Podstawy Metody Elementów Skończonych

Praca Domowa 1

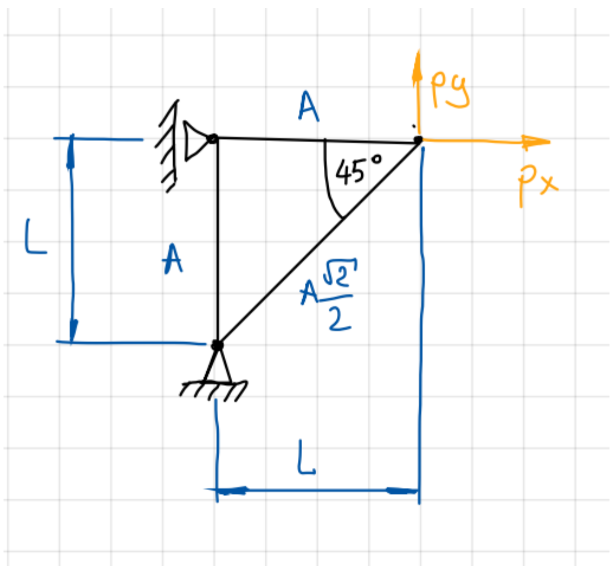
Michał Łukaszewicz (297696)

Wydział Samochodów i Maszyn Roboczych
Politechnika Warszawska
2021

Spis treści

1 Opis zadania

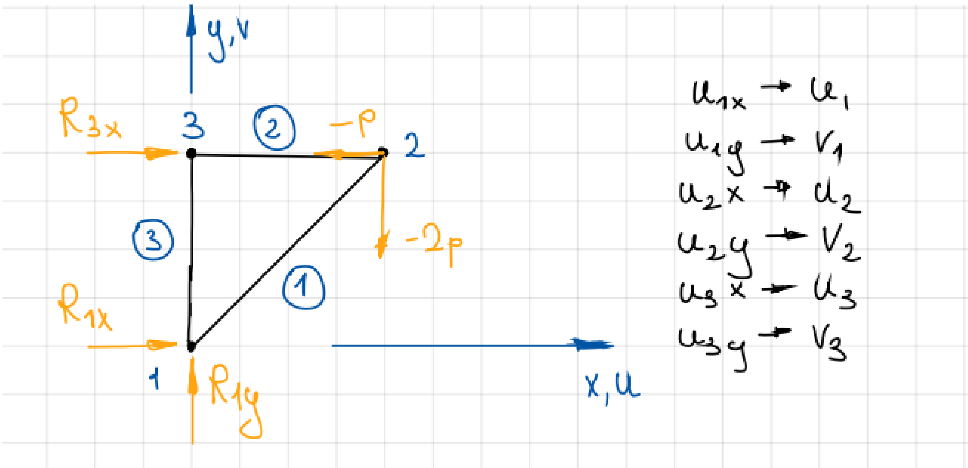
Zestaw 12, układ A, obciążenie VI.
$p_x = -p$; $p_y = -2p$; $E = const.$



Rys. 1: Schemat układu

Wykonać obliczenia metodą elementów skończonych.

2 Dyskretyzacja geometrii



Rys. 2: Układ po dyskretyzacji

3 Zestawienie danych

				α	cos	sin
1	$1-2$	$L\sqrt{2}$	$A\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
2	$2-3$	L	A	π	-1	0
3	$1-3$	L	A	$\frac{\pi}{2}$	0	1

4 Macierze sztywności elementów

4.1 Element 1

$$[k^{(1)}] = \frac{EA}{L} \cdot \frac{1}{4} \begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad \{u^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \tag{1}$$

4.2 Element 2

$$[k^{(2)}] = \frac{EA}{L} \begin{array}{c} \begin{matrix} u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \{u^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \tag{2}$$

4.3 Element ③

$$[k^{③}] = \frac{EA}{L} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & v_1 & u_3 & v_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \quad \{u^{③}\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \tag{3}$$

5 Układ równowagi globalnej (całej konstrukcji)

5.1 Macierz globalna

$$[K]\{u\} = \{F\} \tag{4}$$

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \tag{5}$$

Korzystając z macierzy sztywności poszczególnych elementów wyznaczamy globalną macierz sztywności (6)

$$[K] = \frac{EA}{L} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & -1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & -1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \tag{6}$$

Podstawiając (6) i (5) do (4) otrzymujemy:

$$[K] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & -1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & -1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ -p \\ -2p \\ R_{3x} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{7}$$

5.2 Warunki brzegowe

Zakładamy następujące warunki brzegowe:

$$\begin{array}{lll} u_1 = 0 & v_1 = 0 & \rightarrow R_{1x} \quad R_{1y} \\ u_3 = 0 & & \rightarrow R_{3x} \end{array} \tag{8}$$

Korzystając z warunków brzegowych przedstawionych w (8) w początkowych obliczeniach możemy pominąć 1, 2 i 5 wiersz macierzy (9).

5.3 Przemieszczenia

$$[K] = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -p \\ -2p \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{9}$$

$$\begin{cases} \frac{EA}{L}(\frac{5}{4}u_2 + \frac{1}{4}v_2) = -p & \rightarrow u_2 = \frac{Lp}{EA} \\ \frac{EA}{L}(\frac{1}{4}u_2 + \frac{1}{4}v_2) = -2p & \rightarrow v_2 = -\frac{9Lp}{EA} \\ \frac{EA}{L}v_3 = 0 & \rightarrow v_3 = 0 \end{cases}$$

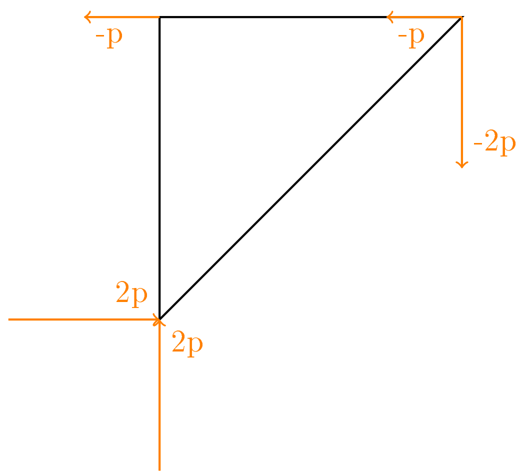
5.4 Wyznaczenie reakcji w podporach

$$R_{1x} = \frac{EA}{4L}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{PL}{EA}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2p$$

$$R_{1y} = \frac{EA}{4L}\begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\frac{PL}{EA}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2p$$

$$R_{3x} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\frac{PL}{EA}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -p$$

5.5 Sprawdzenie równowagi konstrukcji



Rys. 3: Siły działające na konstrukcję

$$\begin{gathered}\sum F_x = 0 \rightarrow 2p - p - p = 0 \\ \sum F_y = 0 \rightarrow 2p - 2p = 0 \\ \sum M_3 = 0 \rightarrow -2pL + 2pL = 0\end{gathered} \tag{10}$$

Z sum sił i momentów (10) wynika że układ zachowuje równowagę.

5.6 Odkształcenia, naprężenia i siły wewnętrzne w prętach

o

$$\epsilon = \frac{1}{L}\begin{bmatrix}-\cos\alpha & -\sin\alpha & \cos\alpha & \sin\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j\end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\sigma = \epsilon * E$$

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{jx} \\ F_{jy}\end{Bmatrix}$$

5.6.1 Pierwszy element

$$\epsilon_1 = \frac{1}{L}\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 \\ 0 \\ 1 \\ -9\end{bmatrix}\frac{pL}{EA} = -4\sqrt{2}\frac{P}{EA}$$

$$\sigma_1 = -4\sqrt{2}\frac{P}{A}\ [\mathrm{Pa}]$$

$$F_{1x} = (-\tfrac{1}{2} + \tfrac{9}{2})p = 4p$$
$$F_{1y} = (-\tfrac{1}{2} + \tfrac{9}{2})p = 4p$$
$$F_{2x} = (\tfrac{1}{2} - \tfrac{9}{2})p = -4p$$
$$F_{2y} = (\tfrac{1}{2} - \tfrac{9}{2})p = -4p$$

5.6.2 Drugi element

$$\epsilon_2 = \frac{1}{L}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-9\\0\\0\end{bmatrix}\frac{pL}{EA} = \frac{P}{EA}$$

$$\sigma_2 = \frac{P}{A}\text{ [Pa]}$$

$$F_{1x} = 1p$$
$$F_{1y} = 0$$
$$F_{2x} = -1p$$
$$F_{2y} = 0$$

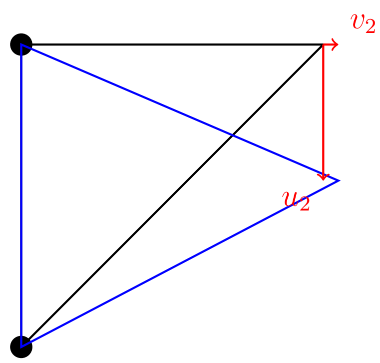
5.6.3 Trzeci Element

$$\epsilon_3 = \frac{1}{L}\begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\frac{pL}{EA} = 0$$

$$\sigma_3 = 0$$

$$F_{1x} = 0$$
$$F_{1y} = 0$$
$$F_{2x} = 0$$
$$F_{2y} = 0$$

5.7 Szkic odkształcenia konstrukcji pod obciążeniem



Rys. 4: Szkic konstrukcji w stanie swobodnym (czarny) i pod obciążeniem (niebieski)

6 Wnioski

Zaletą metody elementów skończonych jest jej uniwersalność, umożliwiająca rozwiązywanie w ten sam sposób konstrukcji nawet mocno się od siebie różniących. Umożliwia to zastosowanie MES jako świetnego narzędzia do symulacji zachowania struktur, gdyż ta metoda daje bardzo szerokie spektrum możliwych zastosowań przy stosunkowo prostej implementacji.

7 Oświadczenie o samodzielności wykonania

Oświadczam że niniejsza praca zaliczeniowa stanowiąca podstawę obecny efektów uczenia się z przedmiotu *Podstawy Metody Elementów Skończonych* została przeze mnie wykonana samodzielnie.

Michał Łukaszewicz
297696