September 30, 2018

Abstract

Moto in un campo gravitazionale centrale

1 Il problema di Keplero

Sia p una particella di massa m che si muove in un campo gravitazionale prodotto da una massa equivalente K. Il campo è descritto dall'equazione

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}$$
$$\alpha = mKG$$
$$G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2}$$

$$\alpha = mKG \tag{1}$$

Per il principio di conservazione dell'energia e del momento d'inerzia abbiamo che

$$E = \frac{m}{2}\vec{R} \cdot \vec{R} + U(r)$$
$$M = mr^2\dot{\varphi}$$

sono costanti.

Se $E < 0$ l'orbita descritta è un'ellisse con asse maggiore e minore rispettivamente a e b dati da

$$a = \frac{\alpha}{2|E|} \tag{2}$$

$$b = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}} \tag{3}$$

Il tempo d percorrenza dell'intera orbita invece è dato da

$$T = \pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}} \tag{4}$$

Poniamo allora di conoscere a, b, T vediamo di trovare le relazioni con le altre costanti del moto.

2 Calcolo di K

Dalla (2) ricaviamo

$$|E| = \frac{\alpha}{2a}$$

mentre dalla (4) otteniamo

$$\begin{aligned} |E|^3 &= \frac{\pi^2}{2T^2} m\alpha^2 \\ \frac{\alpha^3}{8a^3} &= \frac{\pi^2}{2T^2} m\alpha^2 \\ \alpha &= \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} m \end{aligned}$$

e dalla (1)

$$mKG = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} m$$

da cui

$$K = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2} \tag{5}$$