Studio matematico per software Leibniz

Marco Marini

9 novembre 2012

Indice

Sommario

Parte I
Quaternioni

1 Introduzione ai quaternioni

Sia a H l'insieme di elementi della forma

$$a = a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k = a_1 + \vec{a} \tag{1}$$

Definiamo l'operazione + come

$$\begin{aligned} a = a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k, b = b_1 + b_2 i + b_3 j + b_4 k \\ a + b = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)i + (a_3 + b_3)j + (a_4 + b_4)k \end{aligned} \tag{2}$$

o in notazione mista

$$\begin{aligned} a = a_1 + \vec{a}, b = b_1 + \vec{b} \\ a + b = (a_1 + b_1) + (\vec{a} + \vec{b}) \end{aligned} \tag{3}$$

e il prodotto $\cdot$ come il normale prodotto con le regole di moltiplicazione tra letterali:

$$\begin{aligned} i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = -1 \\ i \cdot j = k, j \cdot k = i, k \cdot i = j \\ j \cdot i = -k, k \cdot j = -i, i \cdot k = -j \end{aligned} \tag{4}$$

per cui

$$\begin{aligned} a \cdot b = a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4 + \\ +(a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3)i + \\ +(a_1b_3 - a_2b_4 + a_3b_1 + a_4b_2)j + \\ +(a_1b_4 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_4b_1)k \end{aligned} \tag{5}$$

oppure

$$a \cdot b = (a_1b_1 - \vec{a}\vec{b}) + (a_1\vec{b} + \vec{a}b_1 + \vec{a} \times \vec{b}) \tag{6}$$

Teorema 1 *L'insieme H è un corpo rispetto a (3) e (6)*

Dimostrazione. Dimostriamo che H è un gruppo rispetto alla somma:

Dalla (3) si vede che $a+b$ è della forma (1) quindi $\forall a, b \in H : a+b \in H$ quindi H è chiuso rispetto $+$.

Abbiamo poi

$$\begin{aligned} (a+b)+c &= [(a_1+\vec{a}) + (b_1+\vec{b})] + (c_1+\vec{c}) \\ &= [a_1+b_1+(\vec{a}+\vec{b})] + (c_1+\vec{c}) \\ &= a_1+b_1+c_1+[(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}] \end{aligned}$$

per la proprietà associativa dei reali in $\Re$ e dei vettori in $\Re^3$ abbiamo

$$\begin{aligned} a_1+b_1+c_1+[(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}] = \\ a_1+(b_1+c_1)+[\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})] \\ = (a_1+\vec{a}) + [(b_1+\vec{b}) + (c_1+\vec{c})] \\ = a+(b+c) \end{aligned}$$

quindi la somma in H è associativa

Prendiamo l'elemento $0 = (0+\vec{0})$ abbiamo che

$$a+0 = 0+a = a, \forall a \in H$$

Prendiamo l'elemento $-a = (-a-\vec{a})$ abbiamo che

$$a+(-a) = (-a)+a = 0, \forall a \in H$$

Quindi H è un gruppo come volevasi dimostrare.

Dimostriamo che H è un gruppo rispetto al prodotto:

Dalla (6) si vede che $a \cdot b$ è della forma (1) quindi $\forall a, b \in H : a, b \in H$ quindi H è chiuso rispetto $\cdot$.

Abbiamo poi

$$(ab)c = [(a_1 + a_2i + a_3j + a_4k)(b_1 + b_2i + b_3j + b_4k)](c_1 + c_2i + c_3j + c_4k)$$

$$= [(a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4) + (a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3)i$$

$$+(a_1b_3+a_3b_1+a_4b_2-a_2b_4)j+(a_1b_4+a_4b_1+a_2b_3-a_3b_2)k]$$
$$(c_1+c_2i+c_3j+c_4k)$$

$$\begin{aligned}
&=[(a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3-a_4b_4)c_1-(a_1b_2+a_2b_1+a_3b_4-a_4b_3)c_2\\
&-(a_1b_3+a_3b_1+a_4b_2-a_2b_4)c_3-(a_1b_4+a_4b_1+a_2b_3-a_3b_2)c_4]\\
&+[(a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3-a_4b_4)c_2+(a_1b_2+a_2b_1+a_3b_4-a_4b_3)c_1\\
&+(a_1b_3+a_3b_1+a_4b_2-a_2b_4)c_4-(a_1b_4+a_4b_1+a_2b_3-a_3b_2)c_3]i\\
&+[(a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3-a_4b_4)c_3-(a_1b_2+a_2b_1+a_3b_4-a_4b_3)c_4\\
&+(a_1b_3+a_3b_1+a_4b_2-a_2b_4)c_1+(a_1b_4+a_4b_1+a_2b_3-a_3b_2)c_2]j\\
&+[(a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3-a_4b_4)c_4+(a_1b_2+a_2b_1+a_3b_4-a_4b_3)c_3\\
&-(a_1b_3+a_3b_1+a_4b_2-a_2b_4)c_2+(a_1b_4+a_4b_1+a_2b_3-a_3b_2)c_1]k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=[a_1(b_1c_1-b_2c_2-b_3c_3-b_4c_4)-a_2(b_1c_2+b_2c_1+b_3c_4-b_4c_3)\\
&-a_3(b_1c_3+b_3c_1+b_4c_2-b_2c_4)-a_4(b_1c_4+b_4c_1+b_2c_3-b_3c_2)]\\
&+[a_2(b_1c_1-b_2c_2-b_3c_3-b_4c_4)+a_1(b_1c_2+b_2c_1+b_3c_4-b_4c_3)\\
&-a_4(b_1c_3+b_3c_1+b_4c_2-b_2c_4)+a_3(b_1c_4+b_4c_1+b_2c_3-b_3c_2)]i\\
&+[a_3(b_1c_1-b_2c_2-b_3c_3-b_4c_4)+a_4(b_1c_2+b_2c_1+b_3c_4-b_4c_3)\\
&+a_1(b_1c_3+b_3c_1+b_4c_2-b_2c_4)-a_2(b_1c_4+b_4c_1+b_2c_3-b_3c_2)]j\\
&+[a_4(b_1c_1-b_2c_2-b_3c_3-b_4c_4)-a_3(b_1c_2+b_2c_1+b_3c_4-b_4c_3)\\
&+a_2(b_1c_3+b_3c_1+b_4c_2-b_2c_4)+a_1(b_1c_4+b_4c_1+b_2c_3-b_3c_2)]k
\end{aligned}$$

$$=(a_1+a_2i+a_3j+a_4k)[(b_1+b_2i+b_3j+b_4k)](c_1+c_2i+c_3j+c_4k)]=a(bc)$$

quindi il prodotto è associativo.

Prendiamo l'elemento $a^{-1}=\frac{\bar{a}}{|a|^2}=\frac{a1-a_2i-a_3j-a_4k}{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2}$ con $a\neq 0$ abbiamo che

$$a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=1,\forall a\neq 0,a\in H$$

Quindi esiste l'elemento inverso e H e un gruppo rispetto al prodotto e quindi è un corpo.

Sviluppo di $(ab)c$ per coefficienti:

$$\begin{aligned}
(ab)c=&[(a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3-a_4b_4)c_1-(a_1b_2+a_2b_1+a_3b_4-a_4b_3)c_2\\
&-(a_1b_3+a_3b_1+a_4b_2-a_2b_4)c_3-(a_1b_4+a_4b_1+a_2b_3-a_3b_2)c_4]\\
&+[(a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3-a_4b_4)c_2+(a_1b_2+a_2b_1+a_3b_4-a_4b_3)c_1\\
&+(a_1b_3+a_3b_1+a_4b_2-a_2b_4)c_4-(a_1b_4+a_4b_1+a_2b_3-a_3b_2)c_3]i\\
&+[(a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3-a_4b_4)c_3-(a_1b_2+a_2b_1+a_3b_4-a_4b_3)c_4\\
&+(a_1b_3+a_3b_1+a_4b_2-a_2b_4)c_1+(a_1b_4+a_4b_1+a_2b_3-a_3b_2)c_2]j\\
&+[(a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3-a_4b_4)c_4+(a_1b_2+a_2b_1+a_3b_4-a_4b_3)c_3
\end{aligned}$$

$$-(a_1b_3+a_3b_1+a_4b_2-a_2b_4)c_2+(a_1b_4+a_4b_1+a_2b_3-a_3b_2)c_1]k$$

$$\begin{aligned}
&= [a_1b_1c_1\\
&-(a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4)c_1-(a_2c_2+a_3c_3+a_4c_4)b_1-(b_2c_2+b_3c_3+b_4c_4)a_1\\
&-(a_3b_4-a_4b_3)c_2-(a_4b_2-a_2b_4)c_3-(a_2b_3-a_3b_2)c_4]\\
&+a_1b_1(c_2i+c_3j+c_4k)+a_1(b_2i+b_3j+b_4k)c_1+(a_2i+a_3j+a_4k)b_1c_1\\
&+a_1[(b_3c_4-b_4c_3)i+(b_4c_2-b_2c_4)j+(b_2c_3-b_3c_2)k]\\
&+b_1[(a_3c_4-a_4c_3)i+(a_4c_2-a_2c_4)j+(a_2c_3-a_3c_2)k]\\
&+c_1[(a_3b_4-a_4b_3)i+(a_4b_2-a_2b_4)j+(a_2b_3-a_3b_2)k]\\
&-(a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4)(c_2i+c_3j+c_4k)\\
&+(a_4b_2c_4-a_2b_4c_4-a_2b_3c_3+a_3b_2c_3)i\\
&+(-a_3b_4c_4+a_4b_3c_4+a_2b_3c_2-a_3b_2c_2)j\\
&+(a_3b_4c_3-a_4b_3c_3-a_4b_2c_2-a_2b_4c_2)k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a_1b_1c_1-\left(\vec{a}\vec{b}\right)c_1-(\vec{a}\vec{c})\,b_1-\left(\vec{b}\vec{c}\right)a_1-\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}\\
&+a_1b_1\vec{c}+a_1c_1\vec{b}+b_1c_1\vec{a}+a_1(\vec{b}\times\vec{c})+b_1(\vec{a}\times\vec{c})+c_1(\vec{a}\times\vec{b})\\
&-\left(\vec{a}\vec{b}\right)\vec{c}+\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}
\end{aligned}$$

Sviluppo di $(ab)c$ per vettori:

$$\begin{aligned}
(ab)c &= [(a_1+\vec{a})(b_1+\vec{b})](c_1+\vec{c})\\
&= \left[a_1b_1-\left(\vec{a}\vec{b}\right)+a_1\vec{b}+b_1\vec{a}+\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right](c_1+\vec{c})\\
&= a_1b_1c_1-\left(\vec{a}\vec{b}\right)c_1-a_1\left(\vec{b}\vec{c}\right)-b_1\,(\vec{a}\vec{c})-\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}\\
&+a_1b_1\vec{c}-\left(\vec{a}\vec{b}\right)\vec{c}+a_1c_1\vec{b}+b_1c_1\vec{a}+c_1\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\\
&+a_1\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+b_1\,(\vec{a}\times\vec{c})+\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}\\
a(bc) &= a_1b_1c_1-\left(\vec{a}\vec{b}\right)c_1-a_1\left(\vec{b}\vec{c}\right)-b_1\,(\vec{a}\vec{c})-\vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\\
&+a_1b_1\vec{c}-\vec{a}\left(\vec{b}\vec{c}\right)+a_1c_1\vec{b}+b_1c_1\vec{a}+c_1\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\\
&+a_1\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+b_1\,(\vec{a}\times\vec{c})+\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)
\end{aligned}$$

2 Quaternioni e rotazioni.

Sia

$$q=e^{\frac{\varphi}{2}(u_xi+u_yj+u_zk)}=e^{\frac{\varphi}{2}\vec{u}}=\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}(u_xi+u_yj+u_zk)=\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}\vec{u} \tag{7}$$

con $|\vec{u}|^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1$ allora

$$q^{-1} = \bar{q} = e^{-\frac{\varphi}{2}\vec{u}} = \cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\vec{u} \tag{8}$$

quindi

$$|q|^2 = q\bar{q} = qq^{-1} = e^0 = 1 \tag{9}$$

quindi q è un quaternione unitario.

Teorema 2 *Se $q = e^{\frac{\varphi}{2}\vec{a}} = \cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\vec{a}$ e $v = -\bar{v} = \vec{v}$, la trasformazione*

$$\alpha_q : p \to v' = qvq^{-1} \tag{10}$$

rappresenta una rotazione dello spazio euclideo $\Re^3$ di φ attorno all'asse $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$

Dimostrazione. Sviluppiamo la trasformazione:

$$\begin{aligned} v' = qvq^{-1} &= \left(\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\vec{u}\right)\vec{v}\left(\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\vec{u}\right) \\ &= -\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}(\vec{u}\vec{v}) + \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}(\vec{u}\vec{v}) - \sin^2\frac{\varphi}{2}(\vec{u}\times\vec{v})\vec{u} \\ +\sin^2\frac{\varphi}{2}(\vec{u}\vec{v})\vec{u} + \cos^2\frac{\varphi}{2}\vec{v} &+ \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}(\vec{u}\times\vec{v}) - \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}(\vec{v}\times\vec{u}) \\ &- \sin^2\frac{\varphi}{2}(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{u} \end{aligned}$$

essendo

$$\begin{aligned} (\vec{u}\times\vec{v})\vec{u} &= 0 \\ \vec{v}\times\vec{u} &= -\vec{u}\times\vec{v} \end{aligned}$$

abbiamo

$$v' = \sin^2\frac{\varphi}{2}(\vec{u}\vec{v})\vec{u} + \cos^2\frac{\varphi}{2}\vec{v} + 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}(\vec{u}\times\vec{v}) - \sin^2\frac{\varphi}{2}(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{u}$$

ma scomponendo il vettore $\vec{v}$ nelle componenti $\vec{v}_{\|}$ parallela a $\vec{u}$ e $\vec{v}_{\perp}$ perpendicolare a $\vec{u}$

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}_{\|} + \vec{v}_{\perp} \\ (\vec{u}\vec{v})\vec{u} &= \vec{v}_{\|} \\ \vec{u}\times\vec{v}_{\|} &= 0 \\ \vec{u}\times\vec{v} = \vec{u}\times\vec{v}_{\|} + \vec{u}\times\vec{v}_{\perp} &= \vec{u}\times\vec{v}_{\perp} \\ (\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{u} = (\vec{u}\times\vec{v}_{\perp})\times\vec{u} &= \vec{v}_{\perp} \end{aligned}$$

risulta

$$
\begin{aligned}
v' &= \sin^2\frac{\varphi}{2}\vec{v}_\| + \cos^2\frac{\varphi}{2}(\vec{v}_\| + \vec{v}_\perp) + 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}(\vec{u}\times\vec{v}_\perp) - \sin^2\frac{\varphi}{2}\vec{v}_\perp \\
&= \vec{v}_\| + \left(\cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\vec{v}_\perp + 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}(\vec{u}\times\vec{v}_\perp) \\
&= \vec{v}_\| + \left(1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\vec{v}_\perp + 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}(\vec{u}\times\vec{v}_\perp)
\end{aligned}
$$

applicando le formule di bisezione

$$
\begin{aligned}
2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} &= \sin\varphi \\
2\sin^2\frac{\varphi}{2} &= 1 - \cos\varphi
\end{aligned}
$$

abbiamo

$$v' = \vec{v}_\| + (1 - 1 + cos\varphi)\vec{v}_\perp + \sin\varphi(\vec{u}\times\vec{v}_\perp)$$

da cui

$$v' = \vec{v}_\| + \cos\varphi\vec{v}_\perp + \sin\varphi(\vec{u}\times\vec{v}_\perp) \tag{11}$$

che è la formula di una rotazione di φ attorno all'asse $\vec{u}$.