Übungsblatt 1

Aufgabe 1 Beschreiben Sie die folgenden Mengen sowohl mit Hilfe einer definierenden Eigenschaft als auch, sofern das möglich ist, in aufzählender Schreibweise. Es gibt meistens mehrere Beschreibungsmöglichkeiten:

a) Alle ganzen Zahlen, die kleiner als 7 und größer als -1 sind.

b) Alle Punkte des $\mathbb{R}^2$, die von der x-Achse und der y-Achse den gleichen Abstand haben.

c) Die Menge aller ganzen Zahlen, die um 1 vergrößert durch 5 teilbar sind.

d) Die Lösungsmenge L der Gleichung $(x^2 - 4)^2 = 16$.

e) Die Menge aller Zahlen, die das Quadrat einer geraden Zahl sind.

Aufgabe 2 Beschreiben Sie die folgenden Mengen durch einen deutschen Satz:

a) $M_1 = \{\, m \in \mathbb{N} : \text{Es gibt eine Zahl } n \in \mathbb{N} \text{ mit } 2 \cdot n = m \,\}$

b) $M_2 = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \,\}$

c) $M_3 = \{\, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a > 0, b > 0, c > 0, a^2 + b^2 = c^2 \,\}$

Aufgabe 3 Beschreiben Sie die folgenden Mengen durch Aufzählung ihrer Elemente:

a) $M_1 := \{\, n \in \mathbb{Z} : |\, n \cdot 2| \leq 10 \,\}$,

b) $M_2 := \{\, \frac{1}{n} \in \mathbb{Q} : n \in \mathbb{N}^* \,\}$,

c) $M_3 := \{m \in \mathbb{N} : \ 3 \text{ teilt } m \text{ und } 104 \leq m \leq 110\}$,

d) $M_4 := \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$,

e) $M_5 := \{U : \ U \text{ ist Teilmenge von } \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \text{ mit gerader Mächtigkeit}\}$,

f) $M_6 := \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 - y^2 = 1\}$.

Aufgabe 4 Beschreiben Sie die folgenden Mengen sowohl durch eine definierende Eigenschaft als auch durch einen deutschen Satz:

a) $M_1 = \{ 1, 4, 9, 16, \dots \}$

b) $M_2 = \{ 0, 3, 6, 9, 12, \dots \}$

c) $M_3 = \{ \dots, 0.001, 0.01, 0.1, 1, 10, 100, 1000, \dots \}$

Aufgabe 5 Eine natürliche Zahl v heißt eine *Quadratzahl*, falls es eine weitere natürliche Zahl u gibt mit $u^2 = v$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Menge $P(n)$ wie folgt definiert:

$$P(n) := \{m \in \mathbb{N}^* : n^2 + m^2 \text{ ist eine Quadratzahl } \}.$$

Beispielsweise ist $36 \in P(77)$, weil $77^2 + 36^2 = 7225 = 85^2$ ist.

1. Was ist die Mächtigkeit von $P(0)$?
2. Zeigen Sie, dass die Mengen $P(k)$ für $k = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ jeweils mindestens ein Element enthalten.
3. Beweisen Sie, dass die Menge $P(2)$ leer ist.

Aufgabe 6 Wir betrachten die Teilmengen

$$N := \{..., -8, -4, 0, 4, 8, ...\} \text{ und } M := \{..., -14, -7, 0, 7, 14, ...\}$$

von $\mathbb{Z}$ und definieren die *Summenmenge* $N + M$ durch

$$N + M := \{a + b : a \in N, b \in M\}.$$

Zeigen Sie, dass $N + M = \mathbb{Z}$ gilt.