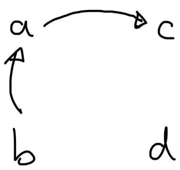
Vorkurs Mathematik für Informatiker Dienstag, 27. Oktober 2020
Wintersemester 2020/21
Dirk Hachenberger, Tobias Mömke, Kathrin Gimmi

Übungsblatt 6

Aufgabe 1 Untersuchen Sie, ob die folgenden Relationen linkseindeutig, rechtseindeutig, linkstotal oder rechtstotal sind.

a) Sei $\mathbb{P}$ die Menge aller Primzahlen und $R \subseteq \mathbb{P} \times \mathbb{N}$ definiert durch $pRn :\Leftrightarrow p$ teilt n.

b) Sei $M := \{ a, b, c, d \}$ und R die durch folgenden Digraphen beschriebene Relation (vgl. 18h):



c) Sei M die Menge aller Studenten der Uni Augsburg, N die Menge aller an der Uni Augsburg angebotenen Fächer und $R \subseteq M \times N$ definiert durch $sRf :\Leftrightarrow s$ studiert f.

d) Sei M eine beliebige Menge und $R \subseteq M \times \mathcal{P}(M)$ definiert durch $xRU :\Leftrightarrow x \in U$.

e) Sei $M := \{ U \subseteq \mathbb{N} : U \text{ endlich} \} \subseteq \mathcal{P}(M)$ und $R \subseteq M \times M$ definiert durch $URV :\Leftrightarrow U \supsetneq V$, d. h. $U \supseteq V$ und $U \neq V$.

Aufgabe 2 Sei $M := \{ a, b, c, d, e \}$. Zeichnen Sie den Digraph einer Relation auf M, welche

a) linkstotal, rechtstotal, linkseindeutig und rechtseindeutig,

b) rechtstotal und rechtseindeutig, aber weder linkstotal noch linkseindeutig,

c) eine Abbildung ist.

Aufgabe 3

a) Wir betrachten die Menge $M := \{ 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 \}$ (die Teiler von 30) sowie die folgende binäre Relation auf M:

$$xRy :\Leftrightarrow x \neq y, x \text{ teilt } y \text{ und es gibt kein } z \in M \setminus \{ x, y \} \text{ mit } x \text{ teilt } z \text{ und } z \text{ teilt } y.$$

Stellen Sie diese Relation als Digraph dar (vgl. 18h).

b) Bestimmen Sie alle natürlichen Zahlen n, sodass die Menge der Teiler von n zusammen mit der Relationsvorschrift aus a) einen Digraphen der gleichen Form wie in a) ergibt.

Aufgabe 4 Sei $R \subseteq M \times N$ eine rechtseindeutige Relation.

a) Zeigen Sie: $\exists S \subseteq N \times M$ mit $R * S = \mathrm{id}_M :\Leftrightarrow R$ ist linkstotal und linkseindeutig. Dabei ist $\mathrm{id}_M \subseteq M \times M$ die Identitätsrelation auf M, also $\mathrm{id}_M \{ (x,x) : x \in M \}$.

b) Gilt die Aussage aus a) auch für beliebige Relationen R? (also R nicht notwendigerweise rechtseindeutig)

Aufgabe 5 Seien M und N zwei Mengen und $f : M \to N$ eine Abbildung von M nach N. Welche der folgenden Aussagen treffen notwendig zu?

a) Zu jedem $y \in N$ gibt es mindestens ein $x \in M$ mit $y = f(x)$.

b) Zu jedem $x \in M$ gibt es höchstens ein $y \in N$ mit $y = f(x)$.

c) Zu jedem $y \in N$ gibt es höchstens ein $x \in M$ mit $y = f(x)$.

d) Ist f injektiv, so gilt: Für $x, y \in M$ mit $x \neq y$ gilt $f(x) \neq f(y)$.

e) Zu jedem $x \in M$ gibt es mindestens ein $y \in N$ mit $y = f(x)$.

Aufgabe 6 Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Injektivität und Surjektivität.

a) $f_1 : \mathbb{R} \to [0, \infty), x \mapsto |2x - 5|$

b) $f_2 : \mathbb{R} \setminus (-1, 1) \to \mathbb{R}, x \mapsto x - \sqrt{x^2 - 1}$

Aufgabe 7 Gegeben sind die folgenden Funktionen:

a) $f_1 : \mathbb{R} \to [0, \infty), x \mapsto x^2$,

b) $f_2 : [0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$.

Untersuchen Sie, welche dieser Funktionen injektiv, surjektiv bzw bijektiv sind. Schränken Sie Definitions- und Bildbereich von f_1 und f_2 so ein, dass beide Funktionen bijektiv sind.

Aufgabe 8 Sei $M := \{ 1, 2, \dots, n \}$ für ein $n \in \mathbb{N}^*$. Finden Sie eine bijektive Abbildung

$$\mathcal{P}(M) \to \bigtimes_{i=1}^{n} \{ 0, 1 \}, U \mapsto x = (x_1, \dots, x_n)$$

und zeigen Sie deren Bijektivität.