	$(8)_{16} = (1000)_2$	$(C)_{16} = (1100)_2$
$(1)_{16} = (0001)_2$	$(5)_{16} = (0101)_2$	$(9)_{16} = (1001)_2$	$(D)_{16} = (1101)_2$
$(2)_{16} = (0010)_2$	$(6)_{16} = (0110)_2$	$(A)_{16} = (1010)_2$	$(E)_{16} = (1110)_2$
$(3)_{16} = (0011)_2$	$(7)_{16} = (0111)_2$	$(B)_{16} = (1011)_2$	$(F)_{16} = (1111)_2$

Beispiel 3.17 (Umrechnung zwischen Binär- und Hexadezimaldarstellung)

$(1B9)_{16} = (000110111001)_2$

Weitere Schreibweisen für Ganzzahl-Konstanten

Definition 3.18 (Oktal-Schreibweise von Ganzzahl-Konstanten)

`<Vorzeichen>0<Ziffernfolge>`

wobei:

- Das Vorzeichen ist + oder − und ist optional.
- Die Ziffernfolge enthält nur Oktalziffern und entspricht der Oktaldarstellung der Zahl
- Die Ziffernfolge enthält keine führenden `0`en

Beispiele:

- `02` entspricht `2`
- `033` entspricht `27`

Zugehörige Umwandlungsangabe für `printf`:

- `%o`

Weitere Schreibweisen für Ganzzahl-Konstanten

Definition 3.19 (Hexadezimal-Schreibweise von Ganzzahl-Konstanten)

`<Vorzeichen>0x<Ziffernfolge>`

wobei:

- Das Vorzeichen ist + oder − und ist optional.
- Die Ziffernfolge enthält nur Hexadezimalziffern und entspricht der Hexadezimaldarstellung der Zahl
- Die Ziffernfolge enthält keine führenden `0`en
- `x` kann auch groß geschrieben werden: `<Vorzeichen>0X<Ziffernfolge>`

Beispiele:

- `0x2` entspricht `2`
- `0x1B` entspricht `27`

Zugehörige Umwandlungsangaben für `printf`:

- `%x`, `%X`

Weitere Schreibweisen für Zeichen-Konstanten

Bisherige Schreibweise für Zeichenkonstanten:

- `char c = 'A'` (Zeichen in `' '` setzen)
- `char c = 65` (ASCII-Code benutzen)

Definition 3.20 (Oktal-Schreibweise von ASCII-Konstanten)

`'\<Ziffernfolge>'`

wobei:

- Die Ziffernfolge enthält nur Oktalziffern und entspricht der **Oktaldarstellung des ASCII-Codes** des Zeichens

Beispiele: `'\101'` entspricht `'A'`, `'\0'` ist die binäre Null

Definition 3.21 (Hexadezimal-Schreibweise von ASCII-Konstanten)

`'\x<Ziffernfolge>'`

wobei:

- Die Ziffernfolge enthält nur Hexadezimalziffern und entspricht der **Hexadezimaldarstellung des ASCII-Codes** des Zeichens

Beispiel: `'\x41'` entspricht `'A'`

Was ist die *B*-adische Darstellung reeller Zahlen?

Definition 3.22 (*B*-adische Darstellung reeller Zahlen)

Für jede reelle Zahl $r \in]0,1[$ und für jede ganze Zahl $B > 1$ gibt es eindeutige ganze Zahlen $b_i \in \{0,1,2,...,B-1\}$, $i \in \{n \mid n \in \mathbb{Z}, n \leq -1\}$, mit:

$$r = \sum_{i=-1}^{-\infty} b_i \cdot B^i =: (0\,.\,b_{-1}b_{-2}\ldots)_B.$$

Man nennt:

- $(0\,.\,b_{-1}\ldots)_B$ die ***B*-adische Festkomma-Darstellung** von r mit **Nachkommastellen** $b_{-1}, b_{-2}, \ldots$ (die Anzahl der Nachkommastellen kann unendlich sein)
- B die **Basis** dieser Darstellung
- $\ldots, b_{-2}, b_{-1}$ die **Ziffern** dieser Darstellung

(auf eine formale Definition unendlicher Summen wird hier verzichtet - siehe Mathematik für Informatiker)

Berechnung der *B*-adischen Darstellung reeller Zahlen

Beispiel 3.23

- $27.75 = 2\cdot 10^1 + 7\cdot 10^0 + 7\cdot 10^{-1} + 5\cdot 10^{-2} = (27.75)_{10}$
- $27.75 = 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 + 1\cdot 2^{-1} + 1\cdot 2^{-2} = (11011.11)_2$
- $27.75 = 3\cdot 8^1 + 3\cdot 8^0 + 6\cdot 8^{-1} = (33.6)_8$
- $27.75 = 1\cdot 16^1 + 11\cdot 16^0 + 12\cdot 16^{-1} = (1B.C)_{16}$

Beobachtung ($r := (0\,.\,b_{-1}b_{-2}\ldots)_B$)

$(0\,.\,b_{-1}b_{-2}\ldots)_B\cdot B = (\sum_{i=-1}^{-\infty} b_i\cdot B^i)\cdot B = \sum_{i=0}^{-\infty} b_{i-1}\cdot B^i = (b_{-1}\,.\,b_{-2}\ldots)_B$:

- $(b_{-1})_B$ = Vorkommastellen von $(r\cdot B)_{10}$
  $B = 2$: $(1)_2$ = Vorkommastellen von $(0.75\cdot 2)_{10} = (1.5)_{10}$
  $B = 16$: $(C)_{16}$ = Vorkommastellen von $(0.75\cdot 16)_{10} = (12.0)_{10}$
- $(b_{-2})_B$ = Vorkommastellen von $((r\cdot B - (b_{-1})_B)\cdot B)_{10}$
  $B = 2$: $(1)_2$ = Vorkommastellen von $((0.75\cdot 2 - 1)\cdot 2)_{10} = (1.0)_{10}$
  $B = 16$: $(0)_{16}$ = Vorkommastellen von $((0.75\cdot 16 - 12)\cdot 2)_{10} = (0.0)_{10}$
- und so weiter, solange es Nachkommastellen gibt
  (fertig, da keine Nachkommastellen)

Berechnung einer *B*-adischen Darstellung reeller Zahlen

Wie finde ich die *B*-adischen Darstellung von *r*?

Erweitertes Hornerverfahren (muss **nicht** terminieren)

```
void horner_dec(int b[], double r, int B)
{
    int i = 1;
    while (r > 0) {
        b[i] = floor(r * B); /*Vorkommastellen*/
        r = r * B - b[i]; /*Nachkommastellen*/
        ++i;
    }
}
```

Beispiel 3.24 ($r = 0.75$, $B = 2$)

$i = 1$: $(b_{-1})_2 = \lfloor 0.75 \cdot 2 \rfloor = 1$, $r = 0.75 \cdot 2 - 1 = 0.5$
$i = 2$: $(b_{-2})_2 = \lfloor 0.5 \cdot 2 \rfloor = 1$, $r = 0.5 \cdot 2 - 1 = 0$

Berechnung der B-adischen Darstellung reeller Zahlen

Bei der Berechnung der Nachkommastellen zu einer Basis B kann es zu einer **periodischen Wiederholung** kommen:

Beispiel 3.25 ($r = 0.5$, $B = 3$)

$(b_{-1})_3 = \lfloor 0.5 \cdot 3 \rfloor = 1$, $r = 0.5 \cdot 3 - 1 = 0.5$
$(b_{-2})_3 = \lfloor 0.5 \cdot 3 \rfloor = 1$: Periodische Wiederholung

Ergebnis:

$$0.5 = (0.\overline{1})_3$$

Rechnen mit der *B*-adischen Darstellung reeller Zahlen

Addition / Subtraktion

Stellenweise mit Übertrag wie bei ganzen Zahlen. Beispiel für $B = 8$:

Stelle		3	2	1	0	.	-1	-2
Ziffer		8^3	8^2	8^1	8^0	.	8^{-1}	8^{-2}
a			7	2	4	.	7	6
b	$-$			3	6	.	2	2
Übertrag		0	1	1	0	.	0	0
$a - b$		0	6	6	6	.	5	4

Rechnen mit der *B*-adischen Darstellung reeller Zahlen

Multiplikation / Division

Schnelle Berechnung von $\cdot B$ und $/B$ durch Kommaverschiebung:

- $(b_k \dots b_0 \,.\, b_{-1} b_{-2} \dots)_B \cdot B = (\sum_{i=k}^{-\infty} b_i \cdot B^i) \cdot B = \sum_{i=k}^{-\infty} b_i \cdot B^{i+1} = (b_k \dots b_0 b_{-1} \,.\, b_{-2} \dots)_B$
- $(b_k \dots b_1 b_0 \,.\, b_{-1} \dots)_B / B = (\sum_{i=k}^{-\infty} b_i \cdot B^i) / B = \sum_{i=k}^{-\infty} b_i \cdot B^{i-1} = (b_k \dots b_1 \,.\, b_0 b_{-1} \dots)_B$

Das sieht bei **ganzen Zahlen** so aus:

- $(b_k \dots b_0)_B \cdot B = (b_k \dots b_0 0)_B$
- $(b_k \dots b_1 b_0)_B / B = (b_k \dots b_1 \,.\, b_0)_B$

- $(101.01)_2 \cdot 2 = (1010.1)_2$
- $(500.1)_{10} \cdot 10 = (5001.0)_{10}$
- $(5A.1E)_{16} / 16 = (5.A1E)_{16}$
- $(500.1)_{10} / 10 = (50.01)_{10}$

Gleitkommadarstellung

Definition 3.26 (Gleitkommadarstellung)

Für eine reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$ und eine ganze Zahl $B > 1$ ist

$$r = m \cdot B^e$$

eine ***B*-adische Gleitkomma-Darstellung** von r mit **Mantisse** m und **Exponent** e, wobei m eine B-adische Festkomma-Zahl und e eine ganze Zahl ist.

Beispiel 3.27

Reelle Zahlen haben unendlich viele verschiedene Gleitkommadarstellungen in jeder Basis:

- $12.53 = 12.53 \cdot 10^0 = 1.253 \cdot 10^1 = 0.1253 \cdot 10^2 = 125.3 \cdot 10^{-1}$
- $3.25 = (11.01)_2 \cdot 2^0 = (1.101)_2 \cdot 2^1 = (110.1)_2 \cdot 2^{-1}$

Normierte Gleitkommadarstellung

Definition 3.28 (Normierte Gleitkommadarstellung)

Eine B-adische Gleitkomma-Darstellung

$$r = m \cdot B^e$$

heißt **normierte B-adische Gleitkomma-Darstellung** von r, falls $1 \leq |m| < B$.

Beispiel 3.29

Jede reelle Zahl hat **genau eine** normierte Gleitkommadarstellung in jeder Basis:

- $12.53 = 1.253 \cdot 10^1$
- $3.25 = (1.101)_2 \cdot 2^1$

Rechnen mit normierten Gleitkommadarstellungen

Wir nehmen zur Vereinfachung an:

- $r_1 = m_1 \cdot B^{e_1}$ normiert mit $m_1 > 0$.
- $r_2 = m_2 \cdot B^{e_2}$ normiert mit $m_2 > 0$.

Vergleiche

Es gilt $r_1 < r_2$ genau dann wenn (gdw.)

- entweder $e_1 < e_2$
- oder $e_1 = e_2 \wedge m_1 < m_2$

Es gilt $r_1 = r_2$ gdw.

- $e_1 = e_2 \wedge m_1 = m_2$

Beispiel 3.30

- $9.999 \cdot 10^1 < 1 \cdot 10^2$
- $(1.1)_2 \cdot 2^1 < (1.11)_2 \cdot 2^1$

Rechnen mit normierten Gleitkommadarstellungen

Wir nehmen zur Vereinfachung an:

- $r_1 = m_1 \cdot B^{e_1}$ normiert mit $m_1 > 0$.
- $r_2 = m_2 \cdot B^{e_2}$ normiert mit $m_2 > 0$.

Addition für $r_1 \geq r_2$ (alle Rechenschritte in der Basis B)

$$
\begin{aligned}
& r_1 + r_2 \\
&= m_1 \cdot B^{e_1} + \left(m_2 \cdot B^{e_2 - e_1}\right) \cdot B^{e_1} && \text{(Exponentenangleich)} \\
&= \left(m_1 + m_2 \cdot B^{e_2 - e_1}\right) \cdot B^{e_1} && \text{(Addition der Mantissen)} \\
&= m \cdot B^e && \text{(Normierung - falls nötig)}
\end{aligned}
$$

Beispiel 3.31

$B = 10:$

$$
\begin{aligned}
& 9.96 \cdot 10^1 + 5.0 \cdot 10^{-1} \\
&= 9.96 \cdot 10^1 + 0.05 \cdot 10^1 \\
&= 10.01 \cdot 10^1 \\
&= 1.001 \cdot 10^2
\end{aligned}
$$

$B = 2:$

$$
\begin{aligned}
& 1.11 \cdot 2^1 + 1.0 \cdot 2^{-1} \\
&= 1.11 \cdot 2^1 + 0.01 \cdot 2^1 \\
&= 10.0 \cdot 2^1 \\
&= 1.0 \cdot 2^2
\end{aligned}
$$

Rechnen mit normierten Gleitkommadarstellungen

Wir nehmen zur Vereinfachung an:

- $r_1 = m_1 \cdot B^{e_1}$ normiert mit $m_1 > 0$.
- $r_2 = m_2 \cdot B^{e_2}$ normiert mit $m_2 > 0$.

Subtraktion für $r_1 \geq r_2$ (alle Rechenschritte in der Basis B)

$$\begin{aligned} & r_1 - r_2 \\ &= m_1 \cdot B^{e_1} - \left(m_2 \cdot B^{e_2 - e_1}\right) \cdot B^{e_1} && \text{(Exponentenangleich)} \\ &= \left(m_1 - m_2 \cdot B^{e_2 - e_1}\right) \cdot B^{e_1} && \text{(Subtraktion der Mantissen)} \\ &= m \cdot B^e && \text{(Normierung - falls nötig)} \end{aligned}$$

Beispiel 3.32

$B = 10$:

$$\begin{aligned} & 1.6 \cdot 10^2 - 7.1 \cdot 10^1 \\ &= 1.6 \cdot 10^2 - 0.71 \cdot 10^2 \\ &= 0.89 \cdot 10^2 \\ &= 8.9 \cdot 10^1 \end{aligned}$$

$B = 16$:

$$\begin{aligned} & 1.9 \cdot 16^2 - A.A \cdot 16^1 \\ &= 1.9 \cdot 16^2 - 0.AA \cdot 16^2 \\ &= 0.E6 \cdot 16^2 \\ &= E.6 \cdot 16^1 \end{aligned}$$

Rechnen mit normierten Gleitkommadarstellungen

Wir nehmen zur Vereinfachung an:

- $r_1 = m_1 \cdot B^{e_1}$ normiert mit $m_1 > 0$.
- $r_2 = m_2 \cdot B^{e_2}$ normiert mit $m_2 > 0$.

Multiplikation (alle Rechenschritte in der Basis *B*)

$r_1 \cdot r_2$

$= (m_1 \cdot m_2) \cdot B^{e_1+e_2}$ (Exponenten addieren)

$= m \cdot B^e$ (Normierung - falls nötig)

Beispiel 3.33

$B = 10:$
$(6.0 \cdot 10^0) \cdot (2.5 \cdot 10^1)$
$= 15 \cdot 10^1$
$= 1.5 \cdot 10^2$

$B = 2:$
$(1.1 \cdot 2^0) \cdot (1.1 \cdot 2^1)$
$= 10.01 \cdot 2^1$
$= 1.001 \cdot 2^2$

Multiplikation in der Basis *B*

- $(6.0)_{10} \cdot (2.5)_{10} = (6.0)_{10} \cdot (2.0)_{10} + (6.0)_{10} \cdot (0.5)_{10} = (12.0)_{10} + (3.0)_{10} = (15.0)_{10}$
- $(1.1)_2 \cdot (1.1)_2 = (1.1)_2 \cdot (1.0)_2 + (1.1)_2 \cdot (0.1)_2 = (1.1)_2 + (0.11)_2 = (10.01)_2$

Rechnen mit normierten Gleitkommadarstellungen

Wir nehmen zur Vereinfachung an:

- $r_1 = m_1 \cdot B^{e_1}$ normiert mit $m_1 > 0$.
- $r_2 = m_2 \cdot B^{e_2}$ normiert mit $m_2 > 0$.

Division (alle Rechenschritte in der Basis B)

r_1 / r_2
$= (m_1 / m_2) \cdot B^{e_1 - e_2}$ (Exponenten subtrahieren)
$= m \cdot B^e$ (Normierung - falls nötig)

Beispiel 3.34

$B = 8:$
$(2.4 \cdot 8^0)/(5.0 \cdot 8^2)$
$= 0.4 \cdot 8^{-2}$
$= 4.0 \cdot 8^{-3}$

Vielfache von 5 zur Basis $B = 8$:
$(1)_8 \cdot (5)_8 = (5)_8$
$(2)_8 \cdot (5)_8 = (12)_8$
$(3)_8 \cdot (5)_8 = (17)_8$
$(4)_8 \cdot (5)_8 = (24)_8$

Lesestoff zur Vor- und Nachbereitung

- [Gumm, Sommer] Einführung in die Informatik
  Kapitel 1.4.1 - 1.4.4
- [Kernighan & Ritchie] Programmieren in C
  Kapitel 2.3, 2.9
- [Hellmann] Rechnerarchitektur
  Kapitel 10 (Arithmetik auf Dualzahlen)