

## Fonctions vectorielles, arcs paramétrés

Ce chapitre poursuit trois objectifs :

- étendre le programme d'analyse réelle de première année au cadre des fonctions vectorielles ;
- préciser les notions de tangente et de vitesse instantanée ;
- fournir des outils pour l'étude des équations différentielles linéaires et du calcul différentiel.

Les fonctions sont définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans un espace normé de dimension finie  $E$ .

### CONTENUS

### CAPACITÉS & COMMENTAIRES

#### a) Dérivabilité en un point

Dérivabilité en un point.

Formes équivalentes : taux d'accroissement, développement limité à l'ordre 1.

Interprétation cinématique.

$\Leftrightarrow$  PC : vitesse instantanée.

Traduction par les coordonnées dans une base de  $E$ .

Dérivabilité à droite et à gauche d'une fonction en un point.

#### b) Opérations sur les fonctions dérivables

Combinaison linéaire de fonctions dérivables.

Dérivabilité et dérivée de  $L \circ f$ , où  $L$  est linéaire.

Dérivabilité et dérivée de  $B(f, g)$ , où  $B$  est bilinéaire.

Cas du produit scalaire.

$\Leftrightarrow$  PC : dérivée de la densité volumique de l'énergie électromagnétique.

Dérivabilité et dérivée de  $f \circ \varphi$  où  $\varphi$  est une fonction réelle de variable réelle et  $f$  une fonction vectorielle.

Applications de classe  $\mathcal{C}^k$ . Opérations sur les applications de classe  $\mathcal{C}^k$ .

$\Leftrightarrow$  PC et SI : vecteur accélération.

#### c) Intégration sur un segment

Intégrale d'une fonction  $f$  continue par morceaux sur un segment de  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $E$ .

Définie par les intégrales des coordonnées dans une base. Notations  $\int_{[a,b]} f$ ,  $\int_a^b f$ ,  $\int_a^b f(t) dt$ .

$\Leftrightarrow$  PC et SI : intégration d'un champ de vecteurs en mécanique et électromagnétisme.

Linéarité de l'intégrale. Relation de Chasles.

Inégalité  $\left\| \int_a^b f \right\| \leq \int_a^b \|f\|$ .

Sommes de Riemann associées à une subdivision régulière.

Extension de l'énoncé relatif aux fonctions numériques étudié en MPSI.

#### e) Intégrale fonction de sa borne supérieure

Dérivation de  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  pour  $f$  continue.

Ce paragraphe fournit l'occasion de revoir les résultats correspondants pour les fonctions numériques et les techniques de calcul de primitives.

Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ .

#### f) Formules de Taylor

Formule de Taylor avec reste intégral.

Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre  $n$  pour une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$ .

Formule de Taylor-Young à l'ordre  $n$  pour une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$ .

Les étudiants doivent connaître la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et les formules de Taylor globales (reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange).

---

### g) Arcs paramétrés

Arc paramétré de classe  $\mathcal{C}^1$  à valeurs dans  $E$ .

Paramètre régulier.

Exemples simples d'arcs paramétrés plans.

Interprétation géométrique de la dérivée : tangente en un point associé à un paramètre régulier.

Les étudiants doivent savoir déterminer la tangente et la normale à un arc paramétré plan en un point associé à un paramètre régulier.

L'étude des points stationnaires, des courbes asymptotes et des arcs définis par une équation polaire est hors programme.

La pratique du tracé des arcs paramétrés n'est pas un objectif du programme.  $\Leftrightarrow$  I : réalisation de tracés à l'aide de l'outil informatique.

### Pour cette colle :

Trois étudiants pendant une heure

---