Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Институт прикладной математики и механики

Кафедра «Телематика (при ЦНИИ РТК)»

Отчет по лабораторной работе

Доверительные интервалы для парметров нормальнго распределения

По дисциплине «Теория вероятностей и Математическая статистика»

Выполнил
Студент гр. 3630201/80101 ________ М. Д. Маляренко

Руководитель
к.ф.-м.н., доцент ________ А. Н. Баженов

«___»___________ 2020г.

Санкт-Петербург
2021

Содержание

Список таблиц

1 Постановка задачи

Для двух выборок размерами 20 и 100 элементов, сгенерированных согласно нормальному закону $N(x, 0, 1)$, для параметров положения и масштаба построить асимптотически нормальные интервальные оценки на основе точечных оценок метода максимального правдоподобия и классические интервальные оценки на основе статистик χ^2 и Стьюдента. В качестве параметра надёжности взять $\gamma = 0.95$

2 Теория

2.1 Доверительные интервалы

Дана выборка размером $n(x_1, \dots, x_n)$ из генеральной совокупности. Для нее построим выборочное среднее $\overline{x}$ и среднеквадратическое отклонение s.[1]

Параметры расположения μ и масштаба σ неизвестны. Построим для них доверительный интервал с доверительной вероятностью γ.

2.1.1 Оценка на основе статистики Стьюдента и хи-квадрат

Оценка для параметра положения[1]:

$$P\left(\overline{x} - \frac{s \cdot t_{1-\alpha/2}(n-1)}{\sqrt{n-1}} < \mu < \overline{x} + \frac{s \cdot t_{1-\alpha/2}(n-1)}{\sqrt{n-1}}\right) = \gamma, \tag{1}$$

где $1-\alpha = \gamma,\ t_{1-\alpha/2}(n-1)$ — квантиль распределения Стьюдента с $(n-1)$ степенями свободы порядка $1-\alpha/2$.

Оценка для параметра масштаба:

$$P\left(\frac{s\sqrt{n}}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}} < \sigma < \frac{s\sqrt{n}}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}\right) = \gamma, \tag{2}$$

где $1-\alpha = \gamma,\ \chi^2_p(n-1)$ — квантиль распределения хи-квадрат с $(n-1)$ степенями свободы порядка p.

Эти оценки справедливы для выборки из нормальной генеральной совокупности.

2.1.2 Асимптотические оценки на основе центральной предельной теоремы

Оценка для параметра положения[1]:

$$P\left(\overline{x} - \frac{s \cdot u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + \frac{s \cdot u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right) \approx \gamma, \tag{3}$$

где $1-\alpha = \gamma, u_{1-\alpha/2}$ — квантиль стандартного нормального распределения порядка $1-\alpha/2$.

Для оценки параметра масштаба необходимо рассчитать выборочный эксцесс $e = \frac{m_4}{s^4} - 3$, где $m_4 = \frac{1}{n}\sum(x_i - \overline{x})^4$ — четвёртый выборочный центральный момент.

Парметр масштаба можно оценить так:

$$P\left(s(1+U)^{-0.5} < \sigma < s(1-U)^{-0.5}\right) \approx \gamma, \tag{4}$$

где $U = u_{1-\alpha/2}\sqrt{(e+2)/n},\ u_{1-\alpha/2}$ — квантиль стандартного нормального распределения порядка $1-\alpha/2$.

Эти оценки справедливы для выборки из генеральной совокупности, которая имеет конечные центральные моменты вплоть до 4 порядка и конечное матожидание.

3 Реализация

Расчёты реализованы в среде аналитических вычислений Maxima. Сначала были сгенерированные две нормально распределённые выборки размера 20 и 100. Далее для их вычислялось среднеквадратическое отклонение, средневыборочная величина. Затем происходили вычисления по формулам (1) (2) (3) (4). Для расчётов использовались встроенные статистические функции из пакета `descriptive`. Полный текст скрипта представлен в репозитории на GitHub.

4 Результаты

В Таблице 1 представлены оценки параметров нормального распределения на основе статистик Стьюдента и хи-квадрат.

Таблица 1: Интервальные оценки на основе статистик Стьюдента и хи-квадрат

	μ (1)	σ (2)
$N = 20$	$-0.34 < \mu < 0.63$	$0.79 < \sigma < 1.50$
$N = 100$	$-0.17 < \mu < 0.21$	$0.84 < \sigma < 1.12$

В Таблице 2 представлены асимптотические интервальные оценки параметров нормального распределения.

Таблица 2: Асимптотические интервальные оценки

	μ (3)	σ (4)
$N = 20$	$-0.29 < \mu < 0.59$	$0.82 < \sigma < 1.41$
$N = 100$	$-0.04 < \mu < 0.35$	$0.86 < \sigma < 1.09$

Заключение

В результате выполнения лабораторной работы были построены доверительные интервалы для параметров закона распределения выборок размера 20 и 100. Как видно из полученных результатов (Таблицы 1, 2) асимптотический метод оценки доверительного интервала показал более точные результаты по сравнения оценок на основе статистик Стьюдента и хи-квадрат.

Список литературы

[1] Теоретическое приложение к лабораторным работам №5-8 по дисциплине «Математическая статистика». – СПб.: СПбПУ, 2020. – 22 с

[2] Максимов Ю.Д. Математика. Теория и практика по математической статистике. Конспект-справочник по теории вероятностей : учеб. пособие / Ю.Д. Максимов; под ред. В.И. Антонова. — СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2009. — 395 с. (Математика в политехническом университете).

Приложение А. Репозиторий с исходным кодом

Исходный код скрипта для среды аналитических вычислений Maxima находится в репозитории GitHub – URL `https://github.com/malyarenko-md/TeorVer`