Programme de la colle de la semaine du 30.11 au 04.12

Équations différentielles linéaires

La notion générale d'équation différentielle linéaire est introduite à partir des exemples étudiés en première année : équation scalaire d'ordre 1, équation scalaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.

La résolution explicite des systèmes linéaires à coefficients constants n'est pas un objectif du programme. On limitera en conséquence la technicité des exercices d'application. On pourra en revanche présenter aux étudiants divers exemples d'études qualitatives d'équations différentielles linéaires scalaires ou de systèmes linéaires. Concernant les systèmes à coefficients constants, on pourra souligner le rôle du signe des parties réelles des valeurs propres de la matrice ; on pourra également, en dimension 2, représenter certaines des courbes intégrales.

Dans ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, E un espace normé de dimension finie.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Équation différentielle linéaire : $$x' = a(t)(x) + b(t)$$ où a est une application continue de I dans $\mathcal{L}(E)$ et b une application continue de I dans E.	Forme matricielle : systèmes différentiels linéaires $X' = A'(t)X + B(t)$. Équation différentielle homogène associée à une équation différentielle linéaire. Principe de superposition.
Problème de Cauchy. Représentation d'une équation scalaire linéaire d'ordre n par un système différentiel linéaire. Problème de Cauchy pour une équation linéaire scalaire d'ordre n.	Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy.
b) Solutions d'une équation différentielle linéaire	
Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	Démonstration non exigible. $\leftrightarrows$ I : méthode d'Euler pour la recherche d'une solution approchée.
Cas des équations scalaires d'ordre n. Cas des équations homogènes : l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,E)$. Pour t_0 dans I, l'application $x \mapsto x(t_0)$ est un isomorphisme de cet espace sur E. Dimension de l'espace des solutions. Cas des équations scalaires homogènes d'ordre n. Structure de l'ensemble des solutions d'une équation avec second membre.	
Exemples d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2 non résolues : $a(x)y'+b(x)y = c(x)$, $\quad a(x)y''+b(x)y'+c(x)y = d(x)$.	Les étudiants doivent savoir exploiter la recherche de solutions développables en série entière.
c) Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice	
Exponentielle d'un endomorphisme d'un espace normé de dimension finie, d'une matrice réelle ou complexe. Continuité de l'exponentielle.	Notations $\exp(a), \mathrm{e}^a, \exp(A), \mathrm{e}^A$. $\leftrightarrows$ I : calcul de l'exponentielle d'une matrice.
Exponentielle de la somme de deux endomorphismes qui commutent.	Démonstration non exigible.
Dérivation, si a est un endomorphisme d'un espace normé de dimension finie, de l'application $t \mapsto \exp(ta)$.	Dérivation de $t \mapsto \exp(tA)$ si A est une matrice carrée réelle ou complexe.

Contenus	Capacités & Commentaires
Pour cette colle : Trois étudiants pendant une heure Attention : ne sont pas au programme de cette colle : • La résolution des systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants • la méthode de variation des constantes pour les systèmes différentiels linéaires • les équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 (pas de méthode de variation des constantes, pas de wronskien) Conseils pour les exercices : • équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 (le programme de maths sup ...) • exponentielle de matrices : calcul, propriétés topologiques ... • équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 qui peuvent être résolues en cherchant des solutions développables en série entière ... ou en utilisant d'autres méthodes, par exemple lorsque les coefficients sont constants (mais pas de variation des constantes, pas de wronskien)	