Hilbert*

Marco Marini

October 1, 2023

Contents

*Id

1 Basi

Il progetto serve per verificare come il modello di un sistema sociale basato su principi probabilistici evolve nel tempo. Il sistema è formato da varie entità che interagiscono tra loro. Le interazioni sono definite da principi di causa ed effetto ma in senso probabilistico. Ovvero per ogni interazione vengono definite la probabilità tra una causa cioè la situazione o stato del sistema e l'effetto. L'effetto definisce come vengono modificate le proprietà delle varie entità per formare il nuovo stato del sistema.

2 Modello

Cerchiamo e definiamo quindi le leggi che determinano lo sviluppo di una società.

2.1 Popolazione

La società è un insieme di individui che condividono un territorio, la conoscenza e le regole di interazioni tra individui. Il numero di individui che compongono la popolazione è N. La popolazione si divide in base alle attività svolte: produttori alimentari, ricercatori, insegnanti e popolazione non attiva (bambini e anziani) rispettivamente:

$$N_f + N_r + N_e + N_i = N$$

La suddivisione delle attività avviene con la funzione di Boltzman (softmax) in base ai coefficienti di preferenza:

$$\varphi_f, \varphi_r, \varphi_e, \varphi_i$$

quindi

$$N_f = N\frac{e^{\varphi_f}}{e^{\varphi_f} + e^{\varphi_r} + e^{\varphi_e} + e^{\varphi_i}} = N\alpha_f \tag{1}$$

$$N_r = N\frac{e^{\varphi_r}}{e^{\varphi_f} + e^{\varphi_r} + e^{\varphi_e} + e^{\varphi_i}} = N\alpha_r \tag{2}$$

$$N_e = N\frac{e^{\varphi_e}}{e^{\varphi_f} + e^{\varphi_r} + e^{\varphi_e} + e^{\varphi_i}} = N\alpha_e \tag{3}$$

$$N_i = N\frac{e^{\varphi_i}}{e^{\varphi_f} + e^{\varphi_r} + e^{\varphi_e} + e^{\varphi_i}} = N\alpha_i \tag{4}$$

Poniamo che le preferenze siano costanti nel tempo.

Se sommiamo un qualsiasi valore a tutte le preferenze della popolazione o delle risorse rispettivamente nelle (1) e (5), la ripartizione non varia. Questa proprietà ci permette di normalizzare le preferenze facendo si che rientrino in un range di valori tra $\pm\varphi_x$ ponendo

$$\varphi'_\mu = \varphi_\mu - \varphi_o$$
$$\varphi_o = \frac{\varphi_0 + \varphi_n}{2}$$
$$\mu \in (f, r, a, i)$$

dove φ_0 e φ_n sono rispettivamente la preferenza minima e massima.

Altra caratteristica che la distanza tra due preferenze è in relazione con i rapporti dei coefficienti della popolazione ovvero:

$$\frac{\alpha_\mu}{\alpha_\nu} = \frac{e^\varphi_\mu}{e^\varphi_\nu} = e^{(\varphi_\mu - \varphi_\nu)}$$
$$\ln\left(\frac{\alpha_\mu}{\alpha_\nu}\right) = \varphi_\mu - \varphi_\nu$$

Questo ci permette di calcolare i valori normalizzati delle preferenze dai coefficienti moltiplicativi

$$\varphi_\mu = \ln\left(\frac{\alpha_\mu}{\alpha_o}\right)$$
$$\alpha_o = \sqrt{\alpha_n \alpha_0}$$

dove α_0 e α_n sono rispettivamente il coefficiente minimo e massimo.

A titolo esemplificativo prendiamo una popolazione distribuita secondo una serie geometrica con rapporti di 1 a 2 ovvero

$$\begin{aligned}
\alpha_\mu = (\alpha_0, 2\alpha_0, 4\alpha_0, 8\alpha_0) = \\
= \left(\frac{1}{15}, \frac{2}{15}, \frac{4}{15}, \frac{8}{15}\right) \\
\alpha_\mu \approx (0.0667, 0.133, 0.267, 0.533) \\
\alpha_o = 2\sqrt{2}\alpha_0 \\
\varphi_\mu = (-\ln(2\sqrt{2}), -\ln(\sqrt{2}), \ln(\sqrt{2}), \ln(2\sqrt{2})) \\
\varphi_\mu \approx (-1.04, -0.347, 0.347, 1.04)
\end{aligned}$$

E' interessante avere le relazioni tra intervalli particolari:

$$\begin{aligned}
\alpha_\mu = 2\alpha_\nu \Leftrightarrow \varphi_\mu = \varphi_\nu + \ln 2 \approx \varphi_\nu + 0.693 \\
\alpha_\mu = \sqrt{10}\alpha_\nu \Leftrightarrow \varphi_\mu = \varphi_\nu + \ln\sqrt{10} \approx \varphi_\nu + 1.15 \\
\alpha_\mu = 10\alpha_\nu \Leftrightarrow \varphi_\mu = \varphi_\nu + \ln 10 \approx \varphi_\nu + 2.305 \\
\alpha_\mu = 100\alpha_\nu \Leftrightarrow \varphi_\mu = \varphi_\nu + \ln 100 \approx \varphi_\nu + 4.61
\end{aligned}$$

2.2 Risorse

Il territorio ha una superficie finita che determina il limite di risorse disponibili per unità di tempo R. Queste vengono dedicate in attività produttive alimentari, di ricerca tecnologica, di istruzione sociale e infine per le abitazioni, rispettivamente:

$$R_f + R_r + R_e + R_s = R$$

Come per la suddivisione delle attività nella popolazione anche le risorse sono distribuite secondo la legge di Boltzman i coefficiente di preferenza:

$$\psi_f, \psi_r, \psi_e, \psi_s$$

quindi

$$R_f = R\frac{e^{\psi_f}}{e^{\psi_f} + e^{\psi_r} + e^{\psi_e} + e^{\psi_s}} = R\beta_f \tag{5}$$

$$R_r = R\frac{e^{\psi_r}}{e^{\psi_f} + e^{\psi_r} + e^{\psi_e} + e^{\psi_s}} = R\beta_r \tag{6}$$

$$R_e = R\frac{e^{\psi_e}}{e^{\psi_f} + e^{\psi_r} + e^{\psi_e} + e^{\psi_s}} = R\beta_e \tag{7}$$

$$R_s = R\frac{e^{\psi_s}}{e^{\psi_f} + e^{\psi_r} + e^{\psi_e} + e^{\psi_s}} = R\beta_s \tag{8}$$

2.3 Tecnologia

I processi produttivi della società hanno un rendimento che dipende dal livello tecnologico della società T. Più la società si evolve tecnologicamente e maggiore è l'efficienza delle attività.

Per semplificare il problema supponiamo che non ci siano specializzazioni dell'istruzione e che gli effetti siano uniformi su tutti i campi. In questo modo possiamo usare un solo indicatore del livello tecnologico.

L'efficenza η dei processo è allora determinata da

$$\eta(T) = 1 - e^{-T} \tag{9}$$

$$T \geq 0 \tag{10}$$

Il livello di tecnologia aumenta quando ci sono nuove scoperte o invenzioni e quindi dipende dal settore della ricerca.

Il mantenimento della tecnologia invece è legato alla distribuzione della conoscenza tra la popolazione. Per ottenere ciò sono necessarie strutture e organizzazioni per la ricerca e l'istruzione.

T ha un range che va da un limite inferiore (tecnologica base) ad ∞ quando tutte le risorse sono convertite in necessità senza alcuno spreco.

Definiamo poi che gli incrementi di tecnologia siano finiti e che il livello tecnologico sia limitato inferiormente ad una soglia minima T_0.

Dalla (9) possiamo ottenere la funzione inversa

$$T(\eta) = -\ln(1-\eta)$$

Il valore $1-\eta$ rappresenta l'inefficenza o il coefficiente di perdita del processo.

Anche per la tecnologia possiamo evidenziare le relazioni tra valori particolari di efficienza e livelli tecnologici:

$$\eta = \frac{1}{100} \Leftrightarrow T = -\ln\frac{99}{100} \approx 0.01005$$

$$\eta = \frac{1}{10} \Leftrightarrow T = -\ln\frac{9}{10} \approx 0.1054$$

$$\eta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow T = -\ln\frac{1}{2} \approx 0.693$$

$$\eta = \frac{9}{10} \Leftrightarrow T = -\ln\frac{1}{10} \approx 2.996$$

$$\eta = \frac{99}{100} \Leftrightarrow T = -\ln\frac{1}{100} \approx 4.605$$

Come si può vedere a livelli tecnologici molto bassi $T < 0.1$ si ha $\eta(T) \approx T$.

Mentre per valori $T > 4.605$ l'efficenza supera il 99% per cui con pochi margini di miglioramento.

Vediamo ora le relazioni tra l'inefficienza e le variazioni di tecnologia

Per l'addizione abbiamo

$$1 - \eta(T + \Delta T) = e^{-T-\Delta T} = e^{-T}e^{-\Delta T} = [1 - \eta(T)]e^{-\Delta T}$$

Per la moltiplicazione per un valore

$$1 - \eta(\lambda T) = e^{-\lambda T} = (e^{-T})^{\lambda} = [1 - \eta(T)]^{\lambda}$$

in particolare

$$1 - \eta((1 + \varepsilon)T) = [1 - \eta(T)]^{1+\varepsilon} = [1 - \eta(T)] \cdot [1 - \eta(T)]^{\varepsilon}$$

2.4 Sovrappopolamento

Lo spazio riservato alla popolazione limita il numero di individui. In generale il sovrappopolamento genera aggressività che sfocia in guerra o criminalità. Questo determina una riduzione della popolazione. Se definiamo ρ la densità della popolazione massima come rapporto tra il numero di individui e le risorse assegnate ad abitazione, possiamo determinare il numero massimo di individui per non generare aggressività:

$$N_s = R_s\rho = \beta_s R\rho \tag{11}$$

Il numero di morti è determinato da un processo di Poisson dove mediamente muoiono un numero di persone nell'unità di tempo pari ad una frazione dell'eccedenza del numero massimo di individui. La distribuzione di Poisson è data da

$$P_{\lambda}(n) = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} \tag{12}$$

Quindi

$$\lambda_o = \max(0, N - N_s)\frac{\Delta t}{\tau_o} = \max\left(0, \frac{N}{\tau_o} - \beta_s\frac{R\rho}{\tau_o}\right)\Delta t \tag{13}$$

Con τ_s la costante di tempo della mortalità in caso di sovrappopolamento.

2.5 Produzione del cibo

Ogni anno la popolazione consuma il cibo per alimentarsi. Il cibo richiesto D_r necessario per l'alimentazione in un intervallo Δt è dato da

$$D_f = N\delta_f\Delta t$$

δ_f è la quantità di cibo per unità di tempo necessaria pro-capite.

Ogni anno la popolazione crea il cibo che viene consumato per alimentarsi. La produzione di cibo dipende dal numero persone dedicate all'agricoltura, dalla superficie dedicata alla produzione alimentare. La produzione di cibo sarà comunque limitata dalla quantità massima di energia solare ricevuta per superficie dedicata al cibo. Il processo di produzione del cibo prevede che ogni individuo dedicato alla produzione di cibo trasformi una quantità π_p di risorse nell'unita di tempo limitata alle risorse dedicate alla produzione di cibo per unità di tempo.

La quantità di risorse trasformate è

$$Q_f = \min(N_f \pi_f, R_f)\Delta t = \min(N_f \pi_f, \beta_f R)\Delta t$$

La quantità di cibo prodotta dipende invece dall'efficienza $\eta(T)$ del processo determinata dal livello tecnologico della società T, quindi

$$P_f = \eta(T) Q_f = \eta(T) \min(N_f \pi_f, \beta_f R)\Delta t$$

Il rapporto tra il cibo prodotto e il cibo richiesto determina il coefficiente di alimentazione della popolazione K_f

$$\begin{aligned} K_f = \frac{P_f}{D_f} &= \frac{\eta(T) \min(N_f \pi_f, \beta_f R)\Delta t}{N \delta_f \Delta t} = \\ &= \eta(T) \min\left(\frac{N_f \pi_f}{N \delta_f}, \frac{\beta_f R}{N \delta_f}\right) \end{aligned}$$

$$K_f = \eta(T) \min\left(\frac{\alpha_f \pi_f}{\delta_f}, \frac{\beta_f R}{N \delta_f}\right) \tag{14}$$

Se $K_f < 1$ avremo che il cibo non è sufficiente alla sopravvivenza della popolazione che provoca morte per fame.

Se $K_f > 1$ avremo invece una sovrabbondanza di cibo con conseguente probabilità di aumento della popolazione.

Il rapporto tra cibo prodotto e richiesto rapportato al singolo individuale per unità di tempo è

$$K_{fi} = \eta(T) \frac{\alpha_f \pi_f}{\delta_f}$$

Per permettere alla popolazione di sopravvivere ed evolversi deve essere

$$\begin{aligned} K_{fi} &\geq 1 \\ \eta(T) \frac{\alpha_f \pi_f}{\delta_f} &\geq 1 \\ \pi_f &\geq \frac{\delta_f}{\alpha_f \eta(T)} \end{aligned}$$

Al minimo di efficienza dobbiamo avere quindi

$$\pi_f \geq \frac{\delta_f}{\alpha_f \eta(T_0)} \tag{15}$$

Il rapporto tra cibo prodotto e richiesto limitato dalle risorse per unità di tempo è

$$K_{fi} = \eta(T) \frac{R_f}{N \delta_f}$$

Anche per questo il deve sussistere la relazione

$$\begin{aligned} K_{fi} &\geq 1 \\ \eta(T)\frac{R_f}{N\delta_f} &\geq 1 \\ R_f &\geq N\frac{\delta_f}{\eta(T)} \end{aligned}$$

Se la popolazione massima al minimo dell'efficienza deve essere N_0 avremo

$$R_{f0} \geq N_0\frac{\delta_f}{\eta(T_0)}$$

Se la popolazione massima al massimo dell'efficienza deve essere N_x avremo

$$R_{fx} \geq N_x\delta_f$$

quindi

$$R_f \geq \max\left(N_0\frac{\delta_f}{\eta(T_0)}, N_x\delta_f\right) \tag{16}$$

2.5.1 Carestia

Quando il cibo prodotto scarseggia la popolazione muore di fame. Durante la carestia si può verificare una riduzione della popolazione.

Il numero di morti per fame d_s è un processo casuale con distribuzione di Poisson (12) con numero atteso di morti pari a

$$\begin{aligned} &P_{\lambda_s}(d_s) \\ \lambda_s = N\max(1-K_f,0)&\frac{\Delta t}{\tau_s} = \\ = N\max\left[1-\eta(T)\frac{\min\left(N_f\pi_f,\beta_f R\right)}{N\delta_f},0\right]&\frac{\Delta t}{\tau_s} \end{aligned}$$

$$\lambda_s = \max\left[\frac{N}{\tau_s} - \eta(T)\min\left(N_f\frac{\pi_f}{\delta_f\tau_s}, \beta_f\frac{R}{\delta_f\tau_s}\right),0\right]\Delta t \tag{17}$$

Con τ_s essere la costante di tempo della mortalità per fame.

2.5.2 Natalità

Quando c'è una sovrabbondanza di cibo esiste la probabilità di aumento della popolazione. L'aumento della popolazione dipende dalla quantità di cibo in eccesso e dal tasso di natalità pro-capite. Anche il numero di nascite n_b è un processo casuale con distribuzione di Poisson.

$$P_{\lambda_b}(n_b)$$

$$\lambda_b = N\max(K_f-1,0)\frac{\Delta t}{\tau_b} = \max\left[\eta(T)\min\left(N_f\frac{\pi_f}{\delta_f\tau_b}, \beta_f\frac{R}{\delta_f\tau_b}\right) - \frac{N}{\tau_b},0\right]\Delta t \tag{18}$$

con τ_b la costante di tempo della natalità.

2.6 Ricerca

La probabilità di nuove scoperte o invenzioni di anno in anno è limitato dalla popolazione, dalle risorse dedicata alla ricerca e dal livello tecnologico.

Ogni ricercatore riesce ad utilizzare π_r risorse per unità di tempo limitate totalmente da R_r.

$$Q_r = \min(N_r \pi_r, R_r)\Delta t$$

Queste risorse vengono convertite in quantità di ricerca pari a

$$P_r = \eta(T) Q_r = \eta(T) \min(N_r \pi_r, R_r)\Delta t$$

L'avanzamento tecnologico avviene con un processo casuale con distribuzione di Poisson (12) a quantità discrete multiple di γ il cui costo è δ_r quindi

$$\begin{aligned} \Delta T &= n_r \gamma \\ &P_{\lambda_r}(n_r) \\ \lambda_r &= \frac{P_r}{\delta_r}\eta(T) = \\ = \eta(T_0) \min &\left(N_r \frac{\pi_r}{\delta_r}, \frac{R_r}{\delta_r} \right) \end{aligned}$$

$$\lambda_r = \eta(T) \min \left(N_r \frac{\pi_r}{\delta_r}, \beta_r \frac{R}{\delta_r} \right) \Delta t \tag{19}$$

La frequenza di salti limitata dal numero di ricercatori nell'unità di tempo risulta essere

$$f_{ri}(T) = N\eta(T) \frac{\alpha_r \pi_r}{\delta_r}$$

Se $f_{ri}(T_0)$ è la frequenza di salti alla minima efficienza abbiamo

$$\pi_r = f_{ri}(T_0) \frac{\delta_r}{N\eta(T_0)\alpha_r} \tag{20}$$

La frequenza di salti limitata dalle risorse nell'unità di tempo risulta essere

$$f_{rr}(T) = \eta(T) \frac{R_r}{\delta_r}$$

da cui

$$R_r = \delta_r \max \left(\frac{f_{rr}(T_0)}{\eta(T_0)}, f_{rr}(\infty) \right) \tag{21}$$

2.7 Istruzione

Abbiamo già detto che il mantenimento del livello tecnologico è determinato dalla distribuzione della conoscenza nella popolazione. Una scoperta o innovazione che rimane confinata al solo ambito di ricerca non produce effetti sui processi produttivi. Inoltre per mantenere il livello tecnologico è necessario che i nuovi individui ricevano la conoscenza da parte di quelli che la posseggono. Sono quindi necessarie educatori e strutture che trasmettano a tutti le conoscenze acquisite. Se i livelli di istruzione non sono adeguati lentamente la società perderà la conoscenza acquisita e il livello tecnologico si abbasserà. La riduzione della tecnologia è determinato dalla popolazione e dalle risorse dedicate all'istruzione e dal livello tecnologico.

Come per i processi di produzione del cibo possiamo calcolare il rapporto tra l'educazione prodotta e quella richiesta per mantenere il livello tecnologico.

$$K_e = \eta(T)\frac{\min(N_e\pi_e, R_e)}{N\delta_e}$$

$$K_e = \eta(T)\min\left(\frac{N_e\pi_e}{N\delta_e}, \frac{R_e}{N\delta_e}\right) \tag{22}$$

Il tasso di regressione della tecnologia è determinato dalla quantità di individui non istruiti N_n che assumiamo essere un processo casuale con distribuzione di Poisson

$$P_{\lambda_e}(N_n)$$

$$\Delta T = -T\min\left[\max\left(0, \frac{N_n}{N}\right), 1\right]$$

$$\lambda_e = N\max(0, 1-K_e)\frac{\Delta t}{\tau_e}$$

$$\lambda_e = \max\left[0, \frac{N}{\tau_e} - \eta(T)\min\left(N_e\frac{\pi_e}{\delta_e\tau_e}, \beta_e\frac{R}{\delta_e\tau_e}\right)\right]\Delta t \tag{23}$$

Con τ_e essere la costante di tempo dell'educazione.

Il tasso di istruzione limitato dagli educatori è

$$K_{ei}(T) = \eta(T)\frac{\alpha_e\pi_e}{\delta_e}$$

Per non regredire è necessario che

$$K_{ei}(T) \geq 1$$

$$\eta(T)\frac{\alpha_e\pi_e}{\delta_e} \geq 1$$

$$\pi_e \geq \frac{\delta_e}{\alpha_e\eta(T)}$$

che nel caso peggiore di minima efficienza è

$$\pi_e \geq \frac{\delta_e}{\alpha_e\eta(T_0)} \tag{24}$$

Il tasso di istruzione limitato dalle risorse è

$$K_{er}(T) = \eta(T)\frac{R_e}{N\delta_e}$$

Anche per questo vale

$$K_{er}(T) \geq 1$$

$$\eta(T)\frac{R_e}{N\delta_e} \geq 1$$

$$R_e \geq N\frac{\delta_e}{\eta(T)}$$

quindi

$$R_e \geq \delta_e \max\left(\frac{N_0}{\eta(T_0)}, N_x\right) \tag{25}$$

3 Esempio

Dimensioniamo ora i parametri di simulazione. Abbiamo due gruppi di parametri che regolano la politica sociale: le preferenze della popolazione e le preferenze per il territorio.

3.1 Popolazione

Per definire la distribuzione della popolazione ipotizziamo un gruppo iniziale di 10 famiglie tipo: 2 adulti che devono mantenere 4 figli e 4 genitori. La popolazione totale è di 100 individui della quale quella produttiva è di 20 individui. Dei 20 produttivi poniamo che 10 producono cibo, 5 ricercatori e 5 educatori.

Quindi avremo

$$\begin{aligned} N &= 100 \\ N_f &= 10 \\ N_r &= 5 \\ N_e &= 5 \\ N_i &= 80 \end{aligned}$$

i vari coefficienti sono:

$$\begin{aligned} \alpha_f &= \frac{1}{10} \\ \alpha_r &= \frac{1}{20} \\ \alpha_e &= \frac{1}{20} \\ \alpha_i &= \frac{4}{5} \\ \alpha_0 &= \sqrt{\frac{1}{20}\frac{4}{5}} = \frac{1}{5} \\ \varphi_f &= \ln\frac{1}{10}\frac{5}{1} \approx -0.693 \\ \varphi_r &= \ln\frac{1}{20}\frac{5}{1} \approx -1.386 \\ \varphi_e &= \ln\frac{1}{20}\frac{5}{1} \approx -1.386 \\ \varphi_i &= \ln\frac{4}{5}\frac{5}{1} \approx 1.386 \end{aligned}$$

3.2 Tecnologia

Partiamo con un livello minimo di efficienza pari a

$$\eta(T_0) = \frac{1}{100}$$
$$T_0 \approx \frac{1}{100} = 0.01$$

questo ci permette di avere l'efficienza massima teorica pari a 100 volte quella minima.

3.3 Simulazione

I parametri dipendenti dal tempo saranno annuali mentre la simulazione sarà a cicli trimestrali quindi avremo che l'intervallo di tempo è

$$\Delta t = 0.25$$

Poniamo altresì che le velocità di reazione di tutti i processi sia pari a 2 anno quindi poniamo le costanti di tempo

$$\tau_o = \tau_s = \tau_b = \tau_e = \frac{2}{5} = 0.4$$

3.4 Sovrappopolamento

Poniamo che la massima popolazione limitata dalle risorse abitative sia 10000 unità e poniamo la densità pari ad un individuo per risorsa abitativa, quindi

$$\rho = 1$$
$$\rho R_s = 10000$$
$$R_s = 10000$$

3.5 Cibo

Poniamo che la richiesta di cibo pro-capite sia di una risorsa all'anno

$$\delta_f = 1$$

Dalla (15) abbiamo

$$\pi_f > \frac{\delta_f}{\alpha_f \eta(T_0)} = \frac{1}{0.1 \cdot 0.01} = 1000$$

Poniamo

$$\pi_f = 1100$$

con un margine quindi del 10% per l'incremento della popolazione.

Dalla (16) abbiamo che

$$R_f \geq \max\left(100\frac{1}{0.01}, 10000\right)$$
$$R_f \geq 10000$$

3.6 Ricerca

Per la ricerca poniamo che gli incrementi di tecnologia siano

$$\gamma = \frac{1}{100} = 0.01$$

al costo di

$$\delta_r = 1$$

Poniamo anche che i salti tecnologici avvengano mediamente ogni 10 anni nel caso di efficienza minima per cui dalla (20) abbiamo

$$f_{ri}(T_0) = 0.1$$
$$\pi_r = 0.1 \frac{1}{100 \cdot 0.01 \cdot 0.05} = 2$$

Mentre ponendo che la frequenza massima di salti limitata dalle risorse sia di uno ogni anno, dalla (21) abbiamo

$$f_{rr}(T_0) = 0.1$$
$$f_{rr}(\infty) = 1$$
$$R_r = \max\left(\frac{0.1}{0.01}, 1\right) = 10$$

3.7 Istruzione

Come per i precedenti processi poniamo che la richiesta individuale di istruzione sia

$$\delta_e = 1$$

Dalla (24) otteniamo

$$\pi_e \geq \frac{1}{0.05 \cdot 0.01}$$
$$\pi_e \geq 2000$$

Mentre dalla (25)

$$R_e \geq \max\left(\frac{100}{0.01}, 10000\right)$$
$$R_e \geq 10000$$

3.8 Risorse

Ricapitolando le risorse dovranno essere

$$R_f = 10000$$
$$R_r = 10$$
$$R_e = 10000$$
$$R_s = 10000$$

e dalla (5) otteniamo

$$\begin{aligned}\beta_f = \beta_e = \beta_s &= \frac{1000}{3001} \\ \beta_r &= \frac{1}{3001} \\ \beta_o &= \sqrt{\frac{1}{3001}\frac{1000}{3001}} = \frac{10}{3001}\sqrt{10} \\ \psi_f = \psi_e = \psi_s &= \ln\frac{1000}{3001}\frac{3001}{100}\sqrt{10} = \ln 10\sqrt{10} \approx 3.454 \\ \psi_r &= \ln\frac{1}{3001}\frac{3001}{100}\sqrt{10} = \ln\frac{\sqrt{10}}{100} \approx -3.454\end{aligned}$$