Hilbert*

Marco Marini

1 luglio 2012

Indice

*Id

1 Basi

1.1 Entità e ambiente

Il progetto serve per verificare come un sistema basato su principi probabilistici evolve nel tempo. Il sistema è formato da varie entità che interagiscono tra loro. Le interazioni sono definite dal principio di causa ed effetto ma in senso probabilistico. Ovvero per ogni interazione viene definito il legame tra una causa cioè la situazione o stato del sistema e l'effetto cioà la variazione di stato del sistema.

Definiamo meglio la causa, la causa è la probabilità che l'effetto venga applicato. La causa quindi è una funzione scalare dello stato del sistema, dipende quindi da ogni singola propriertà delle entità. In pratica non tutte le proprietà influenzano una causa e quindi solo u sottoinsieme delle proprietà partecipa a definire la causa.

$$P(s, e) = F_e(s) = F_e(p_1, \dots, p_n) \tag{1}$$

Dove $P(s, e)$ è la probabilità che si verifiche l'effetto e quando il sistema è nello stato s. La probabilità $P(s, e)$ è rappresentata dalla funzione F_e dei valori delle singole proprietà del sistema $(p_1, \dots, p_n)$.

L'effetto invece definisce come vengono modificate le proprietà delle varie entità per formare il nuovo stato del sistema.

Vengono definite quindi un insieme di regole che determinano i cambi di stato. Ad ogni passo viene scelta una sequenza casuale di regole fino a quando una causa viene verificata. A questo punto viene applicato l'effetto associato e il sistema si sposta in un nuovo stato.

2 Modello

Prendiamo come modello di simulazione un ambiente sociale. Cerchiamo e definiamo quindi le leggi che determinano lo sviluppo di una società.

2.1 Popolazione

La società è un insieme di individui che condividono un territorio, la conoscenza e le regole di interazioni tra individui. Il numero di di individui che compongono la popolazione è N. La popolazione si divide in base alle attività svolte: produttori alimentari, ricercatori, insegnanti e popolazione non attiva (bambini e anziani) rispettivamente:

$$N_a, N_r, N_i, N_p \tag{2}$$

avremoi quindi che

$$n = N_a + N_r + N_i + N_p \tag{3}$$

La suddivisione delle attività avviente proporzionalmente con dei coefficiente di preferenza:

$$\psi_a, \psi_r, \psi_i, \psi_p \tag{4}$$

quindi

$$N_a = N \frac{\psi_a}{\psi_a + \psi_r + \psi_i + \psi_p} \tag{5}$$

$$N_r = N\frac{\psi_r}{\psi_a + \psi_r + \psi_i + \psi_p} \tag{6}$$

$$N_i = N\frac{\psi_i}{\psi_a + \psi_r + \psi_i + \psi_p} \tag{7}$$

$$N_p = N\frac{\psi_p}{\psi_a + \psi_r + \psi_i + \psi_p} \tag{8}$$

Poniamo che le preferenze siano costani nel tempo

2.2 Territorio

Il territorio ha una superficie finita S che viene divisa in attività produttive alimentari, di ricerca tecnologica, di istruzione sociale e infine una superfice per le abitazioni rispettivamente.

$$S_a, S_r, S_i, S_p \tag{9}$$

Come per la suddivisione delle attività nella popolazione anche per il territorio avviente proporzionalmente con dei coefficiente di preferenza:

$$\phi_a, \phi_r, \phi_i, \phi_p \tag{10}$$

quindi

$$S_a = S\frac{\phi_a}{\phi_a + \phi_r + \phi_i + \phi_p} \tag{11}$$

$$S_r = S\frac{\phi_r}{\phi_a + \phi_r + \phi_i + \phi_p} \tag{12}$$

$$S_i = S\frac{\phi_i}{\phi_a + \phi_r + \phi_i + \phi_p} \tag{13}$$

$$S_p = S\frac{\phi_p}{\phi_a + \phi_r + \phi_i + \phi_p} \tag{14}$$

2.2.1 Sovrapopolamento

Lo spazio riservato alla popolazione limita il numero di individui. In generale la sovrapopolamento genera agressività che sfocia in querra o criminalità. Questo determina una riduzione della popolazione. Se definiamo δ_s la densità della popolazione massima possiamo determinare il numero massimo di individui per non generare agressività:

$$N_s = \delta_s S_p \tag{15}$$

possiamo definire la probabilità di morte per sovrapopolamento:

$$P(morti) = \frac{N}{N_s} - 1 \tag{16}$$

Se definamo ω_s il tasso di mortalità in caso di sovrapopolamento, il numero di morti per sovrapopolamento sarà un numero casuale tra 0 e $2N\omega_s - 1$:

$$M_s = rnd(2N\omega_s) \tag{17}$$

Per permettere la sopravvivenza della popolazione in caso di sovrapopolamento dovrà essere:

$$\omega_s < 0.5 \tag{18}$$

2.3 Produzione del cibo

Ogni anno la popolazione crea il cibo che viene consumato per alimentarsi. Il cibo richiesto C_r necessario per l'alimentazione è dato da

$$C_r = N\rho \tag{19}$$

ρ è la quantità di cibo necessaria procapite.

Il coefficiente di alimentazione della popolazione K_a e dato da

$$K_a = \frac{C_p}{C_r} = \frac{C_p}{N\rho} \tag{20}$$

dove C_p è la quantità di cibo prodotta.

Se $K_a > 1$ avremo una sovrabbondanza di cibo mentre se $K_a < 1$ avremo carestia.

La produzione di cibo è limitata dal numero di persone dedicate all'agricoltura, dalla superficie dedicata alla produzione alimentare e i coefficienti di produttività per operatore e per superficie.

$$C_p = min(N_a\pi_p, S_a\pi_s) \tag{21}$$

Il coefficiente di produttività per superficie π_s dipende dalle condizioni climatiche che sono casuali e dalla tecnologia. Il valore è limitato inferiormente (π_{s0}) dalla capacità di produrre cibo senza tecnologia e superiormente (π_{s1}) dalla quantità massima di energia solare ricevuta per superfice.

Supponiamo che il coefficiente vari con cicli medi di t_a anni e che il valore sia distribuito normalmente intorno ad un valore medio dato da:

$$\bar{\pi}_s = \bar{\pi}_s(T) = \pi_{s0} + (\pi_{s1} - \pi_{s0})(1 - e^{-\frac{T}{\tau_s}}) = \pi_{s1} - (\pi_{s1} - \pi_{s0})e^{-\frac{T}{\tau_s}} = \tag{22}$$

dove τ_s è la quantità tecnologica di riferimento per la produzione di cibo. Possiamo formare una tabella che correla il valore di tecnologia T con il valore di riferimento τ_s e la percentuale di raggingimento tra il valore massimo e minimo del coefficiente π_s:

T	$\frac{\pi_s - \pi_{s0}}{\pi_{s1} - \pi_{s0}}$
$0.693\tau_s$	0.5
τ_s	0.632
$2.3\tau_s$	0.9
$4.61\tau_s$	0.99

Secondo la legge di distribuzione normale la probabilità che il coefficiente π_s sia x è:

$$P(\pi_s = x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\frac{x - \bar{\pi}_s}{\sigma_s})^2} \tag{23}$$

La probabilità invece di cambiare il coefficiente è

$$P(cambio) = \frac{1}{t_a} \tag{24}$$

Il coefficiente di produttivita individuale π_p è controllato solo dalla tecnologia secondo la regola:

$$\pi_p = \pi_{p0} + \pi'_p T \tag{25}$$

dove π_{P0} è il coefficiente di produzione individuale a tecnologia nulla e π'_p è il quanto tecnologico del coefficiente di produzione individuale.

2.3.1 Carestia

Quando il cibo prodotto scarseggia la popolazione muore di fame. Durante la carestia si può verificare una riduzione della popolazione.

Definiamo il coefficiente di alimentazione della popolazione K_a come il rapporto tra il cibo prodotto C_p e il cibo richiesto C_r

$$K_a = \frac{C_p}{C_r} \tag{26}$$

Se $K_a < 1$ avremo carestia e quindi riduzione della popolazione. La probabilità che ci sia una riduzione della popolazione è

$$P(morti) = 1 - K_a, K_a < 1 \tag{27}$$

Il numero di persone che moriranno M_c sarà un numero casuale compreso tra 0 e $2N\omega_c$:

$$M_c = min(rnd(2N\omega_c + 1), N) \tag{28}$$

Nel caso limite che non venga prodotto cibo ($C_p = 0$) avremo $K_a = 0$, $P(carestia) = 1$ e il numero medio di morti sarà

$$\bar{M_c} = \frac{2N\omega}{2} = N\omega_c \tag{29}$$

quindi ω_c rappresenta il massimo valore medio del tasso di mortalità in caso di mancanza assoluta di cibo.

In linea teorica ω_c dovrebbe tendere a 1, in pratica ω_c verrà impostato ad un valore di poco inferiore a 0.5 permettendo a qualche individuo di sopravvivere ad una totale carestia.

2.3.2 Natalità

Se $K_a > 1$ avremo una sovrabbondanza di cibo con conseguente probabilità di aumento della popolazione. La probabilità di aumento della popolazione dipende dalla quantità di cibo in eccesso:

$$P(nascite) = \frac{C_p - C_r}{C_p} = 1 - \frac{1}{K_a} \tag{30}$$

Le nascite sono limitate dal cibo in eccedenza e dalla capacità di riproduzione della popolazione. Se ρ è la quantità di cibo richiesto procapite allora il numero di individui che possono nascere con il cibo in eccedenza A_c è:

$$A_c = \frac{C_p}{\rho} - N \tag{31}$$

Mentre il numero di individui che possono nascere dalla popolazione A_p è

$$A_p = N\alpha \tag{32}$$

con α il tasso di natalità della società.

Il tasso di natalità della società e determinato dal numero di individui fertili, dalle regole sociali della società e dalla distribuzione dei maschi e femmine tra la popolazione fertile.

Il numero di persone reali che nasceranno A sarà invece un numero casuale tra 0 e $min(A_c, A_p) - 1$

$$A = min(A_c, A_p) \tag{33}$$

2.4 Tecnologia

Abbiamo visto che i parametri che controllano la produttivià alimentare dipendono dalla tecnologia T. Più la società si evolve tecnologicamente e maggiore è l'efficienza delle attività sociali. Il livello di tecnologia aumenta quando ci sono nuove scoperte o nuove invenzioni e quindi dipende dal settore della ricerca. Il mantenimento della tecnologia invece è legato alla distribuzione della conoscienza tra la popolazione. Per ottenere ciò sono necessarie una struttura e un'organizzazione della ricerca e dell'istruzione. Dipendono quindi dalle risorse dedicate alla ricerca e all'istruzione.

Per semplificare il problema supponiamo che non ci siano specializzazioni dell'istruzione e che gli efetti siano uniformi su tutti i campi. In questo modo possiamo usare un solo indicatore del livello tecnologico. T ha un range che va da 0 (nessuna tecnologica conosciuta) al limite superiore ∞ dove una persona è sufficiente a produrre infinità di cibo, di ricerca e di istruzione. Definiamo poi che gli incrementi di tecnologia siano finiti e pari a 1 quindi

$$\begin{gathered} T_{t+1} = T_t \pm \Delta T \\ \Delta T = 1 \end{gathered} \tag{34}$$

2.4.1 Ricerca

La probabilità di nuove scoperte o invenzioni di anno in anno è limitato dalla popolazione dedicata alla ricerca, dallo spazio dedicato alla ricerca (aree e risorse) e dal livello tencologico stesso

$$P(scoperta) = P_r(N_p, S_p, T) \tag{35}$$

Se ϑ_s è il coefficiente di produzione spaziale della ricerca, la quantità di ricerca producibile per la superfice S_r è:

$$R_s = S_r \vartheta_s \tag{36}$$

$$\vartheta_s = \vartheta_{s0} + \vartheta'_s T \tag{37}$$

dove ϑ_{s0} è il coefficiente di produzione spaziale della ricerca in assenza di tecnologia e ϑ'_s il quanto spaziale di ricerca.

In maniera simile possiamo definire la quantità di ricerca prodotta dalla popolazione N_r:

$$R_p = N_r \vartheta_p \tag{38}$$

$$\vartheta_p = \vartheta_{p0} + \vartheta'_p T \tag{39}$$

dove ϑ_{p0} è il coefficiente individuale della ricerca in assenza di tecnologia e ϑ'_s il quanto individuale di ricerca.

Il livello di ricerca reale R sarà il valore minimo tra i due valori:

$$R = min(R_s, R_p) \tag{40}$$

A questo punto possiamo definire la probabilità che in un anno ci sia una scoperta che incrementi il livello tecnologico:

$$P(scoperta) = 1 - e^{-\frac{R}{R_0}} \tag{41}$$

dove R_0 è il livello di riferimento della ricerca.

L'intervallo medio tra una scoperta e la sucessiva è dato da

$$\bar{t}_r = \frac{1}{P(scoperta)} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{R}{R_0}}} \simeq \frac{R_0}{R} \tag{42}$$

mentre R_0 e dato da:

$$R_0 = \frac{1}{ln\left(\frac{\bar{t}_r}{\bar{t}_r - 1}\right)} R_{\bar{t}_r} \simeq \bar{t}_r \cdot R_{\bar{t}_r} \tag{43}$$

La tabella di R_0 funzione di R e $\bar{t}$ è

$\bar{t}_r$	R_0
2	$1.44 R_2$
10	$9.49 R_{10}$
100	$99.5 R_{100}$

2.4.2 Istruzione

Abbiamo già detto che il mantenimento del livello tecnologico è determinato dalla distribuzione della conoscenza nella popolazione. Una scoperta o innovazione che rimane confinata al solo ambito di ricerca non produce effetti sulla popolazione. Inoltre per mantenere il livello tecnologico è necessario che i nuovi individui ricevano la conoscenza da parte degli individui che la posseggono. E' quindi necessaria una struttura e organizzazione che trasmetta a tutti le conoscenze acquisite dalla società. Se i livelli di istruzione non sono adeguati lentamente la società perderà la conoscenza acquisita e il livello tecnologico si abbasserà.

In maniera simile alla ricerca la probabilità di riduzione della tecnologia è determinato dalla popolazione dedicata all'istruzione, dallo spazio dedicato all'istruzione (aree e risorse) e dal livello tecnologico stesso.

$$P(regressione) = P_i(N_i, S_i, T) \tag{44}$$

Definiamo ξ_s il coefficiente spaziale di istruzione. La quantità di istruzione producibile per la superfice S_i sarà:

$$I_s = S_i \xi_s \tag{45}$$

$$\xi_s = \xi_{s0} + \xi_s' T \tag{46}$$

dove ξ_{s0} è il coefficiente spaziale di istruzione in assenza di tecnologia e ξ_s' il quanto spaziale di istruzione.

In maniera simile definiamo la quantità di istruzione prodotta dalla popolazione N_i:

$$I_p = N_i \xi_p \tag{47}$$

$$\xi_p = \xi_{p0} + \xi_p' T \tag{48}$$

dove ξ_{p0} è il coefficiente individuale di istruzione in assenza di tecnologia e ξ_s' il quanto individuale di istruzione.

Il livello di istruzione reale I sara il valore minimo tra i due:

$$I = min(I_s, I_p) \tag{49}$$

La probabilità che in un anno ci sia una regressione tecnologica e determinato da:

$$P(regressione) = e^{-\frac{I}{NI_0}} \tag{50}$$

dove I_0 è il livello di riferimento dell'istruzione.

L'intervallo medio tra una regressione e la successiva è:

$$\bar{t}_i = \frac{1}{P(regressione)} = \frac{1}{e^{-\frac{I}{NI_0}}} \tag{51}$$

mentre I_0 è dato da:

$$I_0 = \frac{1}{Nln\left(\bar{t}_i\right)} I \tag{52}$$

La tabella di I_0 funzione di I e $\bar{t}_i$ è

$\bar{t}_i$	I_0
2	$1.44 \frac{I_2}{N}$
10	$0.434 \frac{I_{10}}{N}$
100	$0.217 \frac{I_{100}}{N}$

3 Dimensionamento dei parametri

Dimensioniamo ora i parametri di simulazione. Possiamo dividere in due gruppi logici i parametri: quelli interni alla società regolati dalla società stessa che quindi definiscono la politica sociale e quelli esterni alla società regolati dall'ambiente dove si sviluppa la società.

3.1 Politica sociale

Abbiamo due gruppi di parametri che regolano la politica sociale le preferenze della popolazione e le preferenze per il territorio.

3.1.1 Preferenze per la popolazione

Per definire la distribuzione della popolazione ipotiziamo un gruppo di 10 famiglie tipo: 2 adulti che devono mantenere 4 figli e 4 genitori. La popolazione totale sarà di 100 individui della quale quella produttiva sara di 20 individui. Dei 20 individui diciamo che 12 producono cibo, 4 dedicati alla ricerca e 4 dedicati all'istruzione. Quindi avremo

$$\begin{array}{l} \psi_a = 12 \\ \psi_r = 4 \\ \psi_i = 4 \\ \psi_p = 80 \end{array} \tag{53}$$

3.1.2 Preferenze per il territorio

Per definire la distribuzinoe della superfice per le attività dobbiamo fissare le preferenze del territorio. In ordine di priorità avremo il cibo, l'abitazione, l'istruzione e la ricerca. Quindi definiamo come riferimento la preferenza alla ricerca pari all'istruzione. La preferenza all'abitazione sarà 10 volte quella della ricerca mentre quella del cibo sarà 50 volte. Quindi

$$\begin{aligned} &\phi_a = 50 \\ &\phi_r = 1 \\ &\phi_i = 1 \\ &\phi_p = 10 \end{aligned} \tag{54}$$

3.2 Ambiente

Vediamo ora tutti i parametri relativi all'ambiente

3.2.1 Territorio e popolazione iniziale

Definiamo la superfice totale del territorio e la popolazione iniziale della società:

$$\begin{aligned} &S = 6200 \\ &N = 50 \end{aligned} \tag{55}$$

di conseguenza possiamo dedurre i valori per le attività:

$$\begin{aligned} &S_a = 5000 \\ &S_r = 100 \\ &S_i = 100 \\ &S_p = 1000 \\ &N_a = 6 \\ &N_r = 2 \\ &N_i = 2 \\ &N_p = 40 \end{aligned} \tag{56}$$

3.2.2 Sovrapopolamento

Dobbiamo definire i due parametri di densità della popolazione δ_s e del tasso di mortalità ω_s. Definiamo come limite massimo della popolazione $N_s = 10000$ individui che distribuiti sulla superfice $S_p = 1000$ determinano una densità di 10 individui per unità di superfice Mentre il tasso di mortalità sarà

$$\begin{aligned} &\delta_s = 10 \\ &\omega_s = 0.45 < 0.5 \end{aligned} \tag{57}$$

3.2.3 Produzione del cibo

Fissiamo in una unità la quantità di cibo necessaria procapite ρ.

La capacità di produzione di alimenti per la superfice $S_a = 5000$ deve essere consentire minimo l'alimentazione di almento 100 individui e al massimo 10000.

Per definire il valore di riferimento della tecnologia τ_s, poniamo che si raggiunga il 90% della produzione dopo 2000 anni e che il tasso di incremento della tecnologia sia di 1 livello ogni 10 anni, quindi:

$$\begin{array}{l} 2.3\tau_s = \frac{2000}{10} = 200 \\ \tau_s = \frac{200}{2.3} \simeq 87 \end{array}$$

Lo scarto medio σ_s deve invece assicurare che il 90% dei valori della capacità di produzione dia una variazione di produttività intorno al 25% del valore medio. Il 90% dei valori deve stare nel range di $\pm 1.64\sigma_s$, quindi

$$\begin{array}{l} 1.64\sigma_s = 0.25\bar{\pi}_s \\ \sigma_s = 0.152\bar{\pi}_s \end{array}$$

Poniamo invece che i ciclio medio di produzione sia di $t_a = 10$ anni.

Ultimi parametri da definire sono quelli relativi alla capacità produttiva degli individui. Per sopravvivere alle condizioni iniziali gli individui dediti alla produzione alimentare devono produrre per tutta la società vale a dire che i $N_a = 6$ individui devono produrre per $N = 50$ con un margine del 50% quindi:

$$\pi_{p0} = \frac{75}{6} = 12.5$$

Poniamo poi che la capacità produttiva di un individio possa raggiungere 100 volte il valore iniziale dopo 2000 anni, quindi

$$\begin{array}{l} \pi_p = \pi_{p0} + \pi'_p T \\ \pi'_p = \frac{\pi_p - \pi_{p0}}{T} \\ \pi'_p = \frac{99 \cdot 12.5}{200} \simeq 6., 19 \end{array}$$

ll coefficiente di mortalità per carestia sarà $\omega_c = 0.45$

Poniamo che il tasso di natalità sia costante nel tempo, che ci siano 2 generazioni viventi quindi per ogni coppia fertile ci siano 4 genitori anziani e 4 figli giovani, quindi la popolazione fertile sarà $\frac{2}{10} = 0.2$ e che ogni coppia possa generare un figlio all'anno avremo quindi:

$$\alpha = 0.1$$

Ricapitolando abbiamo:

$$\begin{array}{l} \rho = 1 \\ \pi_{s0} = 0.02 \\ \pi_{s1} = 2 \\ \tau_s = 87 \\ \sigma_s = 0.152\bar{\pi}_s \\ t_a = 10 \\ \pi_{p0} = 12.5 \\ \pi'_p = 6.19 \\ \omega_c = 0.45 \\ \alpha = 0.1 \end{array} \tag{58}$$

3.2.4 Ricerca

Per dimensionare i parametri di ricerca partiamo dai seguenti assunti: l'intervallo medio $\bar{t}_r$ tra una scoperta e la sucessiva deve essere minimo di 2 anni e massimo di 100 anni. quindi dalla (43)

$$\begin{array}{l} R_0 = \frac{1}{ln\left(\frac{\bar{t}_{r0}}{\bar{t}_{r0}-1}\right)} R_{r0} = \frac{1}{ln\left(\frac{\bar{t}_{r1}}{\bar{t}_{r1}-1}\right)} R_{r1} \\ \frac{R_{r0}}{R_{r1}} = \frac{ln\left(\frac{\bar{t}_{r0}}{\bar{t}_{r0}-1}\right)}{ln\left(\frac{\bar{t}_{r1}}{\bar{t}_{r1}-1}\right)} \simeq 69 \end{array}$$

Fissiamo quindi $R_{r0} = 69$ e $R_{r1} = 1$ di conseguenza sarà:

$$R_0 = \frac{1}{ln\left(\frac{\bar{t}_{r0}}{\bar{t}_{r0}-1}\right)} R_{r0} \simeq 99.5$$

La superficie $S_r = 100$ deve essere in grado di produrre minimo 1 unità di ricerca in assenza di tecnologia e massimo 69 unità di ricerca quando la tecnologia raggiunge il livello di $T = 200$ unità quindi:

$$\begin{array}{l} \vartheta_{s0} = \frac{1}{100} = 0.01 \\ \vartheta_s = \vartheta_{s0} + \vartheta'_s T \\ \frac{69}{100} = 0.69 = 0.01 + \vartheta'_s 200 \\ 0.68 = \vartheta'_s 200 \\ \vartheta'_s \simeq 0.0034 \end{array}$$

Poniamo che la popolazione $N_r = 200$ a tecnologica $T = 0$ deve arrivare a produrre 1 unità di ricerca quindi $\vartheta_p = \frac{1}{200} = 0.005$ mentre a tecnologica $T = 200$ deve arrivare a produrre 69 unità di ricerca quindi $\vartheta_p = \frac{69}{200} = 0.345$. Avremo quindi

$$\begin{array}{l} \vartheta_{p0} = 0.005 \\ \vartheta_p = \vartheta_{p0} + \vartheta'_p T \\ 0.345 = 0.005 + \vartheta'_p 200 \\ 0.34 = \vartheta'_p 200 \\ \vartheta'_p \simeq 0.0017 \end{array}$$

Riassumendo:

$$\begin{array}{l} R_0 = 99.5 \\ \vartheta_{s0} = 0.01 \\ \vartheta'_s = 0.0034 \\ \vartheta_{p0} = 0.005 \\ \vartheta'_p = 0.0017 \end{array} \tag{59}$$

3.2.5 Istruzione

L'intervallo tra una regressione e la sucessiva deve essere compreso tra $\bar{t}_{i0} = 2$ anni a $N_{i0} = 50$ e $\bar{t}_{i1} = 100$ anni a $N_{i1} = 10000$. Dalla (52) avremo quindi

$$\begin{array}{l} I_0 = \frac{1}{N_0 ln(\bar{t}_{i0})} I_{i0} = \frac{1}{N_1 ln(\bar{t}_{i1})} I_{i1} \\ \frac{I_{i1}}{I_{i0}} = \frac{N_1 ln(\bar{t}_{i1})}{N_0 ln(\bar{t}_{i0})} = \frac{10000 ln(100)}{50 ln(2)} \simeq 1329 \\ I_{i0} = 1, I_{i1} \simeq 1329 \\ I_0 = \frac{1}{50 ln(2)} \simeq 0.0289 \end{array}$$

Poniamo ora che il livello minimo di istruzione $I_{i0} = 1$ sia raggiunto con la superficie $S_i = 100$ in assenza di tecnologia ($T = 0$) e che il livello massimo $I_{i1} = 1329$ sia raggiunto con tecnologia $T = 200$:

$$\begin{array}{l} I = \xi_s S_i = (\xi_{s0} + \xi_s' T) S_i = \xi_{s0} S_i = 1 \\ \xi_{s0} = \frac{1}{100} = 0.01 \\ 1329 = (0,01 + \xi_s' 200)100 \\ \xi_s' = \frac{1328}{20000} = 0.0664 \end{array}$$

Poniamo ora che il livello minimo di istruzione $I_{i0} = 1$ sia raggiunto con la popolazione $N_i = 2$ in assenza di tecnologia ($T = 0$) e che il livello massimo $I_{i1} = 1329$ sia raggiunto con tecnologia $T = 200$:

$$\begin{array}{l} I = \xi_p N_i = (\xi_{p0} + \xi_p' T) N_i = \xi_{p0} N_i = 1 \\ \xi_{p0} = \frac{1}{2} = 0.5 \\ 1329 = (0.5 + \xi_s' 200)2 \\ \xi_s' = \frac{1328}{400} = 3.32 \end{array}$$

Quindi:

$$\begin{array}{l} I_0 = 0.0289 \\ \xi_{s0} = 0.01 \\ \xi_s' = 0.0664 \\ \xi_{p0} = 0.5 \\ \xi_p' = 3.32 \end{array} \tag{60}$$