Leibnitz*

Marco Marini

25 luglio 2012

Indice

*Id: notes.tex,v 1.3 2012/07/25 13:55:45 marco Exp

1 Notes release 0.0.1

1.1 Generals

The project computes the values of a vectorial function X defined by a differential vectorial equation:

$$\vec{X}^{(n)} + \vec{F}(t, \vec{X}, \vec{X}^{(1)}, \ldots, \vec{X}^{(n-1)} = 0 \tag{1}$$

given the initial Cauchy condition

$$\begin{array}{l} \vec{X}(t_0) = \vec{K} \\ \vec{X}^{(1)}(t_0) = \vec{K}_1 \\ \ldots \\ \vec{X}^{(n-1)}(t_0) = \vec{K}_{n-1} \end{array} \tag{2}$$

The $\vec{X}^{(n)}$ defines the derived n function.

1.2 Specifications

The syntax of function definition is defined in org.mmarini.leibnitz.parser.InterpreterContext javadoc

To use runs: java org.mmarini.leibintz.Compute file [-o file].
The file parameter is a xml properties file containing the definitions.
The output is stdout unless -o file is specified in line command.

The mandatory properties in input file are

order : the order of function

dimension : the space dimension

function : the function $\vec{F}$

t0 : initial value of t

t1 : final value of t

dt : increment of t value in single step

The optional properties are:

x0 x1 ... xn-1 : Initial value of $\vec{X}$

x0(1) x1(1) ... xn-1(1) : Initial value of $\vec{X}^{(1)}$

x0(o-1) x1(o-1) ... xn-1(o-1) : Initial value of $\vec{X}^{(o-1)}$

2 Addendum release 0.1.0

1. Definire le funzioni di trasformazione tra le variabili indipendenti $\vec{Q}$ e le variabili reali $\vec{R}_\nu$. Questo corrisponde con definire m funzioni di trasformazione $\vec{R}_\nu$ una per ogni particella.

$$\vec{R}_\nu = \vec{R}_\nu(\vec{Q}) \tag{3}$$

2. Risolvere le equazioni di Lagrange in coordinate indipendenti $\vec{Q}$

   Le equazioni di Lagrange sono definite come

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = f_i \tag{4}$$

   T è l'energia definita come

$$T = T_2 + T_1 + T_0 \tag{5}$$
$$T_2 = a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \tag{6}$$
$$T_1 = a_i\dot{q}_i \tag{7}$$
$$T_0 = a_0 \tag{8}$$
$$a_{ij} = m_\nu \frac{\partial \vec{R}_\nu}{\partial q_i}\frac{\partial \vec{R}_\nu}{\partial q_j} \tag{9}$$
$$a_i = m_\nu \frac{\partial \vec{R}_\nu}{\partial q_i}\frac{\partial \vec{R}_\nu}{\partial t} \tag{10}$$
$$a_0 = m_\nu \frac{\partial \vec{R}_\nu}{\partial t}\frac{\partial \vec{R}_\nu}{\partial t} \tag{11}$$

   e f_i sono le forze indipendenti (spostamenti virtuali)

$$f_i = \vec{F}_\nu \frac{\partial \vec{R}_\nu}{\partial q_i} \tag{12}$$

   ma abbiano che

$$\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i} = a_{ij}\dot{q}_j \tag{13}$$
$$\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i} = a_i \tag{14}$$
$$\frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_i} = 0 \tag{15}$$
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = a_{ij}\dot{q}_j + a_i \tag{16}$$

   derivando rispetto a t abbiamo

$$\frac{d(a_{ij}\dot{q}_j + a_i)}{dt} = a_{ij}\ddot{q}_j + \frac{da_{ij}}{dt}\dot{q}_j + \frac{da_i}{dt} = a_{ij}\ddot{q}_j + \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\right)\dot{q}_j + \frac{\partial a_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial a_i}{\partial t} \tag{17}$$

per cui

$$a_{ij}\ddot{q}_j = G_i(t, q_j, \dot{q}_j) \tag{18}$$

$$G_i = f_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} - \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_j}\dot{q}_j - \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\right)\dot{q}_j - \frac{\partial a_i}{\partial q_j}\dot{q}_j - \frac{\partial a_i}{\partial t} \tag{19}$$

Quindi dobbiamo gestire vettori funzionali nello spazio $\Re^n$ e matrici funzionali nello spazio $\Re^{n\times n}$

Rappresentando in forma matriciale abbiamo:

$$A\ddot{\vec{Q}} = \vec{G}, \ddot{\vec{Q}} = A^{-1}\vec{G} \tag{20}$$

Le funzioni da implementare sono:

1. definizione di vettori e matrici funzionali di dimensione m (n. di gradi di libertà)
2. definizione di vettori funzionali di trasformazione di grado n (particelle)
3. estendere l'interpretazione e valutazione delle espressioni con matrici e con riferimenti a vettori e matrici funzionali.
4. variabili predefinite t, Q, Q(1), ..., Q(n-1)

2.1 Specifications

The syntax of function definition is defined in org.mmarini.leibnitz.parser.SyntaxFactory javadoc

To use runs: java org.mmarini.leibintz.Compute file [-o file].
The file parameter is a xml file containing the definitions.
The output is stdout unless -o file is specified in line command.

The file definition of xml is leibnitz-0.1.0.xsd

3 Addendum release 0.4.0

Le condizioni iniziali sono impostate utilizzando il parse esteso di espressioni comprendenti anche la definizioni delle funzioni. The file definition of xml is leibnitz-0.2.0.xsd

3.1 Paraboloide

Calcoliamo il moto di una particella libera su una superficie paraboloide

$$\vec{R} = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, r^2) \tag{21}$$

$$\frac{\partial\vec{R}}{\partial r} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 2r) \tag{22}$$

$$\frac{\partial\vec{R}}{\partial\varphi} = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 0) \tag{23}$$

La forza agente sulla particella invece è

$$\vec{F} = (0, 0, -mg) \tag{24}$$

da cui le forze generalizzate

$$Q_r = \vec{F}\frac{\partial \vec{R}}{\partial r} = -2mgr \tag{25}$$

$$Q_\varphi = \vec{F}\frac{\partial \vec{R}}{\partial \varphi} = 0 \tag{26}$$

Calcoliamo ora l'energia cinetica del sistema::

$$T = \frac{1}{2}m\frac{\partial \vec{R}}{\partial q_i}\frac{\partial \vec{R}}{\partial q_j}\dot{q}_i\dot{q}_j = \frac{1}{2}m[(1+4r^2)\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2] \tag{27}$$

L'equazioni di Lagrange sono:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial T}{\partial r} = Q_r \tag{28}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi \tag{29}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = \frac{d}{dt}[m(1+4r^2)\dot{r}] = m[(1+4r^2)\ddot{r} + 8r\dot{r}^2] \tag{30}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 4mr\dot{r}^2 + mr\dot{\varphi}^2 = mr(4\dot{r}^2 + \dot{\varphi}^2) \tag{31}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = mr^2\ddot{\varphi} + 2mr\dot{r}\dot{\varphi} \tag{32}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0 \tag{33}$$

quindi

$$\begin{cases} m(1+4r^2)\ddot{r} + 8mr\dot{r}^2 - 4mr\dot{r}^2 - mr\dot{\varphi}^2 = -2mgr \\ \\ mr^2\ddot{\varphi} + 2mr\dot{r}\dot{\varphi} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{r} = \frac{r\dot{\varphi}^2 - 2gr - 2r\dot{r}^2}{1+4r^2} = r\frac{\dot{\varphi}^2 - 2g - 2\dot{r}^2}{1+4r^2} \\ \\ \ddot{\varphi} = -2\frac{\dot{r}\dot{\varphi}}{r} \end{cases} \tag{34}$$

Calcoliamo la velocità angolare per mantenere la particella in una traiettoria circolare parallela al piano xOy. E' necessario che la forza centripeta Q_r sia esattamente opposta alla forza centrifuga $mr\dot{\varphi}^2$ quindi:

$$2mgr = mr\dot{\varphi}^2 \Rightarrow \dot{\varphi} = \sqrt{2g} \tag{35}$$

3.2 Orbita su piano

Calcoliamo il moto di una particella libera su un piano con campo gravitazionale $\frac{K}{r^2}$

$$\vec{R} = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \tag{36}$$

$$\frac{\partial\vec{R}}{\partial r} = (\cos\varphi, \sin\varphi) \tag{37}$$

$$\frac{\partial\vec{R}}{\partial\varphi} = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi) \tag{38}$$

La forza agente sulla particella invece è

$$\vec{F} = (-m\frac{K}{r^2}\cos\varphi, -m\frac{K}{r^2}\sin\varphi) \tag{39}$$

da cui le forze generalizzate

$$Q_r = \vec{F}\frac{\partial\vec{R}}{\partial r} = -m\frac{K}{r^2} \tag{40}$$

$$Q_\varphi = \vec{F}\frac{\partial\vec{R}}{\partial\varphi} = 0 \tag{41}$$

Calcoliamo ora l'energia cinetica del sistema::

$$T = \frac{1}{2}m\frac{\partial\vec{R}}{\partial q_i}\frac{\partial\vec{R}}{\partial q_j}\dot{q}_i\dot{q}_j = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) \tag{42}$$

L'equazioni di Lagrange sono:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{r}} - \frac{\partial T}{\partial r} = Q_r \tag{43}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial\varphi} = Q_\varphi \tag{44}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{r}} = \frac{d}{dt}[m\dot{r}] = m\ddot{r} \tag{45}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2 \tag{46}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = mr^2\ddot{\varphi} + 2mr\dot{r}\dot{\varphi} \tag{47}$$

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi} = 0 \tag{48}$$

quindi

$$\begin{cases} m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 = -m\frac{K}{r^2} \\ \\ mr^2\ddot{\varphi} + 2mr\dot{r}\dot{\varphi} = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \ddot{r} = r\dot{\varphi}^2 - \frac{K}{r^2} \\ \\ \ddot{\varphi} = -2\frac{\dot{r}\dot{\varphi}}{r} \end{cases} \tag{49}$$

Calcoliamo la velocità angolare per mantenere la particella in una traiettoria circolare. E' necessario che la forza centripeta Q_r sia esattamente opposta alla forza centrifuga $mr\dot{\varphi}^2$ quindi:

$$m\frac{K}{r^2} = mr\dot{\varphi}^2 \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{K}{r}} \tag{50}$$