Vorlesung Informatik 1 (Wintersemester 2020/2021)

Kapitel 3: Zahlensysteme

Martin Frieb
Johannes Metzger

Universität Augsburg
Fakultät für Angewandte Informatik

11. November 2020

Universität Augsburg
Institut für Informatik

3. Zahlensysteme
3.1 Mathematische Grundlagen
3.2 *B*-adische Darstellung ganzer Zahlen

Motivation

Informationsdarstellung im Arbeitsspeicher

Im Arbeitsspeicher/ Cache wird Information durch Spannungen dargestellt, wobei nur zwei Spannungen unterschieden werden:

- niedrige Spannung: 0 V bis 0,5 V (=0)
- höhere Spannung: 1,0 V bis 1,5 V (=1) (Versorgungsspannung 1,5 Volt)

Dadurch lassen sich zwei Ziffern darstellen (0 und 1), also die Zustände von einem Bit

Binäres Zahlensystem

Im **binären Zahlensystem** bestehen Zahlen nur aus den Ziffern 0 und 1. Es wird verwendet, um **Information** (Zahlen, Texte, Bilder, Musik, Videos, ...) durch **Bitfolgen computergerecht** darzustellen

Motivation

Binärzahlen sind für den Menschen sehr lang und unübersichtlich. Man benutzt daher aushilfsweise auch noch andere ähnliche Zahlensysteme: **Oktalsystem**, **Hexadezimalsystem**

Kenntnis von Zahlensystemen ist nützlich

- für (hardwarenahe) Programmierung notwendig (um korrekte Programme zu schreiben)
- für normale Benutzer nützlich (technische Anleitungen, Fehlermeldungen, ...)

Als Informatiker sollte man wissen

- wie Zahlen, Zeichen, Ton, Bilder, usw. durch Bitfolgen **codiert** werden (können)
- was man dabei beachten muss (Möglichkeit der **Decodierung**, **Arithmetik** auf codierten Zahlen usw.)

3. Zahlensysteme
3.1 Mathematische Grundlagen
3.2 *B*-adische Darstellung ganzer Zahlen

Einige mathematische Operationen

Arithmetische Vergleichsoperationen auf Zahlen

Bedeutung	Operationszeichen	Beispiele
Kleiner	$<$	$1 < 2$
Kleiner gleich	$\leq$	$1 \leq 1$, $1 \leq 2$
Größer	$>$	$0 > -1$
Größer gleich	$\geq$	$0 \geq 0$, $0 \geq -1$
Gleich	$=$	$0 = 0$
Ungleich	$\neq$	$0 \neq 1$

Wichtig: Diese Operationszeichen gelten **nicht** für Programmiersprachen, sondern für mathematische Formeln in Texten. In Programmiersprachen gibt es diese Operatinen auch, sie werden aber anders bezeichnet (z.B. wird in C == für den Vergelich auf Gleichheit verwendet)

Einige mathematische Operationen

Arithmetische Rechenoperationen auf Zahlen

Bedeutung	**Operationszeichen**	**Beispiele**
Addition	$+$	$1+2=3$
Subtraktion	$-$	$1-2=-1$
Multiplikation	$\cdot$	$1\cdot 2=2$
Reelle Division	$/$	$5/2=2.5$
Ganzzahlige Division	$\div$	$5\div 2=2$
Modulo	mod	$5 \bmod 2=1$
Abrundung	$\lfloor\cdot\rfloor$	$\lfloor 5.2\rfloor=5$
Aufrundung	$\lceil\cdot\rceil$	$\lceil 5.2\rceil=6$
Absolutbetrag	$\lvert\cdot\rvert$	$\lvert -6\rvert=6$
Positives Vorzeichen	$+$	$+1$
Negatives Vorzeichen	$-$	-1

Mengen

Definition 3.1 (Menge, Element)

- Eine Menge ist eine Zusammenfassung **unterscheidbarer Objekte** zu einer Gesamtheit.
- Die in einer Menge zusammengefassten Objekte heißen deren **Elemente**. Ist a ein Element einer Menge A, so schreiben wir $a \in A$, andernfalls schreiben wir $a \notin A$.
- Die **leere Menge** hat keine Elemente und wird mit $\emptyset$ bezeichnet.

Definition 3.2 (Teilmenge)

- Ist jedes Element einer Menge A auch Element einer Menge B, so heißt A **Teilmenge von** B. Ist A eine Teilmenge von B, so schreiben wir $A \subseteq B$.
- Gilt $A \subseteq B$ und $A \neq B$, so heißt A **echte Teilmenge von** B. Ist A eine echte Teilmenge von B, so schreiben wir $A \subset B$.
- Mit $P(A) := \{B \mid B \subseteq A\}$ bezeichnen wir die Menge aller Teilmengen von A, die sog. **Potenzmenge von** A.

Mengen

Definition 3.3 (Endliche Menge)

Eine Menge heißt **endlich**, falls sie endlich viele Elemente hat. Die **Mächtigkeit** $|A|$ einer endlichen Menge A ist die Anzahl ihrer Elemente.

Schreibweise für endliche Mengen

Eine endliche Menge A mit $n > 0$ Elementen $a_1, \ldots, a_n$ gibt man durch Aufzählung aller Elemente in geschweiften Klammern in der folgenden Form an:

$$A = \{a_1, \ldots, a_n\}.$$

Beispiel 3.4

- $\{0, 1\}$ ist die Menge mit den Elementen 0 und 1 und hat die Mächtigkeit $|\{0, 1\}| = 2$.
- Die leere Menge hat die Mächtigkeit $|\emptyset| = 0$.

Mengen

Einige feste Symbole für bestimmte (unendliche) Zahlenmengen

- $\mathbb{Z}$: Menge der **ganzen Zahlen**.
- $\mathbb{N} := \{n \mid n \in \mathbb{Z}, n > 0\}$: Menge der **natürlichen Zahlen**.
- $\mathbb{N}_0 := \{n \mid n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}$: Menge der **nicht-negativen** ganzen Zahlen.
- $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$: Menge der **rationalen** Zahlen.
- $\mathbb{R}$: Menge der **reellen** Zahlen.

Schreibweise für unendliche Mengen

Eine unendliche Menge A gibt man durch **Eigenschaften** $E_1, \ldots, E_n$**, die deren Elemente charakterisieren**, in der folgenden Form an:

$$A := \{a \mid E_1, \ldots, E_n\}.$$

Lies: *Menge aller Elemente a* ***mit den Eigenschaften*** $E_1, \ldots, E_n$.
Damit gehören **genau** die Elemente zu A, die **alle** Eigenschaften $E_1, \ldots, E_n$ erfüllen.

Mengen

Mathematische Definitionen

Eine **mathematische Definition** ist die eindeutige Festlegung der Bedeutung und Verwendung eines Begriffs, Symbols oder einer Schreibweise. Ein neues Symbol kann durch Rückführung auf bereits bekannte, vorher definierte Symbole definiert werden. Mit dem Zeichen $:=$ werden linke und rechte Seite **gleich gesetzt**, wobei

- Auf der linken Seite von $:=$ das neue Symbol steht, das man definieren möchte
- Auf der rechten Seite von $:=$ die Bedeutung des neuen Symbols festgelegt wird durch eine Formel, in der nur bereits bekannte Symbole vorkommen

Zum Beispiel wird in

$$\mathbb{N} := \{n \mid n \in \mathbb{Z}, n > 0\}$$

das neue Symbol $\mathbb{N}$ eingeführt (linke Seite). Durch die rechte Seite wird festgelegt, dass es sich bei $\mathbb{N}$ um eine Menge handelt, und zwar um die Menge der **positiven** ganzen Zahlen. $\mathbb{N}$ wird damit zurückgeführt auf $\mathbb{Z}$ durch Hinzunahme des zusätzlichen Merkmals **positiv**. Da es auch nicht-positive ganze Zahlen gibt, unterscheiden sich $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$.

Mengen

Definition 3.5 (Intervalle)

Seien $n, m \in \mathbb{R}$ und $n \leq m$:

- $[n, m] := \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq n, x \leq m\}$.
- $[n, m[:= \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq n, x < m\}$.
- $]n, m] := \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > n, x \leq m\}$.
- $]n, m[:= \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > n, x < m\}$.
- $[n, \infty[:= \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq n\}$.
- $]n, \infty[:= \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > n\}$.
- $]-\infty, m] := \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq m\}$.
- $]-\infty, m[:= \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < m\}$.

Definition 3.6 (Das Symbol ∞)

- ∞ bezeichnet eine Zahl, die größer ist als jede ganze Zahl (die Zahl **unendlich**).
- $-\infty$ bezeichnet eine Zahl, die kleiner ist als jede ganze Zahl (die Zahl **minus unendlich**).

Mengen

Definition 3.7 (Mengen-Operationen)

Seien A, B Mengen.

- Der **Durchschnitt** (die **Schnittmenge**) $A \cap B := \{x \mid x \in A, x \in B\}$ von A und B ist eine Zusammenfassung aller Objekte, die Elemente in A und in B sind.
- Die **Vereinigung(smenge)** $A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B \text{ oder } x \in A \cap B\}$ von A und B ist eine Zusammenfassung aller Objekte, die Elemente in A, in B oder in A und in B sind.
- Die **Differenz** $A \setminus B := \{x \mid x \in A, x \notin B\}$ von A und B ist eine Zusammenfassung aller Objekte, die Elemente in A, aber nicht in B sind.

Beispiel 3.8

- $\{1,2\} \cap \{2,3\} = \{2\}$.
- $\{1,2\} \cup \{2,3\} = \{1,2,3\}$.
- $\{1,2\} \setminus \{2,3\} = \{1\}$.

3. Zahlensysteme
3.1 Mathematische Grundlagen
3.2 *B*-adische Darstellung ganzer Zahlen

Was ist die *B*-adische Darstellung?

Definition 3.9 (*B*-adische Darstellung ganzer Zahlen)

Für jedes $x \in \mathbb{N}$ und für jede ganze Zahl $B > 1$ gibt es eindeutige ganze Zahlen $b_0, \ldots, b_k \in \{0, 1, 2, ..., B-1\}$ mit:

$$x = \sum_{i=0}^{k} b_i \cdot B^i =: (b_k \ldots b_0)_B.$$

Man nennt:

- $(b_k \ldots b_0)_B$ die ***B*-adische Darstellung** von x
- B die **Basis** dieser Darstellung
- $b_0, \ldots, b_k$ die **Ziffern** dieser Darstellung

Was ist die *B*-adische Darstellung?

Die Summenschreibweise

Wir definieren die Summenschreibweise $\sum_{i=m}^{n} A_i$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$, $m < n$, wie folgt **induktiv nach** n:

(1) Induktionsanfang $n = m$: $\sum_{i=m}^{m} A_i := A_m$

(2) Induktionsschritt $n \to n+1$: $\sum_{i=m}^{n+1} A_i := (\sum_{i=m}^{n} A_i) + A_{n+1}$

Beispiel für $m = 1$ und $n = 4$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{4} i &\overset{(2)}{=} (\sum_{i=1}^{3} i) + 4 \\
&\overset{(2)}{=} ((\sum_{i=1}^{2} i) + 3) + 4 \\
&\overset{(2)}{=} (((\sum_{i=1}^{1} i) + 2) + 3) + 4 \\
&\overset{(1)}{=} 1 + 2 + 3 + 4 \\
&= 10
\end{aligned}$$

Was ist die *B*-adische Darstellung?

Induktive Definitionen

Hängt eine Schreibweise von einem Parameter $n \in \mathbb{N}$ ab, so wird diese häufig durch eine sog. **vollständige Induktion nach** n definiert. Diese besteht aus 2 Schritten:

- Definition der Schreibweise für den kleinsten Wert von n (**Induktionsanfang**).
- Definition der Schreibweise für $n+1$ durch Rückführung auf den Fall n (**Induktionsschritt**).

Im Beispiel wird die Summenschreibweise zuerst für $n = m$ definiert (Induktionsanfang) und dann eine Formel angegeben, durch die man die Summenschreibweise für $n+1$ auf die Summenschreibweise für n (für beliebiges n) zurückführen kann (Induktionsschritt). Für konkrete n, m ergibt sich so zum Beispiel durch **wiederholte Anwendung des Induktionsschritts**:

$$\sum_{i=2}^{4} A_i = (\sum_{i=2}^{3} A_i) + A_4 = ((\sum_{i=2}^{2} A_i) + A_3) + A_4 = A_2 + A_3 + A_4$$

Berechnung einer *B*-adischen Darstellung

Beispiel 3.10 (*B*-adische Darstellung)

- $21 = 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 = (21)_{10}$ (Dezimaldarstellung)
- $21 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (10101)_2$ (Binärdarstellung)
- $131 = 2 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 = (203)_8$ (Oktaldarstellung)
- $27 = 1 \cdot 16^1 + 11 \cdot 16^0 = (1B)_{16}$ (Hexadezimaldarstellung)
  (der Buchstabe *B* steht hier für die Ziffer 11 - Details später)

Wie finde ich die *B*-adische Darstellung von *x*?

Beobachtung: $(\sum_{i=0}^{k} b_i \cdot B^i)/B = b_k \cdot B^{k-1} + \ldots + b_1 \cdot B^0 + b_0 \cdot B^{-1}$

- $(\sum_{i=0}^{k} b_i \cdot B^i) \bmod B = b_0$
- $(\sum_{i=0}^{k} b_i \cdot B^i) \div B = \sum_{i=1}^{k} b_i \cdot B^{i-1}$
- $(\sum_{i=1}^{k} b_i \cdot B^{i-1}) \bmod B = b_1$
- $(\sum_{i=1}^{k} b_i \cdot B^{i-1}) \div B = \sum_{i=2}^{k} b_i \cdot B^{i-2}$
- und so weiter

- $131 \bmod 8 = 3$
- $131 \div 8 = 16$
- $16 \bmod 8 = 0$
- $16 \div 8 = 2$
- $2 \bmod 8 = 2$

Berechnung einer *B*-adischen Darstellung

Wie finde ich die *B*-adische Darstellung von *x*?

Hornerverfahren

```
void horner_nat(int b[], int x, int B)
{
    int i = 0;
    while (x > 0) {
        b[i] = x % B;
        x = x / B; /*ganzzahlige Division!*/
    ++i;
    }
}
```

Beispiel 3.11 ($x = 131$, $B = 8$)

$i = 0$: $b_0 = 131 \bmod 8 = 3$, $x = 131 \div 8 = 16$
$i = 1$: $b_1 = 16 \bmod 8 = 0$, $x = 16 \div 8 = 2$
$i = 2$: $b_2 = 2 \bmod 8 = 2$, $x = 2 \div 8 = 0$

Rechnen in einer *B*-adischen Darstellung

B-adische Darstellungen von Zahlen mit $B \neq 10$ können auf dieselbe Art addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert werden wie im Dezimalsystem durch **stellenweise Ausführung der Operation mit Übertrag**. Beachte dabei: Der Übertrag erfolgt hier bei Ergebnissen $> B-1$ (denn dann entsteht ein Beitrag zur Ziffer der nächsthöheren *B*-Potenz)

Beispiel 3.12 (Stellenweise Addition und Subtraktion mit Übertrag)

Beispiel $(451)_8 - (337)_8$:

Stelle		2	1	0
Ziffer		8^2	8^1	8^0
a		4	5	1
b	$-$	3	3	7
Übertrag		0	1	0
$a-b$		1	1	2

Beispiel $(111)_2 + (11)_2$:

Stelle		3	2	1	0
Ziffer		2^3	2^2	2^1	2^0
a			1	1	1
b	$+$			1	1
Übertrag		1	1	1	0
$a+b$		1	0	1	0

Binärdarstellung

Definition 3.13 (Binärdarstellung)

Die 2-adische Darstellung einer Zahl nennt man **Binärdarstellung**.
Eine Zahl in Binärdarstellung besteht aus den Ziffern 0 und 1.

Einige Binärzahlen

Für die Dezimalzahlen von 0 bis 15 sollte man die Binärdarstellungen auswendig können:

$0 = (0)_2$	$4 = (100)_2$	$8 = (1000)_2$	$12 = (1100)_2$
$1 = (1)_2$	$5 = (101)_2$	$9 = (1001)_2$	$13 = (1101)_2$
$2 = (10)_2$	$6 = (110)_2$	$10 = (1010)_2$	$14 = (1110)_2$
$3 = (11)_2$	$7 = (111)_2$	$11 = (1011)_2$	$15 = (1111)_2$

Es gilt offenbar $2^n = (10\ldots0)_2$ (mit $n+1$ Stellen) und
$2^n - 1 = (1\ldots1)_2$ (mit n Stellen)

Oktaldarstellung

Definition 3.14 (Oktaldarstellung)

Die 8-adische Darstellung einer Zahl nennt man **Oktaldarstellung**. Eine Zahl in Oktaldarstellung besteht aus den Ziffern $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Schnelle Umrechnung zwischen Binär- und Oktaldarstellung

Wegen $8 = 2^3$ stehen jeweils 3 Binärziffern für eine Oktalziffer:

$(0)_8 = (000)_2$	$(2)_8 = (010)_2$	$(4)_8 = (100)_2$	$(6)_8 = (110)_2$
$(1)_8 = (001)_2$	$(3)_8 = (011)_2$	$(5)_8 = (101)_2$	$(7)_8 = (111)_2$

Beispiel 3.15 (Umrechnung zwischen Binär- und Oktaldarstellung)

$(174)_8 = (001111100)_2$

Hexadezimaldarstellung

Definition 3.16 (Hexadezimaldarstellung)

Die 16-adische Darstellung einer Zahl nennt man **Hexadezimaldarstellung**. Eine Zahl in Hexadezimaldarstellung besteht aus den Ziffern $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F$ $(A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, E = 14, F = 15)$.

Schnelle Umrechnung zwischen Binär- und Hexadezimaldarstellung

Wegen $16 = 2^4$ stehen jeweils 4 Binärziffern für eine Hexadezimalziffer:

$(0)_{16} = (0000)_2$	$(4)_{16} = (0100)_2$	$(8)_{16} = (1000)_2$	$(C)_{16} = (1100)_2$
$(1)_{16} = (0001)_2$	$(5)_{16} = (0101)_2$	$(9)_{16} = (1001)_2$	$(D)_{16} = (1101)_2$
$(2)_{16} = (0010)_2$	$(6)_{16} = (0110)_2$	$(A)_{16} = (1010)_2$	$(E)_{16} = (1110)_2$
$(3)_{16} = (0011)_2$	$(7)_{16} = (0111)_2$	$(B)_{16} = (1011)_2$	$(F)_{16} = (1111)_2$

Beispiel 3.17 (Umrechnung zwischen Binär- und Hexadezimaldarstellung)

$(1B9)_{16} = (000110111001)_2$