Chair of Embedded Systems
Department of Computer Science
University of Augsburg, Germany

Martin Frieb

Universität Augsburg University

Wintersemester 2020/2021

Informatik 1

Kapitel 3 – Zahlensysteme

Contents

Version 20201108-2057

Als Informatiker sollte man wissen wie Zahlen, Zeichen, Ton, Bilder, usw. durch Bitfolgen **codiert** werden können und auch was man dabei beachten muss (Möglichkeit der **Decodierung**, **Arithmetik** auf codierten Zahlen usw.). Ein Computer kann Daten nur in Form von **1**-en und **0**-en speichern (vgl. Kapitel 2).

Binäres Zahlensystem

Eine Folge von **1**-en und **0**-en ergibt zusammen eine Binärzahl (also eine Zahl im **binären Zahlensystem**). In diesem Kapitel schauen wir uns diese Binärzahlen und ihre mathematischen Grundlagen näher an.

> Definition: 3.13 Binärdarstellung
>
> Die 2-adische Darstellung einer Zahl nennt man **Binärdarstellung**. Eine Zahl in Binärdarstellung besteht aus den Ziffern 0 und 1.

Die B-adische Darstellung ist eine einfache Schreibweise, mit der deutlich wird, in welchem Zahlensystem die jeweilige Zahl notiert ist. Dazu schreibt man die Zahl in Klammern und hinter die Klammer tiefgestellt das jeweilige Zahlensystem, z.B. $(5)_{10}$ entspricht der Zahl Fünf im Dezimalsystem, $(101)_2$ der Zahl Fünf im Binärsystem. Man spricht von einer B-adischen Darstellung, wobei B das Zahlensystem angibt, z.B. 2-adisch für das Binärsystem und 10-adisch für das Dezimalsystem.

Einige Binärzahlen

Für die Dezimalzahlen von 0 bis 15 sollte man die Binärdarstellungen auswendig können:

$$
\begin{array}{llll}
0 = (0)_2 & 4 = (100)_2 & 8 = (1000)_2 & 12 = (1100)_2 \\
1 = (1)_2 & 5 = (101)_2 & 9 = (1001)_2 & 13 = (1101)_2 \\
2 = (10)_2 & 6 = (110)_2 & 10 = (1010)_2 & 14 = (1110)_2 \\
3 = (11)_2 & 7 = (111)_2 & 11 = (1011)_2 & 15 = (1111)_2
\end{array}
$$

Die tiefgestellte Zwei $(X)_2$ nach Angabe der Zahl beschreibt in welchem Zahlensystem die Zahl zu lesen und zu verstehen ist.

Es gilt offenbar $2^n = (10\dots0)_2$ (mit $n+1$ Stellen) und $2^n-1 = (1\dots1)_2$ (mit n Stellen)

Wenn Sie das Verfahren in Kapitel 3.2 nachvollzogen haben, führen Sie die Liste oben einfach selbstständig fort.

Weitere Zahlensysteme

Binärzahlen tendieren dazu sehr lang und unübersichtlich zu werden, deswegen bedient man sich aushilfsweise noch weiteren Zahlensystemen: **Oktalsystem** und **Hexadezimalsystem**. Diese schauen wir ins im Lauf des Kapitels auch noch an.

Bedeutung	**Operationszeichen**	**Beispiele**
Kleiner	$<$	$1 < 2$
Kleiner gleich	$\leqslant$	$1 \leqslant 1, 1 \leqslant 2$
Größer	$>$	$0 > -1$
Größer gleich	$\geqslant$	$0 \geqslant 0, 0 \geqslant -1$
Gleich	$=$	$0 = 0$
Ungleich	$\neq$	$0 \neq 1$

Bedeutung	**Operationszeichen**	**Beispiele**
Addition	$+$	$1 + 2 = 3$
Subtraktion	$-$	$1 - 2 = -1$
Multiplikation	$\cdot$	$1 \cdot 2 = 2$
Reelle Division	$/$	$5/2 = 2.5$
Ganzzahlige Division	$\div$	$5 \div 2 = 2$
Modulo	mod	$5 \bmod 2 = 1$
Abrundung	$\lfloor \cdot \rfloor$	$\lfloor 5.2 \rfloor = 5$
Aufrundung	$\lceil \cdot \rceil$	$\lceil 5.2 \rceil = 6$
Absolutbetrag	$\lvert \cdot \rvert$	$\lvert -6 \rvert = 6$
Positives Vorzeichen	$+$	$+1$
Negatives Vorzeichen	$-$	-1

3.1 Mathematische Grundlagen

Einige mathematische Operationen & Arithmetische Rechenoperationen auf Zahlen

Die Operationszeichen in den beiden Tabellen sind aus der Schule bekannt. Wir werden sie in diesem Kapitel in der Schreibweise, welche in den Tabellen gezeigt wurde, verwenden.

Wichtig: Diese Operationszeichen gelten **nicht** für Programmiersprachen, sondern für mathematische Formeln in Texten. In Programmiersprachen gibt es diese Operationen auch, sie werden aber anders bezeichnet (z.B. wird in C == für den Vergleich auf Gleichheit verwendet)

3.1.1 Mengen

Definition: 3.1 Menge, Element

- Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung **unterscheidbarer Objekte** (keine Duplikate) zu einer Gesamtheit.
- Die in einer Menge zusammengefassten Objekte heißen deren **Elemente**. Ist a ein Element einer Menge A, so schreiben wir $a \in A$, andernfalls schreiben wir $a \notin A$.
- Die **leere Menge** hat keine Elemente und wird mit $\emptyset$ bezeichnet.

Beispiel:

Sei $M = \{a, b, c\}$, dann gilt $a \in M$ und $b \in M$ sowie $c \in M$, jedoch nicht $d \in M$. D.h. $d \notin M$. a, b, c sind Elemente der Menge M.

Definition: 3.2 Teilmenge

- Ist jedes Element einer Menge A auch Element einer Menge B, so heißt A **Teilmenge von** B. Ist A eine Teilmenge von B, so schreiben wir $A \subseteq B$.
- Gilt $A \subseteq B$ und $A \neq B$, so heißt A **echte Teilmenge von** B. Ist A eine echte Teilmenge von B, so schreiben wir $A \subset B$.
- Mit $P(A) := \{B \mid B \subseteq A\}$ bezeichnen wir die Menge aller Teilmengen von A, die sog. **Potenzmenge von** A.

Beispiel:

Sei $M = \{a, b, c\}$, dann gilt für:

- **Teilmenge**: $M' = \{a, b\}$ ist eine (echte) Teilmmenge von M, formal geschrieben $M' \subseteq M$.
- **Potenzmenge**:
  Alle Kombinationsmöglichkeiten der Elemente der Menge, inkl. leerer Menge und Menge selbst (da die Potenzmenge *alle* Teilmengen fordert und **keine** *echten* Teilmengen voraussetzt). Somit ist auch stets die ursprüngliche Menge A enthalten. Die Elemente aus M lassen sich wie folgt kombinieren:
  $\{\emptyset\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$
- Somit ist $P(M) = \{\{\emptyset\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
- Wie man sieht ist die Potenzmenge eine Menge, die Mengen enthält.
- **Beachte**: Reihenfolgen von Elementen spielen in Mengen keine Rolle, d.h $\{b, c\} = \{c, b\}$

Definition: 3.3 Endliche Menge

Eine Menge heißt **endlich**, falls sie endlich viele Elemente hat. Die **Mächtigkeit** $|A|$ einer endlichen Menge A ist die Anzahl ihrer Elemente.

Schreibweise für endliche Mengen:

- Eine endliche Menge A mit $n > 0$ Elementen $a_1, \dots, a_n$ gibt man durch Aufzählung aller Elemente in geschweiften Klammern in der folgenden Form an: $A = \{a_1, \dots, a_n\}$.

Beispiel:

- $\{0, 1\}$ ist die Menge mit den Elementen 0 und 1 und hat die Mächtigkeit $|\{0, 1\}| = 2$.
- Die leere Menge hat die Mächtigkeit $|\emptyset| = 0$.

Häufiger ist es aber der Fall, dass wir über unendliche Mengen sprechen, insbesondere bei Definitions- und Wertebereichen bei beispielsweise Funktionen.

Die folgenden festen Symbole für bestimmte (unendliche) Zahlenmengen sollten schon bekannt sein:

- $\mathbb{Z}$: Menge der **ganzen Zahlen**.
- $\mathbb{N} := \{n \mid n \in \mathbb{Z},\ n > 0\}$: Menge der **natürlichen Zahlen**.
- $\mathbb{N}_0 := \{n \mid n \in \mathbb{Z},\ n \geqslant 0\}$: Menge der **nicht-negativen** ganzen Zahlen.
- $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\}$: Menge der **rationalen** Zahlen.
- $\mathbb{R}$: Menge der **reellen** Zahlen.

Definition: Unendliche Menge

- Eine unendliche Menge A gibt man durch **Eigenschaften** $E_1, \dots, E_n$**, die deren Elemente charakterisieren**, in der folgenden Form an:

$$A := \{a \mid E_1, \dots, E_n\}.$$

- Dies spricht man wie folgt: *Menge aller Elemente* a ***mit den Eigenschaften*** $E_1, \dots, E_n$.

- Damit gehören **genau** die Elemente zu A, die **alle** Eigenschaften $E_1, \dots, E_n$ erfüllen.

Beispiel:

- $A := \{a|a \in \mathbb{N}, a > 5\}$ definiert die Menge A, die alle Elemente aus der Menge $\mathbb{N}$ übernimmt, die gleichzeitig größer als 5 sind. Sie enthält also alle ganzen Zahlen ab der Zahl 6 (also 6,7,8,9, ...).
- Die Menge A hat die Mächtigkeit $|A| = \infty$ (wird im nächsten Abschnitt erklärt), ebenso wie die ursprüngliche Menge $\mathbb{N}$

Mathematische Definitionen

In der obigen Definition und dem zugehörigen Beispiel taucht das bisher noch nicht vorgestellte Symbol $:=$ auf, welches im Zusammenhang der Mengenschreibweise benutzt wurde, um einem Bezeichner einen Inhalt zu zuordnen. Formal handelt es sich um das Symbol der **mathematischen Definition**.

Definition: Mathematische Definition

- Eine **mathematische Definition** ist die eindeutige Festlegung der Bedeutung und Verwendung eines Begriffs, Symbols oder einer Schreibweise.
- Ein neues Symbol kann durch Rückführung auf bereits bekannte, vorher definierte Symbole definiert werden.
- Mit dem Zeichen $:=$ werden linke und rechte Seite **gleich gesetzt**, wobei
  - Auf der linken Seite von $:=$ das neue Symbol steht, das man definieren möchte.
  - Auf der rechten Seite von $:=$ die Bedeutung des neuen Symbols festgelegt wird durch eine Formel, in der nur bereits bekannte Symbole vorkommen.
- Zum Beispiel wird in $\mathbb{N} := \{n \mid n \in \mathbb{Z}, n > 0\}$ das neue Symbol $\mathbb{N}$ eingeführt (linke Seite).
- Durch die rechte Seite wird festgelegt, dass es sich bei $\mathbb{N}$ um eine Menge handelt, und zwar um die Menge der **positiven** ganzen Zahlen.
- $\mathbb{N}$ wird damit zurückgeführt auf $\mathbb{Z}$ durch Hinzunahme des zusätzlichen Merkmals **positiv**. Da es auch nicht-positive ganze Zahlen gibt, unterscheiden sich $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$.

In dieser Vorlesung benutzen wir $:=$ ausschließlich für Definitionen beispielsweise von Intervallen, bei denen wir uns der neuen Mengenschreibweise bedienen.[1]

[1] In einigen Programmiersprachen (z.B. Delphi oder VHDL) wird $:=$ auch für Zuweisungen verwendet (in C aber einfach nur $=$).

Definition: 3.5 Intervalle

Seien $n, m \in \mathbb{R}$ und $n \leqslant m$:

- $[n, m] := \{x \mid x \in \mathbb{R},\ x \geqslant n,\ x \leqslant m\}$.
- $[n, m[:= \{x \mid x \in \mathbb{R},\ x \geqslant n,\ x < m\}$.
- $]n, m] := \{x \mid x \in \mathbb{R},\ x > n,\ x \leqslant m\}$.
- $]n, m[:= \{x \mid x \in \mathbb{R},\ x > n,\ x < m\}$.
- $[n, \infty[:= \{x \mid x \in \mathbb{R},\ x \geqslant n\}$.
- $]n, \infty[:= \{x \mid x \in \mathbb{R},\ x > n\}$.
- $]-\infty, m] := \{x \mid x \in \mathbb{R},\ x \leqslant m\}$.
- $]-\infty, m[:= \{x \mid x \in \mathbb{R},\ x < m\}$.

Man beachte, dass diese Intervalle alle auf $\mathbb{R}$ definiert werden, d.h. es sind auch alle reellen Zahlen zwischen zwei ganzen Zahlen enthalten, z.B. enthält das Intervall $[1, 2]$ auch alle Zahlen, die zwischen 1 und 2 liegen wie 1.5 oder $\sqrt{2}$

Beispiel:

$[1, 4] := \{x | x \in \mathbb{R}, x \geqslant 1, x \leqslant 4\}$
Diese Liste enthält viele Zahlen, z.B. die folgenden: 1, 1.5, 2.2, 3.333, $\frac{5}{3}$, $\sqrt{3}$. Um alle Zahlen anzugeben, wäre man unendlich lange beschäftigt, da alle reellen Zahlen zwischen 1 und 4 enthalten sind.

Da wir nun neben den unendlichen Mengen auch bei Intervallen über Unendlichkeit reden bietet es sich an auch Unendlichkeit formal zu definieren.

Definition: 3.6 Das Symbol ∞

- ∞ bezeichnet einen Wert, die größer ist als jede ganze Zahl (gesprochen **unendlich**).
- $-\infty$ bezeichnet einen Wert, die kleiner ist als jede ganze Zahl (gesprochen **minus unendlich**).

Definition: 3.7 Mengen-Operationen

Seien A, B Mengen.

- Der **Durchschnitt** (die **Schnittmenge**) $A \cap B := \{x \mid x \in A, x \in B\}$ von A und B ist eine Zusammenfassung aller Objekte, die Elemente in A und in B sind.
- Die **Vereinigung(smenge)** $A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B \text{ oder } x \in A \cap B\}$ von A und B ist eine Zusammenfassung aller Objekte, die Elemente in A, in B oder in A und in B sind.
- Die **Differenz** $A \setminus B := \{x \mid x \in A, x \notin B\}$ von A und B ist eine Zusammenfassung aller Objekte, die Elemente in A, aber nicht in B sind.

Beispiel:

- $\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$.
- $\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$.
- $\{1, 2\} \setminus \{2, 3\} = \{1\}$.

3.2 B-adische Darstellung ganzer Zahlen

Wir betrachten im Rahmen der Vorlesung nicht nur das Binär- und das Dezimalsystem („normales" Zehnersystem, mit dem man im Alltag rechnet), sondern auch weitere Zahlensysteme. Damit klar ist, in welchem Zahlensystem eine Zahl dargestellt ist, beziehen wir uns immer auf die *Basis* des jeweiligen Zahlensystems, d.h. die Zahl, bei der es im jeweiligen Zahlensystem zum Überlauf kommt und man eine zusätzliche Ziffer braucht (2 für das Binärsystem, 10 für das Dezimalsystem).

Schauen wir uns als Beispiele noch das Oktal- und das Hexadezimalsystem an. Beim Oktalsystem kommt es bei 8 zum Überlauf (d.h. es nutzt die Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), beim Hexadezimalsystem bei 16 (hier nutzt man zusätzlich zu den Ziffern 0-9 noch A-F, siehe Details in Definition 3.16).

Definition: 3.14 Oktaldarstellung

Die 8-adische Darstellung einer Zahl nennt man **Oktaldarstellung**. Eine Zahl in Oktaldarstellung besteht aus den Ziffern $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Umrechnung zwischen Binär- und Oktaldarstellung
Wegen $8 = 2^3$ stehen jeweils 3 Binärziffern für eine Oktalziffer:

$(0)_8 = (000)_2 \quad (2)_8 = (010)_2 \quad (4)_8 = (100)_2 \quad (6)_8 = (110)_2$
$(1)_8 = (001)_2 \quad (3)_8 = (011)_2 \quad (5)_8 = (101)_2 \quad (7)_8 = (111)_2$

Beispiel:

Umrechnung zwischen Binär- und Oktaldarstellung
$(174)_8 = (001111100)_2$

Definition: 3.16 Hexadezimaldarstellung

Die 16-adische Darstellung einer Zahl nennt man **Hexadezimaldarstellung**. Eine Zahl in Hexadezimaldarstellung besteht aus den Ziffern $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F$ ($A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, E = 14, F = 15$).

Schnelle Umrechnung zwischen Binär- und Hexadezimaldarstellung

Wegen $16 = 2^4$ stehen jeweils 4 Binärziffern für eine Hexadezimalziffer:

$(0)_{16} = (0000)_2 \quad (4)_{16} = (0100)_2 \quad (8)_{16} = (1000)_2 \quad (C)_{16} = (1100)_2$
$(1)_{16} = (0001)_2 \quad (5)_{16} = (0101)_2 \quad (9)_{16} = (1001)_2 \quad (D)_{16} = (1101)_2$
$(2)_{16} = (0010)_2 \quad (6)_{16} = (0110)_2 \quad (A)_{16} = (1010)_2 \quad (E)_{16} = (1110)_2$
$(3)_{16} = (0011)_2 \quad (7)_{16} = (0111)_2 \quad (B)_{16} = (1011)_2 \quad (F)_{16} = (1111)_2$

Beispiel:

Umrechnung zwischen Binär- und Hexadezimaldarstellung
$(1B9)_{16} = (000110111001)_2$

3.2.1 Was ist eine B-adische Darstellung?

In der Motivation haben wir bereits informell beschrieben was eine B-adische Darstellung ist, dies definieren wir nun formal:

Definition: B-adische Darstellung ganzer Zahlen

Für jedes $x \in \mathbb{N}$ und für jede ganze Zahl $B > 1$ gibt es eindeutige ganze Zahlen $b_0, \dots, b_k \in \{0, 1, 2, ..., B-1\}$ mit: $x = \sum_{i=0}^{k} b_i \cdot B^i =: (b_k \dots b_0)_B$. Wobei $b_0, \dots, b_k$ einfach die Ziffern der Zahl b von der k-ten bis zur 0-ten Stelle sind.

Man nennt:

- $(b_k \dots b_0)_B$ die B-**adische Darstellung** von x
- B die **Basis** dieser Darstellung
- $b_0, \dots, b_k$ die **Ziffern** dieser Darstellung

Die B-adische Darstellung ist also der allgemeine Fall, d.h. die Darstellung einer Zahl in einem beliebigen System, im Gegensatz zu den speziellen Systemen wie beispielswese Binär-, Oktal-, Dezimal- oder Hexadezimalsystem.

Bevor wir uns die Berechnung einer B-adischen Darstellung anschauen, definieren wir erst die Summenschreibweise, von der wir dann Gebrauch machen werden.

Das Summenzeichen Σ zeigt an, dass alle Werte von einem Startwert bis zu einem Endwert zu addieren sind, z.B. $\sum_{i=1}^{4} = 1 + 2 + 3 + 4$. Formal lässt sich das Summenzeichen wie folgt induktiv definieren:

Die Summenschreibweise

Definition:

Wir definieren die Summenschreibweise $\sum_{i=m}^{n} A_i$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$, $m < n$, wie folgt **induktiv nach** n:

(1) Induktionsanfang $n = m$: $\sum_{i=m}^{m} A_i := A_m$
(2) Induktionsschritt $n \to n + 1$: $\sum_{i=m}^{n+1} A_i := (\sum_{i=m}^{n} A_i) + A_{n+1}$

Beispiel:

Für $m = 1$ und $n = 4$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{4} i &\overset{(2)}{=} (\sum_{i=1}^{3} i) + 4 \\
&\overset{(2)}{=} ((\sum_{i=1}^{2} i) + 3) + 4 \\
&\overset{(2)}{=} (((\sum_{i=1}^{1} i) + 2) + 3) + 4 \\
&\overset{(1)}{=} 1 + 2 + 3 + 4 \\
&= 10
\end{aligned}$$

Definition: Induktive Definition

- Hängt eine Schreibweise von einem Parameter $n \in \mathbb{N}$ ab, so wird diese häufig durch eine sog. **vollständige Induktion nach** n definiert.
- Diese besteht aus 2 Schritten:
  - Definition der Schreibweise für den kleinsten Wert von n (**Induktionsanfang**).
  - Definition der Schreibweise für $n+1$ durch Rückführung auf den Fall n (**Induktionsschritt**).
- Im Beispiel wird die Summenschreibweise zuerst für $n = m$ definiert (Induktionsanfang)
- Dann wird eine Formel angegeben, durch die man die Summenschreibweise für $n + 1$ auf die Summenschreibweise für n (für beliebiges n) zurückführen kann (Induktionsschritt).

3.2.2 Berechnung einer B-adischen Darstellung

Wie kann man die B-adische Darstellung einer Zahl schnell und einfach berechnen?

Im Binärsystem gibt es folgende Stellen: 1er = 2^0, 2er = 2^1 , 4er = 2^2, 8er = 2^3, 16er = 2^4, 32er = 2^5, 64er = 2^6, 128er = 2^7, 256er = 2^8 usw. Die größte Stelle, in die z.B. die Zahl 131 hinein passt, ist 128. Wenn wir von 131 dann 128 abziehen, erhalten wir 3. Die größte Stelle für 3 ist die 2er Stelle. Also ziehen wir von 3 folglich 2 ab, es verbleibt 1. Für 1 bleibt die 1er-Stelle. Als Binärzahl notiert ergibt sich $(10000011)_2$.

Beispiel: B-adische Darstellung

- $21 = 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 = (21)_{10}$ (Dezimaldarstellung)
- $21 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (10101)_2$ (Binärdarstellung)
- $131 = 2 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 = (203)_8$ (Oktaldarstellung)
- $27 = 1 \cdot 16^1 + 11 \cdot 16^0 = (1B)_{16}$ (Hexadezimaldarstellung)

Die formale Berechnung läuft genau anders herum ab. Sie berechnet erst die letzte Ziffer und am Ende die erste (ein Beispiel dazu folgt gleich weiter unten beim Hornerverfahren):

Beispiel:

Im Binärsystem:

$$\begin{array}{ll}
(\sum_{i=0}^{k} b_i \cdot B^i) \bmod B = b_0 & 131 \bmod 2 = 1 \\
(\sum_{i=0}^{k} b_i \cdot B^i) \div B = \sum_{i=1}^{k} b_i \cdot B^{i-1} & 131 \div 2 = 65 \\
(\sum_{i=1}^{k} b_i \cdot B^{i-1}) \bmod B = b_1 & 65 \bmod 2 = 1 \\
(\sum_{i=1}^{k} b_i \cdot B^{i-1}) \div B = & 65 \div 2 = 32 \\
\sum_{i=2}^{k} b_i \cdot B^{i-2} & 32 \bmod 2 = 0
\end{array}$$

und so weiter

Führen Sie die Berechnung selbst zu Ende.

Im Oktalsystem:

$$\begin{array}{ll}
(\sum_{i=0}^{k} b_i \cdot B^i) \bmod B = b_0 & 131 \bmod 8 = 3 \\
(\sum_{i=0}^{k} b_i \cdot B^i) \div B = \sum_{i=1}^{k} b_i \cdot B^{i-1} & 131 \div 8 = 16 \\
(\sum_{i=1}^{k} b_i \cdot B^{i-1}) \bmod B = b_1 & 16 \bmod 8 = 0 \\
(\sum_{i=1}^{k} b_i \cdot B^{i-1}) \div B = & 16 \div 8 = 2 \\
\sum_{i=2}^{k} b_i \cdot B^{i-2} & 2 \bmod 8 = 2
\end{array}$$

und so weiter

Was fällt uns noch auf?

Beobachtung: Wenn wir eine Zahl durch ihre Basis teilen erhalten wir die Zahl um ein Komma verschoben (z.B. im Dezimalsystem $(205)_{10}$ / 10 = $(20.5)_{10}$, im Binärsystem $(100)_2$ / 2 = $(10.0)_2$). Formal notiert: $(\sum_{i=0}^{k} b_i \cdot B^i)/B = b_k \cdot B^{k-1} + \ldots + b_1 \cdot B^0 + b_0 \cdot B^{-1}$

Berechnung der B-adischen Darstellung in C: Hornerverfahren

Nachdem wir formal notiert haben, wie man die B-adische Darstellung einer Zahl findet, können wir diese auch als C-Funktion beschreiben:

```
void horner_nat(int b[], int x, int B)
{
    int i = 0;
    while (x > 0) {
        b[i] = x % B;
        x = x / B; /*ganzzahlige Division!*/
    ++i;
    }
}
```

In Worten lässt sich das Hornerverfahren so zusammenfassen:

- Es werden die zu konvertierende Zahl x, die Basis b und ein freies Ergebnisfeld b übergeben.
- Wir definieren uns eine Zählervariable i, welche gleichzeitig auch dazu dient, im Ergebnisfeld b an die nächste Stelle zu schreiben.
- Nun wiederholen wir die folgenden Schritte solange unsere aktuell zu konvertierende Zahl größer als 0 ist, d.h. noch Stellen übrig sind:
  - An der aktuellen Stelle im Ergebnisfeld wird das Ergebnis der Modulo-Funktion (Division mit Rest) von x mit der Basis B gespeichert.
  - Anschließend wird x aktualisiert. Dazu wird eine ganzzahlige Division von x durch die Basis B durchgeführt.
- Das Verfahren terminiert[2], wenn wir durch eine Division von x mit der Basis B ein neues x erhalten welches sich dann zwischen 0 und 1 befindet, bzw. wenn x kleiner als die Basis B ist.

> Beispiel:
>
> $x = 131, B = 8$
>
> $i = 0$: $b_0 = 131 \bmod 8 = 3, x = 131 \div 8 = 16$
> $i = 1$: $b_1 = 16 \bmod 8 \;= 0, x = 16 \div 8 \;= 2$
> $i = 2$: $b_2 = 2 \bmod 8 \;\;= 2, x = 2 \div 8 \;\;= 0$

Rechnen in einer B-adischen Darstellung
B-adische Darstellungen von Zahlen mit $B \neq 10$ können auf dieselbe Art addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert werden wie im Dezimalsystem durch **stellenweise Ausführung der Operation mit Übertrag**. Beachte dabei: Der Übertrag erfolgt hier bei Ergebnissen $> B - 1$ (denn dann entsteht ein Beitrag zur Ziffer der nächsthöheren B-Potenz)

Beispiele: Stellenweise Addition und Subtraktion mit Übertrag
Im Grunde ähnelt die stellenweise Addition und Subtraktion in den neuen Zahlensystemen (Binär-, Okta- und Hexadezimalsystem) dem stellenweisen Rechnen im Dezimalsystem, welches aus früheren Schuljahren bekannt sein soll.

Zur Wiederholung:

Die Zahlen werden untereinander geschrieben, so dass die gleichen Stellen übereinander stehen. Nun werden von hinten nach vorne entlang jeder Spalte die beiden Zahlen addiert bzw. subtrahiert und das Ergebnis darunter vermerkt. Hier gilt es nun darauf zu achten, dass sich das Ergebnis in den Grenzen der erlaubten Zahlen pro Stelle befindet. Im Dezimalsystem beispielsweise zwischen den Zahlen von von 0 bis 9, da die Basis 10 ist. Zusätzlich wird in einer weiteren Zeile vermerkt ob es bei der Rechnung zu einem Übertrag kommt, also ob die Addition bzw. Subtraktion dazu geführt hat, dass der Zahlenbereich einmal verlassen wurde. Pro Bereichsüberlauf wird also im Übertrag

[2] Ein Programm *terminiert*, wenn wir das Ende erreichen, z.B. in einer `main`-Funktion das abschließende `return 0;` ausgeführt wird.

eine 1 bei nächst-höheren Stelle vermerkt. Dieses Verfahren wird für jede Stelle wiederholt, wobei auch der Übertrag der vorhergehenden Stelle berücksichtigt werden muss.

Beispiel:

$(451)_8 + (337)_8$:

Stelle			2	1	0
Ziffer			8^2	8^1	8^0
a		0	4	5	1
b	$+$	0	3	3	7
Übertrag			1	1	1
$a+b$		1	0	1	0

Beispiel:

$(451)_8 - (337)_8$:

Stelle		2	1	0
Ziffer		8^2	8^1	8^0
a		4	5	1
b	$-$	3	3	7
Übertrag		0	1	0
$a-b$		1	1	2

Beispiel:

$(111)_2 + (11)_2$:

Stelle		3	2	1	0
Ziffer		2^3	2^2	2^1	2^0
a			1	1	1
b	$+$			1	1
Übertrag		1	1	1	0
$a+b$		1	0	1	0