

Leibnitz*

Marco Marini

22 ottobre 2012

Indice

1	Notes release 0.0.1.	2
1.1	Generals.	2
1.2	Specifications.	2
2	Addendum release 0.1.0.	3
2.1	Specifications.	4
3	Addendum release 0.4.0.	4
3.1	Paraboloide.	4
3.2	Orbita su piano.	6
4	Addendum release 0.5.0.	7
I	Appendice.	8

*Id: notes.tex,v 1.3 2012/07/25 13:55:45 marco Exp

1 Notes release 0.0.1.

1.1 Generals.

The project computes the values of a vectorial function X defined by a differential vectorial equation:

$$\vec{X}^{(n)} + \vec{F}(t, \vec{X}, \vec{X}^{(1)}, \dots, \vec{X}^{(n-1)}) = 0 \quad (1)$$

given the initial Cauchy condition

$$\begin{aligned} \vec{X}(t_0) &= \vec{K} \\ \vec{X}^{(1)}(t_0) &= \vec{K}_1 \\ &\dots \\ \vec{X}^{(n-1)}(t_0) &= \vec{K}_{n-1} \end{aligned} \quad (2)$$

The $\vec{X}^{(n)}$ defines the derived n function.

1.2 Specifications.

The syntax of function definition is defined in `org.mmarini.leibnitz.parser.InterpreterContext` javadoc

To use runs: `java org.mmarini.leibintz.Compute file [-o file]`.
The file parameter is a xml properties file containing the definitions.
The output is stdout unless -o file is specified in line command.

The mandatory properties in input file are

order : the order of function

dimension : the space dimension

function : the function \vec{F}

t0 : initial value of t

t1 : final value of t

dt : increment of t value in single step

The optional properties are:

x0 x1 ... xn-1 : Initial value of \vec{X}

x0(1) x1(1) ... xn-1(1) : Initial value of $\vec{X}^{(1)}$

x0(o-1) x1(o-1) ... xn-1(o-1) : Initial value of $\vec{X}^{(o-1)}$

2 Addendum release 0.1.0.

1. Definire le funzioni di trasformazione tra le variabili indipendenti \vec{Q} e le variabili reali \vec{R}_ν . Questo corrisponde con definire m funzioni di trasformazione \vec{R}_ν una per ogni particella.

$$\vec{R}_\nu = \vec{R}_\nu(\vec{Q}) \quad (3)$$

2. Risolvere le equazioni di Lagrange in coordinate indipendenti \vec{Q}

Le equazioni di Lagrange sono definite come

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = f_i \quad (4)$$

T è l'energia definita come

$$T = T_2 + T_1 + T_0 \quad (5)$$

$$T_2 = a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (6)$$

$$T_1 = a_i \dot{q}_i \quad (7)$$

$$T_0 = a_0 \quad (8)$$

$$a_{ij} = m_\nu \frac{\partial \vec{R}_\nu}{\partial q_i} \frac{\partial \vec{R}_\nu}{\partial q_j} \quad (9)$$

$$a_i = m_\nu \frac{\partial \vec{R}_\nu}{\partial q_i} \frac{\partial \vec{R}_\nu}{\partial t} \quad (10)$$

$$a_0 = m_\nu \frac{\partial \vec{R}_\nu}{\partial t} \frac{\partial \vec{R}_\nu}{\partial t} \quad (11)$$

e f_i sono le forze indipendenti (spostamenti virtuali)

$$f_i = \vec{F}_\nu \frac{\partial \vec{R}_\nu}{\partial q_i} \quad (12)$$

ma abbiano che

$$\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i} = a_{ij} \dot{q}_j \quad (13)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i} = a_i \quad (14)$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = a_{ij} \dot{q}_j + a_i \quad (16)$$

derivando rispetto a t abbiamo

$$\frac{d(a_{ij} \dot{q}_j + a_i)}{dt} = a_{ij} \ddot{q}_j + \frac{da_{ij}}{dt} \dot{q}_j + \frac{da_i}{dt} = a_{ij} \ddot{q}_j + \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial a_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial a_i}{\partial t} \quad (17)$$

per cui

$$a_{ij}\ddot{q}_j = G_i(t, q_j, \dot{q}_j) \quad (18)$$

$$G_i = f_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} - \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_j} \dot{q}_j - \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} \right) \dot{q}_j - \frac{\partial a_i}{\partial q_j} \dot{q}_j - \frac{\partial a_i}{\partial t} \quad (19)$$

Quindi dobbiamo gestire vettori funzionali nello spazio \mathbb{R}^n e matrici funzionali nello spazio $\mathbb{R}^{n \times n}$

Rappresentando in forma matriciale abbiamo:

$$A\vec{Q} = \vec{G}, \vec{Q} = A^{-1}\vec{G} \quad (20)$$

Le funzioni da implementare sono:

1. definizione di vettori e matrici funzionali di dimensione m (n. di gradi di libert?)
2. definizione di vettori funzionali di trasformazione di grado n (particelle)
3. estendere l'interpretazione e valutazione delle espressioni con matrici e con riferimenti a vettori e matrici funzionali.
4. variabili predefinite t, Q, Q(1), ..., Q(n-1)

2.1 Specifications.

The syntax of function definition is defined in org.mmarini.leibnitz.parser.SyntaxFactory javadoc

To use runs: java org.mmarini.leibintz.Compute file [-o file].

The file parameter is a xml file containing the definitions.

The output is stdout unless -o file is specified in line command.

The file **definition** of xml is leibnitz-0.1.0.xsd

3 Addendum release 0.4.0.

Le condizioni iniziali sono impostate utilizzando il parse esteso di espressioni comprendenti anche la definizioni delle funzioni. The file definition of xml is leibnitz-0.2.0.xsd

3.1 Paraboloide.

Calcoliamo il moto di una particella libera su una superficie paraboloide

$$\vec{R} = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, r^2) \quad (21)$$

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial r} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 2r) \quad (22)$$

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial \varphi} = (-r \sin \varphi, r \cos \varphi, 0) \quad (23)$$

La forza agente sulla particella invece ?

$$\vec{F} = (0, 0, -mg) \quad (24)$$

da cui le forze generalizzate

$$Q_r = \vec{F} \frac{\partial \vec{R}}{\partial r} = -2mgr \quad (25)$$

$$Q_\varphi = \vec{F} \frac{\partial \vec{R}}{\partial \varphi} = 0 \quad (26)$$

Calcoliamo ora l'energia cinetica del sistema::

$$T = \frac{1}{2} m \frac{\partial \vec{R}}{\partial q_i} \frac{\partial \vec{R}}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} m [(1 + 4r^2) \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2] \quad (27)$$

L'equazioni di Lagrange sono:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial T}{\partial r} = Q_r \quad (28)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi \quad (29)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = \frac{d}{dt} [m(1 + 4r^2) \dot{r}] = m[(1 + 4r^2) \ddot{r} + 8r \dot{r}^2] \quad (30)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 4mr \dot{r}^2 + mr \dot{\varphi}^2 = mr(4\dot{r}^2 + \dot{\varphi}^2) \quad (31)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\varphi}) = mr^2 \ddot{\varphi} + 2mr \dot{r} \dot{\varphi} \quad (32)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0 \quad (33)$$

quindi

$$\begin{cases} m(1 + 4r^2) \ddot{r} + 8mr \dot{r}^2 - 4mr \dot{r}^2 - mr \dot{\varphi}^2 = -2mgr \\ mr^2 \ddot{\varphi} + 2mr \dot{r} \dot{\varphi} = 0 \end{cases} \quad (34)$$

$$\begin{cases} \ddot{r} = \frac{r \dot{\varphi}^2 - 2gr - 2r \dot{r}^2}{1 + 4r^2} = r \frac{\dot{\varphi}^2 - 2g - 2\dot{r}^2}{1 + 4r^2} \\ \ddot{\varphi} = -2 \frac{\dot{r} \dot{\varphi}}{r} \end{cases}$$

Calcoliamo la velocit? angolare per mantenere la particella in una traiettoria circolare parallela al piano xOy . E' necessario che la forza centripeta Q_r sia esattamente opposta alla forza centrifuga $mr \dot{\varphi}^2$ quindi:

$$2mgr = mr \dot{\varphi}^2 \Rightarrow \dot{\varphi} = \sqrt{2g} \quad (35)$$

3.2 Orbita su piano.

Calcoliamo il moto di una particella libera su un piano con campo gravitazionale $\frac{K}{r^2}$

$$\vec{R} = (r \cos \varphi, r \sin \varphi) \quad (36)$$

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial r} = (\cos \varphi, \sin \varphi) \quad (37)$$

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial \varphi} = (-r \sin \varphi, r \cos \varphi) \quad (38)$$

La forza agente sulla particella invece ?

$$\vec{F} = (-m \frac{K}{r^2} \cos \varphi, -m \frac{K}{r^2} \sin \varphi) \quad (39)$$

da cui le forze generalizzate

$$Q_r = \vec{F} \frac{\partial \vec{R}}{\partial r} = -m \frac{K}{r^2} \quad (40)$$

$$Q_\varphi = \vec{F} \frac{\partial \vec{R}}{\partial \varphi} = 0 \quad (41)$$

Calcoliamo ora l'energia cinetica del sistema::

$$T = \frac{1}{2} m \frac{\partial \vec{R}}{\partial q_i} \frac{\partial \vec{R}}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) \quad (42)$$

L'equazioni di Lagrange sono:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial T}{\partial r} = Q_r \quad (43)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi \quad (44)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = \frac{d}{dt} [m\dot{r}] = m\ddot{r} \quad (45)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = m r \dot{\varphi}^2 \quad (46)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\varphi}) = m r^2 \ddot{\varphi} + 2 m r \dot{r} \dot{\varphi} \quad (47)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0 \quad (48)$$

quindi

$$\begin{cases} m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 = -m\frac{K}{r^2} \\ mr^2\ddot{\varphi} + 2mr\dot{r}\dot{\varphi} = 0 \end{cases} \quad (49)$$

$$\begin{cases} \ddot{r} = r\dot{\varphi}^2 - \frac{K}{r^2} \\ \ddot{\varphi} = -2\frac{\dot{r}\dot{\varphi}}{r} \end{cases}$$

Calcoliamo la velocità angolare per mantenere la particella in una traiettoria circolare. E' necessario che la forza centripeta Q_r sia esattamente opposta alla forza centrifuga $mr\dot{\varphi}^2$ quindi:

$$m\frac{K}{r^2} = mr\dot{\varphi}^2 \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{K}{r}} \quad (50)$$

4 Addendum release 0.5.0.

Se alcune delle variabili indipendenti rappresentano le velocità angolari il calcolo degli angoli di rotazione deve essere eseguito con i quaternioni. E' necessario quindi identificare quali variabili indipendenti rappresentano degli angoli.

Parte I
Appendice.