

October 2, 2018

### Abstract

Moto in un campo gravitazionale centrale

## 1 Il problema di Keplero

Sia  $p$  una particella di massa  $m$  che si muove in un campo gravitazionale prodotto da una massa equivalente  $K$ . Il campo è descritto dall'equazione

$$\begin{aligned}U(r) &= -\frac{\alpha}{r} \\ \alpha &= mKG \\ G &= 6.67 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2}\end{aligned}$$

$$\alpha = mKG \tag{1}$$

Per il principio di conservazione dell'energia e del momento d'inerzia abbiamo che

$$\begin{aligned}E &= \frac{m}{2} \vec{R} \cdot \vec{R} + U(r) \\ M &= mr^2 \dot{\phi}\end{aligned}$$

sono costanti.

Se  $E < 0$  l'orbita descritta è un'ellisse con semiasse asse maggiore e minore rispettivamente  $a$  e  $b$  dati da

$$a = \frac{\alpha}{2|E|} \tag{2}$$

$$b = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}} \tag{3}$$

Il tempo di percorrenza dell'intera orbita invece è dato da

$$T = \pi \alpha \sqrt{\frac{m}{2|E|^3}} \tag{4}$$

Poniamo allora di conoscere  $a, b, T$  vediamo di trovare le relazioni con le altre costanti del moto.

## 2 Calcolo di $K$

Dalla (2) ricaviamo

$$|E| = \frac{\alpha}{2a}$$

mentre dalla (4) otteniamo

$$\begin{aligned} |E|^3 &= \frac{\pi^2}{2T^2} m \alpha^2 \\ \frac{\alpha^3}{8a^3} &= \frac{\pi^2}{2T^2} m \alpha^2 \\ \alpha &= \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} m \end{aligned}$$

e dalla (1)

$$mKG = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} m$$

da cui

$$K = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2} \quad (5)$$

## 3 Calcolo di $E$ in funzione di $m$

Dalla (1) e (2) otteniamo

$$\begin{aligned} E &= -\frac{KG}{2a} m \\ E &= -\frac{2\pi^2 a^2}{T^2} m \end{aligned} \quad (6)$$

## 4 Calcolo di $M$ in funzione di $m$

Dalla (3) otteniamo

$$\begin{aligned} M^2 &= 2b^2 |E| m \\ &= \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2} m^2 \end{aligned}$$

Da cui

$$M = 2\pi \frac{ab}{T} m \quad (7)$$

## 5 Calcolo di $r_{min}$ e $r_{max}$

Una caratteristica geometrica dell'ellisse è che la somma delle distanze dai fuochi di ogni suo punto è costante e uguale all'asse maggiore  $2a$ .

$$2a = |r - f_1| + |r - f_2|$$

Il semi asse maggiore dell'ellisse è

$$a = \frac{r_{min} + r_{max}}{2}$$

media aritmetica.

La distanza dei due fuochi invece è

$$(f_2 - f_1) = r_{max} - r_{min}$$

All'intersezione dell'ellisse con l'asse minore abbiamo

$$\begin{aligned} 2a &= |r - f_1| + |r - f_2| \\ &= 2|r - f_1| \\ a &= |r - f_1| \\ |r - f_1|^2 &= \left(\frac{|f_2 - f_1|}{2}\right)^2 + b^2 \\ a^2 &= \frac{(r_{max} - r_{min})^2}{4} + b^2 \\ r_{max} - r_{min} &= 2\sqrt{(a^2 - b^2)}r_{max} + r_{min} = 2a \end{aligned}$$

da cui

$$r_{max} = a + \sqrt{a^2 - b^2} \quad (8)$$

$$r_{min} = a - \sqrt{a^2 - b^2} \quad (9)$$

inversamente abbiamo

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 - \frac{(r_{max} - r_{min})^2}{4} \\ &= \frac{(r_{max} + r_{min})^2 - (r_{max} - r_{min})^2}{4} \\ &= \frac{(r_{max} + r_{min} + r_{max} - r_{min})(r_{max} + r_{min} - r_{max} + r_{min})^2}{4} \\ &= \frac{2r_{max}2r_{min}}{4} \end{aligned}$$

da cui

$$b = \sqrt{r_{max}r_{min}} \quad (10)$$

media geometrica.

## 6 Sistema terra-sole

Prendiamo il sistema formato da terra-sole e conoscendo la distanza del perielio e dell'afelio della terra, il periodo di rivoluzione e la massa della terra.

$$\begin{aligned}r_{min} &= 147 \times 10^9 m \\r_{max} &= 152,1 \times 10^9 m \\T &= 365.2425 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 31.56 \times 10^6 s \\m &= 5,972 \times 10^{24} kg\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a &= 149,55 \times 10^9 \\b &= 149,53 \times 10^9 \\K &= \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2} = 1,988 \times 10^{30}\end{aligned}$$

Il valore ufficiale della massa solare è

$$K = 1,98892 \times 10^{30}$$

## 7 Simulazione

L'equazioni del moto risultano essere

$$\begin{aligned}M &= mr^2 \frac{d\varphi}{dt} \\d\varphi &= \frac{M}{mr^2} dt \\E &= \frac{m}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{M^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} \\dr &= \sqrt{\frac{2}{m} \left( E - \frac{M^2}{2mr^2} + \frac{\alpha}{r} \right)} dt\end{aligned}$$

dove le costanti valgono

$$\begin{aligned}E &= -\frac{2\pi^2 a^2}{T^2} m = -2.647 \times 10^{33} \\M &= 2\pi \frac{ab}{T} m = 26.59 \times 10^{39} \\\alpha &= mKG = 791,861 \times 10^{42}\end{aligned}$$

Simuliamo ora il sistema terra-sole.

Vogliamo che il simulatore "acceleri" il tempo facendo sì che il tempo di rivoluzione sia di  $10s$  e che la distanza dell'afelio sia scalata a  $1m$  (Leibniz simulation).

Quindi i fattori di scala spazio - tempo risultano essere

$$\begin{aligned} dt &= \frac{31.56 \times 10^6}{10} dt_{sim} &= 3.156 \times 10^6 dt_{sim} \\ r_{sim} &= \frac{1}{152.1 \times 10^9} r &= 6.575 \times 10^{-12} r \end{aligned}$$