Studio matematico per software Leibniz

Marco Marini

9 novembre 2012

Indice

Sommario

Parte I
Calcolo tensoriale

1 Vettore controvariante

Prendiamo un sistema cartesiano associato ad un sistema di riferimento $x^1, \ldots, x^n$. Prendiamo poi un diverso sistema sistema di riferimento con basi $z^1, \ldots, z^n$ e le relative funzioni di trasformazione dei due sistema di riferimento

$$\begin{aligned} z^1 &= z^1(x^1, \ldots, x^n) \\ &\ldots \\ z^n &= z^n(x^1, \ldots, x^n) \end{aligned}$$

.

Prendiamo una funzione parametrica che esprime una linea nel sistema $x_1, \ldots, x_n$:

$$f(t) = (f^1(t), \ldots, f^n(t))$$

La stessa funzione è espressa nel sistema $z^1, \ldots, z^n$ come:

$$h(t) = (h^1(t), \ldots, h^n(t))$$

ovvero

$$\begin{aligned} h^1(t) &= z^1\left(f^1(t), \ldots, f^n(t)\right) \\ &\ldots \\ h^n(t) &= z^n\left(f^1(t), \ldots, f^n(t)\right) \end{aligned}$$

Calcoliamo la derivata rispetto t

$$\frac{d}{dt}f(t) = \left(\frac{d}{dt}f^1(t), \ldots, \frac{d}{dt}f^n(t)\right) \tag{1}$$

mentre nel sistema di riferimento $(x'_1, \ldots, x'_n)$ sarà:

$$\frac{d}{dt}h(t) = \left(\frac{d}{dt}h^1(t), \ldots, \frac{d}{dt}h^n(t)\right) \tag{2}$$

applicando le funzioni di trasformazione avremo

$$\begin{array}{c} \frac{d}{dt}h^1(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial z^1}{\partial x^i}\frac{d}{dt}f^i(t) \\ \ldots \\ \frac{d}{dt}h^n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial z^n}{\partial x^i}\frac{d}{dt}f^i(t) \end{array} \tag{3}$$

Siano $\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}$ e $\vec{e'_1}, \ldots, \vec{e'_n}$ i vettori base dei rispettivi sistemi di riferimento. Possiamo esprimere la (1) con la notazione vettoriale:

$$\frac{d}{dt}\vec{f}(t) = \frac{d}{dt}f^1(t)\vec{e_1} + \ldots + \frac{d}{dt}f^n(t)\vec{e_n} = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}f^i(t)\vec{e_i}$$

o in forma più concisa (notazione di Einstein)

$$\frac{d}{dt}\vec{f}(t) = \frac{d}{dt}f^i(t)\vec{e_i}$$

Allo stesso modo possiamo esprimere la (2) come:

$$\frac{d}{dt}\vec{h}(t) = \frac{d}{dt}h^i(t)\vec{e'_i}$$

e dalla (3)

$$\frac{d}{dt}\vec{h}(t) = \frac{\partial z^i}{\partial x^j}\frac{d}{dt}f^j(t)\vec{e'_i}$$

La notazione vettoriale permette di identificare facilmente il sistema di riferimento evidenziando le specifiche basi.

Esempio Prendiamo il sistema di riferimento euclideo x, y, z e il sistema cilindrico r, ψ, z. Le funzioni di trasformazione sono:

$$x = r\cos\psi$$
$$y = r\sin\psi$$
$$z = z$$

Prendiamo la curva $f(t)$ espressa nel sistema r, ψ, z dalle espressioni

$$f(t) = (t, \psi_0, kt)$$

La curva è una retta passante per l'origine con pendenza k e diretta con angolo polare ψ_0.

Nelle coordinare euclidee la curva è:

$$h(t) = (t\cos\psi_0, t\sin\psi_0, kt)$$

La derivata nel sistema r, ψ, z è

$$\frac{d}{dt}\vec{f}(t) = \frac{d}{dt}f^i(t)\vec{e_i} = \vec{e_r} + 0\vec{e_\psi} + k\vec{e_z}$$

.

Posto che

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial x}{\partial r} = \cos\psi & \frac{\partial x}{\partial \psi} = -r\sin\psi & \frac{\partial x}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\psi & \frac{\partial x}{\partial \psi} = r\cos\psi & \frac{\partial x}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial r} = 0 & \frac{\partial z}{\partial \psi} = 0 & \frac{\partial z}{\partial z} = 1 \end{array}$$

Nel sistema x, y, z avremo:

$$\frac{d}{dt}\vec{h}(t) = \frac{\partial z^i}{\partial x^j}\frac{d}{dt}f^j(t)\vec{\text{è}}_i$$

$$\begin{aligned} = &\left(\frac{\partial x}{\partial r}\frac{d}{dt}f^r(t) + \frac{\partial x}{\partial \psi}\frac{d}{dt}f^\psi(t) + \frac{\partial x}{\partial z}\frac{d}{dt}f^z(t)\right)\vec{e_x} \\ &+ \left(\frac{\partial y}{\partial r}\frac{d}{dt}f^r(t) + \frac{\partial y}{\partial \psi}f^\psi(t) + \frac{\partial y}{\partial z}\frac{d}{dt}f^z(t)\right)\vec{e_y} \\ &+ \left(\frac{\partial z}{\partial r}\frac{d}{dt}f^r(t) + \frac{\partial z}{\partial \psi}f^\psi(t) + \frac{\partial z}{\partial z}\frac{d}{dt}f^z(t)\right)\vec{e_z} \end{aligned}$$

$$= \cos\psi\vec{e_x} + \sin\psi\vec{e_y} + k\vec{e_z}$$

ma essendo $\psi = \psi_0$ abbiamo

$$\frac{d}{dt}\vec{h}(t) = \cos\psi_0\vec{e_x} + \sin\psi_0\vec{e_y} + k\vec{e_z}$$

1.1 Generalizzazione

Sia $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ un vettore associato al sistema di coordinate $x^1, \ldots, x^n$.

Se due sistemi di coordinate $x^1, \ldots, x^n$ e $z^1, \ldots, z^n$ sono legati mediante una trasformazione della forma $x = x(z)$ tale che $x^i(z_0^1, \ldots, z_0^n) = x_0^i, i = 1, \ldots, n$, lo stesso vettore si definisce nel nuovo sistema di coordinate z mediante un altro insieme di punti $\zeta^1, \ldots, \zeta^n$ legato dalla formula:

$$\xi^i = \frac{\partial x^i}{\partial z^j}\zeta^j \tag{4}$$

Se $\vec{e_i} = (\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$ e $\vec{e_i'} = (\vec{e_1'}, \ldots, \vec{e_n'})$ sono i vettori base rispettivamente in $x^1, \ldots, x^n$ e $z^1, \ldots, z^n$ abbiamo:

$$\vec{\zeta} = \zeta^i \vec{e_i'}$$
$$\vec{\xi} = \xi^i \vec{e_i} = \frac{\partial x^i}{\partial z^j}\zeta^j \vec{e_i}$$

.

1.2 Trasformazione inversa

Sia $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ un vettore associato al sistema di coordinate $x^1, \ldots, x^n$ e $\zeta = (\zeta^1, \ldots, \zeta^n)$ lo stesso vettore associato al sistema di coordinate $z^1, \ldots, z^n$. per la (4) abbiamo:

$$\xi^i = \frac{\partial x^i}{\partial z^j}\zeta^j$$

Identifichiamo le relative funzioni di trasformazione inverse da $z^1, \ldots, z^n$ a $x^1, \ldots, x^n$ con

$$\begin{aligned} x^1 &= x^1(z^1, \ldots, z^n) \\ &\ldots \\ x^n &= x^n(z^1, \ldots, z^n) \end{aligned}$$

avremo che

$$\zeta^i = \frac{\partial z^i}{\partial x^j}\xi^j$$

quindi

$$\zeta^i = \frac{\partial z^i}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial z^k}\zeta^k = \delta_k^i \zeta^k$$

.

Da questo consegue che

$$\frac{\partial z^i}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial z^k} = \delta_k^i \Longrightarrow \frac{\partial z^i}{\partial x^j} = \left(\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\right)^{-1} \tag{5}$$

2 Vettore covariante

Prendiamo un sistema cartesiano associato ad un sistema di riferimento $x^1, \ldots, x^n$. Prendiamo poi un diverso sistema sistema di riferimento con coordinate $z^1, \ldots, z^n$ e le relative funzioni di trasformazione dei due sistema di riferimento

$$\begin{aligned} z^1 &= z^1(x^1, \ldots, x^n) \\ &\ldots \\ z^n &= z^n(x^1, \ldots, x^n) \end{aligned}$$

.

Prendiamouna funzione scalare nel sistema $x_1, \ldots, x_n$

$$f(x^1, \ldots, x^n)$$

La stessa funzione è espressa nel sistema $z_1, \ldots, z_n$ come:

$$h(z^1, \ldots, z^n) = f(x^1, \ldots, x^n)$$

ovvero

$$h(z^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, z^n(x^1, \ldots, x^n))$$

Calcoliamo il gradiente della funzione:

$$grad(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\right) = \left(\frac{\partial h}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\right) \tag{6}$$

mentre nel sistema di riferimento $(x'_1, \ldots, x'_n)$ sarà:

$$grad(h) = \left(\frac{\partial h}{\partial z^1}, \ldots, \frac{\partial h}{\partial z^n}\right) \tag{7}$$

applicando le funzioni di trasformazione avremo

$$\begin{aligned} grad(f) = \Big(&\tfrac{\partial h(z^1(x^1,\ldots,x^n),\ldots,z^n(x^1,\ldots,x^n)}{\partial x^1}, \ldots, \tfrac{\partial h(z^1(x^1,\ldots,x^n),\ldots,z^n(x^1,\ldots,x^n)}{\partial x^n}\Big) \\ &= \left(\sum \tfrac{\partial h}{\partial z^i}\tfrac{\partial z^i}{\partial x^1} \ldots, \sum \tfrac{\partial h}{\partial z^i}\tfrac{\partial z^i}{\partial x^n}\right) \end{aligned} \tag{8}$$

Siano $(\vec{e^1}, \ldots, \vec{e^n})$ e $(\vec{e'^1}, \ldots, \vec{e'^n})$ i vettori base dei rispettivi sistemi di riferimento. Possiamo esprimere la (6) con la notazione vettoriale:

$$grad(f) = \frac{\partial f}{\partial x^1}\vec{e^1} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}\vec{e^n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\vec{e^i}$$

o in forma più concisa (notazione di Einstein)

$$grad(f) = \frac{\partial f}{\partial x^i}\vec{e^i}$$

Allo stesso modo possiamo esprimere la (7) come:

$$grad(h) = \frac{\partial h}{\partial z^i}\vec{e'^i}$$

e dalla (8)

$$grad(f) = \frac{\partial h}{\partial z^j}\frac{\partial z^j}{\partial x^i}\vec{e'}_i$$

La notazione vettoriale permette di identificare facilmente il sistema di riferimento evidenziando le specifiche basi.

Esempio Prendiamo il sistema di riferimento euclideo x, y, z e il sistema cilindrico r, ψ, z. Le funzioni di trasformazione sono:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\psi \\ y &= r\sin\psi \\ z &= z \end{aligned}$$

Prendiamo la funzione $h(x, y, z)$ espressa nel sistema x, y, z dalle espressioni

$$h(x, y, z) = k_1 x + k_2 y + k_3 z$$

Nel sistema cilindrico la funzione diventa:

$$f(r, \psi, z) = k_1 r\cos\psi + k_2 r\sin\psi + k_3 z$$

Il gradiente nel sistema x, y, z è

$$grad(h) = \frac{\partial h}{\partial z^i}\vec{e^i} = k_1\vec{e^x} + k_2\vec{e^y} + k_3\vec{e^z}$$

.

Posto che

$$\begin{array}{rrr} \frac{\partial x}{\partial r} = \cos\psi & \frac{\partial x}{\partial \psi} = -r\sin\psi & \frac{\partial x}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\psi & \frac{\partial x}{\partial \psi} = r\cos\psi & \frac{\partial x}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial r} = 0 & \frac{\partial z}{\partial \psi} = 0 & \frac{\partial z}{\partial z} = 1 \end{array}$$

Nel sistema r, ψ, z avremo:

$$\begin{aligned} grad(f) &= \frac{\partial z^j}{\partial x^i}\frac{\partial h}{\partial z^j}\vec{e'^i} \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial h}{\partial z}\right)\vec{e^r} \\ &+ \left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \psi}\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \psi}\frac{\partial h}{\partial z}\right)\vec{e^\psi} \\ &+ \left(\frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial z}\right)\vec{e^z} \end{aligned}$$

$$= (k_1\cos\psi + k_2\sin\psi)\vec{e^r} + (-k_1 r\sin\psi + k_2 r\cos\psi)\vec{e^\psi} + k_z\vec{e^z}$$

2.1 Generalizzazione

Sia $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ un covettore associato al sistema di coordinate $x^1, \dots, x^n$.

Se due sistemi di coordinate $x^1, \dots, x^n$ e $z^1, \dots, z^n$ sono legati mediante una trasformazione della forma $x = x(z)$ tale che $x^i(z_0^1, \dots, z_0^n) = x_0^i, i = 1, \dots, n$, lo stesso covettore si definisce nel nuovo sistema di coordinate z mediante un altro insieme di punti $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ legato dalla formula:

$$\zeta_i = \frac{\partial x^j}{\partial z^i} \xi_j \tag{9}$$

Se $\vec{e^i} = (\vec{e^1}, \dots, \vec{e^n})$ e $\vec{e'^i} = (\vec{e'^1}, \dots, \vec{e'_n})$ sono i vettori base rispettivamente in $x^1, \dots, x^n$ e $z^1, \dots, z^n$ abbiamo:

$$\vec{\xi} = \xi_i \vec{e^i}$$
$$\vec{\zeta} = \zeta_i \vec{e'^i} = \frac{\partial x^j}{\partial z^i} \zeta_j \vec{e'^i}$$

.

2.2 Trasformazione inversa

Sia $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ un covettore associato al sistema di coordinate $x^1, \dots, x^n$ e $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ lo stesso covettore associato al sistema di coordinate $z^1, \dots, z^n$. per la (9) abbiamo:

$$\zeta_i = \frac{\partial x^j}{\partial z^i} \xi_j$$

Identifichiamo le relative funzioni di trasformazione inverse da $z^1, \dots, z^n$ a $x^1, \dots, x^n$ con

$$x^1 = x^1(z^1, \dots, z^n)$$
$$\dots$$
$$x^n = x^n(z^1, \dots, z^n)$$

avremo che

$$\xi_i = \frac{\partial z^j}{\partial x^i} \zeta_j$$

quindi

$$\xi_i = \frac{\partial z^j}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial z^j} \xi_k = \delta_i^k \xi_k$$

.

Da questo consegue che

$$\frac{\partial z^j}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial z^j} = \delta_i^k \Longrightarrow \frac{\partial z^j}{\partial x^i} = \left(\frac{\partial x^i}{\partial z^j} \right)^{-1} \tag{10}$$

3 Metrica

Prendiamo due curve rappresentate dalle funzione parametriche $f_1(t), f_2(t)$ espresse nel sistema $x^1, \ldots, x^n$.

Consideriamo gli elementi infinitesimali lineari sulle curve considerate nello stesso punto $t = t_0$ (distanze infinitesimale tra due punti):

$$\vec{dx_1} = dx_1^i \vec{e}_i = \left.\frac{df_1^i}{dt} dt\, \vec{e}_i\right|_{t=t_0}$$
$$\vec{dx_2} = dx_2^i \vec{e}_i = \left.\frac{df_2^i}{dt} dt\, \vec{e}_i\right|_{t=t_0}$$

Supponiamo che il sistema $x^1, \ldots, x^n$ sia euclideo. Abbiamo che il prodotto scalare dei due vettori è

$$\vec{dx_1}\vec{dx_2} = dx_1^i dx_2^i = \delta_{ij} dx_1^i dx_2^j = \delta_{ij} \frac{df_1^i}{dt} \frac{df_2^j}{dt} dt^2 \tag{11}$$

Siano $h_1(t), h_2(t)$ la relative funzioni espresse nel sistema $z^1, \ldots, z^n$. Consideriamo gli elementi infinitesimali lineari sulle curve considerate nello stesso punto $t = t_0$:

$$\vec{dz_1} = dz_1^i \vec{e'_i} = \left.\frac{dh_1^i}{dt} dt\, \vec{e'_i}\right|_{t=t_0}$$
$$\vec{dz_2} = dz_2^i \vec{e'_i} = \left.\frac{dh_2^i}{dt} dt\, \vec{e'_i}\right|_{t=t_0}$$

Applicando le trasformazioni abbiamo che

$$\vec{dx_1} = \frac{\partial x^i}{\partial z^j} \frac{dh_1^j}{dt} dt\, \vec{e}_i = \frac{\partial x^i}{\partial z^j} dz_1^j dt\, \vec{e}_i$$
$$\vec{dx_2} = \frac{\partial x^i}{\partial z^j} \frac{dh_2^j}{dt} dt\, \vec{e}_i = \frac{\partial x^i}{\partial z^j} dz_2^j dt\, \vec{e}_i$$

quindi il prodotto scalare può essere espresso con

$$\vec{ds_1}\vec{ds_2} = \delta_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial z^k} dz_1^k \frac{\partial x^j}{\partial z^l} dz_2^l$$

ponendo

$$g_{ij} = \delta_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial z_i} \frac{\partial x^l}{\partial z^j}$$

abbiamo

$$\vec{ds_1}\vec{ds_2} = g_{ij} dz_1^k dz_2^l$$

Il prodotto scalare è invariante rispetto al sistema di riferimento quindi

$$d\vec{s}_1 d\vec{s}_2 = d\vec{s}'_1 d\vec{s}'_2$$

ma viene espresso da forme bilineari diverse nei vari sistemi di riferimento:

$$d\vec{s}_1 d\vec{s}_2 = d\vec{s}'_1 d\vec{s}'_2 = \delta_{ij} dx_1^i dx_2^j = g_{ij} dz_1^i dz_2^j$$

Le forme bilineare $\delta_{ij} dx_1^i dx_2^j$ e $g_{ij} dz_1^i dz_2^j$ si dicono metriche. Se g_{ij} è la metrica nel sistema $x^1, \ldots, x^n$ e g'_{ij} è la metrica nel sistema $z^1, \ldots, z^n$, le matrice metriche si trasformano secondo le funzioni:

$$g'_{ij} = g_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial z^i} \frac{\partial x^l}{\partial z^j} \tag{12}$$

Si può notare che le matrici metriche sono matrici simmetriche quindi

$$g_{ij} = g_{ji}$$

Esempio Nel sistema euclideo la metrica è

$$g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Nel sistema cilindrico $z = (r, \psi, z)$ invece è:

$$g'_{ij} = \delta_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial z^i} \frac{\partial x^l}{\partial z^j} = \frac{\partial x^k}{\partial z^i} \frac{\partial x^k}{\partial z^j}$$

cioè

$$g'_{ij} = \begin{vmatrix} (\frac{\partial x}{\partial r})^2 + (\frac{\partial y}{\partial r})^2 + (\frac{\partial z}{\partial r})^2, & \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \psi} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \psi} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial \psi}, & \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial z} \\ \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \psi} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \psi} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial \psi}, & (\frac{\partial x}{\partial \psi})^2 + (\frac{\partial y}{\partial \psi})^2 + (\frac{\partial z}{\partial \psi})^2, & \frac{\partial x}{\partial \psi}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial y}{\partial \psi}\frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial z}{\partial \psi}\frac{\partial z}{\partial z} \\ \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial z}, & \frac{\partial x}{\partial \psi}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial y}{\partial \psi}\frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial z}{\partial \psi}\frac{\partial z}{\partial z}, & (\frac{\partial x}{\partial z})^2 + (\frac{\partial y}{\partial z})^2 + (\frac{\partial \psi}{\partial z})^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos^2\psi + \sin^2\psi, & -r\sin\psi\cos\psi + r\sin\psi\cos\psi, & 0 \\ -r\sin\psi\cos\psi + r\sin\psi\cos\psi, & r^2\sin^2\psi + r^2\cos^2\psi, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & r^2, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix}$$

Il quadrato della lunghezza dell'elemento infinitesimale lineare ds^2 di una curva $f(t)$ nel sistema x, y, z è quindi dato da

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

mentre nel sistema r, ψ, z

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\psi^2 + dz^2$$