Programme de la colle de la semaine du 28.09 au 3.10

Fonctions convexes

L'objectif de ce chapitre est double :
– introduire brièvement la notion de partie convexe d'un espace vectoriel réel ;
– étudier les fonctions convexes d'une variable réelle.
Le cours gagne à être illustré par de nombreuses figures.
La notion de barycentre est introduite exclusivement en vue de l'étude de la convexité.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Parties convexes d'un espace vectoriel réel	
Barycentre. Partie convexe. Caractérisation à l'aide de barycentres à coefficients positifs.	⇆ PC et SI : centre de masse (ou centre de gravité).
b) Fonctions convexes d'une variable réelle	
Une fonction f est convexe sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ si pour tout (x, y) de I^2 et tout λ de $[0, 1]$: $$f\left((1-\lambda)x + \lambda y\right) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$	Pour f convexe, les étudiants doivent connaître l'inégalité $$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$ où $x_1, \dots, x_n$ sont des points de I et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels positifs de somme 1.
Caractérisations : convexité de l'épigraphe, inégalité des pentes. Fonction concave.	Position relative du graphe et de ses cordes.
c) Fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables	
Caractérisation des fonctions convexes dérivables sur I, des fonctions convexes deux fois dérivables sur I. Position relative du graphe d'une fonction convexe dérivable et de ses tangentes.	Exemples d'inégalités de convexité.

Pour cette colle :
Trois étudiants pendant une heure