Studio matematico per software Leibnitz

Marco Marini

6 dicembre 2012

Indice

Sommario

Parte I
Calcolo tensoriale

1 Tensore d'inerzia

Prendiamo un sistema di coordinate cartesiane euclideo x, y, z.

Il tensore d'inerzia per un punto $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ è dato da

$$\begin{array}{r} I_{11} = \int_V \rho(\vec{r})[(y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]dV \\ I_{22} = \int_V \rho(\vec{r})[(x-x_0)^2 + (z-z_0)^2]dV \\ I_{33} = \int_V \rho(\vec{r})[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]dV \\ I_{12} = I_{21} = -\int_V \rho(\vec{r})(x-x_0)(y-y_0)dV \\ I_{13} = I_{31} = -\int_V \rho(\vec{r})(x-x_0)(z-z_0)dV \\ I_{23} = I_{31} = -\int_V \rho(\vec{r})(y-y_0)(z-z_0)dV \end{array} \tag{1}$$

Con il tensore di'inerzia si può calcolare sia il momento d'inerzia

$$\vec{L} = L^i = I_{ij}\omega^j \tag{2}$$

Sia l'energia cinetica di rotazione

$$E = I_{ij}\omega^i\omega^j \tag{3}$$

1.1 Tensore d'inerzia di un parallelepipedo

Come esempio calcoliamo il tensore d'inerzia di un parallelepipedo di di dimensione $w \times h \times d$ e di densità uniforme ρ nel punto $\vec{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$.

$$\begin{aligned}
I_{11} &= \int_V \rho[(y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]dV \\
&= \rho \int_{z=0}^{h}\int_{y=0}^{d}\int_{x=0}^{w}[(y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]dx\,dy\,dz \\
&= \rho w \int\int[(y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]dy\,dz \\
&= \rho w \int \left[\frac{y^3}{3} - y^2 y_0 + y y_0^2 + y(z-z_0)^2\right]_{y=0}^{d} dz \\
&= \rho w d \int \left[\frac{d^2}{3} - d y_0 + y_0^2 + (z-z_0)^2\right] dz \\
&= \rho w d \left[\left(\frac{d^2}{3} - d y_0 + y_0^2\right) z + \frac{z^3}{3} - z^2 z_0 + z z_0^2\right]_{z=0}^{h} \\
&= \rho w d h \left(\frac{d^2}{3} - d y_0 + y_0^2 + \frac{h^2}{3} - h z_0 + z_0^2\right)
\end{aligned}$$

poichè $\rho w d h = M$ è la massa del parallelepipedo abbiamo

$$I_{11} = M\left(\frac{d^2+h^2}{3} - d y_0 - h z_0 + y_0^2 + z_0^2\right) \tag{4}$$

in maniera simile si calcola

$$I_{22} = M\left(\frac{w^2+h^2}{3} - w x_0 - h z_0 + x_0^2 + z_0^2\right) \tag{5}$$

$$I_{33} = M\left(\frac{w^2+d^2}{3} - w x_0 - d y_0 + x_0^2 + y_0^2\right) \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
I_{12} &= -\int_V \rho(x-x_0)(y-y_0)dV \\
&= -\rho \int_{z=0}^{h}\int_{y=0}^{d}\int_{x=0}^{w}(x-x_0)(y-y_0)dx\,dy\,dz \\
&= -\rho \int\int(y-y_0)\left(\frac{x^2}{2} - x x_0\right)\Bigg|_{x=0}^{w} dy\,dz
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\rho w \left(\frac{w}{2} - x_0\right) \int \int (y - y_0) dy\, dz \\
&= -\rho w \left(\frac{w}{2} - x_0\right) \int \left(\frac{y^2}{2} - y y_0\right)\Bigg|_{y=0}^{d} dz \\
&= -\rho w d \left(\frac{w}{2} - x_0\right) \left(\frac{d}{2} - y_0\right) \int dz \\
&= -\rho w d h \left(\frac{w}{2} - x_0\right) \left(\frac{d}{2} - y_0\right)
\end{aligned}
$$

$$
I_{12} = -M \left(\frac{w}{2} - x_0\right) \left(\frac{d}{2} - y_0\right) \tag{7}
$$

similmente abbiamo

$$
\begin{aligned}
I_{13} &= -M \left(\frac{w}{2} - x_0\right) \left(\frac{h}{2} - z_0\right) \\
I_{23} &= -M \left(\frac{d}{2} - y_0\right) \left(\frac{h}{2} - z_0\right)
\end{aligned}
$$

In sintensi

$$
I_{ij} = M \left| \begin{array}{ccc}
\frac{d^2+h^2}{3} - d y_0 - h z_0 + y_0^2 + z_0^2, & -\left(\frac{w}{2} - x_0\right)\left(\frac{d}{2} - y_0\right), & -\left(\frac{w}{2} - x_0\right)\left(\frac{h}{2} - z_0\right) \\
-\left(\frac{w}{2} - x_0\right)\left(\frac{d}{2} - y_0\right), & \frac{w^2+h^2}{3} - w x_0 - h z_0 + x_0^2 + z_0^2, & -\left(\frac{d}{2} - y_0\right)\left(\frac{h}{2} - z_0\right) \\
-\left(\frac{w}{2} - x_0\right)\left(\frac{h}{2} - z_0\right), & -\left(\frac{d}{2} - y_0\right)\left(\frac{h}{2} - z_0\right), & \frac{w^2+d^2}{3} - w x_0 - d y_0 + x_0^2 + y
\end{array} \right.
$$

Si può facilmente vedere che nel caso si prenda come punto di rotazione il centro di massa $\vec{r}_0 = \left(\frac{w}{2}, \frac{d}{2}, \frac{h}{2}\right)$ la matrice I_{ij} si diagonalizza in

$$
I_{ij} = \frac{M}{12} \left| \begin{array}{ccc}
d^2 + h^2, & 0, & 0 \\
0, & w^2 + h^2, & 0 \\
0, & 0, & w^2 + d^2
\end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc}
I_1, & 0, & 0 \\
0, & I_2, & 0 \\
0, & 0, & I_3
\end{array} \right|
$$

con

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{M}{12}(d^2 + h^2) \\
I_2 &= \frac{M}{12}(w^2 + h^2) \\
I_3 &= \frac{M}{12}(w^2 + d^2)
\end{aligned}
$$

e gli assi x, y, z risultano essere gli assi d'inerzia principali.

1.2 Esempio di cambio di sistema di riferimento

Prendiamo ora in cosiderazione un esempio di cambio di sistema di riferimento per osservare come varia il tensore d'inerzia.

Prendiamo in considerazione il centro di massa del parallelepipedo $\vec{r}_0 = \left(\frac{w}{2}, \frac{d}{2}, \frac{h}{2}\right)$

$$I_{ij} = \begin{vmatrix} I_1, & 0, & 0 \\ 0, & I_2, & 0 \\ 0, & 0, & I_3 \end{vmatrix}$$

Prendiamo ora il sistema di riferimento z^1, z^2, z^3

$$\begin{aligned} z^1 &= x^1 \cos \upsilon t - x^2 \sin \upsilon t \\ z^2 &= x^1 \sin \upsilon t + x^2 \cos \upsilon t \\ z^3 &= x^3 \end{aligned}$$

che corrisponde ad un sistema in rotazione attorno all'asse z alla velocità angolare υ.

Lo jacobiano è

$$J^i_j = \frac{\partial z^i}{\partial x^j} = \begin{vmatrix} \cos \upsilon t, & -\sin \upsilon t, & 0 \\ \sin \upsilon t, & \cos \upsilon t, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c, & -s, & 0 \\ s, & c, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix}$$

mentre l'inveso è

$$(J^{-1})^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial z^j} = \begin{vmatrix} c, & s, & 0 \\ -s, & c, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix}$$

Il tensore d'inerzia diventa

$$\begin{aligned} I'_{ij} &= I_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial z^i} \frac{\partial x^l}{\partial z^j} = I_{kl} (J^{-1})^k_i (J^{-1})^l_j = (J^{-1})^T I J^{-1} \\ &= \begin{vmatrix} c, & -s, & 0 \\ s, & c, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_1, & 0, & 0 \\ 0, & I_2, & 0 \\ 0, & 0, & I_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c, & s, & 0 \\ -s, & c, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} c^2 I_1 + s^2 I_2, & sc(I_1 - I_2), & 0 \\ sc(I_1 - I_2), & s^2 I_1 + c^2 I_2, & 0 \\ 0, & 0, & I_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Se il parallelepipedo ruota ad una velocià angolare $\vec{\omega} = \omega^i \vec{e}_i$ il momento d'inerzia è dato da

$$\vec{L} = L_i \vec{e^i} = I_{ij} \omega^j \vec{e^i} = I_1 \omega^1 \vec{e^1} + I_2 \omega^2 \vec{e^2} + I_3 \omega^3 \vec{e^3}$$

mentre nel sistema di coordinate z^1, z^2, z^3 la velocità angolare è data da

$$\omega'^i = \omega^j \frac{\partial z^i}{\partial x^j} = J\vec{w} = \begin{vmatrix} c, & -s, & 0 \\ s, & c, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c\omega^1 - s\omega^2 \\ s\omega^1 + c\omega^2 \\ \omega^3 \end{vmatrix}$$

mentre il tensore d'inerzia è

$$\vec{L}' = L'_i \vec{e'_i} = I'_{ij} \omega'^j \vec{e'_i}$$

$$= \begin{vmatrix} c^2 I_1 + s^2 I_2, & sc(I_1 - I_2), & 0 \\ sc(I_1 - I_2), & s^2 I_1 + c^2 I_2, & 0 \\ 0, & 0, & I_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c\omega^1 - s\omega^2 \\ s\omega^1 + c\omega^2 \\ \omega^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cI_1\omega^1 - sI_2\omega^2 \\ sI_1\omega^1 + cI_2\omega^2 \\ I_3\omega^3 \end{vmatrix}$$

verifichiamo che applicando la trasformazione di coordinate il momento d'inerzia risulta uguale a quanto calcolato:

$$L'_i = L_j \frac{\partial x^j}{\partial z^i} = (J^{-1})^T L = \begin{vmatrix} c, & -s, & 0 \\ s, & c, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_1\omega^1 \\ I_2\omega^2 \\ I_1\omega^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cI_1\omega^1 - sI_2\omega^2 \\ sI_1\omega^1 + cI_2\omega^2 \\ I_3\omega^3 \end{vmatrix}$$

1.3 Dinamica

L'equazione dinamica del moto rotazionale è

$$\frac{dL_i}{dt} = M_i$$

dove M_i è la somma dei momenti delle forze agenti sul corpo.

$$M_i = \frac{dL_i}{dt} = \frac{dI_{ij}\omega^j}{dt};$$

Quindi posto

$$\dot{\omega}^j = \frac{d\omega^j}{dt}$$

abbiamo

$$M_i = \frac{dI_{ij}}{dt}\omega^j + I_{ij}\dot{\omega}^j \tag{8}$$

Nel sistema x^1, x^2, x^3 abbiamo che I_{ij} non dipende esplicitamente da t quindi $\frac{dI_{ij}}{dt} = 0$ da cui

$$M_i = I_{ij}\dot{\omega}^j$$

da cui

$$I^{-1}_{ki} M_i = I^{-1}_{ki} I_{ij}\dot{\omega}^j = \dot{\omega}^k$$

In caso di corpo in equilibrio le forze agenti sul corpo sono nulle quindi $M_i = 0$ quindi

$$\dot{\omega}^i = 0 \Rightarrow \omega^i = \omega^i_0$$

e il corpo permane i rotazione costante sull'asse in direzione $\vec{\omega}_0$

Nel sistema z^1, z^2, z^3 abbiamo

$$M'_i = \frac{dL'_i}{dt} = \frac{dI'_{ij}}{dt}\omega'^j + I'_{ij}\dot{\omega}'^j$$

che in caso di equilibrio è $M'_i = (J^{-1})^j_i M_j = 0$

$$\frac{dI'_{ij}}{dt}\omega'^j + I'_{ij}\dot{\omega}'^j = 0$$

quindi

$$I'_{ij}\dot{\omega}'^j = -\frac{dI'_{ij}}{dt}\omega'^j$$

da cui possiamo ricavare

$$\dot{\omega}'^k = -I'^{-1}_{ki}\frac{dI'_{ij}}{dt}\omega'^j \tag{9}$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned}
\frac{dI'_{ij}}{dt} &= \frac{d(J^{-1})^T I J^{-1}}{dt} \\
= \frac{d(J^{-1})^T}{dt} I J^{-1} + (J^{-1})^T \frac{dI}{dt} J^{-1} &+ (J^{-1})^T I \frac{dJ^{-1}}{dt} \\
= \frac{d(J^{-1})^T}{dt} I J^{-1} &+ (J^{-1})^T I \frac{dJ^{-1}}{dt}
\end{aligned}$$

1.4 Dinamica 1

Prendiamo il sistema di riferimento x^1, x^2, x^3, abbiamo visto che in tale sistema l'equazione del moto risulta essere

$$\dot{\omega}^k = I^{-1}_{ki} M_i$$

Ipotiziamo che M_i sia dovuto alle forze $\vec{F}_1 = (F, 0, 0)$ e $\vec{F}_2 = (-F, 0, 0)$ applicate ai rispettivi punti $P_1 = (0, 0, h)$ e $P_2 = (0, 0, 0)$

Il momento risultate delle forze sarà quindi

$$M_i = \sum F^i_\nu \times (P^i_\nu - R^i_0) = (\tag{10}$$

2 Appendice di calcolo

Matrice Jacobiana

$$J = \begin{vmatrix} c, & -s, & 0 \\ s, & c, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} \tag{11}$$

Matrice Jacobiana inversa

$$J^{-1} = \begin{vmatrix} c, & s, & 0 \\ -s, & c, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} \tag{12}$$

Derivata della jacobiana inversa:

$$\frac{d(J^{-1})^i_j}{dt} = \upsilon \begin{vmatrix} -s, & c, & 0 \\ -c, & -s, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{vmatrix}$$

Tensore d'inerzia nel sistema x^1, x^2, x^3

$$I = \begin{vmatrix} I_1, & 0, & 0 \\ 0, & I_2, & 0 \\ 0, & 0, & I_3 \end{vmatrix} \tag{13}$$

Inversa del tensore d'inerzia nel sistema x^1, x^2, x^3

$$I^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{I_1}, & 0, & 0 \\ 0, & \frac{1}{I_2}, & 0 \\ 0, & 0, & \frac{1}{I_3} \end{vmatrix} \tag{14}$$

Tensore d'inerzia nel sistema z^1, z^2, z^3

$$I' = (J^{-1})^T I J^{-1} = \begin{vmatrix} c, & -s, & 0 \\ s, & c, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_1, & 0, & 0 \\ 0, & I_2, & 0 \\ 0, & 0, & I_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c, & s, & 0 \\ -s, & c, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} cI_1, & -sI_2, & 0 \\ sI_1, & cI_2, & 0 \\ 0, & 0, & I_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c, & s, & 0 \\ -s, & c, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c^2 I_1 + s^2 I_2, & sc(I_1 - I_2), & 0 \\ sc(I_1 - I_2), & s^2 I_1 + c^2 I_2, & 0 \\ 0, & 0, & I_3 \end{vmatrix}$$

Derivata temporale del tensore d'inerzia in z^1, z^2, z^3

$$\frac{dI'}{dt} = \begin{vmatrix} 2c(-s)\upsilon I_1 + 2sc\upsilon I_2, & \upsilon(c^2 - s^2)(I_1 - I_2), & 0 \\ \upsilon(c^2 - s^2)(I_1 - I_2), & 2cs\upsilon I_1 - 2sc\upsilon I_2, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{vmatrix} \tag{15}$$

$$= \upsilon(I_1 - I_2) \begin{vmatrix} -2sc, & c^2 - s^2, & 0 \\ c^2 - s^2, & 2sc, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{vmatrix} \tag{16}$$

Inversa del tensore d'inerzia in z^1, z^2, z^3

$$I'^{-1} = \begin{vmatrix} c^2 I_1 + s^2 I_2, & sc(I_1 - I_2), & 0 \\ sc(I_1 - I_2), & s^2 I_1 + c^2 I_2, & 0 \\ 0, & 0, & I_3 \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} a, & b, & 0 \\ b, & d, & 0 \\ 0, & 0, & e \end{vmatrix}^{-1}$$

$$\begin{vmatrix} a, & b, & 0 \\ b, & d, & 0 \\ 0, & 0, & e \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} ab, & b^2, & 0 \\ ab, & ad, & 0 \\ & \dots & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b, & 0, & 0 \\ 0, & a, & 0 \\ & \dots & \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} & \dots & \\ 0, & b^2-ad, & 0 \\ & \dots & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} & \dots & \\ b, & -a, & 0 \\ & \dots & \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} & \dots & \\ 0, & 1, & 0 \\ & \dots & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} & \dots & \\ \frac{b}{b^2-ad}, & -\frac{a}{b^2-ad}, & 0 \\ & \dots & \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} ad, & bd, & 0 \\ b^2, & bd, & 0 \\ & \dots & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d, & 0, & 0 \\ 0, & b, & 0 \\ & \dots & \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} b^2-ad, & 0, & 0 \\ & \dots & \\ & \dots & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -d, & b, & 0 \\ & \dots & \\ & \dots & \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0 \\ & \dots & \\ & \dots & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -\frac{d}{b^2-ad}, & \frac{b}{b^2-ad}, & 0 \\ & \dots & \\ & \dots & \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -\frac{d}{b^2-ad}, & \frac{b}{b^2-ad}, & 0 \\ \frac{b}{b^2-ad}, & -\frac{a}{b^2-ad}, & 0 \\ 0, & 0, & \frac{1}{e} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} b^2 - ad = s^2c^2(I_1 - I_2)^2 - (c^2I_1 + s^2I_2)(s^2I_1 + c^2I_2) = \\ s^2c^2I_1^2 + s^2c^2I_2^2 - 2s^2c^2I_1I_2 - s^2c^2I_1^2 - s^2c^2I_2^2 - I_1I_2(s^4 + c^4) = \\ -I_1I_2(s^4 + c^4 + 2s^2c^2) = -I_1I_2(s^2 + c^2)^2 = -I_1I_2 \end{aligned}$$

$$I'^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{s^2I_1+c^2I_2}{I_1I_2}, & -sc\frac{I_1-I_2}{I_1I_2}, & 0 \\ -sc\frac{I_1-I_2}{I_1I_2}, & \frac{c^2I_1+s^2I_2}{I_1I_2}, & 0 \\ 0, & 0, & \frac{1}{I_3} \end{vmatrix} \tag{17}$$

Accelerazione angolare nel sistema z^1, z^2, z^3

$$\dot{\omega}'^k = -I'^{-1}_{ki}\frac{dI'_{ij}}{dt}\omega'^j$$

$$= -\upsilon(I_1 - I_2) \begin{vmatrix} \frac{s^2I_1+c^2I_2}{I_1I_2}, & -sc\frac{I_1-I_2}{I_1I_2}, & 0 \\ -sc\frac{I_1-I_2}{I_1I_2}, & \frac{c^2I_1+s^2I_2}{I_1I_2}, & 0 \\ 0, & 0, & \frac{1}{I_3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2sc, & c^2-s^2, & 0 \\ c^2-s^2, & 2sc, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \omega'^1 \\ \omega'^2 \\ \omega'^3 \end{vmatrix}$$

$$= \upsilon\frac{I_1 - I_2}{I_1I_2} \begin{vmatrix} a, & b, & 0 \\ f, & g, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \omega'^1 \\ \omega'^2 \\ \omega'^3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} a &= sc[2(s^2I_1 + c^2I_2) + (I_1 - I_2)(c^2 - s^2)] \\ &= sc(2s^2I_1 + 2c^2I_2 + c^2I_1 - s^2I_1 - c^2I_2 + s^2I_2) \\ &= sc(s^2I_1 + c^2I_2 + c^2I_1 + s^2I_2) = sc(I_1 + I_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= -(s^2I_1 + c^2I_2)(c^2 - s^2) + 2s^2c^2(I_1 - I_2) \\ &= -s^2c^2I_1 + s^4I_1 - c^4I_2 + s^2c^2I_2 + 2s^2c^2I_1 - 2s^2c^2I_2 \end{aligned}$$

$$= s^2c^2I_1 + s^4I_1 - c^4I_2 - s^2c^2I_2 = s^2(c^2+s^2)I_1 - c^2(c^2+s^2)I_2$$
$$= s^2I_1 - c^2I_2$$

$$\begin{aligned} f &= -2s^2c^2(I_1 - I_2) - (c^2I_1 + s^2I_2)(c^2 - s^2) \\ &= -2s^2c^2I_1 + 2s^2c^2I_2 - c^4I_1 + s^2c^2I_1 - s^2c^2I_2 + s^4I_2 \\ &= -s^2c^2I_1 + s^2c^2I_2 - c^4I_1 + s^4I_2 = -c^2(s^2+c^2)I_1 + s^2(c^2+s^2)I_2 \\ &= -c^2I_1 + s^2I_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g &= sc[(I_1 - I_2)(c^2 - s^2) - 2(c^2I_1 + s^2I_2)] \\ &= sc(c^2I_1 - s^2I_1 - c^2I_2 + s^2I_2 - 2c^2I_1 - 2s^2I_2) \\ &= sc(-c^2I_1 - s^2I_1 - c^2I_2 - s^2I_2) = -sc(I_1 + I_2) \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} \dot{\omega'}^1 \\ \dot{\omega'}^2 \\ \dot{\omega'}^3 \end{vmatrix} = \upsilon \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2} \begin{vmatrix} sc(I_1+I_2), & s^2I_1 - c^2I_2, & 0 \\ -c^2I_1 + s^2I_2, & -sc(I_1+I_2), & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \omega'^1 \\ \omega'^2 \\ \omega'^3 \end{vmatrix}$$