October 2, 2018

Abstract

Moto in un campo gravitazionale centrale

1 Il problema di Keplero

Sia p una particella di massa m che si muove in un campo gravitazionale prodotto da una massa equivalente K. Il campo è descritto dall'equazione

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}$$
$$\alpha = mKG$$
$$G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2}$$

$$\alpha = mKG \tag{1}$$

Per il principio di conservazione dell'energia e del momento d'inerzia abbiamo che

$$E = \frac{m}{2} \vec{R} \cdot \vec{R} + U(r)$$
$$M = mr^2 \dot{\varphi}$$

sono costanti.

Se $E < 0$ l'orbita descritta è un'ellisse con semiasse asse maggiore e minore rispettivamente a e b dati da

$$a = \frac{\alpha}{2|E|} \tag{2}$$

$$b = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}} \tag{3}$$

Il tempo d percorrenza dell'intera orbita invece è dato da

$$T = \pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}} \tag{4}$$

Poniamo allora di conoscere a, b, T vediamo di trovare le relazioni con le altre costanti del moto.

2 Calcolo di K

Dalla (2) ricaviamo

$$|E| = \frac{\alpha}{2a}$$

mentre dalla (4) otteniamo

$$\begin{aligned} |E|^3 &= \frac{\pi^2}{2T^2} m\alpha^2 \\ \frac{\alpha^3}{8a^3} &= \frac{\pi^2}{2T^2} m\alpha^2 \\ \alpha &= \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} m \end{aligned}$$

e dalla (1)

$$mKG = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} m$$

da cui

$$K = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2} \tag{5}$$

3 Calcolo di E in funzione di m

Dalla (1) e (2) otteniamo

$$E = -\frac{KG}{2a} m$$

$$E = -\frac{2\pi^2 a^2}{T^2} m \tag{6}$$

4 Calcolo di M in funzione di m

Dalla (3) otteniamo

$$\begin{aligned} M^2 &= 2b^2 |E| m \\ &= \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2} m^2 \end{aligned}$$

Da cui

$$M = 2\pi \frac{ab}{T} m \tag{7}$$

5 Calcolo di r_{min} e r_{max}

Una caratteristica geometrica dell'ellisse è che la somma delle distanze dai fuochi di ogni suo punto è costante e uguale all'asse maggiore $2a$.

$$2a = |r - f_1| + |r - f_2|$$

Il semi asse maggiore dell'ellisse è

$$a = \frac{r_{min} + r_{max}}{2}$$

media artimetica.

La distanza dei due fuochi invece è

$$(f2 - f1) = r_{max} - r_{min}$$

All'intersezione dell'ellisse con l'asse minore abbiamo

$$\begin{aligned}
2a &= |r - f_1| + |r - f_2| \\
&= 2|r - f_1| \\
a &= |r - f_1| \\
|r - f_1|^2 &= (\frac{|f_2 - f_1|}{2})^2 + b^2 \\
a^2 &= \frac{(r_{max} - r_{min})^2}{4} + b^2 \\
r_{max} - r_{min} &= 2\sqrt{(a^2 - b^2)} r_{max} + r_{min} && = 2a
\end{aligned}$$

da cui

$$r_{max} = a + \sqrt{a^2 - b^2} \tag{8}$$

$$r_{min} = a - \sqrt{a^2 - b^2} \tag{9}$$

inversamente abbiamo

$$\begin{aligned}
b^2 &= a^2 - \frac{(r_{max} - r_{min})^2}{4} \\
&= \frac{(r_{max} + r_{min})^2 - (r_{max} - r_{min})^2}{4} \\
&= \frac{(r_{max} + r_{min} + r_{max} - r_{min})(r_{max} + r_{min} - r_{max} + r_{min})^2}{4} \\
&= \frac{2r_{max} 2r_{min}}{4}
\end{aligned}$$

da cui

$$b = \sqrt{r_{max} r_{min}} \tag{10}$$

media geometrica.

6 Sistema terra-sole

Prendiamo il sistema formato da terra-sole e conoscendo la distanza del perielio e dell'afelio della terra, il periodo di rivoluzione e la massa della terra.

$$\begin{aligned} r_{min} &= 147 \times 10^9 m \\ r_{max} &= 152,1 \times 10^9 m \\ T &= 365.2425 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 31.56 \times 10^6 s \\ m &= 5,972 \times 10^{24} kg \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= 149,55 \times 10^9 \\ b &= 149,53 \times 10^9 \\ K &= \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2} = 1,988 \times 10^{30} \end{aligned}$$

Il valore ufficiale della massa solare è

$$K = 1,98892 \times 10^{30}$$

7 Simulazione

L'equazioni del moto risultano essere

$$\begin{aligned} M &= mr^2 \frac{d\varphi}{dt} \\ d\varphi &= \frac{M}{mr^2} dt \\ E &= \frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{M^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} \\ dr &= \sqrt{\frac{2}{m} \left(E + \frac{\alpha}{r} \right) - \frac{M^2}{m^2 r^2}} dt \end{aligned}$$

dove le costanti valgono

$$\begin{aligned} E &= -\frac{2\pi^2 a^2}{T^2} m = -2.647 \times 10^{33} \\ M &= 2\pi \frac{ab}{T} m = 26.59 \times 10^{39} \\ \alpha &= mKG = 791,861 \times 10^{42} \end{aligned}$$

Simuliamo ora il sistema terra-sole.

Vogliamo che il simulatore ”acceleri” il tempo facendo si che il tempo di rivoluzione sia di $10s$ e che la distanza dell'afelio sia scalata a $1m$ (Leibniz simulation).

Quindi i fattori di scala spazio - tempo risultano essere

$$
\begin{aligned}
dt &= \frac{31.56 \times 10^6}{10} dt_{sim} && = 3.156 \times 10^6 dt_{sim} \\
r_{sim} &= \frac{1}{152.1 \times 10^9} r && = 6.575 \times 10^{-12} r
\end{aligned}
$$