Podstawy Metody Elementów Skończonych

Praca Domowa 2

Michał Łukaszewicz (297696)

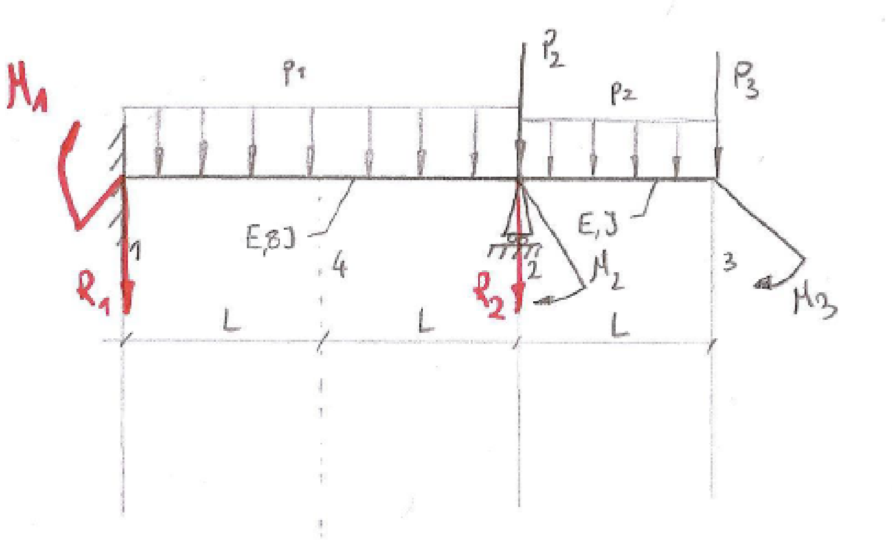
Wydział Samochodów i Maszyn Roboczych
Politechnika Warszawska
2021

Spis treści

1 Opis zadania

Zestaw 50

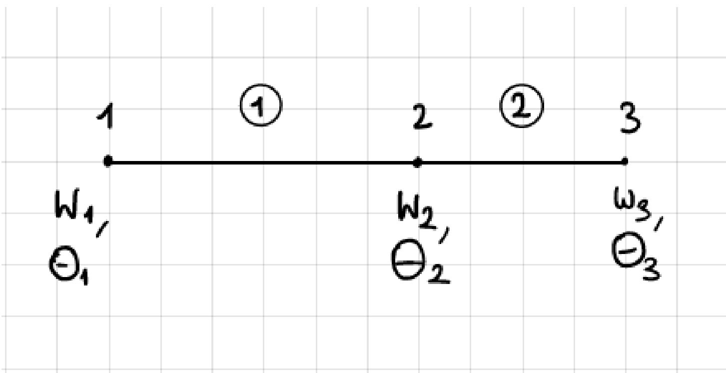
- $p_1 = 12q$
- $p_2 = 12q$
- $P_2 = 2ql$
- $P_3 = 0$
- $M_2 = qL^2$
- $M_3 = 2qL^2$



Rys. 1: Schemat układu

Wykonać obliczenia metodą elementów skończonych.

2 Dyskretyzacja geometrii



Rys. 2: Układ po dyskretyzacji

3 Macierze sztywności elementów

3.1 Element ①

$$
[k^{①}] = \frac{EI}{L^3} \cdot \frac{1}{8}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} w_1 & \theta_1 & w_2 & \theta_2 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cc:cc}
12 & 12L & -12 & 12L \\
12L & 16L^2 & -12L & 8L^2 \\
\hdashline
-12 & -12L & 12 & -12L \\
12L & 8L^2 & -12L & 16L^2
\end{array}\right]
\end{array}
\quad \{w^{①}\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}
$$

3.2 Element ②

$$[k^{②}] = \frac{EI}{L^3}\begin{array}{cccc} w_2 & \theta_2 & w_3 & \theta_3 \\ \end{array}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad \{w^{②}\} = \begin{Bmatrix} w_2 \\ \theta_2 \\ w_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

4 Układ równowagi globalnej

4.1 Globalna macierz sztywności

$$[K]\{w\} = \{F\} \tag{1}$$

$$\{w\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ w_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \tag{2}$$

Korzystając z macierzy sztywności poszczególnych elementów wyznaczamy globalną macierz sztywności (3)

$$[K] = \frac{EI}{L^3}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} w_1 & \theta_1 & w_2 & \theta_2 & w_3 & \theta_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 12L & -12 & 12L & 0 & 0 \\ 12L & 16L^2 & -12L & 8L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -12L & 24 & -6L & -12 & 6L \\ 12L & 8L^2 & -6L & 20L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{array} \tag{3}$$

Podstawiając (3) i (2) do (1) otrzymujemy:

$$\frac{EI}{L^3}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} w_1 & \theta_1 & w_2 & \theta_2 & w_3 & \theta_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 12L & -12 & 12L & 0 & 0 \\ 12L & 16L^2 & -12L & 8L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -12L & 24 & -6L & -12 & 6L \\ 12L & 8L^2 & -6L & 20L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ w_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12Lq + R1 \\ 4L^2q + M1 \\ 20Lq + R2 \\ -2L^2q \\ 6Lq \\ L^2q \end{Bmatrix} \tag{4}$$

4.2 Warunki brzegowe

Zakładamy następujące warunki brzegowe:

$$\begin{array}{lll} w_1 = 0 & \theta_1 = 0 & \rightarrow R_1 \quad M_1 \\ w_2 = 0 & & \rightarrow R_2 \end{array} \tag{5}$$

Korzystając z warunków brzegowych przedstawionych w (5) w początkowych obliczeniach możemy pominąć 1, 2 i 3 wiersz oraz kolumnę macierzy (3)

4.3 Ugięcia

$$\frac{E}{L^3}\begin{bmatrix} 20L^2 & -6L & 2L^2 \\ -6L & 12 & -6L \\ 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_2 \\ w3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2L^2q \\ 6Lq \\ L^2q \end{Bmatrix} \tag{6}$$

$$\begin{cases} \theta_2 = \dfrac{5qL^3}{16EI} \\ w_3 = \dfrac{45qL^4}{16EI} \\ \theta_3 = \dfrac{69qL^3}{16EI} \end{cases}$$

4.4 Reakcje w podporach

Korzystając z równania (4) i ugięć obliczonych w (6) wyznaczamy reakcje w podporach.

$$R_1 = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 12L & -12 & 12L & 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{L^3}{EI}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5q/16 \\ 45Lq/16 \\ 69q/16 \end{bmatrix} - 12Lq = -\frac{33Lq}{4}$$

$$M_1 = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12L & 16L^2 & -12L & 8L^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{L^3}{EI}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5q/16 \\ 45Lq/16 \\ 69q/16 \end{bmatrix} - 4L^2q = -\frac{3L^2q}{2} \tag{7}$$

$$R_2 = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} -12 & -12L & 24 & -6L & -12 & 6L \end{bmatrix}\frac{L^3}{EI}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5q/16 \\ 45Lq/16 \\ 69q/16 \end{bmatrix} - 20Lq = -\frac{119Lq}{4}$$

4.5 Równowaga konstrukcji

Korzystając z wartości reakcji (7) i znajomości geometrii układu możemy dokonać sprawdzenia równowagi konstrukcji zgodnie z warunkami:

$\sum F_x = 0 \rightarrow R_x = 0$
$\sum F_y = 0 \rightarrow R_1 + 2Lp_1 + P_2 + R_2 + p_2L + P3 = 0$
$\sum M_1 = 0 \rightarrow M_1 + 2p_1L^2 + 2P_2L + M_2 + M_3 + 2.5p_2L^2 + 2R_2L + 3P_3L = 0$

Siły i momenty zerują się co oznacza że równowaga konstrukcji jest zachowana.

5 Zachowanie układu w punkcie 4.

Ugięcie i kąt obrotu dla punktu 4. możemy wyznaczyć korzystając z zależności:

$$w(x) = N_1(x)w_1 + N_2(x)\theta_1 + N_3(x)w_2 + N_4(x)\theta_2$$
$$\theta(x) = \frac{dN_1(x)}{dx}w_1 + \frac{dN_2(x)}{dx}\theta_1 + \frac{dN_3(x)}{dx}w_2 + \frac{dN_4(x)}{dx}\theta_2 \tag{8}$$

Biorąc pod uwagę warunki brzegowe (5) zależność (8) przyjmuje postać:

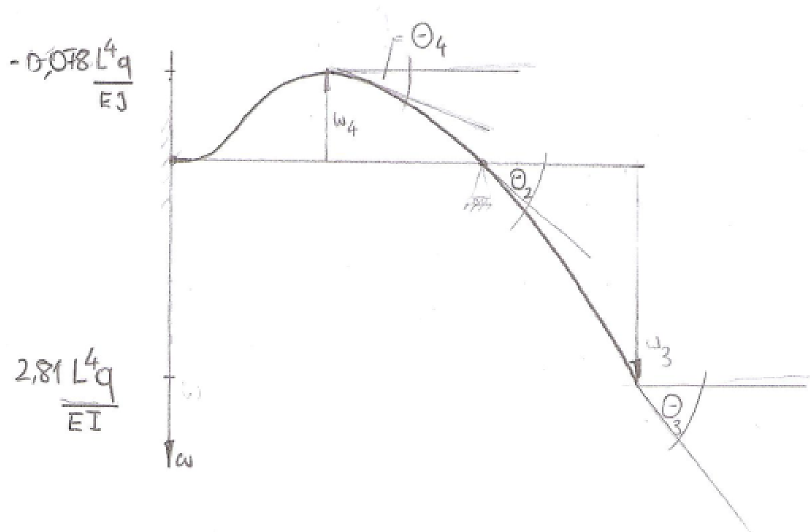
$$w(x) = N_4(x)\theta_2$$
$$\theta(x) = \frac{dN_4(x)}{dx}\theta_2 \tag{9}$$

gdzie: $N_4(x) = L\left[-(x/L)^2 + (x/L)^3\right]$

Dla zadanego punktu $x = L$ obliczamy wartości:

$$N_4(L) = -L/4$$
$$w_4 = w(L) = -\frac{L}{4} \cdot \theta_2 = -\frac{5L^4q}{64EI}$$
$$\theta_4 = \theta(L) = -\frac{1}{4} \cdot \theta_2 = -\frac{5L^3q}{64EI}$$

6 Linia ugięcia belki, zmienność kątów obrotu



Rys. 3: Linia ugięcia belki

7 Siły tnące i momenty gnące

7.1 Siły tnące

$$0 \le x \le 2L \text{ (Idąc od 1 do 2)}$$

$$T(x) = -R_1 - p_1 x$$

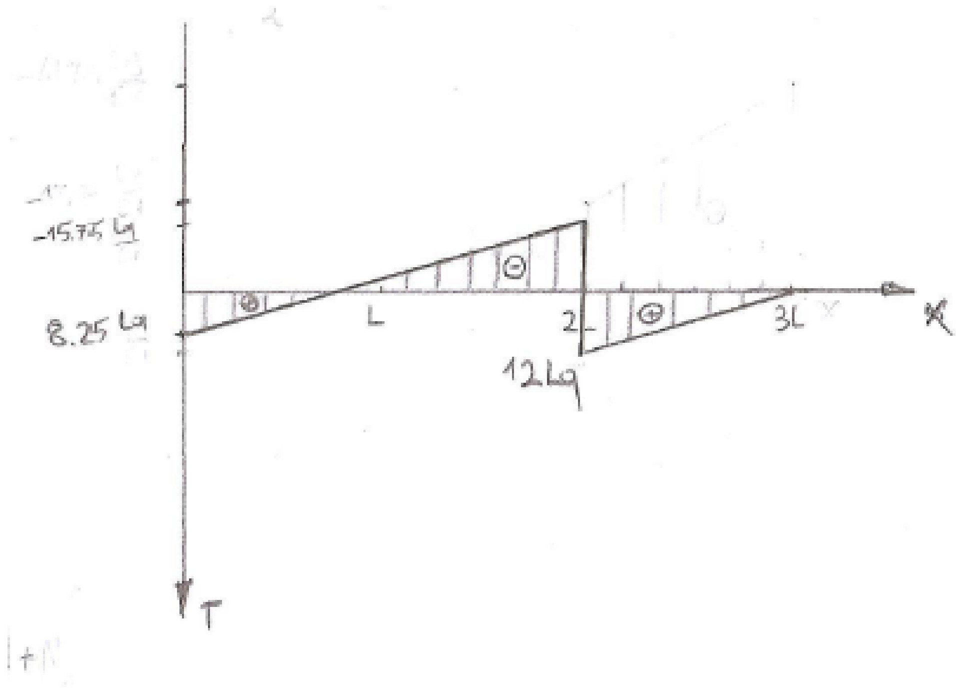
$$T(0) = 8.25Lq$$
$$T(2L) = -15.75Lq$$

(10)

$$2L \le x \le 3L \text{ (Idąc od 2 do 3)}$$

$$T(x) = -R_1 - 2p_1 L - P_2 - R_2 - p_2(x - 2L)$$

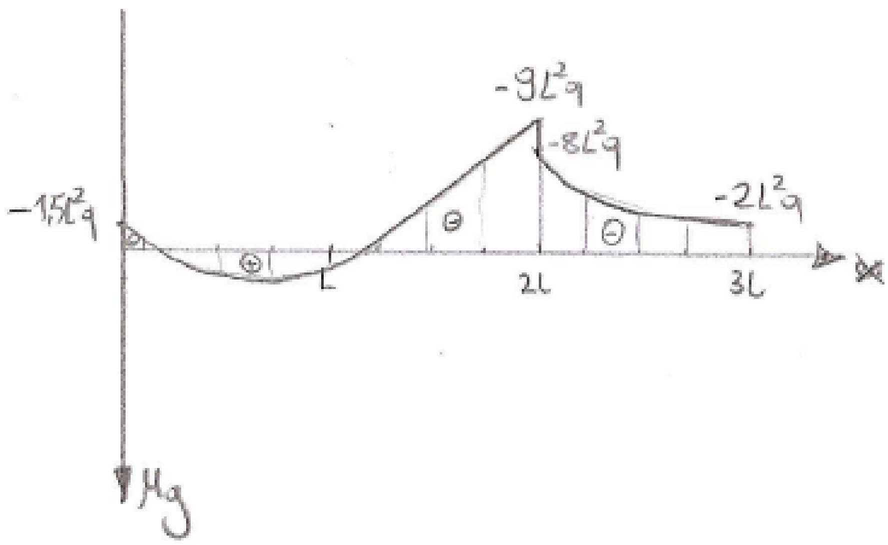
$$T(2L) = 12Lq$$
$$T(3L) = 0Lq$$



Rys. 4: Wykres sił tnących

7.2 Momenty Gnące

$$
\begin{gathered}
0 \leq x \leq 2L \text{ (Idąc od 1 do 2)} \\
Mg(x) = M_1 - 0.5p_1x **2 - R_1x \\
Mg(0) = 1.5L^2q \\
Mg(2L) = -9L^2q \\
\\
L \geq x \geq 0 \text{ (Idąc od 3 do 2)} \\
Mg(x) = -M_3 - P_3x - 0.5p_2x^2 \\
Mg(0) = -2L^2q \\
Mg(L) = -8L^2q
\end{gathered} \tag{11}
$$



Rys. 5: Wykres momentów gnących

8 Oświadczenie o samodzielności wykonania

Oświadczam że niniejsza praca zaliczeniowa stanowiąca podstawę obecny efektów uczenia się z przedmiotu *Podstawy Metody Elementów Skończonych* została przeze mnie wykonana samodzielnie.

Michał Łukaszewicz
297696