Fluidi

Marco Marini

July 26, 2014

Contents

Abstract

Part I
Fluidi

1 Equazioni di Eulero dei fluidi non viscosi

La simulazione avviene in una superficie bidimensionale (sezione).

Prendiamo una cella elementare di forma qualsiasi. Nel caso esemplificativo un quadrato, ma nella simulazione sarà una cella esagonale.

1.1 Equazione di continuità o bilancio di massa

La prima equazione è basata sul principio di continuo e di conservazione della materia

La variazione di massa in una cella deve essere uguale alla somma dei flussi entranti nel blocco.

Iniziamo con definire la massa della cella

$$m_i = \rho_i v \tag{1}$$

dove ρ_i è la densità del fluido nella cella C_i e v il relativo volume, si suppone che le celle abbiano tutte lo stesso volume.

Adiacente alla cella C_i troviamo la cella C_j, la superficie di contatto S_{ij} e il versore $\vec{N_{ij}}$ normale alla superficie.

Definiamo $\vec{V_i}$ la velocità di flusso passante per la cella.

Nell'intervallo di tempo infinitesimale dt la variazione di massa che entra verso la cella C_j è dato da

$$dm_{ij} = -(\vec{V_j} - \vec{V_i})\ \vec{N_{ij}}\ S_{ij}\ \rho_i\ dt = -(\vec{V_j} - \vec{V_i})\ \vec{N_{ij}}\ S_{ij}\ \frac{m_i}{v}\ dt \tag{2}$$

Simmetricamente

$$dm_{ji} = -(\vec{V_i} - \vec{V_j})\ \vec{N_{ji}}\ S_{ji}\ \frac{m_j}{v}\ dt \tag{3}$$

essendo $\vec{Nj}i = -\vec{N_{ij}}$ e $S_{ji} = S_{ij}$

$$dm_{ji} = -(\vec{V_j} - \vec{V_i})\ \vec{N_{ij}}\ S_{ij}\ \frac{m_j}{v}\ dt \tag{4}$$

Definiamo

$$K_{ij} = K_{ji} = -\frac{(\vec{V_j} - \vec{V_i})\ \vec{N_{ij}}\ S_{ij}}{v} \tag{5}$$

Si possono esprime le variazioni di massa come

$$dm_{ij} = K_{ij} m_i dt \tag{6}$$

$$dm_{ji} = K_{ij} m_j dt \tag{7}$$

In generale nella cella i avremo che

$$dm_i = -\frac{m_i}{v} \sum_j \left(\vec{V_j} - \vec{V_i}\right)\ \vec{N_{ij}}\ S_{ij}\ dt = m_i \sum_j K_{ij} dt \tag{8}$$

1.2 Equazione di bilancio della quantità di moto

La seconda equazione è basata sul principio conservazione della quantità di moto

La variazione di quantità di moto in una cella è uguale alla somma delle quantità di moto dei flussi entranti nel blocco più le forze agenti sul volume e sulla superficie.

Iniziamo con definire

$$\vec{Q_i} = m_i \vec{V_i} \tag{9}$$

la quantità di moto del fluido nella cella i.

Calcoliamo la portata della quantità di moto entrante nella cella dalla cella adiacente j.

Nell'intervallo di tempo infinitesimale dt la variazione di quantità di moto che entra verso la cella j è dato da

$$d\vec{Q}_{ij} = dm_{ij} \vec{V_i}\ dt \tag{10}$$

$$d\vec{Q}_{ij} = m_i \vec{V_i} K_{ij}\ dt^2 \tag{11}$$

Simmetricamente

$$d\vec{Q}_{ji} = m_j \vec{V}_j K_{ij} \ dt^2 \tag{12}$$

Se ipotiziamo un fluido non viscoso le forze applicate alla superficie S_{ij} sono perpendicolari alla superficie stessa e dovute solo alla differenza di pressione $P_j - P_i$ tra le due celle. L'impulso applicato alla superficie allora sarà

$$\vec{I_{ij}} = (P_j - P_i) S_{ij} \vec{N_{ij}} dt \tag{13}$$

$$\vec{I_{ji}} = (P_i - P_j) S_{ij} \vec{N_{ji}} dt = \vec{I_{ij}} \tag{14}$$

Mentre l'impulso causato dal campo gravitazionale $\vec{g_i}$ sarà

$$\vec{I_i} = \vec{g_i} m_i dt \tag{15}$$

Applicando il principio di conservazione della quantità di moto abbiamo

$$d\vec{Q_i} = \vec{g_i} m_i dt + \sum_j (P_j - P_i) S_{ij} \vec{N_{ij}} dt - \frac{m_i}{v} \vec{V_i} \sum_j \left(\vec{V_j} - \vec{V_i} \right) \ \vec{N_{ij}} \ \ S_{ij} \ dt^2 \tag{16}$$

La pressione nella cella i è data da

$$P_i = m_i C \tag{17}$$

dove $C = \frac{RT}{P_m v}$ con P_m peso molecolare, R costante di Avogadro e T temperatura assoluta del fluido