Convoluzione

Funzione convolutiva

In generale definiamo

$$Y_{ijk} = \sum_{a,b,c} F_{abc}(i,j,k) P_{abc}(i,j)$$
$$a,b = 1\ldots3, c = 1\ldots h$$

Quindi

$$Y_{ijk} = F_{111}(i,j,k)P_{111}(i,j) + ... + F_{33h}(i,j,k)P_{33h}(i,j)$$

Topologia

Poniamo che $X(i,j), Y(i,j)$ siano le coordinate nel punto (i,j).

Poniamo che

$$P^X_{ab}(i,j) = X(i+a-2, j+b-2)$$
$$P^Y_{ab}(i,j) = Y(i+a-2, j+b-2)$$

Definiamo

$$dX_{ab}(i,j) = X(i+a-2, j+b-2) - X(i,j)$$
$$dY_{ab}(i,j) = Y(i+a-2, j+b-2) - Y(i,j)$$

poi calcoliamo

$$\Delta S_{ab}(i,j) = \sqrt{dX^2_{ab}(i,j) + dY^2_{ab}(i,j)}$$

Topologia reticolo quadrato

Il reticolo quadrato è definito dalle equzione delle coordinate come

$$X(i,j) = X_0 + (j-1)\Delta s$$
$$Y(i,j) = Y_0 + (i-1)\Delta s$$

Da cui deriva

$$dX_{ab}(i,j) = X_1 + (j+b-3)\Delta s - X_1 - (j-1)\Delta s = (b-2)\Delta s$$

$$dX_{ab}(i,j) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Delta s$$

$$dY_{ab}(i,j) = Y_1 + (i+a-2)\Delta s - Y_1 - i\alpha = (a-2)\Delta s$$

$$dY_{ab}(i,j) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Delta s$$
$$dS_{ab}(i,j) = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix} \Delta s$$

Topologia reticolo isometrico

```
    +---+---+---+
   / \ / \ / \ /
  +---+---+---+
   \ / \ / \ / \
    +---+---+---+
   / \ / \ / \ /
  +---+---+---+
```

Nel reticolo isometrico a nido d'ape si ha

$$Y(i,j) = Y_0 + (i-1)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\Delta s = Y_0 + (i-1)\frac{\sqrt{3}}{2}\Delta s$$

da cui

$$dY_{ab}(i,j) = Y_0 + (i+a-3)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\Delta s - Y_0 - (i-1)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\Delta s =$$
$$= (a-2)\frac{\sqrt{3}}{2}\Delta s$$

$$dY_{ab}(i,j) == \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}\Delta s$$

La funzione X cambia

$X(i,j)$ per i dispari

$$X(i,j) = X_0 + (j-1)\Delta s$$

$X(i,j)$ per i pari

$$X(i,j) = X_0 + \left(j - 1 + \frac{1}{2}\right)\Delta s = X_0 + \left(j - \frac{1}{2}\right)\Delta s$$

$dX_{ab}(i,j)$ per i dispari

Quando $a = 2$ abbiamo che $i + a - 2 = i$ è dispari quindi

$$dX_{ab}(i,j) = X_0 + (j+b-3)\Delta s - X_0 - (j-1)\Delta s = (b-2)\Delta s$$

mentre per $a \in (1,3)$ si ha che $i + a - 2$ è pari quindi

$$dX_{ab}(i,j) = X_0 + \left(j + b - 2 - \frac{1}{2}\right)\Delta s - X_0 - (j-1)\Delta s = \left(b - \frac{3}{2}\right)\Delta s$$

la matrice risultate è

$$dX_{ab}(i,j) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \frac{\Delta s}{2}$$

$$dS_{ab}(i,j) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{\sqrt{6}}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{\sqrt{6}}{2} \end{vmatrix} \Delta s$$

$dX_{ab}(i,j)$ per i pari

Quando $a = 2$ abbiamo che $i + a - 2 = i$ è pari quindi

$$dX_{ab}(i,j) = X_0 + \left(j + b - 2 - \frac{1}{2}\right)\Delta s - X_0 - \left(j - \frac{1}{2}\right)\Delta s = (b-2)\Delta s$$

mentre per $a \in (1,3)$ si ha che $i + a - 2$ è dispari quindi

$$\begin{gathered} dX_{ab}(i,j) = X_0 + (j + b - 2 - 1)\alpha - X_0 - \left(j - \frac{1}{2}\right)\Delta s = \\ = \left(b - \frac{5}{2}\right)\Delta s \end{gathered}$$

la matrice risultate è

$$dX_{ab}(i,j) = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} \frac{\Delta s}{2}$$

$$dS_{ab}(i,j) = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{6}}{2} & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{6}}{2} & 1 & 1 \end{vmatrix} \Delta s$$

Gradiente

Sia ora $F(x,y)$ una funzione scalare di x, y.

Il gradiente di F è definito come

$$\begin{aligned} G_x &= \lim_{dx \to 0} \frac{F(x + dx, y) - F(x,y)}{dx} \\ G_y &= \lim_{dy \to 0} \frac{F(x, y + dy) - F(x,y)}{dy} \end{aligned}$$

In pratica sia F_{ij} la matrice di valori della funzione F nel reticolo.

Per calcolare il gradiente calcoliamo la media dei gradienti nelle direzioni adiacenti il punto (i,j).

Definiamo $F'_{ab}(i,j)$ la matrice di adiacenza rispetto il punto (i,j) e calcoliamo.

$$\Delta F_{ab}(i,j) = F'_{ab}(i,j) - F'_{22}(i,j)$$

$$G^x_{ab}(i,j) = \frac{\Delta F_{ab}}{\Delta S_{ab}} \frac{dX_{ab}}{\Delta S_{ab}}$$
$$G^y_{ab}(i,j) = \frac{\Delta F_{ab}}{\Delta S_{ab}} \frac{dY_{ab}}{\Delta S_{ab}}$$

Le precedente possiamo riscriverla con

$$G^x_{ab}(i,j) = \Delta F_{ab} J^x_{ab}$$
$$G^y_{ab}(i,j) = \Delta F_{ab} J^y_{ab}$$

dove

$$J^x_{ab} = \frac{dX_{ab}}{\Delta S^2_{ab}}$$
$$J^y_{ab} = \frac{dY_{ab}}{\Delta S^2_{ab}}$$

Quindi calcoliamo la media sulle celle adiacenti.

$$G^x_{ab}(i,j) = \frac{1}{n} \sum_{(a,b)} \frac{\Delta F_{ab}}{\Delta S_{ab}} \frac{dX_{ab}}{\Delta S_{ab}}$$
$$G^y_{ab}(i,j) = \frac{1}{n} \sum_{(a,b)} \frac{\Delta F_{ab}}{\Delta S_{ab}} \frac{dY_{ab}}{\Delta S_{ab}}$$

Calcoliamo ora J^x e J^y per i vari reticoli

J per il reticolo quadrato

Consideriamo adiacenti solo le celle laterali e non diagonali avremo quindi $n = 4$ e

$$J^x_{ab}(i,j) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \frac{1}{\Delta s}$$
$$J^y_{ab}(i,j) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \frac{1}{\Delta s}$$

J per il reticolo isometico con i dispari

Le celle adiacenti sono 6 e le matrici risultatni sono

$$J_{ab}^{x}(i,j) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \frac{1}{2\Delta s}$$
$$J_{ab}^{y}(i,j) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2\Delta s}$$

J per il reticolo isometico con i pari

Le celle adiacenti sono 6 e le matrici risultatni sono

$$J_{ab}^{x}(i,j) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \frac{1}{2\Delta s}$$
$$J_{ab}^{y}(i,j) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2\Delta s}$$