Fluidi

Marco Marini

13 agosto 2014

Indice

Sommario

Parte I
Fluidi

1 Approssimazione del gradiente in $\Re^2$

Sia $F(\mathbf{r})$ una funzione scalare nello spazio.

Il gradiente di F è una funzione vettoriale definita come

$$\nabla F(\mathbf{r}) = \frac{\partial F(\mathbf{r})}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial F(\mathbf{r})}{\partial y}\mathbf{e}_y$$

Supponiamo che il continuo sia rappresentato da un reticolo quadrato semplice dove

$$\mathbf{r}(i,j) = i\Delta x\mathbf{e}_x + j\Delta y\mathbf{e}_y$$
$$F(\mathbf{r}) = F(i,j) = F(\mathbf{r}(i,j))$$

allora sarà

$$\nabla F(i,j) = \frac{F(i+1,j) - F(i-1,j)}{2\Delta x}\mathbf{e}_x + \frac{F(i,j+1) - F(i,j-1)}{2\Delta y}\mathbf{e}_y \qquad (1)$$

2 I Approssimazione della divergenza in $\Re^2$

Sia $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ una funzione vettoriale nello spazio.

La divergenza di $\mathbf{F}$ è una funzione scalare definita come

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\partial F_x(\mathbf{r})}{\partial x} + \frac{\partial F_y(\mathbf{r})}{\partial y}$$

Supponiamo che il continuo sia rappresentato da un reticolo quadrato semplice dove

$$\mathbf{r}(i,j) = i\Delta x\mathbf{e}_x + j\Delta y\mathbf{e}_y$$
$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(i,j) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(i,j))$$

allora sarà

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(i,j) = \frac{F_x(i+1,j) - F_x(i-1,j)}{2\Delta x} + \frac{F_y(i,j+1) - F_y(i,j-1)}{2\Delta y} \qquad (2)$$

3 II Approssimazione della divergenza in $\Re^2$

Sia $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ una funzione vettoriale nello spazio.

La divergenza di $\mathbf{F}$ è una funzione scalare definita come

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \lim_{V \to p} \int\int_{S(V)} \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}}{|V|} dS = \lim_{V \to p} \int\int_{S(V)} \frac{F_x n_x + F_y n_y}{|V|} dS$$

Supponiamo che il continuo sia rappresentato da un reticolo dove le celle adiacenti siano date da n raggi vettori $\mathbf{s}_i$ la cui superficie di contatto sia S_i. Se volume di ogni cella è V la divergenza allora sarà

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}+\mathbf{s}_i) \cdot \mathbf{n}_i}{V} S_i = \sum_i \frac{F_x(\mathbf{r}+\mathbf{s}_i)n_{xi} + F_y(\mathbf{r}+\mathbf{s}_i)n_{yi}}{V} S_i \qquad (3)$$

Nel caso del reticolo quadrato semplice abbiamo che

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{s}_1 = (\Delta x, 0) = \mathbf{s}_x & \mathbf{n}_1 = (1,0) & S_1 = 2\Delta y \\
\mathbf{s}_2 = (0, \Delta y) = \mathbf{s}_y & \mathbf{n}_2 = (0,1) & S_2 = 2\Delta x \\
\mathbf{s}_3 = -\mathbf{s}_x & \mathbf{n}_3 = -\mathbf{n}_1 & S_3 = S_1 \\
\mathbf{s}_4 = -\mathbf{s}_y & \mathbf{n}_4 = \mathbf{n}_2 & S_4 = S_2 \\
V = 4\Delta x\Delta y & &
\end{array}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{F_x(\mathbf{r}+\mathbf{s}_x) - F_x(\mathbf{r}-\mathbf{s}_x)}{2\Delta x} + \frac{F_y(\mathbf{r}+\mathbf{s}_y) - F_y(\mathbf{r}-\mathbf{s}_y)}{2\Delta y} \qquad (4)$$

che corrisponde con la (2)

4 Approssimazione della divergenza tensoriale in $\Re^2$

Sia $\mathbf{T}(\mathbf{r})$ una funzione tensoriale dello spazio.

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}) = \left| \begin{array}{cc} T_{xx}(\mathbf{r}), & T_{xy}(\mathbf{r}) \\ T_{yx}(\mathbf{r}), & T_{yy}(\mathbf{r}) \end{array} \right|$$

La divergenza di $\mathbf{T}$ è una funzione vettoriale definita come

$$\nabla \cdot \mathbf{T}(\mathbf{r}) = \frac{\partial T_{ij}(\mathbf{r})}{\partial x_i}\mathbf{e}_j = \left(\frac{\partial T_{xx}(\mathbf{r})}{\partial x} + \frac{\partial T_{yx}(\mathbf{r})}{\partial y} \right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial T_{xy}(\mathbf{r})}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}(\mathbf{r})}{\partial y} \right)\mathbf{e}_y$$

Nel caso del reticolo quadrato semplice si ha

$$\begin{array}{rl} \nabla \cdot \mathbf{T}(\mathbf{r}) = & \left[\frac{T_{xx}(\mathbf{r}+\mathbf{s}_x) - T_{xx}((\mathbf{r}-\mathbf{s}_x)}{2\Delta x} + \frac{T_{yx}(\mathbf{r}+\mathbf{s}_y) - T_{yx}((\mathbf{r}-\mathbf{s}_y)}{2\Delta y} \right] \mathbf{e}_x \\ + & \left[\frac{T_{xy}(\mathbf{r}+\mathbf{s}_x) - T_{xy}((\mathbf{r}-\mathbf{s}_x)}{2\Delta x} + \frac{T_{yy}(\mathbf{r}+\mathbf{s}_y) - T_{yy}((\mathbf{r}-\mathbf{s}_y)}{2\Delta y} \right] \mathbf{e}_y \end{array}$$

5 Approssimazione delle equazioni di Eulero

Definamo in ogni punto dello spazio due quantità.

- ρ la densità di fluido in un punto
- $\mathbf{Q}$ la quantità di moto del fluido in un punto

Partiamo dall'equazione di conservazione della massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = -\nabla \cdot \mathbf{Q}$$

Per la (3) abbiamo

$$\begin{array}{rl} \nabla \cdot \mathbf{Q} & = \sum_i \frac{\mathbf{Q}(\mathbf{r}+\mathbf{s}_i)\cdot \mathbf{n}_i}{V} S_i \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} & = -\sum_i \frac{\mathbf{Q}(\mathbf{r}+\mathbf{s}_i)\cdot \mathbf{n}_i}{V} S_i \end{array}$$

da cui

$$\Delta \rho = \frac{\partial \rho}{\partial t}\Delta t = -\Delta t \sum_i \frac{\mathbf{Q}(\mathbf{r}+\mathbf{s}_i)\cdot \mathbf{n}_i}{V} S_i$$

Per il reticolo quadrato abbiamo

$$\Delta \rho = -\Delta t \left(\frac{Q_x(\mathbf{r}+\mathbf{s}_x) - Q_x(\mathbf{r}-\mathbf{s}_x)}{2\Delta x} + \frac{Q_y(\mathbf{r}+\mathbf{s}_y) - Q_y(\mathbf{r}-\mathbf{s}_y)}{2\Delta y} \right) \quad (5)$$

Prendiamo ora l'equazione di conservazione della quantità di moto

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} = \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \nabla K \rho + \rho \mathbf{g}$$

dove

$$\mathbf{u}\otimes\mathbf{u} = \begin{vmatrix} u_x u_x, & u_x u_y \\ u_y u_x, & u_y u_y \end{vmatrix}$$

$$K = \frac{1000RT}{P_m}$$

$\mathbf{g}$ è il campo gravitazionale nel punto $\mathbf{r}$.

Calcoliamo $\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}$

$$\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u} = \frac{\mathbf{Q}\otimes\mathbf{Q}}{\rho}$$

$$\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial t} = \nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{Q}\otimes\mathbf{Q}}{\rho}\right) - \nabla K\rho + \rho\mathbf{g}$$

da cui

$$\Delta\mathbf{Q} = \frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial t}\Delta t = \Delta t\left[\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{Q}\otimes\mathbf{Q}}{\rho}\right) - \nabla K\rho + \rho\mathbf{g}\right]$$

Espandiamo ora

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{Q}\otimes\mathbf{Q}}{\rho}\right) = &\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q_x q_x}{\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q_y q_x}{\rho}\right)\right]\mathbf{e}_x \\ &+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q_x q_y}{\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q_y q_y}{\rho}\right)\right]\mathbf{e}_y\end{aligned}$$

nel reticolo quadrato diventa

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{Q}\otimes\mathbf{Q}}{\rho}\right) = &\left[\frac{(q_x(\mathbf{r}+\mathbf{s}_x))^2}{2\rho(\mathbf{r}+\mathbf{s}_x)\Delta x} - \frac{(q_x(\mathbf{r}-\mathbf{s}_x))^2}{2\rho(\mathbf{r}-\mathbf{s}_x)\Delta x} + \frac{q_y(\mathbf{r}+\mathbf{s}_y)q_x(\mathbf{r}+\mathbf{s}_y)}{2\rho(\mathbf{r}+\mathbf{s}_y)\Delta y} - \frac{q_y(\mathbf{r}-\mathbf{s}_y)q_x(\mathbf{r}-\mathbf{s}_y)}{2\rho(\mathbf{r}-\mathbf{s}_y)\Delta y}\right]\mathbf{e}_x \\ &+\left[\frac{q_x(\mathbf{r}+\mathbf{s}_x)q_y(\mathbf{r}+\mathbf{s}_x)}{2\rho(\mathbf{r}+\mathbf{s}_x)\Delta x} - \frac{q_x(\mathbf{r}-\mathbf{s}_x)q_y(\mathbf{r}-\mathbf{s}_x)}{2\rho(\mathbf{r}-\mathbf{s}_x)\Delta x} + \frac{(q_y(\mathbf{r}+\mathbf{s}_y))^2}{2\rho(\mathbf{r}+\mathbf{s}_y)\Delta y} - \frac{(q_y(\mathbf{r}-\mathbf{s}_y))^2}{2\rho(\mathbf{r}-\mathbf{s}_y)\Delta y}\right]\mathbf{e}_y\end{aligned}$$

Calcoliamo ora la componente $\nabla K\rho$ nel caso del reticolo quadrato

$$\nabla K\rho = K\left[\frac{\rho(\mathbf{r}+\mathbf{s}_x) - \rho(\mathbf{r}-\mathbf{s}_x)}{2\Delta x}\mathbf{e}_x + \frac{\rho(\mathbf{r}+\mathbf{s}_y) - \rho(\mathbf{r}-\mathbf{s}_y)}{2\Delta y}\mathbf{e}_y\right]$$