Kathrin Gimmi
Dirk Hachenberger

Übungen zur Mathematik für Informatiker I
Wintersemester 2020/21

Montag, 9. November 2020

Hausaufgabenblatt 2

Abgabe: Montag, 16. November 2020, bis 08:00 Uhr

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Es seien a und b zwei von Null verschiedene natürliche Zahlen. Beweisen Sie:

> Ist b ein Teiler von a^2, und ist r der Rest bei der Division von a durch b, so ist b ein Teiler von r^2.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Es seien a, b zwei natürliche Zahlen und $d := \mathrm{ggT}(a, b)$ deren größter gemeinsamer Teiler. Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Mengen gleich sind:

$$\{xa + yb : x, y \in \mathbb{Z}\} \quad \text{und} \quad \{zd : z \in \mathbb{Z}\}.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es seien $a = 99712$ und $b = 13568$.

(a) Berechnen Sie mit dem erweiterten Euklidischen Algorithmus eine Vielfachsummendarstellung $xa + yb = \mathrm{ggT}(a, b)$ des größten gemeinsamen Teilers von a und b.

(b) Geben Sie danach wenigstens drei weitere von (x, y) verschiedene Paare (x', y') aus $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $x'a + y'b = \mathrm{ggT}(a, b)$ an. Wieviele solche Vielfachsummendarstellungen gibt es?

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Ist n eine natürliche Zahl, so ist die Zahl „n Fakultät“ (Notation: $n!$) definiert als das Produkt der Zahlen $1, 2, 3, ...,$ bis n. Beispielsweise ist $5!$ gleich $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ gleich 120.

> Wieviele Nullen hat die Zahl $50!$ am Ende?

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Beweisen Sie: Für jede positive natürliche Zahl n hat die Zahl

$$\tfrac{1}{2} \cdot (3^{2^n} - 1)$$

mindestens $n - 1$ verschiedene ungerade Primteiler.

Aufgabe 6 (2 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils die eindeutige Primfaktorzerlegung der folgenden beiden Zahlen:

(a) $(2^8 + 2^4) \cdot (3^7 + 3^3) \cdot (5^4 - 5^3) \cdot (8! + 6!)$,

(b) 11111.