С. А. Генкин, И. В. Итенберг, Д. В. Фомин

ЛЕНИНГРАДСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КРУЖКИ

г.Киров-1994

Ленинградские математические кружки: пособие для внеклассной работы. Киров, издательство «АСА», 1994.— 272 с.

Книга обобщает опыт, накопленный многими поколениями преподавателей школьных математических кружков при математико-механическом факультете ЛГУ и ранее недоступный массовому читателю.

Книга построена в форме задачника, отражающего тематику первых двух лет работы типичного ленинградского кружка. Она вполне обеспечивает материалом 2—3 года работы школьного математического кружка или факультатива для учащихся 6—9, а отчасти и 10—11 классов. Все тематические главы снабжены методическими комментариями для учителя.

Пособие адресовано учителям математики и интересующимся математикой учащимся.

ISBN 5—87400—072—0

ПРЕДИСЛОВИЕ

1. Введение

В 1977 году в издательстве "Просвещение" была издана книга В.А.Гусева, А.И.Орлова и А.Л.Розенталя [20], посвященная основным темам факультативного математического образования в 6–8 классах (нумерация в названии старая). С тех пор, если не считать переиздания этой книги в 1984 году, не было издано массовым тиражом ни одной книги подобной направленности. К тому же в книге [20] были опущены некоторые классические темы так называемой "олимпиадной" математики, а в некоторых главах нарастание сложности задач шло чересчур стремительно.

Предлагаемая читателю книга написана с целью восполнения указанных пробелов. Ее основное предназначение – помочь многочисленным энтузиастам, занимающимся внепрограммным (факультативным) математическим образованием школьников. Впрочем, школьники вполне могут пользоваться материалами настоящей книги и самостоятельно.

Есть и еще одна причина, по которой издание книги, подобной той, которую Вы держите в руках, казалось нам совершенно необходимым. Дело в том, что, хотя Ленинград и был колыбелью олимпиадного движения в СССР и остается до сих пор одним из лидеров в этой области, ни в одной из книг, посвященных внешкольному образованию, не отражен богатейший ленинградский и санкт-петербургский опыт, накопленный за прошедшие 60 лет.

* * *

Несмотря на стилистическое разнообразие текста, методологически он един. В нем представлены, как нам кажется, все основные темы занятий математического кружка в первые два года обучения (ориентировочно, 6–8 классы по новой нумерации). Главной целью авторов было облегчить преподавателям подготовку и проведение занятий. Мы хотели рассказать о математических идеях, на которые нужно обратить внимание школьников, и показать, как это можно сделать.

Необходимо подчеркнуть, что подготовка и проведение занятий – творческий процесс. Поэтому было бы неправильным слепо выполнять наши рекомендации. Однако мы надеемся, что вдумчивая работа над текстом будет полезна для большинства преподавателей. Представляется естественным такое использование материалов книги: при разработке темы преподаватель изучает соответствующую главу и после этого приступает к подготовке занятия. Конечно же, необходимо вносить корректировку, связанную с уровнем Вашего кружка (факультатива). В качестве дополнительных источников задач рекомендуем книги [13], [16], [24], [31], [33], [40] из списка литературы.

* * *

Теперь мы хотели бы остановиться на двух основных моментах, существенных для ленинградских традиций работы со школьниками:

(1) Проведение занятий кружков в форме живого, непосредственного общения школьников и преподавателей, индивидуальный подход к ученикам.

(2) Начало внешкольного математического образования с "младшего олимпиадного" возраста – с 6–7 класса, а в некоторых случаях и раньше.

Эта книга и была написана для того, чтобы послужить путеводителем для школьников именно "младших" (6–8) классов и их преподавателей. Возраст учеников, безусловно, накладывает отпечаток на сам стиль проведения занятий. Поэтому – несколько советов:

А) Мы считаем неправильным заниматься с младшеклассниками одной темой в течение продолжительного промежутка времени. Даже в рамках одного занятия полезно иногда сменить направление деятельности.

Б) Необходимо постоянно возвращаться к пройденному. Это можно делать, предлагая задачи на данную тему в устных и письменных олимпиадах и других соревнованиях, о которых рассказано в приложении.

В) При разборе темы постарайтесь выделить несколько основных логических вех и добейтесь безусловного понимания (не зазубривания!) этих моментов.

Г) Мы рекомендуем постоянно обращаться к нестандартным и "спортивным" формам проведения занятий, не забывая при этом подробно разбирать все предлагающиеся на них задачи. Необходимо также использовать на занятиях развлекательные и шуточные задачи. Их можно найти в книгах [5–7], [16–18], [26–30].

Мы обязательно хотели бы упомянуть о наших предшественниках – о тех, кто предпринимал уже попытки создать нечто вроде антологии ленинградского математического кружка. Их книги ([32], [43]) к сожалению, не дошли до широкого круга читателей, интересующихся факультативным математическим образованием.

В 1990–91 гг. первоначальный вариант пёрвой части этой книги был выпущен в издательстве АПН СССР в виде сборника статей [21], в работе над которым принимал участие большой коллектив авторов. Мы хотим поблагодарить всех, чьими материалами мы пользовались при подготовке настоящего издания. Это Д.Г.Бенуа, И.Б.Жуков, О.А.Иванов, А.Л.Кириченко, К.П.Кохась, Н.Ю.Нецветаев, А.Г.Фролова.

Мы также выражаем свою искреннюю признательность И.С.Рубанову, чья статья “Индукция”, написанная специально для готовившегося сборника “Математический кружок. Второй год обучения”, с любезного разрешения ее автора включена нами во вторую часть нашей книги.

Особая наша благодарность – А.Л.Кириченко, за существенную помощь в подготовке рукописи.

2. Структура текста

Книга состоит из предисловия, двух частей, приложения “Математические соревнования”, раздела “Ответы, решения, указания” и списка литературы.

Часть первая (“Первый год обучения”) начинается с “Нулевого цикла”, который состоит из задач тестового характера, предназначенных в основном для учеников 5–6 классов. Они почти не имеют математического содержания, а направлены лишь на выявление логико-математических способностей. Весь последующий текст первой части разбит на 8 глав, первые семь из которых – тематические; восьмая же (“Задачник первого года”) представляет собой подборку задач по самым разным темам.

Часть вторая (“Второй год обучения”) состоит из 9 глав; некоторые из них продолжают тематику первой части (как, например, главы “Графы–2”, “Комбинаторика–2”). В других главах представлены материалы, которые были сочтены нами слишком сложными для первого года – “Инвариант”, “Индукция”, “Неравенства”.

В приложении “Математические соревнования” рассказывается о пяти основных видах математических соревнований, которые можно проводить на занятиях кружка или использовать для организации состязаний между различными кружками и даже школами.

Те советы, которые предназначены исключительно преподавателям, выделены при помощи примечаний “Для преподавателей”. Встречающиеся изредка в тексте “Методические замечания” содержат в основном методологический материал; в них даются рекомендации по методике решения задач, фиксируются основные приемы решения, методы распознавания и классификации задач по стандартным темам и идеям решения.

3. Технические замечания

(1) Наиболее трудные задачи в тексте помечены звездочкой.

(2) К большинству задач в разделе "Ответы, решения, указания" приведен какой-либо комментарий: полное решение задачи или лишь подсказка. К вычислительным задачам обычно приводится лишь ответ. К задачам для самостоятельного решения решения не даны (это, в частности, относится к задачникам первого и второго годов обучения).

(3) Все ссылки даются на книги единого списка литературы, приведенного в конце книги. Наиболее рекомендуемые книги помечены звездочкой.

* * *

Если Вы, уважаемый читатель, хотите сообщить авторам свое мнение о книге, высказать какие-либо замечания, – напишите по адресу: 198097, Санкт-Петербург, а/я 116, "Математический кружок".

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

Глава 1. НУЛЕВОЙ ЦИКЛ

В этой главе собрано 25 простых задач. Для их решения не требуется ничего, кроме здравого смысла и простейших вычислительных навыков. Эти задачи можно использовать и на первых занятиях кружка для выявления логических и математических способностей учеников, и в дальнейшем в качестве развлекательных "вставок".

* * *

Задача 1. В стакане находятся бактерии. Через секунду каждая из бактерий делится пополам, затем каждая из получившихся бактерий через секунду делится пополам и так далее. Через минуту стакан полон. Через какое время стакан был заполнен наполовину?

Задача 2. Аня, Ваня и Саня сели в автобус, не имея медных монет, однако сумели заплатить за проезд, потратив по пять копеек каждый. Как им это удалось?

Задача 3. Из книги выпал кусок, первая страница которого имеет номер 328, а номер последней записывается теми же цифрами в каком-то другом порядке. Сколько страниц в выпавшем куске?

Задача 4. В мешке 24 кг гвоздей. Как, имея только весы без стрелки, отмерить 9 кг гвоздей?

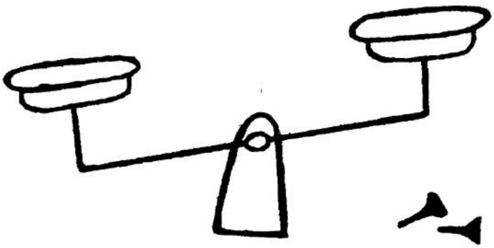


Рис. 1

Задача 5. Червяк ползет по столбу, начав путь от его основания. Каждый день он проползает вверх на 5 см, а за каждую ночь сползает вниз на 4 см. Когда он достигнет верхушки столба, если его высота равна 75 см?

Задача 6. В январе некоторого года было четыре пятницы и четыре понедельника. Каким днем недели было 20-е число этого месяца?

Задача 7. Сколько клеток пересекает диагональ в клетчатом прямоугольнике размерами 199×991?

Задача 8. Из числа 1234512345123451234512345 вычеркните 10 цифр так, чтобы оставшееся число было максимально возможным.

* * *

Задача 9. Петя говорит: позавчера мне еще было 10 лет, а в следующем году мне исполнится 13. Может ли такое быть?

Задача 10. Петин кот перед дождем всегда чихает. Сегодня он чихнул. "Значит, будет дождь" – думает Петя. Прав ли он?

Задача 11. Учитель рисует на листке бумаги несколько кружков и спрашивает одного ученика: "Сколько здесь кружков?". "Семь"– отвечает ученик. "Правильно. Так сколько здесь кружков?" – опять спрашивает учитель другого ученика. "Пять" – отвечает тот. "Правильно" – снова говорит учитель. Так сколько же кружков он нарисовал на листке?

Задача 12. Сын отца профессора разговаривает с отцом сына профессора, причем сам профессор в разговоре не участвует. Может ли такое быть?

Задача 13. По дороге цепочкой ползут три черепахи. "За мной ползут две черепахи" – говорит первая. "За мной ползет одна черепаха, и передо мной ползет одна черепаха" – говорит вторая. "Передо мной ползут две черепахи, и за мной ползет одна черепаха" – говорит третья. Как такое может быть?

Задача 14. В поезде едут три мудреца. Внезапно поезд въезжает в туннель, и после того, как загорается свет, каждый из мудрецов видит, что лица его коллег испачканы сажей, влетевшей в окно вагона. Все трое начинают смеяться над своими испачкавшимися попутчиками, однако внезапно самый сообразительный мудрец догадывается, что его лицо тоже испачкано. Как ему это удалось?

Задача 15. Из стакана молока три ложки содержимого переливают в стакан с чаем и тщательно размешивают смесь. Затем три ложки смеси переливают обратно в стакан с молоком. Чего теперь больше: чая в стакане с молоком или молока в стакане с чаем?

* * *

Задача 16. Составьте из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 магический квадрат, то есть разместите их в таблице 3×3 так, чтобы суммы чисел по строкам, столбцам и двум диагоналям были одинаковы.

Задача 17. В примере на сложение цифры заменили буквами (причем одинаковые цифры – одинаковыми буквами, а разные цифры – разными буквами) и получили: БУЛОК + БЫЛО = МНОГО. Сколько же было булок? Их количество есть максимальное возможное значение числа МНОГО.

Задача 18. Разведка звездной империи ФИГ-45 перехватила секретное шифрованное сообщение враждебной планеты Медуза: ДУРАК + УДАР = ДРАКА. Известно, что разные цифры зашифрованы разными буквами, а одинаковые цифры – одинаковыми буквами. Два электронных думателя взялись найти решение и получили два разных ответа. Может ли такое быть или один из них надо сдать в переплавку?

Задача 19. Как разложить по семи кошелькам 127 рублевых бумажек так, чтобы любую сумму от 1 до 127 рублей можно было бы выдать, не открывая кошельков?

*   *   *

Задача 20. Разрежьте уголок, изображенный на рис.2, на четыре таких же уголка вдвое меньшего размера.

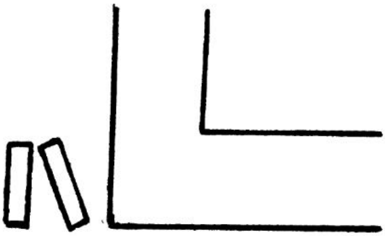


Рис. 2

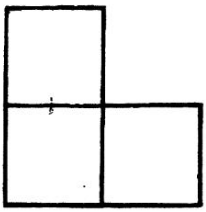


Рис. 3

Задача 21. Из спичек сложена фигура, изображенная на рис.3. Как переложить две спички, чтобы получилось ровно четыре квадрата с длиной стороны, равной длине спички?

Задача 22. Река шириной 4 метра делает поворот под прямым углом (см. рис.4). Как переправиться через нее на другой берег, имея лишь две доски длиной 3 метра 90 сантиметров?

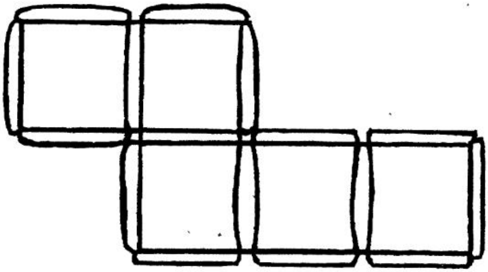


Рис. 4

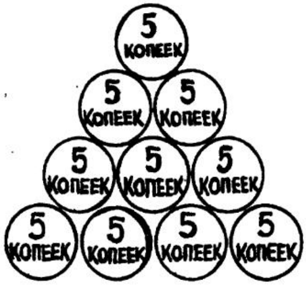


Рис. 5

Задача 23. Можно ли расположить 6 длинных круглых карандашей так, чтобы каждый из них касался любого другого?

Задача 24. При помощи ножниц вырежьте в тетрадном листе дырку, через которую мог бы пролезть слон!

Задача 25. 10 монет выложены так, как показано на рис.5. Какое минимальное число монет нужно убрать, чтобы никакие три оставшиеся не лежали в вершинах равностороннего треугольника?

Глава 2. ЧЕТНОСТЬ

В этой главе Вы не найдете содержательных математических идей. Здесь не будет ничего трудного и непонятного. Речь пойдет об одном несложном соображении – "четности". Оно, несмотря на свою простоту, возникает при обсуждении самых разных вопросов и оказывается полезным при решении многих (в том числе и трудных) задач.

1. Чередование

Задача 1. На плоскости расположено 11 шестеренок, соединенных по цепочке (см.рис.6). Могут ли все шестеренки вращаться одновременно?

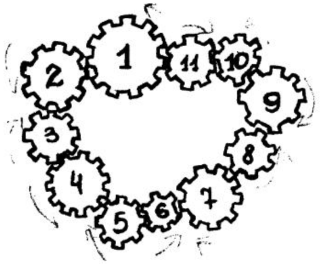


Рис. 6

Решение: Предположим, что первая шестеренка вращается по часовой стрелке. Тогда вторая шестеренка должна вращаться против часовой стрелки. Третья – снова по часовой, четвертая – против и т.д. Ясно, что "нечетные" шестеренки должны вращаться по часовой стрелке, а "четные" – против. Но тогда 1-я и 11-я шестеренки одновременно вращаются по часовой стрелке. Противоречие.

Главным при решении этой задачи оказалось то, что шестеренки, вращающиеся по часовой стрелке и против, – чередуются.

Нахождение чередующихся объектов – основное соображение при решении следующих задач.

Задача 2. Конь вышел с поля $a1$ и через несколько ходов вернулся на него. Докажите, что он сделал четное число ходов.

Задача 3. Может ли конь пройти с поля $a1$ на поле $h8$, побывав по дороге на каждом из остальных полей ровно один раз?

Задача 4. Может ли прямая, не содержащая вершин замкнутой 11-звенной ломаной, пересекать все ее звенья?

Задача 5. На хоккейном поле лежат три шайбы A, B и C. Хоккеист бьет по одной из них так, что она пролетает между двумя другими. Так он делает 25 раз. Могут ли после этого шайбы оказаться на исходных местах?

Задача 6. Катя и ее друзья встали по кругу. Оказалось, что оба соседа каждого ребенка – одного пола. Мальчиков среди Катиных друзей пять. А сколько девочек?

Отметим дополнительное соображение, возникающее при решении последней задачи: в чередующейся замкнутой цепочке объектов одного вида (мальчиков) столько же, сколько и объектов другого вида (девочек).

2. Разбиение на пары

Задача 7. Можно ли нарисовать 9-звенную замкнутую ломаную, каждое звено которой пересекается ровно с одним из остальных звеньев?

Решение: Если бы такое было возможно, то все звенья ломаной разбились бы на пары пересекающихся. Однако тогда число звеньев должно быть четным.

Отметим ключевой момент рассуждения: если предметы можно разбить на пары, то их число – четно.

Вот еще несколько подобных задач:

Задача 8. Можно ли доску размером 5×5 заполнить доминошками размером 1×2?

Задача 9. Дан осесимметричный выпуклый 101-угольник. Докажите, что ось симметрии проходит через одну из его вершин. Что можно сказать в случае 10-угольника?

Задача 10. Все костяшки домино выложили в цепь. На одном конце оказалось 5 очков. Сколько очков на другом конце?

Задача 11. Из набора домино выбросили все кости с “пустышками”. Можно ли оставшиеся кости выложить в ряд?

Задача 12. Можно ли выпуклый 13-угольник разрезать на параллелограммы?

Задача 13. На доске 25×25 расставлены 25 шашек, причем их расположение симметрично относительно диагонали. Докажите, что одна из шашек расположена на диагонали.

<u>Методические замечания.</u> При решении последней задачи часто возникают логические трудности. Это связано с тем, что на диагонали может оказаться не обязательно одна, но и любое нечетное число шашек. Для этой задачи наше утверждение о разбиении на пары можно сформулировать так: если из нечетного числа предметов образовано несколько пар, то по крайней мере один предмет остался без пары.

Задача 14. Допустим теперь, что расположение шашек в задаче 13 симметрично относительно обеих главных диагоналей. Докажите, что одна из шашек стоит в центральной клетке.

Задача 15. В каждой клетке квадратной таблицы размером 25×25 записано одно из чисел $1, 2, 3, \ldots, 25$. При этом, во-первых, в клетках, симметричных относительно главной диагонали, записаны равные числа, и во-вторых, ни в какой строке и ни в каком столбце нет двух равных чисел. Докажите, что числа на главной диагонали попарно различны.

3. Четность и нечетность

Задача 16. Можно ли разменять 25 рублей при помощи десяти купюр достоинством в 1, 3 и 5 рублей?

Решение этой задачи основано на простом наблюдении: сумма четного числа нечетных чисел – четна. Обобщение этого факта выглядит так: четность суммы нескольких чисел зависит лишь от четности числа нечетных слагаемых: если количество нечетных слагаемых (не)четно, то и сумма – (не)четна.

Задача 17. Петя купил общую тетрадь объемом 96 листов и пронумеровал все ее страницы по порядку числами от 1 до 192. Вася вырвал из этой тетради 25 листов и сложил все 50 чисел, которые на них написаны. Могло ли у него получиться 1990?

Задача 18. Произведение 22 целых чисел равно 1. Докажите, что их сумма не равна нулю.

Задача 19. Можно ли составить магический квадрат из первых 36 простых чисел?

Задача 20. В ряд выписаны числа от 1 до 10. Можно ли расставить между ними знаки "+" и "–" так, чтобы значение полученного выражения было равно нулю?

Замечание: учтите, что отрицательные числа также бывают четными и нечетными.

Задача 21. Кузнечик прыгает по прямой, причем в первый раз он прыгнул на 1 см в какую-то сторону, во второй раз – на 2 см и так далее. Докажите, что после 1985 прыжков он не может оказаться там, где начинал.

Задача 22. На доске написаны числа 1, 2, 3, …, 1984, 1985. Разрешается стереть с доски любые два числа и вместо них записать модуль их разности. В конце концов на доске останется одно число. Может ли оно равняться нулю?

4. Разные задачи

В этом параграфе собраны более трудные задачи, решение которых, помимо четности, использует, как правило, и некоторые дополнительные соображения.

Задача 23. Можно ли покрыть шахматную доску доминошками 1×2 так, чтобы свободными остались только клетки $a1$ и $h8$?

Задача 24. К 17-значному числу прибавили число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Докажите, что хотя бы одна цифра полученной суммы четна.

Задача 25. В народной дружине 100 человек и каждый вечер трое из них идут на дежурство. Может ли через некоторое время оказаться так, что каждый с каждым дежурил ровно один раз?

Задача 26. На прямой отмечено 45 точек, лежащих вне отрезка AB. Докажите, что сумма расстояний от этих точек до точки A не равна сумме расстояний от этих точек до точки B.

Задача 27. По кругу расставлено 9 чисел – 4 единицы и 5 нулей. Каждую секунду над числами проделывают следующую операцию: между соседними числами ставят ноль, если они различны, и единицу, если они равны; после этого старые числа стирают. Могут ли через некоторое время все числа стать одинаковыми?

Задача 28. 25 мальчиков и 25 девочек сидят за круглым столом. Докажите, что у кого-то из сидящих за столом оба соседа – мальчики.

Задача 29. Улитка ползет по плоскости с постоянной скоростью, каждые 15 минут поворачивая под прямым углом. Докажите, что вернуться в исходную точку она сможет лишь через целое число часов.

Задача 30. Три кузнечика играют на прямой в чехарду. Каждый раз один из них прыгает через другого (но не через двух сразу!). Могут ли они после 1991 прыжка оказаться на прежних местах?

Рис. 7

Задача 31. Есть 101 монета, из которых 50 фальшивых, отличающихся по весу на 1 грамм от настоящих. Петя взял одну монету и за одно взвешивание на весах со стрелкой, показывающей разность весов на чашках, хочет определить фальшивая ли она. Сможет ли он это сделать?

Задача 32. Можно ли выписать в ряд по одному разу цифры от 1 до 9 так, чтобы между единицей и двойкой, двойкой и тройкой, ..., восьмеркой и девяткой было нечетное число цифр?

__Для преподавателей.__ Как уже было отмечено, "четность" не является содержательной математической идеей. Поэтому не имеет смысла посвящать ей отдельное занятие. Однако простота этой тематики позволяет решать задачи "на четность", начиная с самых первых занятий кружка. Не забывайте при разборе решений обращать внимание школьников на соответствующие соображения.

Глава 3. КОМБИНАТОРИКА-1

Сколькими способами можно проехать из города А в город В? Сколько разных слов в языке племени Мумбо-Юмбо? Сколько существует "симпатичных" четырехзначных чисел? ... Сколько ...? Такие и некоторые другие, похожие на них, вопросы будут обсуждаться в этой главе.

Начнем с нескольких простых задач.

Задача 1. В магазине "Все для чая" есть 5 разных чашек и 3 разных блюдца. Сколькими способами можно купить чашку с блюдцем?

Решение. Выберем чашку. В комплект к ней можно выбрать любое из трех блюдец. Поэтому есть 3 разных комплекта, содержащих выбранную чашку. Поскольку чашек всего 5, то число различных комплектов равно 15 ($15 = 5 \cdot 3$).

Задача 2. В магазине "Все для чая" есть еще 4 чайные ложки. Сколькими способами можно купить комплект из чашки, блюдца и ложки?

Решение. Выберем любой из 15 комплектов предыдущей задачи. Его можно дополнить ложкой четырьмя различными способами. Поэтому общее число возможных комплектов равно 60 ($60 = 15 \cdot 4 = 5 \cdot 3 \cdot 4$).

Совершенно аналогично решается следующая задача.

Задача 3. В Стране Чудес есть три города: А, Б и В. Из города А в город Б ведет 6 дорог, а из города Б в город В – 4 дороги (см. рис.8). Сколькими способами можно проехать от А до В?

Ответ. $24 = 6 \cdot 4$.

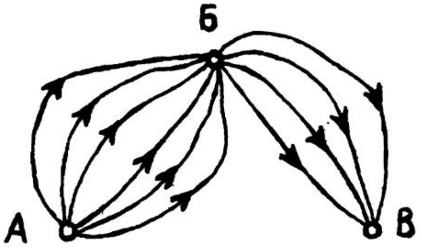


Рис. 8

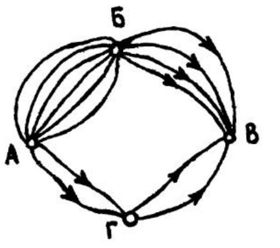


Рис. 9

В решении задачи 4 появляется новое соображение.

Задача 4. В Стране Чудес построили еще один город – Г и несколько новых дорог (см. рис.9). Сколькими способами можно теперь добраться из города А в город В?

Решение. Выделим два случая: путь проходит через город Б или через город Г. В каждом из этих случаев легко сосчитать количество возможных маршрутов: в первом – 24, во втором – 6. Складывая, получаем общее количество маршрутов: 30.

Выделение нескольких возможных случаев оказывается полезным и при решении задачи 5.

Задача 5. В магазине “Все для чая” по-прежнему продается 5 чашек, 3 блюдца и 4 чайные ложки. Сколькими способами можно купить два предмета с разными названиями?

Решение. Возможны три разных случая: первый – покупаются чашка с блюдцем, второй – чашка с ложкой, третий – блюдце и ложка. В каждом из этих случаев легко сосчитать количество возможных вариантов (в первом – 15, во втором – 20, в третьем – 12). Складывая, получаем общее число возможных вариантов: 47.

<u>**Для преподавателей.**</u> Главная цель, которую должен преследовать преподаватель при решении и разборе этих задач – понимание школьниками, в какой ситуации при подсчете вариантов следует перемножать, а в какой – складывать. Конечно, задач должно быть много. Они могут быть взяты в конце главы (28–32), в книге [49] или придуманы самим преподавателем. Возможные сюжеты: различные покупки в магазине, разные схемы дорог, составление чисел из цифр (см. следующий цикл задач) и т.д.

Задача 6. Назовем натуральное число “симпатичным” , если в его записи встречаются только нечетные цифры. Сколько существует 4-значных “симпатичных” чисел?

Решение. Понятно, что однозначных “симпатичных” чисел ровно 5. К каждому однозначному “симпатичному” числу вторая нечетная цифра может быть дописана пятью различными способами. Таким образом, двузначных “симпатичных” чисел всего $5 \cdot 5 = 25$. Аналогично, трехзначных “симпатичных” чисел $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$, и четырехзначных – $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 54 = 625$.

<u>**Для преподавателей.**</u> В этой задаче ответ имеет вид m^n. К такому ответу приводят задачи, в которых на каждом из n мест может быть поставлен элемент

из некоторого m-элементного множества. Эти задачи часто вызывают трудности у школьников, не всегда понимающих, какое из чисел является основанием степени, а какое – показателем.

Предложим еще четыре подобные задачи.

Задача 7. Монету бросают трижды. Сколько разных последовательностей орлов и решек можно при этом получить?

Ответ. 23.

Задача 8. Каждую клетку квадратной таблицы 2×2 можно покрасить в черный или белый цвет. Сколько существует различных раскрасок этой таблицы?

Ответ. 24.

Задача 9. Сколькими способами можно заполнить одну карточку в лотерее “Спортпрогноз”? (В этой лотерее нужно предсказать итог тринадцати спортивных матчей. Итог каждого матча – победа одной из команд либо ничья; счет роли не играет).

Ответ. 313.

Задача 10. Алфавит племени Мумбо-Юмбо состоит из трех букв А, Б и В. Словом является любая последовательность, состоящая не более, чем из 4 букв. Сколько слов в языке племени Мумбо-Юмбо? Указание. Сосчитайте отдельно количества одно-, двух-, трех- и четырехбуквенных слов.

Ответ. $3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 120$.

Перейдем к следующему циклу задач.

Задача 11. В футбольной команде (11 человек) нужно выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Капитаном может стать любой из 11 футболистов. После выбора капитана на роль его заместителя могут претендовать 10 оставшихся человек. Таким образом, всего есть $11 \cdot 10 = 110$ разных вариантов выборов.

Эта задача отличается от предыдущих тем, что выбор капитана ограничивает круг претендентов на роль заместителя: капитан не может быть своим заместителем. Таким образом, выборы капитана и его заместителя не являются независимыми – такими, как, например, выборы чашки и блюдца в задаче 1.

Вот еще четыре задачи на эту тему.

Задача 12. Сколькими способами можно сделать трехцветный флаг с горизонтальными полосами одинаковой ширины, если имеется материя шести различных цветов?

Решение. Цвет для верхней полоски флага можно выбрать шестью разными способами. После этого для средней полоски флага остается пять возможных цветов, а затем для нижней полоски флага – четыре различных цвета. Таким образом, флаг можно сделать $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ способами.

Задача 13. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белую и черную ладьи так, чтобы они не били друг друга?

Решение. Белую ладью можно поставить на любую из 64 клеток. Независимо от своего расположения она бьет 15 полей (включая поле, на котором она стоит). Поэтому остается 49 полей, на которые можно поставить черную ладью. Таким образом, всего есть $64 \cdot 49 = 3136$ разных способов.

Задача 14. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белого и черного королей так, чтобы получилась допустимая правилами игры позиция?

Решение. Белого короля можно поставить на любое из 64 полей. Однако количество полей, которые он при этом будет бить, зависит от его расположения. Поэтому необходимо разобрать три случая:

а) если белый король стоит в углу (углов всего 4), то он бьет 4 поля (включая то, на котором стоит), и остается 60 полей, на которые можно поставить черного короля;

б) если белый король стоит на краю доски, но не в углу (таких полей – 24), то он бьет 6 полей, и для черного короля остается 58 возможных полей;

в) если же белый король стоит не на краю доски (таких полей – 36), то он бьет 9 полей, и для черного короля остается 55 возможных полей.

Таким образом, всего есть $4 \cdot 60 + 24 \cdot 58 + 36 \cdot 55 = 3612$ способов расстановки королей.

Займемся теперь подсчетом числа способов, которыми можно расположить в ряд n предметов. Такие расположения называются перестановками и играют заметную роль в комбинаторике и алгебре. Но прежде необходимо сделать небольшое отступление.

Пусть n – натуральное число. $n!$ (читается "эн-факториал") – это произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Таким образом, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$.

<u>**Методические замечания.**</u> Перед тем, как обсуждать перестановки, необходимо как следует освоить понятие факториала и научиться обращаться с ним. Для этого могут быть полезны следующие упражнения.

Упражнение 1. Чему равно а) $10! \cdot 11$; б) $n! \cdot (n+1)$?

Упражнение 2. Вычислите а) $100!/98!$; б) $n!/(n-1)!$

Упражнение 3. Докажите, что, если p – простое число, то $(p-1)!$ не делится на p.

Следует иметь в виду, что для удобства написания некоторых комбинаторных тождеств принято считать $0!$ равным 1.

Вернемся теперь к перестановкам.

Задача 15. Сколько существует трехзначных чисел, в записи которых цифры 1, 2, 3 встречаются ровно по одному разу?

Решение. Будем рассуждать точно так же, как при решении задач предыдущего цикла. На первое место можно поставить любую из трех цифр, на второе – любую из двух оставшихся, а на третье – последнюю оставшуюся цифру. Таким образом, всего получается $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$ чисел.

Задача 16. Сколькими способами можно выложить в ряд красный, черный, синий и зеленый шарики?

Решение. На первое место можно положить любой из четырех шариков, на второе – любой из трех оставшихся, на третье – любой из двух оставшихся, а на четвертое – последний оставшийся шарик. Итак, ответ: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$.

Рассуждая так же, как при решении двух последних задач, легко доказать, что n разных предметов можно выложить в ряд $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ различными способами, то есть

число перестановок из n элементов равно $n!$.

Для удобства формулировки задач следующего цикла введем следующее соглашение. Словом будем называть любую конечную последовательность букв русского алфавита. Скажем, используя буквы А, Б, В ровно по одному разу, можно составить 6 слов: АБВ, АВБ, БАВ, БВА, ВАБ, ВБА; используя же букву А дважды, а букву Б один раз – три слова: ААБ, АБА, БАА. В следующих пяти задачах необходимо выяснить, сколько различных слов можно получить, переставляя буквы того или иного слова.

Задача 17. "ВЕКТОР".

Решение. Так как все буквы слова различны, то всего можно получить $6!$ слов.

Задача 18. "ЛИНИЯ".

Решение. В этом слове две буквы И, а все остальные буквы разные. Временно будем считать разными и буквы И, обозначив их через $И_1$ и $И_2$. При этом предположении получится $5! = 120$ разных слов. Однако те слова, которые получаются друг из друга только перестановкой букв $И_1$ и $И_2$, на самом деле одинаковы. Таким образом, полученные 120 слов разбиваются на пары одинаковых. Поэтому разных слов всего $120 : 2 = 60$.

Задача 19. "ПАРАБОЛА".

Решение. Считая три буквы А этого слова различными (A_1, A_2, A_3), получим $8!$ разных слов. Однако слова, отличающиеся лишь перестановкой букв А, на самом деле одинаковы. Поскольку буквы A_1, A_2, A_3 можно переставлять $3!$ способами, все $8!$ слов разбиваются на группы по $3!$ одинаковых. Поэтому разных слов всего $8!/3!$.

Задача 20. "БИССЕКТРИСА".

Решение. В этом слове три буквы С и две буквы И. Считая все буквы различными, получаем $11!$ слов. Отождествляя слова, отличающиеся лишь перестановкой букв И, но не С, получаем $11!/2!$ различных слов. Отождествляя теперь слова, отличающиеся перестановкой букв С, получаем окончательный результат $11!/(2!\cdot 3!)$.

Задача 21. "МАТЕМАТИКА".

Ответ. $10!/(3!\cdot 2!\cdot 2!)$.

Цикл задач про слова продемонстрировал одно содержательное комбинаторное соображение – идею кратного подсчета. Вместо подсчета числа интересующих нас объектов иногда бывает удобно пересчитывать другие объекты, количество которых превосходит количество исходных в известное число раз.

Вот еще четыре задачи, при решении которых используется этот прием.

Задача 22. В стране 20 городов, каждые два из которых соединены авиалинией. Сколько авиалиний в этой стране?

Решение. Каждая авиалиния соединяет два города. В качестве первого города можно взять любой из 20 городов (город А), а в качестве второго – любой из 19 оставшихся (город В). Перемножив эти числа, получаем $20 \cdot 19 = 380$. Однако при этом подсчете каждая авиалиния учтена дважды (первый раз, когда в качестве первого города был выбран город А, а второго – город В, а второй раз – наоборот). Таким образом, число авиалиний равно $380 : 2 = 190$.

Хотелось бы отметить, что подобная задача обсуждается и в главе "Графы" при подсчете числа ребер графа.

Задача 23. Сколько диагоналей в выпуклом n-угольнике?

Решение. В качестве первого конца диагонали можно взять любую из n вершин, а в качестве второго – любую из $n - 3$ вершин, отличных от выбранной и двух соседних с ней (см. рис.10). При этом подсчете каждая диагональ учитывается дважды.

Ответ: $n(n-3)/2$.

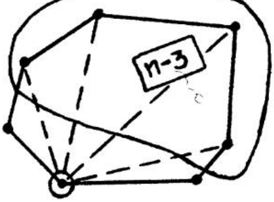


Рис. 10

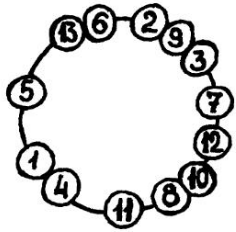


Рис. 11

Задача 24. Бусы – это кольцо, на которое нанизаны бусины. Бусы можно поворачивать, но не переворачивать. Сколько различных бус можно сделать из 13 разноцветных бусин (см. рис.11)?

Решение. Представим себе на время, что бусы нельзя поворачивать. Тогда их можно сделать 13! различными способами. Однако любое расположение бусин и 12 вариантов, получающихся из него поворотами, следует считать одним и тем же вариантом бус.

Ответ: $13!/13 = 12!$.

Задача 25. Предположим теперь, что бусы можно и переворачивать. Сколько тогда различных бус можно сделать из 13 разноцветных бусин?

Решение. Перевороты сокращают количество бус в 2 раза.

Ответ: $12!/2$.

Следующая задача иллюстрирует еще одно важное комбинаторное соображение.

Задача 26. Сколько существует 6-значных чисел, в записи которых есть хотя бы одна четная цифра?

Решение. Вместо того, чтобы подсчитывать количество требуемых 6-значных чисел, определим количество 6-значных чисел, не обладающих нужным свойством. Так как это в точности те числа, в записи которых встречаются только нечетные цифры, то их количество, очевидно, равно $5^6 = 15625$. Всего 6-значных чисел 900000. Поэтому количество 6-значных чисел, обладающих указанным свойством, равно $900000 - 15625 = 884375$.

Основным моментом при решении этой задачи был так называемый переход к дополнению: подсчет "ненужных" вариантов вместо подсчета "нужных". Вот еще одна задача, при решении которой полезно использовать это соображение.

Задача 27. В алфавите племени Бум-Бум шесть букв. Словом является любая последовательность из шести букв, в которой есть хотя бы две одинаковые буквы. Сколько слов в языке племени Бум-Бум?

Ответ. $6^6 - 6!$.

Для преподавателей. В заключение хотелось бы отметить, что идее, объединяющей задачи каждого выделенного в главе цикла, естественно посвящать отдельное занятие. При этом необходимо все время возвращаться к уже пройденному материалу. Поэтому мы приводим дополнительный список задач для самостоятельного решения. Кроме того, источниками задач могут быть книга [49] и фантазия преподавателя.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 28. В киоске "Союзпечать" продаются 5 видов конвертов и 4 вида марок. Сколькими способами можно купить конверт с маркой?

Задача 29. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова "КРУЖОК"?

Задача 30. На доске написаны 7 существительных, 5 глаголов и 2 прилагательных. Для предложения нужно выбрать по одному слову каждой из этих частей речи. Сколькими способами это можно сделать?

Задача 31. У двух начинающих коллекционеров по 20 марок и по 10 значков. Честным обменом называется обмен одной марки на одну марку или одного значка на один значок. Сколькими способами коллекционеры могут осуществить честный обмен?

Задача 32. Сколько существует 6-значных чисел, все цифры которых имеют одинаковую четность?

Задача 33. Надо послать 6 срочных писем. Сколькими способами это можно сделать, если для передачи писем можно использовать трех курьеров и каждое письмо можно дать любому из курьеров?

Задача 34. Сколькими способами из полной колоды (52 карты) можно выбрать 4 карты разных мастей и достоинств?

Задача 35. На полке стоят 5 книг. Сколькими способами можно выложить в стопку несколько из них (стопка может состоять и из одной книги)?

Задача 36. Сколькими способами можно поставить 8 ладей на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга?

Задача 37. На танцплощадке собрались N юношей и N девушек. Сколькими способами они могут разбиться на пары для участия в очередном танце?

Задача 38. Чемпионат России по шахматам проводится в один круг. Сколько играется партий, если участвуют 18 шахматистов?

Задача 39. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга а) две ладьи; б) двух королей; в) двух слонов; г) двух коней; д) двух ферзей?

Задача 40. У мамы два яблока, три груши и четыре апельсина. Каждый день в течение девяти дней подряд она дает сыну один из оставшихся фруктов. Сколькими способами это может быть сделано?

Задача 41. Сколькими способами можно поселить 7 студентов в три комнаты: одноместную, двухместную и четырехместную?

Задача 42. Сколькими способами можно расставить на первой горизонтали шахматной доски комплект белых фигур (король, ферзь, две ладьи, два слона и два коня)?

Задача 43. Сколько слов можно составить из пяти букв А и не более чем из трех букв Б?

Задача 44. Сколько существует 10-значных чисел, в которых имеется хотя бы две одинаковые цифры?

Задача 45*. Каких 7-значных чисел больше: тех, в записи которых есть 1, или остальных?

Задача 46. Кубик бросают трижды. Среди всех возможных последовательностей результатов есть такие, в которых хотя бы один раз встречается шестерка. Сколько их?

Задача 47. Сколькими способами можно разбить 14 человек на пары?

Задача 48*. Сколько существует 9-значных чисел, сумма цифр которых четна?

Глава 4. ДЕЛИМОСТЬ И ОСТАТКИ

<u>**Для преподавателей.**</u> Эта тема является чрезвычайно важной, хотя скорее всего (из-за большого количества теоретического материала) покажется Вам довольно скучной. Отчасти это вызвано тем, что, ввиду невозможности полностью передать в тексте сам характер живого общения со школьниками, мы вынуждены ограничиваться лишь сухими рекомендациями и текстами задач. Постарайтесь внести в занятия элемент игры и развлечения (даже из такого "занудного" упражнения, как разложение на простые множители, можно устроить соревнование "кто быстрее выполнит задание" или "кто быстрее найдет самый большой простой делитель" и т.п.). Тщательно готовьте занятия по этой теме, не забывая о том, что делимость проходится и в школе (на это необходимо опираться).

1. Простые и составные

Вы, конечно, хорошо знаете, что среди натуральных чисел есть простые и составные. Число является составным, если оно равно произведению двух меньших натуральных (например, $6 = 2 \cdot 3$). В противном случае число (если оно, кроме того, отлично от 1) называется простым. Единица не является ни простым, ни составным числом.

Простые числа являются своего рода "кирпичиками", из которых можно построить все остальные числа. В каком же смысле? Рассмотрим число 420. Оно, без сомнения, составное. Его можно разложить на множители, например, так: $420 = 42 \cdot 10$. Каждое из чисел 42 и 10 также составное: $42 = 6 \cdot 7$, $10 = 2 \cdot 5$. Поскольку $6 = 2 \cdot 3$, то $420 = 42 \cdot 10 = 6 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Мы получили разложение нашего числа на простые сомножители.

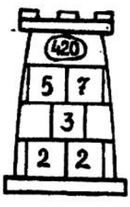


Рис. 12

Наверное, ни у кого не вызывает сомнения, что, действуя таким же образом, можно представить в виде произведения простых чисел любое натуральное число (кроме 1) – надо раскладывать получающиеся сомножители в произведение меньших, пока это удается. А что, если попробовать разложить число 420 на множители по-другому? Например, начав так: $420 = 15 \cdot 28$. Вы, конечно, догадались, что в результате получится то же самое разложение (если в конце простые сомножители расположить в порядке возрастания).

Этот интуитивно очевидный, но совсем не просто доказываемый факт – каждое натуральное число, за исключением единицы, раскладывается в произведение простых сомножителей, причем единственным образом – называется ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМОЙ АРИФМЕТИКИ.

Для преподавателей. Все содержание этого параграфа тесно связано с основной теоремой арифметики.

Необходимо, чтобы ребята поняли, что свойства делимости практически полностью определяются разложением числа на простые множители. Достичь этого поможет обсуждение вопросов, подобных нижеследующих (их же можно использовать и для проверки понимания).

Контрольные вопросы.

1. Делится ли $2^9 \cdot 3$ на 2?

Ответ: Да, так как 2 входит в разложение этого числа на простые множители.

2. Делится ли $2^9 \cdot 3$ на 5?

Ответ: Нет, потому что в разложении этого числа на простые множители нет простого числа 5.

3. Делится ли $2^9 \cdot 3$ на 8?

Ответ: Да, поскольку $8 = 2^3$, а в разложение данного числа на простые множители двойка входит 9 раз.

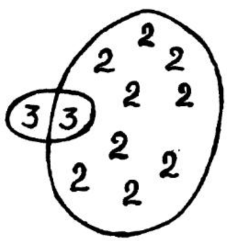


Рис. 13

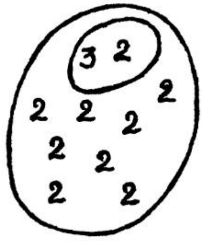


Рис. 14

4. Делится ли $2^9 \cdot 3$ на 9?

Ответ: Нет, так как в разложение данного числа на простые множители тройка входит лишь один раз, а в разложение числа 9 – дважды (см. рис.13).

5. Делится ли $2^9 \cdot 3$ на 6?

Ответ: Да, потому что $6 = 2 \cdot 3$, а 2 и 3 входят в разложение данного числа на простые (см. рис.14).

6. Верно ли, что если натуральное число делится на 4 и на 3, то оно делится на 12?

Ответ: Да. В разложение на простые множители числа, делящегося на 4, двойка входит по крайней мере 2 раза. Поскольку число делится и на 3, то в его разложение входит и тройка. Поэтому оно делится на 12.

7. Верно ли, что если натуральное число делится на 4 и на 6, то оно делится на $24 = 4 \cdot 6$?

Ответ: Нет. Например, число 12. Дело в том, что если число делится на 4, то в его разложение на простые множители по крайней мере дважды входит число 2; из делимости числа на 6 следует, что в его разложении есть 2 и 3. Таким образом, заведомо в это разложение входят две (не три!) двойки и одна тройка, и можно утверждать лишь то, что число делится на 12.

8. Число A не делится на 3. Может ли на 3 делиться число $2A$?

Ответ: Нет, поскольку тройка не входит в разложение на простые множители числа $2A$.

9. Число A – четно. Верно ли, что $3A$ делится на 6?

Ответ: Да, так как 2 и 3 входят в разложение числа $3A$ на простые множители.

10. Число $5A$ делится на 3. Верно ли, что A делится на 3?

Ответ: Да, потому что в разложение числа $5A$ на простые множители тройка входит, а в разложение числа 5 – нет.

11. Число $15A$ делится на 6. Верно ли, что A делится на 6?

Ответ: Нет. Например, $A = 2$. Дело в том, что тройка, входящая в разложение числа 6, входит и в разложение числа 15. Поэтому можно утверждать лишь то, что в разложении числа A обязательно есть двойка.

ВАЖНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Два числа называются *взаимно простыми*, если у них нет общих делителей, отличных от единицы.

Так, например, два разных простых числа, конечно, являются взаимно простыми.

Используя рассуждения, подобные тем, которые приведены в ответах на вопросы 6 и 10, можно доказать два следующих факта:

а) Если некоторое число делится на два взаимно простых числа n и m, то оно делится и на их произведение nm.

б) Если число pA делится на q, где p и q взаимно просты, то и A делится на q.

<u>Для преподавателей.</u> Обязательно разберите несколько примеров. Задачи, использующие понятие взаимной простоты, вы найдете в конце параграфа.

ЕЩЕ ДВА ВАЖНЫХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1. *Наибольшим общим делителем* (для краткости НОД) двух чисел называется наибольший из общих делителей этих чисел.

2. *Наименьшим общим кратным* (НОК) двух чисел называется наименьшее число, делящееся на каждое из них.

Так, например, НОД$(18, 24) = 6$, НОК$(18, 24) = 72$.

Эти определения дают возможность дополнить список контрольных вопросов еще двумя.

12. $A = 2^3 \cdot 3^{10} \cdot 5 \cdot 7^2$, $B = 2^5 \cdot 3 \cdot 11$. Чему равен НОД(A, B)?

Ответ: $24 = 2^3 \cdot 3$. Это – общая часть разложений.

13. $A = 2^8 \cdot 5^3 \cdot 7$, $B = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^7$. Чему равен НОК$(A, B)$?

Ответ: $420000000 = 2^8 \cdot 3 \cdot 5^7 \cdot 7$. Это – объединение разложений.

<u>Для преподавателей.</u> Настоятельная просьба – воспринимать текст этого параграфа лишь как набросок сценария занятия. Более подробная разработка – задача преподавателя. В некоторых местах Вам, возможно, придется задавать однотипные вопросы – постарайтесь сделать это так, чтобы не наскучить школьникам. Поощряйте их попытки высказывать собственные гипотезы по поводу разбираемых задач и теорем.

Однако это занятие окажется быстро забытым, если впоследствии не будут регулярно появляться задачи, использующие обсуждавшиеся здесь соображения.

Список подобных задач приведен ниже. Кроме того, эти соображения используются и при решении задач следующих параграфов.

Задача 1. p и q – различные простые числа. Сколько делителей у числа а) pq; б) p^2q; в) p^2q^2; г) p^nq^m?

Задача 2. Докажите, что произведение любых трех последовательных натуральных чисел делится на 6.

Указание: Среди этих трех чисел есть хотя бы одно четное число и одно число, делящееся на 3.

Задача 3. Докажите, что произведение любых пяти последовательных чисел делится а) на 30; б) на 120.

Задача 4. p – простое число. Сколько существует натуральных чисел а) меньших p и взаимно простых с ним; б) меньших p^2 и взаимно простых с ним?

Задача 5. Каково наименьшее натуральное n, такое, что $n!$ делится на 990?

Задача 6. Может ли $n!$ оканчиваться ровно на 5 нулей?

Задача 7. На сколько нулей оканчивается число 100! ?

Задача 8. Докажите, что число, имеющее нечетное число делителей, – точный квадрат.

Задача 9. Вася написал на доске пример на умножение двух двузначных чисел, а затем заменил в нем все цифры на буквы, причем одинаковые цифры – на одинаковые буквы, а разные – на разные. В итоге у него получилось АБ·ВГ=ДДЕЕ. Докажите, что он где-то ошибся.

Задача 10. Может ли число, записываемое при помощи 100 нулей, 100 единиц и 100 двоек, быть точным квадратом?

Указание: Это число делится на 3, но не делится на 9.

__**Для преподавателей.**__ На идею решения этой задачи следует обратить внимание школьников.

Задача 11*. $56a = 65b$. Докажите, что $a + b$ – составное число.

Задача 12. Решите в натуральных числах уравнение а) $x^2 - y^2 = 31$; б) $x^2 - y^2 = 303$.

Указание: $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.

Задача 13. Решите в целых числах уравнение $x^3 + x^2 + x - 3 = 0$.

Указание: Перенесите 3 в правую часть и разложите левую часть на множители.

Задача 14. Докажите, что для любых натуральных чисел a и b верно равенство $\text{НОД}(a, b)\text{НОК}(a, b) = ab$.

2. Остатки

Предположим, что вы подошли к автомату с газированной водой. У вас в кармане 15-копеечная монета. К счастью, рядом находится чудесная разменная касса, выдающая трехкопеечные монеты. Понятно, что в обмен на свою монету вы сможете получить пять трехкопеечных. А если у вас была 20-копеечная монета? Тогда, конечно, вы получите 6 трехкопеечных монет и две копейки сдачи. Запишем: $20 = 6 \cdot 3 + 2$. Это запись деления 20 на 3 с остатком.

Как же работает касса? Она отсчитывает трехкопеечные монеты по одной до тех пор, пока сумма, которую ей осталось выплатить, не станет меньше 3. После этого она выдает сдачу – остаток. Ясно, что этим остатком может быть любое из трех чисел: 0, 1, 2. Остаток равен нулю, если исходное число делится на 3 нацело.

Рис. 15

Аналогично, можно представить себе автомат, выдающий m-копеечные монеты и сдачу от 0 до $m-1$ копейки. Этот автомат осуществлял бы деление на m с остатком.

Дадим теперь аккуратное определение:

Разделить натуральное число N на натуральное число m с остатком означает представить N в виде $N = km + r$, где $0 \leq r < m$. При этом число r называется ***остатком*** от деления N на m.

Обсудим теперь такую задачу: человек одновременно опустил в чудесную кассу 22 пятидесятикопеечные монеты и 44 десятикопеечные монеты. Какую сдачу он получит?

Эту задачу, конечно, решить очень легко. Достаточно найти остаток от деления числа $22 \cdot 50 + 44 \cdot 10$ на 3. Замечательно, однако, что для этого не обязательно вычислять выписанное выражение. Поступим так: заменим каждое из чисел на его остаток от деления на 3. Получим выражение $1 \cdot 2 + 2 \cdot 1$. Это число равно 4 и дает остаток 1 при делении на 3. Мы утверждаем, что остаток исходного выражения от деления на 3 также равен 1. Дело в том, что верны следующие утверждения:

1. Сумма любых двух натуральных чисел и сумма их остатков имеют одинаковые остатки при делении на 3.

2. Произведение любых двух натуральных чисел и произведение их остатков имеют одинаковые остатки при делении на 3.

Методические замечания. Формальное доказательство этих утверждений совсем несложно, хотя для большинства начинающих оно может оказаться технически перегруженным.

Докажем, например, второе утверждение. Пусть

$$N_1 = k_1 \cdot 3 + r_1$$
$$N_2 = k_2 \cdot 3 + r_2 .$$

Тогда

$$\begin{aligned} N_1 N_2 &= (k_1 \cdot 3 + r_1)(k_2 \cdot 3 + r_2) = \\ &= k_1 k_2 \cdot 3^2 + k_1 r_2 \cdot 3 + k_2 r_1 \cdot 3 + r_1 r_2 = \\ &= 3(3k_1 k_2 + k_1 r_2 + k_2 r_1) + r_1 r_2 . \end{aligned}$$

Таким образом, при размене чудесной кассой $N_1 N_2$ копеек после выдачи $3k_1 k_2 + k_1 r_2 + k_2 r_1$ трехкопеечных монет останутся невыданными $r_1 r_2$ копеек. Поэтому ясно, что сдача от $N_1 N_2$ копеек равна сдаче от $r_1 r_2$ копеек.

Конечно, в утверждениях 1 и 2 тройка может быть заменена любым другим натуральным числом. В этом легко убедиться, проведя аналогичные рассуждения.

Для преподавателей. Отметим, что высказанные обобщения утверждений 1 и 2, постоянно используются на протяжении этого параграфа. Поэтому необходимо научить школьников правильно применять эти утверждения при подсчете остатков. Для этого нужно прорешать с ребятами некоторое количество (на ваше усмотрение) упражнений, аналогичных задаче 15, привлекая внимание учеников к применению этих утверждений в процессе решения.

Что касается доказательств утверждений 1 и 2, то мы не считаем обязательным их обсуждение на занятии.

Задача 15. Найдите остатки от деления а) $1989 \cdot 1990 \cdot 1991 + 1992^3$ на 7;

б) 9^{100} на 8.

Решение следующей задачи содержит очень важную идею.

Задача 16. Докажите, что $n^3 + 2n$ делится на 3 для любого натурального n.

Решение: Число n может давать при делении на 3 один из трех остатков: 0, 1, 2. Рассмотрим три случая.

Если n дает остаток 0, то и n^3 и $2n$ делятся на 3 и поэтому $n^3 + 2n$ также делится на 3.

Если n дает остаток 1, то n^3 дает остаток 1, $2n$ – остаток 2, а $1 + 2$ делится на 3.

Если n дает остаток 2, то n^2 дает остаток 1, n^3 – остаток 2, $2n$ – остаток 1, а $2 + 1$ делится на 3.

Требуемое доказано.

Для преподавателей. Ключевым моментом при решении этой задачи было сведение ее к перебору возможных остатков от деления на некоторое число. На этот метод надо обратить внимание школьников. Необходимо, чтобы они поняли, что подобный перебор действительно является полным решением.

Данный метод очень часто применяется при решении различных задач. Постарайтесь научить ребят определять по внешнему виду задачи, полезен ли при ее решении перебор остатков. Надеемся, что этой цели помогут достичь задачи из этого параграфа.

Задача 17. Докажите, что $n^5 + 4n$ делится на 5 при любом натуральном n.

Задача 18. Докажите, что $n^2 + 1$ не делится на 3 ни при каком натуральном n.

Задача 19. Докажите, что $n^3 + 2$ не делится на 9 ни при каком натуральном n.

Задача 20. Докажите, что $n^3 - n$ делится на 24 при любом нечетном n.

Подсказка: Докажите, что указанное число делится и на 3, и на 8.

Задача 21. а) Докажите, что $p^2 - 1$ делится на 24, если p – простое число и $p > 3$.

б) Докажите, что $p^2 - q^2$ делится на 24, если p и q – простые числа, большие 3.

Задача 22. Натуральные числа x, y, z таковы, что $x^2 + y^2 = z^2$. Докажите, что хотя бы одно из этих чисел делится на 3.

Задача 23. a и b – натуральные числа, причем число $a^2 + b^2$ делится на 21. Докажите, что оно делится и на 441.

3 Зак. 2413.

Задача 24. a, b, c – натуральные числа, причем $a+b+c$ делится на 6. Докажите, что $a^3+b^3+c^3$ тоже делится на 6.

Задача 25. Три простых числа p, q и r, большие 3, образуют арифметическую прогрессию: $p=p$, $q=p+d$, $r=p+2d$. Докажите, что d делится на 6.

Задача 26. Докажите, что сумма квадратов трех натуральных чисел, уменьшенная на 7, не делится на 8.

Задача 27. Сумма трех натуральных чисел, являющихся точными квадратами, делится на 9. Докажите, что из них можно выбрать два, разность которых также делится на 9.

Подсказка: Разность двух чисел, дающих одинаковые остатки при делении на 9, делится на 9.

Перейдем к следующему циклу задач:

Задача 28. Найдите последнюю цифру числа 1989^{1989}.

Решение: Заметим сначала, что последняя цифра числа 1989^{1989} совпадает с последней цифрой числа 9^{1989}. Выпишем последние цифры нескольких начальных степеней числа 9: $9, 1, 9, 1, 9, \ldots$.

Так как при нахождении последней цифры очередной степени числа 9 достаточно умножить на 9 лишь последнюю цифру предыдущей степени, то ясно, что за 9 следует 1 $(9\cdot 9=81)$, а за 1 – 9 $(1\cdot 9=9)$.

Таким образом, нечетные степени девятки оканчиваются на 9. Поэтому последняя цифра числа 1989^{1989} – девятка.

Задача 29. Найдите последнюю цифру числа 2^{50}.

Решение: Выпишем последние цифры нескольких начальных степеней двойки: $2, 4, 8, 6, 2, \ldots$. Мы видим, что 2^5 так же, как и 2^1, оканчивается на 2. Поскольку очередная цифра полностью определяется последней цифрой предыдущей степени, то произойдет "зацикливание": 2^6 (как и 2^2) оканчивается на 4, 2^7 (как и 2^3) – на 8, 2^8 – на 6, 2^9 – на 2 и т.д. Поскольку длина цикла равна 4, то последняя цифра числа 2^{50} определяется остатком от деления числа 50 на 4. Так как он равен 2, то последняя цифра числа 2^{50} совпадает с последней цифрой числа 2^2, то есть равна 4.

Задача 30. На какую цифру оканчивается число 777^{777}?

Задача 31. Найдите остаток от деления 2^{100} на 3.

Подсказка: Выпишите остатки от деления на 3 нескольких начальных степеней двойки. Докажите, что и здесь происходит "зацикливание".

Задача 32. Найдите остаток от деления 3^{1989} на 7.

Задача 33. Докажите, что $2222^{5555} + 5555^{2222}$ делится на 7.

Подсказка: Вычислите остаток от деления этого числа на 7 и убедитесь, что он равен нулю.

Задача 34. Найдите последнюю цифру числа 7^{7^7}.

В задачах 16–27 использовалась идея перебора остатков от деления на некоторое число, причем это число легко узнавалось по условию. Задачи цикла, к которому мы переходим, значительно труднее, поскольку они требуют угадывания числа, остатки от деления на которое необходимо перебирать. Это требует определенного умения и, несмотря на наличие некоторых стандартных приемов, может считаться настоящим искусством.

<u>Для преподавателей.</u> В качестве упражнений, закрепляющих навыки подобного рода, можно предложить составление учениками таблиц умножения остатков от деления на "наиболее употребительные числа" – 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13 и т.п. – или таблиц остатков квадратов и кубов.

Задача 35. а) p, $p+10$, $p+14$ – простые числа. Найдите p.

б) p, $2p+1$, $4p+1$ – простые числа. Найдите p.

Подсказка: Рассмотрите остатки от деления на 3.

Задача 36. p и $8p^2+1$ – простые числа. Найдите p.

Задача 37. p и p^2+2 – простые числа. Докажите, что p^3+2 – также простое число.

Задача 38. Докажите, что не существует натуральных чисел a и b таких, что $a^2 - 3b^2 = 8$.

Задача 39. а) Может ли сумма квадратов двух нечетных чисел быть квадратом целого числа?

б) Может ли сумма квадратов трех нечетных чисел быть квадратом целого числа?

Задача 40. Докажите, что сумма квадратов пяти последовательных натуральных чисел не является точным квадратом.

Задача 41. p, $4p^2+1$ и $6p^2+1$ – простые числа. Найдите p.

<u>Методические замечания.</u> Очень часто задачи, в которых встречаются квадраты натуральных чисел (например, задачи 36–40), решаются перебором

остатков от деления на 3 или на 4. Дело в том, что и при делении на 3 и при делении на 4 квадраты могут давать только остатки 0 и 1.

Задача 42. Докажите, что число $100\ldots00500\ldots001$ (в каждой из двух групп по 100 нулей) не является кубом целого числа.

Задача 43. Докажите, что $a^3 + b^3 + 4$ не является кубом целого числа ни при каких натуральных a и b.

Задача 44*. Докажите, что число $6n^3 + 3$ не является шестой степенью целого числа ни при каком натуральном n.

Методические замечания. В задачах, в которых встречаются кубы целых чисел (например, задачи 42–44) бывает полезно перебрать остатки от деления на 7 или на 9 (и в том и в другом случае возможны лишь три различных остатка: 0, 1, 6 и 0, 1, 8 соответственно).

Задача 45*. x, y, z – натуральные числа, причем $x^2 + y^2 = z^2$. Докажите, что xy делится на 12.

Для преподавателей. Материал, изложенный в этом параграфе, может составить основу по крайней мере двух занятий. Первое занятие нужно посвятить технике вычисления остатков. На втором следует подробно обсудить идею перебора остатков при решении различных задач.

3. Несколько задач

В этом параграфе приведена серия задач на делимость, не объединенных какой-либо идеей или методом решения. Однако во многих из них используются соображения, изложенные в предыдущих двух параграфах.

Задача 46. а) $a + 1$ делится на 3. Докажите, что $4 + 7a$ делится на 3.

б) $2 + a$ и $35 - b$ делятся на 11. Докажите, что $a + b$ делится на 11.

Задача 47. Найдите последнюю цифру числа $1^2 + 2^2 + \ldots + 99^2$.

Задача 48. Про семь натуральных чисел известно, что сумма любых шести из них делится на 5. Докажите, что каждое из данных чисел делится на 5.

Задача 49. Докажите, что сумма n последовательных нечетных натуральных чисел при $n > 1$ является составным числом.

Задача 50. Найдите наименьшее число, дающее следующие остатки: 1 – при делении на 2, 2 – при делении на 3, 3 – при делении на 4, 4 – при делении на 5, 5 – при делении на 6.

Задача 51. Докажите, что если $(n-1)!+1$ делится на n, то n – простое число.

Отдельно обсудим следующие две задачи:

Задача 52*. Докажите, что существует такое натуральное n, что числа $n+1$, $n+2$, …, $n+1989$ – составные.

Решение: Попробуем рассказать, как можно придти к решению. Число $n+1$ должно быть составным. Попытаемся пойти по самому простому пути: сделаем так, чтобы $n+1$ делилось на 2. $n+2$ также должно быть составным, но делиться на 2 уже не может. Попытаемся опять пойти по самому простому пути: хотелось бы сделать так, чтобы $n+2$ делилось на 3. Продолжая в том же духе, можно пытаться найти число n такое, что $n+1$ делится на 2, $n+2$ – на 3, $n+3$ – на 4 и так далее. Это равносильно тому, что $n-1$ делится на 2, 3, 4, …, 1990. Такое число, конечно, существует – например, 1990!. Итак, в качестве искомого n можно взять число $1990!+1$.

Задача 53*. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел.

Решение: Предположим противное. Пусть p_1, p_2, …, p_n – все простые числа. Рассмотрим число $p_1 p_2 \dots p_n + 1$. Это число не делится ни на одно из чисел p_1, p_2, …, p_n и, следовательно, не может быть разложено в произведение простых. Противоречие.

Для преподавателей. Задачи этого параграфа, конечно, не должны решаться на одном занятии. Они могут появляться на занятиях кружка в течение всего учебного года, использоваться в олимпиадах, матбоях и т.д.

4. Алгоритм Евклида

В первом параграфе мы обсудили понятие наибольшего общего делителя двух натуральных чисел и выяснили, как его можно найти: достаточно выписать разложения этих чисел на простые множители и взять их общую часть. Однако для больших чисел эта процедура практически неосуществима. Попробуйте, например, таким способом найти наибольший общий делитель чисел 1381955 и 690713. К счастью, существует другой метод, позволяющий вычислить НОД двух чисел. Он называется алгоритмом Евклида.

Алгоритм Евклида основан на следующем простом соображении: любой общий делитель чисел a и b $(a > b)$ делит также число $a-b$; кроме того, любой общий делитель чисел b и $a-b$ делит число a. Тем самым, $\text{НОД}(a,b) = \text{НОД}(b, a-b)$. Мы, по существу, изложили алгоритм Евклида.

Покажем, как он работает для конкретных чисел. Найдем наибольший общий делитель чисел 451 и 287:

$$\begin{aligned}\text{НОД}(451,287) &= \text{НОД}(287,164) =\\ &= \text{НОД}(164,123) =\\ &= \text{НОД}(123,41) =\\ &= \text{НОД}(82,41) =\\ &= \text{НОД}(41,41) =\\ &= 41.\end{aligned}$$

Заметим, что алгоритм Евклида можно ускорить: заменять a не на $a-b$, а сразу на остаток от деления a на b. Продемонстрируем это на примере чисел, приведенных в начале параграфа:

$$\begin{aligned}\text{НОД}(1381955,690713) &= \text{НОД}(690713,529) =\\ &= \text{НОД}(529,368) =\\ &= \text{НОД}(368,161) =\\ &= \text{НОД}(161,46) =\\ &= \text{НОД}(46,23) =\\ &= \text{НОД}(23,0) =\\ &= 23.\end{aligned}$$

Как видно, этот метод очень быстро приводит к результату.

Задача 54. Найти наибольший общий делитель чисел $2n+13$ и $n+7$.

Решение: $\text{НОД}(2n+13,n+7) = \text{НОД}(n+7,n+6) = \text{НОД}(n+6,1) = 1$.

Задача 55. Докажите, что дробь $\dfrac{12n+1}{30n+2}$ – несократима ни при каком натуральном n.

Задача 56. Найдите $\text{НОД}(2^{100}-1, 2^{120}-1)$.

Задача 57. Найдите $\text{НОД}(111\ldots111, 11\ldots11)$ – в записи первого числа 100 единиц, в записи второго – 60.

<u>**Для преподавателей.**</u> Алгоритм Евклида, несмотря на свою простоту, является важным элементом математического образования. Поэтому, нам кажется, ему стоит посвятить отдельное занятие. Более подробно тема “Алгоритм Евклида” освещена в статье [53].

Глава 5. ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ

Вполне возможно, что вы уже слышали про принцип Дирихле. Тогда он, скорее всего, представал перед вами в такой шутливой формулировке: "Если в N клетках сидят не менее $N+1$ кроликов, то в какой-то из клеток сидит не менее двух кроликов". Обратите внимание на расплывчатость выводов – "в какой-то из клеток", "не менее". Это является, пожалуй, отличительной чертой принципа Дирихле, которая иногда приводит к возможности неожиданных выводов на основе, казалось бы, совершенно недостаточных сведений.

Доказательство самого принципа чрезвычайно просто, в нем используется тривиальный подсчет кроликов в клетках. Если бы в каждой клетке сидело не более одного кролика, то всего в наших N клетках сидело бы не более N кроликов, что противоречило бы условиям. Таким образом, мы доказали принцип Дирихле, применив (обязательно обратите на это внимание) метод доказательства от противного.

Рис. 16

Но, спросите вы, разве о кроликах идет речь в задаче:

Задача 1. В мешке лежат шарики двух разных цветов: черного и белого. Какое наименьшее число шариков нужно вынуть из мешка вслепую так, чтобы среди них заведомо оказались два шарика одного цвета?

Следующая задача также не имеет никакого отношения к кроликам и клеткам, по крайней мере, судя по формулировке:

Задача 2. В лесу растет миллион елок. Известно, что на каждой из них не более 600000 иголок. Докажите, что в лесу найдутся две елки с одинаковым числом иголок.

Разберем теперь их решения:

Решение задачи 1: Достанем из мешка 3 шарика. Если бы среди этих шариков было не более одного шарика каждого из двух цветов, то всего было бы не более двух шаров – это очевидно, и противоречит тому, что мы достали три шарика. С другой стороны понятно, что двух шариков может и не хватить. Ясно, что кроликами здесь являются шарики, а клетками – цвета: черный и белый.

Решение задачи 2: Перед нами миллион "кроликов"-елок и, увы, всего лишь 600001 клетка с номерами от 0 до 600000. Каждый "кролик"-елка сажается нами в клетку с номером, равным количеству иголок на этой елке. Так как "кроликов" гораздо больше, чем клеток, то в какой-то клетке сидит по крайней мере два "кролика" – если бы в каждой сидело не более одного, то всего "кроликов"-елок было бы не более 600001 штук. Но ведь, если два "кролика"-елки сидят в одной клетке, то количество иголок у них одинаково.

Обратите внимание на то, что формулировки этих задач носят тот же налет расплывчатости вывода, что и сам принцип Дирихле. Часто именно такие вопросы и решаются с его помощью. Вот еще три аналогичные задачи.

Задача 3. Дано 12 целых чисел. Докажите, что из них можно выбрать два, разность которых делится на 11.

Задача 4. В городе Ленинграде живет более 5 миллионов человек. Докажите, что у каких-то двух из них одинаковое число волос на голове, если известно, что у любого человека на голове менее миллиона волос.

Задача 5. В магазин привезли 25 ящиков с тремя разными сортами яблок (в каждом ящике яблоки только одного сорта). Докажите, что среди них есть по крайней мере 9 ящиков с яблоками одного и того же сорта.

Для преподавателей. Поговорим о том, как примерно протекает занятие по нашей теме (не следует думать, что все занятие кружка, а это 2 – 3 часа, должно быть посвящено одной теме – это утомляет ребят. Видимо, лучше всего решать на занятии задачи на две-три разные темы, не забывая и о развлекательных задачах). Сначала ребята решают несколько простых упражнений вроде задач 1 или 2 – иногда они даже не понимают, что же нужно доказывать: на примере этих и последующих задач следует пояснить отличие интуитивных соображений от настоящего доказательства. При разборе этих задач подчеркните общность идеи – это для ребят обычно совсем не очевидно. После этого следует серия задач на сознательное повторение рассуждений, только что проведенных преподавателем (задачи 3–7). Конечно, сначала следует давать задачи попроще. Только после этого, как нам кажется, можно рассказать ребятам о том, что такое принцип Дирихле и подчеркнуть, что он лежит в основе всех приведенных решений. Старайтесь в дальнейшем при разборе задач иногда приводить решение полностью, даже без упоминания слов "принцип Дирихле" – чтобы напомнить ребятам о том, что он из себя представляет.

Если Вы внимательно прочитали все, что было написано выше и попытались решить задачу 5 так же, как и первые две, то, скорее всего, Вам это не удалось. Ведь из принципа Дирихле следует лишь, что есть два ящика с яблоками одного сорта. В решении этой задачи нам поможет *обобщенный принцип Дирихле*: "Если в N клетках сидят не менее $kN+1$ кроликов, то в какой-то из клеток сидит по крайней мере $k+1$ кролик."

Обратите внимание на то, что в случае $k=1$ обобщенный принцип Дирихле превращается в обычный принцип Дирихле. Доказательство этого "обобщенного принципа" оставляем Вам в качестве упражнения.

Решение задачи 5: 25 ящиков-"кроликов" рассадим по 3 клеткам-сортам. Так как $25 = 3\cdot 8+1$, то применим "обобщенный принцип Дирихле" для $N=3$, $k=8$ и получим, что в какой-то клетке-сорте не менее 9 ящиков.

Если Вы разобрали только что приведенное здесь решение, то было бы очень поучительно проверить, сможете ли Вы изложить это же решение без упоминания какого бы то ни было принципа Дирихле, пользуясь лишь рассуждениями типа тривиального подсчета, с помощью которых мы доказали принцип Дирихле.

В большинстве всех дальнейших задач на принцип Дирихле необходимо применять именно обобщенный принцип Дирихле. Вот еще две задачи:

Задача 6. В стране Курляндии m футбольных команд (по 11 футболистов в каждой). Все футболисты собрались в аэропорту для поездки в другую страну на ответственный матч. Самолет сделал 10 рейсов, перевозя каждый раз по m пассажиров. Еще один футболист прилетел к месту предстоящего матча на вертолете. Докажите, что хотя бы одна команда была целиком доставлена в другую страну.

Задача 7. Дано 8 различных натуральных чисел, не больших 15. Докажите, что среди их положительных попарных разностей есть три одинаковых.

При решении задачи 7 встречается, казалось бы, непреодолимое препятствие. Различных разностей может быть 14 – от 1 до 14 – это те 14 клеток, в которые мы будем сажать кроликов. Кто же будет нашими кроликами? Ими, конечно, должны быть разности между парами данных нам натуральных чисел.

Однако имеется 28 пар и их можно рассадить по 14 клеткам так, что в каждой клетке будет сидеть ровно два "кролика" (и значит, в каждой меньше трех). Здесь надо использовать дополнительное соображение: в клетке с номером 14 может сидеть не более одного кролика, ведь число 14 можно записать как разность двух натуральных чисел, не превосходящих 15, лишь одним способом: $14 = 15 - 1$. Значит, в оставшихся 13 клетках сидят не менее 27 кроликов, и применение обобщенного принципа Дирихле дает нам желаемый результат.

* * *

В серии из четырех следующих задач также необходимо применить принцип Дирихле (или обобщенный принцип Дирихле) плюс какое-либо дополнительное соображение.

Задача 8. Докажите, что в любой компании из 5 человек есть двое, имеющие одинаковое число знакомых в этой компании.

Задача 9. Несколько футбольных команд проводят турнир в один круг. Докажите, что в любой момент турнира найдутся две команды, сыгравшие к этому моменту одинаковое число матчей.

Задача 10. а) Какое наибольшее число полей на доске 8×8 можно закрасить в черный цвет так, чтобы в любом уголке вида из трех полей было по крайней мере одно незакрашенное поле?

б) Какое наименьшее число полей на доске 8×8 можно закрасить в черный цвет так, чтобы в каждом уголке вида было по крайней мере одно черное поле?

Подсказка к задаче 10а): Разбейте доску на 16 квадратиков 2×2 – это клетки; кроликами, конечно, будут черные поля.

Задача 11. 10 школьников на олимпиаде решили 35 задач, причем известно, что среди них есть школьники, решившие ровно одну задачу, школьники, решившие ровно две задачи и школьники, решившие ровно три задачи. Докажите, что есть школьник, решивший не менее пяти задач.

<u>**Методические замечания.**</u> При разборе задач очень полезно четко разделять доказательство на поиск кроликов и клеток, дополнительное соображение и, наконец, применение принципа Дирихле. В качестве конкретной, хотя и не главной, цели для Вас может служить выработка известного автоматизма в применении принципа Дирихле и навыка в определении по внешнему виду задачи того, что она – на принцип Дирихле.

Теперь решим еще несколько задач на применение принципа Дирихле, формулировки которых имеют “геометрическую” направленность.

Задача 12. Какое наибольшее число королей можно поставить на шахматной доске так, чтобы никакие два из них не били друг друга?

Задача 13. Какое наибольшее число пауков может ужиться на паутине, показанной на рис.17 ? Паук терпит соседа на расстоянии, не меньшем 1,1 метра.

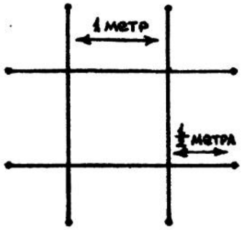


Рис. 17

Задача 14. Докажите, что равносторонний треугольник нельзя покрыть двумя меньшими равносторонними треугольниками.

Задача 15. В квадрат со стороной 1 метр бросили 51 точку. Докажите, что какие-то три из них можно накрыть квадратом со стороной 20 см.

Решение задачи 15: Разобьем наш квадрат на 25 квадратов со стороной 20 см. По обобщенному принципу Дирихле, в какой-то из них попадет по крайней мере три точки из 51 брошенной.

* * *

Заметим теперь, что в основе доказательства принципа Дирихле у нас лежала идея сложения неравенств. Одно замечательное следствие из нее обычно объединяют вместе с темой “Принцип Дирихле”. Это следствие гласит: “Если сумма n чисел равна S, то среди них есть как число, не большее S/n, так и число, не меньшее S/n”.

Конечно же, ведь если, например, все числа больше S/n, то их сумма больше S, что противоречит условию.

Имея такое мощное оружие, мы отправляемся на поиски решения в следующей серии задач:

Задача 16. Пятеро молодых рабочих получили на всех зарплату – 1500 рублей. Каждый из них хочет купить себе магнитофон ценой 320 рублей. Докажите, что кому-то из них придется подождать с покупкой до следующей зарплаты.

Задача 17. В бригаде 7 человек и их суммарный возраст – 332 года. Докажите, что из них можно выбрать трех человек, сумма возрастов которых не меньше 142 лет.

Задача 18*. На планете в звездной системе Тау Кита суша занимает более половины площади планеты. Докажите, что таукитяне могут прорыть прямой туннель, проходящий через центр планеты и соединяющий сушу с сушей. (Будем считать, что техника у них для этого достаточно развита).

Разберем решение задачи 17. Рассмотрим все возможные тройки рабочих бригады. Сумма их суммарных возрастов, как легко подсчитать, равна $15 \cdot 332$, а всего таких троек 35. Значит, есть тройка, суммарный возраст в которой не меньше, чем $15 \cdot 332/35$, что больше 142.

* * *

Займемся теперь теорией чисел. Несколько замечательных задач, касающихся делимости целых чисел, решаются также с помощью принципа Дирихле.

Задача 19. Докажите, что среди степеней двойки есть две, разность которых делится на 1987.

Задача 20. Докажите, что из 52 целых чисел всегда найдутся два, разность квадратов которых делится на 100.

Задача 21*. Докажите, что среди чисел, записываемых только единицами, есть число, которое делится на 1987.

Задача 22*. Докажите, что существует степень тройки, оканчивающаяся на 001.

Разберем решение задачи 21. Рассмотрим 1988 чисел-"кроликов" 1, 11, 111, ..., 111...11 (1988 единиц) и посадим их в 1987 клеток с номерами 0, 1, 2, ..., 1986 – каждое число попадает в клетку с номером, равным остатку от деления этого числа на 1987. Тогда (по принципу Дирихле) найдутся два числа, которые имеют одинаковые остатки при делении на 1987. Пусть это числа 11...11 (m единиц) и 11...11 (n единиц), причем $m > n$. Но их разность, которая делится на 1987, равна 11...1100...00 ($m - n$ единиц и n нулей). Сократим все нули –

ведь они не имеют никакого отношения к делимости на 1987 – и получим число из одних единиц, которое делится на 1987.

* * *

И, наконец, заключительная серия задач:

Задача 23. В клетках таблицы 3×3 расставлены числа -1, 0, 1. Докажите, что какие-то две из 8 сумм по всем строкам, всем столбцам и двум главным диагоналям будут равны.

Задача 24. Сто человек сидят за круглым столом, причем более половины из них – мужчины. Докажите, что какие-то два мужчины сидят друг напротив друга.

Задача 25. 15 мальчиков собрали 100 орехов. Докажите, что какие-то два из них собрали одинаковое число орехов.

Задача 26. Цифры $1, 2, \ldots, 9$ разбили на три группы. Докажите, что произведение чисел в одной из групп не меньше 72.

Задача 27. В таблице 10×10 расставлены целые числа, причем любые два числа в соседних клетках отличаются не более, чем на 5. Докажите, что среди этих чисел есть два равных.

Задача 28*. Докажите, что среди любых 6 человек есть либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

Задача 29*. На клетчатой плоскости дано 5 произвольных узлов сетки. Докажите, что середина одного из отрезков, соединяющих какие-то две из этих точек, также является узлом сетки.

Задача 30*. На складе имеется по 200 сапог 41, 42 и 43 размеров, причем среди этих 600 сапог 300 левых и 300 правых. Докажите, что из них можно составить не менее 100 годных пар обуви.

Задача 31. В алфавите языка племени Ни-Бум-Бум 22 согласных и 11 гласных, причем словом в этом языке называется произвольное буквосочетание, в котором нет двух согласных подряд и ни одна буква не использована дважды. Алфавит разбили на 6 непустых групп. Докажите, что из всех букв одной из групп можно составить слово.

Задача 32*. Докажите, что среди любых 10 целых чисел найдется несколько, сумма которых делится на 10.

Задача 33*. Дано 11 различных натуральных чисел, не больших 20. Докажите, что из них можно выбрать два числа, одно из которых делится на другое.

Задача 34*. 11 пионеров занимаются в пяти кружках дома культуры. Докажите, что найдутся два пионера A и B такие, что все кружки, которые посещает A, посещает и B.

Помните, если Вы не решите какую-то задачу сразу, то к ней стоит вернуться позже. Не спешите смотреть подсказки! Не забывайте и о том, что эти задачи, может быть, решаются и без применения принципа Дирихле. Хотя среди всех предложенных задач есть довольно сложные, мы надеемся, что и они будут Вами успешно решены – ведь теперь Вы уже знакомы с принципом Дирихле.

Глава 6. ГРАФЫ-1

В этой главе речь пойдет о замечательных математических объектах. Они возникают очень часто и оказываются чрезвычайно полезными при решении многих, внешне не похожих друг на друга задач. Однако графы интересны и сами по себе. В математике даже есть специальный раздел, который так и называется: "Теория графов". Мы обсудим некоторые начальные идеи этой теории и покажем, как графы применяются при решении задач.

1. Понятие графа

Задача 1. Между 9 планетами Солнечной системы введено космическое сообщение. Ракеты летают по следующим маршрутам: Земля–Меркурий, Плутон–Венера, Земля–Плутон, Плутон–Меркурий, Меркурий–Венера, Уран–Нептун, Нептун–Сатурн, Сатурн–Юпитер, Юпитер–Марс и Марс–Уран. Можно ли добраться с Земли до Марса?

Решение: Нарисуем схему: планетами будут соответствовать точки, а соединяющим их маршрутам – непересекающиеся между собой линии (см. рис.18). Теперь видно, что долететь от Земли до Марса нельзя.

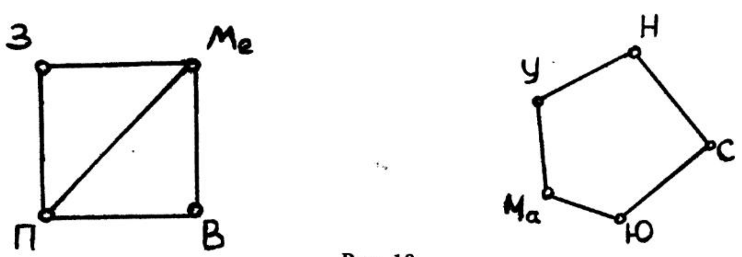


Рис. 18

Задача 2. Можно ли, сделав несколько ходов конями из исходного положения, изображенного на рис.19, расположить их так, как показано на рис.20?

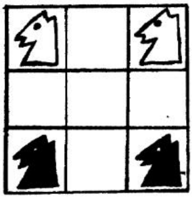


Рис. 19

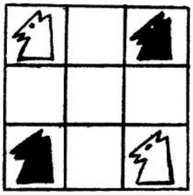


Рис. 20

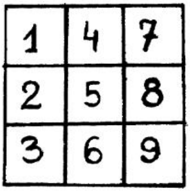


Рис. 21

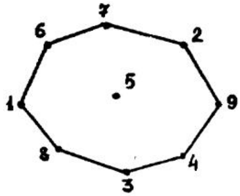


Рис. 22

Решение: Занумеруем клетки доски числами 1, 2, 3, ..., 9 так, как показано на рис.21. Каждой клетке сопоставим точку на плоскости, и если из одной клетки можно попасть в другую ходом коня, то соединим соответствующие точки линией (см. рис.22). Исходная и требуемая расстановки коней изображены на рис.23.

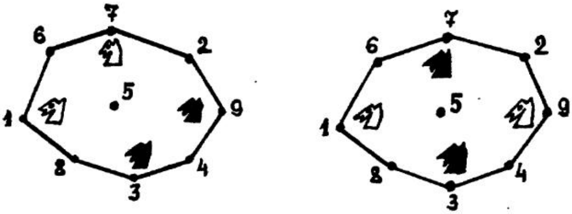


Рис. 23

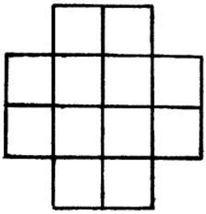


Рис. 24

Порядок следования коней на окружности, очевидно, не может измениться. Поэтому переставить коней требуемым образом невозможно.

Решение этих двух внешне не похожих друг на друга задач объединяет общая идея: графическое изображение условия. При этом получившиеся картинки тоже оказались очень похожими: они представляют из себя набор точек, некоторые из которых соединены линиями.

Такие картинки и называются *графами*. Точки при этом называются *вершинами* графа, а линии – *ребрами*.

Вот еще две задачи, для решения которых полезно нарисовать граф.

Задача 3. Доска имеет форму креста, который получается, если из квадратной доски 4×4 выкинуть угловые клетки (см. рис.24). Можно ли обойти ее ходом шахматного коня и вернуться на исходное поле, побывав на всех полях ровно по разу?

Задача 4. В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр-названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9?

Методические замечания. Конечно, данное нами определение графа недостаточно строго. Однако аккуратное определение слишком громоздко и лишь затруднило бы обсуждение. Для наших целей пока вполне достаточно и интуитивного понимания.

* * *

Заметим, что один и тот же граф можно изображать по-разному. Так, например, граф из задачи 1 может быть нарисован и иначе (см. рис.25).

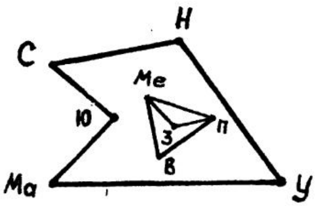


Рис. 25

Важно лишь, какие вершины соединены друг с другом, а какие – нет.

Такие одинаковые, но, быть может, по-разному нарисованные графы принято называть изоморфными. Попробуйте найти на рис.26 графы, изоморфные графу из задачи 2 (см. рис.22).

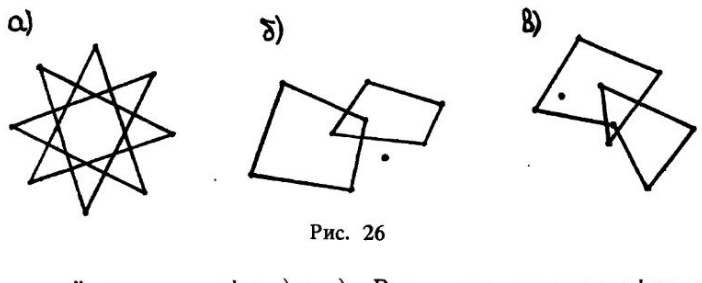


Рис. 26

Правильный ответ – графы а) и в). В том, что они изоморфны графу из задачи 2, легко убедиться. Для этого достаточно правильно занумеровать их вершины (см. рис.27).

Доказательство неизоморфности графов, изображенных на рисунках 26 б и 22, несколько сложнее. Мы вернемся к нему во второй части.

__Для преподавателей.__ Видимо, понятие графа должно появляться на занятии после того, как разобрано несколько задач типа задач 1, 2, решающее соображение в которых – графическое изображение условия. Важно, чтобы школьники сразу осознали, что один и тот же граф может быть нарисован разными способами. При обсуждении понятия изоморфизма можно решить несколько упражнений разобранного выше типа.

2. Степени вершин и подсчет числа ребер

В предыдущем параграфе мы определили граф как набор точек (вершин), некоторые из которых соединены между собой линиями (ребрами).

Количество ребер, выходящих из данной вершины, мы будем называть ее степенью. Так, например, в графе, изображенном на рис.28, вершина A имеет степень 3, вершина B – степень 2, вершина C – степень 1.

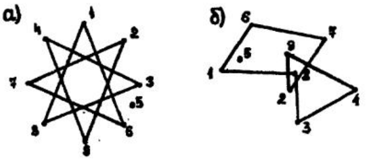


Рис. 27

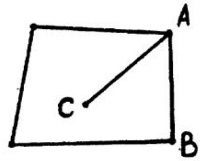


Рис. 28

Задача 5. В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединен ровно с пятью другими?

Решение: Предположим, что это возможно. Рассмотрим тогда граф, вершины которого соответствуют телефонам, а ребра – соединяющим их проводам. В этом графе 15 вершин, степень каждой из которых равна пяти. Подсчитаем количество ребер в этом графе. Для этого сначала просуммируем степени всех его вершин. Ясно, что при таком подсчете каждое ребро учтено дважды (оно ведь соединяет две вершины!). Поэтому число ребер графа должно быть равно $15 \cdot 5/2$. Но это число нецелое! Следовательно, такого графа не существует, а значит, и соединить телефоны требуемым образом невозможно.

При решении этой задачи мы выяснили, как подсчитать число ребер графа, зная степени всех его вершин. Для этого нужно просуммировать степени вершин и полученный результат разделить на два.

Задача 6. В государстве 100 городов, и из каждого из них выходит 4 дороги. Сколько всего дорог в государстве?

Заметим теперь, что из вышесказанного можно получить следствие: сумма степеней всех вершин графа должна быть четной (иначе ее нельзя было бы разделить на два нацело). Для более удобной формулировки этого утверждения дадим определение:

вершина графа, имеющая нечетную степень, называется *нечетной*, а имеющая четную степень – *четной*.

Теорема. Число нечетных вершин любого графа – четно.

Для доказательства этой теоремы осталось заметить, что сумма нескольких целых чисел четна тогда и только тогда, когда количество нечетных слагаемых четно.

Методические замечания. Теорема о четности числа нечетных вершин – одно из центральных мест этой главы. Очень важно до конца разобраться в ее доказательстве и научиться применять при решении задач.

Задача 7. В классе 30 человек. Может ли быть так, что 9 из них имеют по 3 друга (в этом классе), 11 – по 4 друга, а 10 – по 5 друзей?

Решение: Если бы это было возможно, то можно было бы нарисовать граф с 30 вершинами, 9 из которых имели бы степень 3, 11 – степень 4, 10 – степень 5. Однако у такого графа 19 нечетных вершин, что противоречит теореме.

Задача 8. В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы было 4 телефона, каждый из которых соединен с тремя другими, 8 телефонов, каждый из которых соединен с шестью, и 3 телефона, каждый из которых соединен с пятью другими?

Задача 9. У короля 19 баронов-вассалов. Может ли оказаться так, что у каждого вассального баронства 1, 5 или 9 соседних баронств?

Задача 10. Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит 3 дороги, быть ровно 100 дорог?

Задача 11. Джон, приехав из Диснейленда, рассказывал, что там на заколдованном озере имеются 7 островов, с каждого из которых ведет 1, 3 или 5 мостов. Верно ли, что хотя бы один из этих мостов обязательно выходит на берег озера?

Задача 12. Докажите, что число людей, когда-либо живших на Земле и сделавших нечетное число рукопожатий, четно.

Задача 13. Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?

Для преподавателей. Подробное обсуждение теоремы о четности числа нечетных вершин может составить отдельное занятие. При разборе решений нескольких задач мы рекомендуем не ссылаться на теорему, а фактически повторять ее доказательство.

3. Несколько новых определений

Разберем следующую задачу.

Задача 14. В стране Семерка 15 городов, каждый из которых соединен дорогами не менее, чем с 7 другими. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через другие города).

Решение: Рассмотрим два произвольных города и предположим, что они не соединены путем, то есть такой последовательностью дорог, в которой начало очередной дороги совпадает с концом предыдущей. Каждый из этих двух городов по условию соединен не менее, чем с 7 другими; при этом все упомянутые города различны – ведь если какие-то два из них совпадают, то существует путь, соединяющий исходные города (см. рис.29).

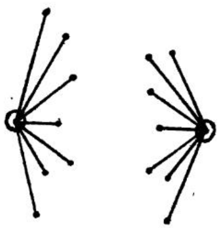


Рис. 29

Таким образом, мы указали не менее 16 городов. Противоречие.

* * *

Дадим в связи с этой задачей одно важное определение:

граф называется *связным*, если любые две его вершины могут быть соединены путем, т.е. последовательностью ребер, каждое следующее из которых начинается в конце предыдущего.

Отметим здесь же, что замкнутый путь, то есть такой, начало и конец которого совпадают, называется *циклом*.

Мы можем теперь переформулировать утверждение предыдущей задачи так: граф дорог страны Семерка связен.

Задача 15. Докажите, что граф с n вершинами, степень каждой из которых не менее $(n-1)/2$, – связен.

Возникает естественный вопрос: а как выглядит несвязный граф? Он состоит из нескольких "кусков", в каждом из которых от любой вершины можно добраться по ребрам до любой другой. Так, например, граф, изображенный на рис.30 а, состоит из 3 "кусков", а граф на рис.30 б – из 2 "кусков".

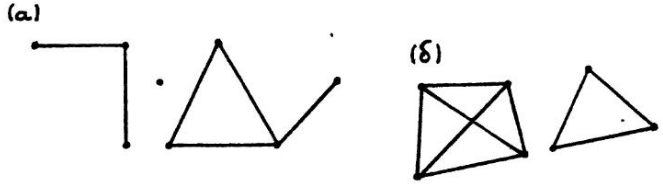


Рис. 30

Эти "куски" называются *компонентами связности* графа. Каждая компонента связности является, конечно, связным графом. Отметим также, что связный граф имеет одну компоненту связности.

Задача 16. В Тридевятом царстве лишь один вид транспорта – ковер-самолет. Из столицы выходит 21 newковролиния, из города Дальний – одна, а из всех остальных городов – по 20. Докажите, что из столицы можно долететь в Дальний (возможно, с пересадками).

Решение: Рассмотрим компоненту связности графа newковролиний, содержащую столицу. Нам нужно доказать, что она содержит также и город Дальний. Предположим противное. Тогда в этой компоненте связности из одной вершины (столицы) выходит 21 ребро, а из всех остальных вершин – по 20 ребер. Таким образом в этом графе (компоненте связности) ровно одна нечетная вершина. Противоречие!

<u>Методические замечания.</u> Понятие связности чрезвычайно важно и постоянно будет использоваться в процессе дальнейшего изучения теории графов. Отметим, что основной момент в решении задачи 16 – рассмотрение компонен-

ты связности – является содержательным соображением и часто оказывается полезным при решении задач.

Задача 17. В стране из каждого города выходит 100 дорог и от любого города можно добраться до любого другого. Одну дорогу закрыли на ремонт. Докажите, что и теперь от любого города можно добраться до любого другого.

4. Эйлеровы графы

Задача 18. Можно ли нарисовать граф, изображенный

а) на рис.31 а ; б) на рис.31 б,

не отрывая карандаш от бумаги и проводя каждое ребро ровно один раз?

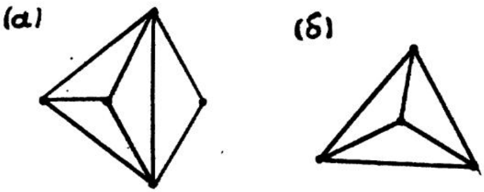


Рис. 31

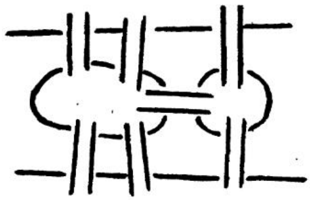


Рис. 32

Решение: а) Можно. б) Нельзя. Действительно, рисуя граф так, как требуется в условии, в каждую вершину, за исключением начальной и конечной, мы войдем столько же раз, сколько выйдем из нее. Поэтому степени всех вершин нарисованного графа, кроме двух, должны быть четными, а это не так.

При решении задачи 18 было доказано следующее общее утверждение:

Граф, который можно нарисовать, не отрывая карандаш от бумаги и проводя каждое ребро ровно один раз, должен иметь не более двух нечетных вершин.

Впервые такие графы были исследованы великим математиком Леонардом Эйлером в 1736 году в связи со знаменитой задачей о кенигсбергских мостах (см. задачу 19). Поэтому графы, которые можно нарисовать указанным способом, называются эйлеровыми.

Задача 19. Схема мостов города Кенигсберга изображена на рис.32. Можно ли совершить прогулку, пройдя по каждому мосту ровно один раз?

Задача 20. Имеется группа островов, соединенных мостами так, что от каждого острова можно добраться до любого другого. Турист обошел все острова, пройдя по каждому мосту ровно один раз. На острове Троекратном он побывал трижды. Сколько мостов ведет с Троекратного, если турист а) не с него начал и не на нем закончил?

б) с него начал, но не на нем закончил?

в) с него начал и на нем закончил?

Задача 21. Можно ли прогуляться по парку и его окрестностям (см. рис.33), так, чтобы при этом перелезть через каждый забор ровно один раз?

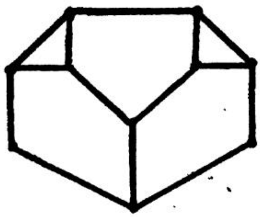


Рис. 33

Задача 22. а) Дан кусок проволоки длиной 120 см. Можно ли, не ломая проволоки, изготовить каркас куба с ребром 10 см?

б) Какое наименьшее число раз придется ломать проволоку, чтобы все же изготовить требуемый каркас?

Для преподавателей. Подведем итог. Первая и главная, как нам кажется, цель, которую нужно преследовать, занимаясь графами, – научить школьников видеть граф в условии задачи и грамотно переводить это условие на язык теории графов. Кроме того, важно, чтобы ребята правильно применяли теорему о четности числа нечетных вершин графа, понимали, что такое компонента связности, и умели пользоваться критерием эйлеровости.

Конечно, не стоит рассказывать обо всем этом подряд на нескольких последовательных занятиях. Эффект будет намного больше, если школьники будут получать новые сведения (и новые задачи!) о графах постепенно, в течение всего учебного года.

Глава 7. НЕРАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКА

1. Введение

Для преподавателей. Неравенство треугольника – самое известное и самое фундаментальное геометрическое неравенство, недаром его учат в школе. Именно поэтому полезно выяснить у ребят, знают ли они его, решали ли задачи на его применение. Конечно же, необходимо напомнить про то, что кратчайшим путем между двумя точками является отрезок прямой.

Начнем знакомство с неравенством треугольника с серии простых упражнений:

Задача 1. Докажите, что для любых трех точек A, B и C на плоскости выполнено неравенство $AC \geq |AB - BC|$.

В этой задаче необходимо, помимо данной выше формулировки, дать ее очевидное геометрическое истолкование: длина любой стороны треугольника не меньше модуля разности длин двух других сторон.

Задача 2. Длина стороны AC треугольника ABC равна 3,8, длина стороны AB – 0,6. Известно, что длина стороны BC – целое число. Какова эта длина?

Задача 3. Докажите, что длина любой стороны треугольника не превосходит его полупериметра.

Задача 4. От Ленинграда до Москвы 660 км, от Ленинграда до деревни Лыково – 310 км, от Лыково до Клина – 200 км, и от Клина до Москвы – 150 км. Каково расстояние от Лыково до Москвы?

Подсказка–решение задачи 4. Заметим, что сумма расстояний от Ленинграда до Лыкова, от Лыкова до Клина и от Клина до Москвы равна расстоянию от Ленинграда до Москвы, а значит, все эти населенные пункты лежат на одной прямой.

Задача 5. В стране 4 города: A, B, C и D. Два самолета одновременно вылетели из города A. Маршрут первого: A-B-D-C-A-D-B-C-A, а маршрут второго: A-B-C-D-A-B-C-D-A-B-C-D-A. Какой из самолетов раньше закончит свой маршрут, если их скорости одинаковы?

После того, как решены эти простые упражнения, можно перейти к следующей серии задач. Это простые геометрические неравенства, доказываемые применением неравенства треугольника.

Задача 6. Найдите внутри выпуклого четырехугольника точку, такую, что сумма расстояний от нее до вершин минимальна.

Задача 7. На плоскости дан квадрат $ABCD$ и точка O. Докажите, что расстояние от точки O до одной из вершин квадрата не превосходит суммы расстояний от O до трех других вершин квадрата.

Задача 8. Докажите, что в выпуклом четырехугольнике сумма длин диагоналей больше его полупериметра и меньше периметра.

Задача 9. Докажите, что в выпуклом пятиугольнике сумма длин диагоналей больше периметра и меньше удвоенного периметра.

Задача 10. Внутри треугольника взяли две произвольные точки. Докажите, что расстояние между ними не превосходит полупериметра треугольника.

Для примера разберем решение задачи 6. Так как четырехугольник выпуклый, то его диагонали пересекаются в точке O. Обозначим вершины четырехугольника через A, B, C и D (по часовой стрелке). Тогда сумма расстояний от O до вершин равна сумме длин диагоналей AC и BD. Но для любой другой точки P имеем, во-первых, что сумма расстояний от P до вершин не меньше $AC+BD$, а во-вторых, либо $PA+PC>AC$, либо $PB+PD>BD$. Значит эта сумма равна $AC+BD$ только если P совпадает с точкой O. Значит, точка O – искомая.

Один из самых распространенных способов доказательства геометрических неравенств состоит в том, что применяется неравенство треугольника, возможно, с некоторыми дополнительными соображениями. Так, например, в задаче 7 нужное неравенство получается складыванием нескольких неравенств треугольника.

2. Неравенство треугольника и геометрические преобразования

Зачастую на рисунке, изображающем условие задачи, не видно треугольника, применение неравенства треугольника для которого дало бы решение. В таком случае может помочь удачно подобранное геометрическое преобразование.

Очередная серия задач посвящена применению идеи симметрии в совокупности с неравенством треугольника.

Задача 11. Грибник выходит из леса в заданной точке. Ему надо дойти до шоссе, которое представляет собой прямую линию, и зайти обратно в лес в другой заданной точке. Как ему сделать это, пройдя по самому короткому пути?

Задача 12. Полуостров представляет собой острый угол, внутри которого находится дом лесника. Как леснику, выйдя из дома, добраться до одного берега полуострова, затем до другого и вернуться домой, пройдя при этом по самому короткому пути?

Задача 13. Точку A, лежащую внутри острого угла, отразили симметрично относительно сторон угла. Полученные точки B и C соединили и точки пересечения отрезка BC со сторонами угла обозначили через D и E – см. рис.34. Докажите, что $BC/2 > DE$.

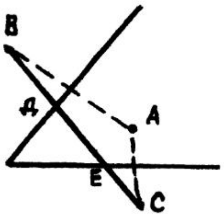


Рис. 34

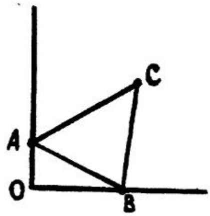


Рис. 35

Задача 14. Точка C лежит внутри данного прямого угла, а точки A и B лежат на его сторонах – см. рис.35. Докажите, что периметр треугольника ABC не меньше удвоенного расстояния OC, где O – вершина данного прямого угла.

Разберем решение задачи 11. Обозначим точку, в которой грибник выходит из леса, через A, а точку, в которой он должен войти в лес, через B. Отразим точку A симметрично относительно прямой-шоссе (см. рис.36) и получим точку A'. Тогда из любого пути AKB (K – это точка, в которой грибник выходит на шоссе) можно, отразив симметрично относительно шоссе его участок AK, получить равный ему по длине путь $A'KB$, длина которого по неравенству треугольника не меньше $A'B$.

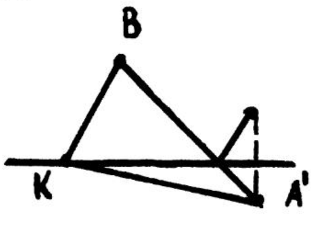


Рис. 36

Следовательно, искомая точка K, в которой грибник должен подойти к шоссе – это точка пересечения $A'B$ и шоссе. С помощью аналогичных соображений решаются и другие задачи этой серии. Так, например, в задаче 14 надо отразить точку C симметрично относительно прямых OA и OB, получив точки C' и C''. Тогда периметр ABC можно заменить на сумму длин отрезков $C'A$, AB и BC'', которая по неравенству треугольника не меньше длины отрезка $C'C''$, равной $2|OC|$.

Для преподавателей. Первое, что нужно напомнить школьникам – осевая симметрия не меняет расстояний. Решения задач этой серии надо разбирать особенно тщательно, внимательно следя за логикой изложения. Надо подчеркнуть общую идею: искомый путь преобразуется некоторым образом так, что его длина не меняется, причем после этих преобразований решаемая задача превращается в такую: соединить две данные точки путем минимальной длины. Важное условие, которое необходимо проверить: этот преобразованный путь может быть прямолинейным.

* * *

Во многих задачах действие происходит на поверхности каких-то пространственных тел, и потому в таких задачах неравенство треугольника можно применить лишь после того, как мы развернем эту поверхность на плоскости. Типичными примерами могут служить следующие три задачи:

Задача 15. Муха сидит в вершину X деревянного куба. Как ей переползти в противоположную вершину куба Y, двигаясь по самому короткому пути?

Задача 16. Муха сидит на внешней поверхности круглого стакана. Ей надо перебраться в другую точку, лежащую на внутренней поверхности стакана. Найдите кратчайший путь мухи (толщиной стенок стакана пренебрегите).

Задача 17. На середине ребра молочного пакета сидит паук, которому необходимо добраться до середины противоположного ребра. Как ему это сделать за наименьшее время?

3. Дополнительные построения

В некоторых случаях геометрическое неравенство требует для своего доказательства дополнительного построения. Эти задачи являются наиболее сложными, так как поиск дополнительного построения в них требует определенного навыка. Постарайтесь развить такой навык, решая следующую серию задач:

Задача 18. Точка O лежит внутри треугольника ABC. Докажите, что $AO+OC < AB + BC$.

Задача 19. Докажите, что сумма расстояний от точки O до вершин треугольника меньше его периметра, если точка O лежит внутри этого треугольника. А если она лежит вне треугольника?

Задача 20. Решите задачу 12, если полуостров представляет собой тупой угол.

Задача 21. Докажите, что длина медианы AM треугольника ABC не превосходит полусуммы длин сторон AB и AC. Докажите также, что сумма длин медиан треугольника не превосходит его периметра.

Задача 22. а) Треугольник $A'B'C'$ лежит внутри треугольника ABC. Докажите, что периметр $A'B'C'$ не больше периметра ABC.

б) Треугольник ABC лежит внутри выпуклого многоугольника M. Докажите, что периметр ABC не больше, чем периметр M.

в) Выпуклый многоугольник M' лежит внутри выпуклого многоугольника M. Докажите, что периметр M' не больше периметра M.

Главная идея решения задачи 22 состоит в следующем. Проведем прямую через сторону AB многоугольника M' (см. рис.37), которая пересекает контур многоугольника M в точках C и D. Тогда по неравенству треугольника очевидно, что периметр того куска многоугольника M (из двух, на которые рассекла его прямая AB), который содержит M', не больше, чем периметр M.

Повторяя эту операцию, придем к многоугольнику M'.

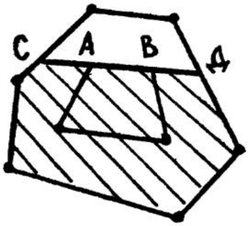


Рис. 37

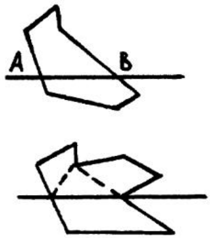


Рис. 38

* * *

И, наконец, заключительная серия задач:

Задача 23. Многоугольник, вырезанный из бумаги, сложили пополам, перегнув его по прямой (см. рис.38). Докажите, что периметр полученного многоугольника не превосходит периметра исходного.

Задача 24. Докажите, что в выпуклом многоугольнике не может быть трех сторон, превосходящих по длине наибольшую диагональ.

Задача 25. Докажите, что периметр треугольника не превосходит суммы длин медиан, увеличенной в 4/3 раза. (Для решения этой задачи надо знать, в каком отношении делятся медианы точкой их пересечения).

Задача 26. Две деревни находятся по разные стороны от реки, берега которой – параллельные прямые. В каком месте реки необходимо построить мост, перпендикулярный берегам так, чтобы длина пути из одной деревни в другую была бы минимальна?

Задача 27. Докажите, что в выпуклом пятиугольнике (т.е. в таком, у которого все диагонали лежат внутри самого пятиугольника) найдутся три диагонали, из которых можно составить треугольник.

* * *

Для преподавателей. Неравенство треугольника, безусловно, заслуживает большего, чем однократное упоминание и разбор на занятии. При продолжении занятий по теме “Неравенства” надо кратко напомнить ребятам содержание предыдущих занятий и основные принципы применения неравенства треугольника.

Глава 8. ИГРЫ

Дети любят играть! Поэтому у школьников младших классов большой интерес вызывают задачи-игры. С их помощью преподаватель может внести в занятие элемент развлечения: устроить турнир, сеанс одновременной игры, наконец, просто дать ребятам поиграть.

В то же время такие задачи содержательны. При изложении их решения школьники обычно испытывают большие трудности. Ведь необходимо, во-первых, грамотно сформулировать стратегию, а во-вторых, доказать, что она действительно ведет к выигрышу.

Поэтому задачи-игры очень полезны для развития разговорной математической культуры и четкого понимания того, что значит решить задачу.

Необходимо осознать, что соображения типа "если он ходит так, то я хожу так" не являются, как правило, решением игры. Образцы правильных рассуждений приведены в тексте.

Сделаем еще несколько терминологических замечаний. Во всех играх предполагается, что играют двое, ходы делаются по очереди (игроки не могут пропустить ход). Ответить всегда надо на один и тот же вопрос – кто побеждает: начинающий (первый) или его партнер (второй)? В дальнейшем это оговариваться не будет.

1. Игры-шутки

Первый класс игр, о которых пойдет речь – игры-шутки. Это игры, исход которых не зависит от того, как играют соперники. Поэтому для решения такой игры не нужно указывать выигрышную стратегию. Достаточно лишь доказать, что выигрывает тот или иной игрок (независимо от того, как будет играть!).

Приведем пример такой игры-шутки.

Задача 1. Двое по очереди ломают шоколадку 6×8. За ход разрешается сделать прямолинейный разлом любого из кусков вдоль углубления. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.

Решение: Основное соображение: после каждого хода количество кусков увеличивается ровно на 1.

Сначала был один кусок. В конце игры, когда нельзя сделать ни одного хода, шоколадка разломана на маленькие дольки. А их 48! Таким образом, игра будет продолжаться ровно 47 ходов. Последний, 47-й ход (так же, как и все другие ходы с нечетными номерами) сделает первый игрок. Поэтому он в этой игре побеждает, причем независимо от того, как будет играть.

<u>Для преподавателей.</u> Игры-шутки позволяют снять напряжение и усталость, дают школьникам возможность отдохнуть. Удобно давать их по одной после изложения трудного материала, в критический момент или в конце занятия. Не следует проводить целое занятие, посвященное играм-шуткам. Полезно перед решением задачи-игры дать школьникам возможность немного поиграть друг с другом.

А теперь еще несколько игр-шуток:

Задача 2. Имеется три кучки камней: в первой – 10, во второй – 15, в третьей – 20. За ход разрешается разбить любую кучку на две меньшие; проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.

Задача 3. Числа от 1 до 20 выписаны в строчку. Игроки по очереди расставляют между ними плюсы и минусы. После того, как все места заполнены, подсчитывается результат. Если он четен, то выигрывает первый игрок, если нечетен, то второй.

Задача 4. Двое по очереди ставят ладей на шахматную доску так, чтобы ладьи не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Задача 5. На доске написаны 10 единиц и 10 двоек. За ход разрешается стереть две любые цифры и, если они были одинаковыми, написать двойку, а если разными – единицу. Если последняя оставшаяся на доске цифра – единица, то выиграл первый игрок, если двойка – то второй.

Задача 6*. На доске написаны числа 25 и 36. За ход разрешается дописать еще одно натуральное число – разность любых двух имеющихся на доске чисел, если она еще не встречалась. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Задача 7. Дана клетчатая доска размерами

а) 9×10; б) 10×12; в) 9×11.

За ход разрешается вычеркнуть любую горизонталь или любую вертикаль, если в ней к моменту хода есть хотя бы одна невычеркнутая клетка. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

2. Симметрия

Рассмотрим следующую игру.

Задача 8. Двое по очереди кладут пятаки на круглый стол, причем так, чтобы они не накладывались друг на друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Решение: В этой игре выигрывает первый, независимо от размеров стола! Первым ходом он кладет пятак так, чтобы центры монеты и стола совпали. После этого на каждый ход второго игрока начинающий отвечает симметрично относительно центра стола. Отметим, что при такой стратегии после каждого хода первого игрока позиция симметрична. Поэтому если возможен очередной ход второго игрока, то возможен и симметричный ему ответный ход первого. Следовательно, он побеждает.

Попробуем, применяя симметричную стратегию, решить еще одну задачу.

Задача 9. Двое по очереди ставят слонов в клетки шахматной доски так, чтобы слоны не били друг друга. (Цвет слонов значения не имеет). Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Попытка решения: поскольку шахматная доска симметрична относительно своего центра, то естественно попробовать симметричную стратегию. Но на этот раз (первым ходом нельзя поставить слона в центр доски) симметрию может поддерживать второй игрок. Казалось бы, по аналогии с предыдущей задачей, это и есть его выигрышная стратегия. Однако следуя ей, второму игроку не удастся сделать даже свой первый ход! Слон, только что поставленный первым игроком, может бить центрально-симметричное поле.

Этот пример показывает, что при доказательстве правильности симметричной стратегии нельзя забывать о следующем обстоятельстве:

очередному симметричному ходу может помешать ход,
только что сделанный противником.

Ранее сделанные ходы, в силу симметрии позиции, помешать не могут. Чтобы решить игру при помощи симметричной стратегии, необходимо найти симметрию, при которой только что сделанный противником ход не препятствует осуществлению избранного плана.

Так, решение задачи 9 легко провести, применяя не центральную, а осевую симметрию шахматной доски. За ось симметрии можно взять прямую, разделяющую четвертую и пятую горизонтали. Симметричные относительно нее поля имеют разный цвет, и, тем самым, слон, поставленный на одно из них, не препятствует ходу на другое. Итак, в этой игре выигрывает все-таки второй игрок.

Симметричная стратегия совсем не обязана иметь чисто геометрический смысл. Рассмотрим задачу:

Задача 10. Имеется две кучки камней – по 7 в каждой. За ход разрешается взять любое количество камней, но только из одной кучки. Проигрывает тот, кому нечего брать.

Решение: В этой игре второй игрок побеждает при помощи симметричной стратегии: каждым своим ходом он должен брать столько же камней, сколько предыдущим ходом взял первый игрок, но из другой кучки. Таким образом, у второго игрока всегда есть ход.

Симметрия в этой задаче состоит в равенстве числа камней в кучках.

Для преподавателей. Идея симметрии заслуживает отдельного небольшого разговора. Перед ним необходимо решить две-три игры на симметрию (лучше на одном занятии).

Вот еще несколько игр на ту же идею.

Задача 11. Двое по очереди ставят коней в клетки шахматной доски так, чтобы кони не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Задача 12. Двое по очереди ставят королей в клетки доски 9×9 так, чтобы короли не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Задача 13. а) Двое по очереди ставят слонов в клетки шахматной доски. Очередным ходом надо побить хотя бы одну небитую клетку. Слон бьет и клетку, на которой стоит. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

б)*Та же игра, но с ладьями.

Задача 14. Дана клетчатая доска 10×10. За ход разрешается покрыть любые 2 соседние клетки доминошкой (прямоугольником 1×2) так, чтобы доминошки не перекрывались. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Задача 15. В каждой клетке доски 11×11 стоит шашка. За ход разрешается снять с доски любое количество подряд идущих шашек либо из одного вертикального, либо из одного горизонтального ряда. Выигрывает снявший последнюю шашку.

Задача 16. Имеются две кучки камней: в одной – 30, в другой – 20. За ход разрешается брать любое количество камней, но только из одной кучки. Проигрывает тот, кому нечего брать.

Задача 17. На окружности расставлено 20 точек. За ход разрешается соединить любые две из них отрезком, не пересекающим отрезков, проведенных ранее.

5 Зак. 2413.

Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Задача 18. У ромашки а) 12 лепестков; б) 11 лепестков. За ход разрешается оторвать либо один лепесток, либо два рядом растущих лепестка. Проигрывает тот, кто не может сделать хода.

Задача 19*. Дан прямоугольный параллелепипед размерами а) $4 \times 4 \times 4$; б) $4 \times 4 \times 3$; в) $4 \times 3 \times 3$, составленный из единичных кубиков. За ход разрешается проткнуть спицей любой ряд, если в нем есть хотя бы один непроткнутый кубик. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Задача 20. Двое по очереди разламывают шоколадку 5×10. За ход разрешается сделать прямолинейный разлом любого из имеющихся кусков вдоль углубления. Выигрывает тот, кто первым отломит дольку 1×1.

Задача 21. Двое по очереди ставят крестики и нолики в клетки доски 9×9. Начинающий ставит крестики, его соперник – нолики. В конце подсчитывается, сколько имеется строчек и столбцов, в которых крестиков больше, чем ноликов – это очки, набранные первым игроком. Количество строчек и столбцов, где ноликов больше – очки второго. Тот из игроков, кто наберет больше очков, побеждает.

3. Выигрышные позиции

Рассмотрим игру.

Задача 22. Ладья стоит на поле $a1$. За ход разрешается сдвинуть ее на любое число клеток вправо или на любое число клеток вверх. Выигрывает тот, кто поставит ладью на поле $h8$.

Решение: В этой игре побеждает второй игрок. Его стратегия очень проста: каждым своим ходом он возвращает ладью на большую диагональ $a1$—$h8$. Объясним, почему, играя так, второй игрок выигрывает. Дело в том, что первый игрок каждый раз вынужден будет уводить ладью с этой диагонали, а второй игрок после этого будет иметь возможность вернуть ладью на линию $a1$—$h8$. Так как поле $h8$ принадлежит диагонали, то на него сумеет встать именно второй игрок.

Проанализируем это решение.

Нам удалось выделить класс *выигрышных позиций* (ладья стоит на одной из клеток диагонали $a1$—$h8$), обладающих следующими свойствами:

1) Завершающая позиция игры – выигрышная;

2) За ход из одной выигрышной позиции нельзя попасть в другую;

3) Из любой невыигрышной (*проигрышной*) позиции за один ход можно попасть в какую-то выигрышную.

Нахождение такого класса выигрышных позиций для игры равносильно ее решению. Действительно, к победе ведет стратегия – ходи в выигрышную позицию. Если исходная позиция выигрышная, то, как в разобранной задаче, выигрывает второй. В противном случае выигрывает начинающий.

Для преподавателей. Понятие выигрышной позиции можно вводить только после решения и обсуждения нескольких задач из этого параграфа. Напомним еще раз, что перед решением игры очень полезно дать школьникам возможность поиграть в нее.

А теперь несколько задач на выигрышные позиции:

Задача 23. Король стоит на поле $a1$. За один ход его можно передвинуть на одно поле вправо, или на одно поле вверх, или на одно поле по диагонали "вправо-вверх". Выигрывает тот, кто поставит короля на поле $h8$.

Задача 24. Имеются две кучки конфет: в одной – 20, в другой – 21. За ход нужно съесть одну из кучек, а вторую разделить на две не обязательно равных кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Задача 25. На концах клетчатой полоски 1×20 стоит по шашке. За ход разрешается сдвинуть любую шашку в направлении другой на одну или на две клетки. Перепрыгивать шашкой через шашку нельзя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Задача 26. В коробке лежит 300 спичек. За ход разрешается взять из коробка не более половины имеющихся в нем спичек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Задача 27. Имеется три кучки камней: в первой – 50, во второй – 60, в третьей – 70. Ход состоит в разбиении каждой кучки, состоящей более чем из одного камня, на две меньшие кучки. Выигрывает тот, после чьего хода во всех кучках будет по одному камню.

Задача 28. Игра начинается с числа 60. За ход разрешается уменьшить имеющееся число на любой из его делителей. Проигрывает тот, кто получит ноль.

Задача 29*. Имеется две кучки спичек: а) 101 спичка и 201 спичка; б) 100 спичек и 201 спичка. За ход разрешается уменьшить количество спичек в одной из кучек на число, являющееся делителем количества спичек в другой кучке. Выигрывает тот, после чьего хода спичек не остается.

4. Анализ с конца – метод поиска выигрышных позиций

При чтении предыдущего параграфа могло появиться ощущение, что поиск выигрышных позиций основан лишь на интуиции, а потому, как правило, непрост. Сейчас мы опишем общий метод, позволяющий найти выигрышные позиции во многих играх.

Вернемся к задаче про короля из предыдущего параграфа.

Попробуем найти выигрышные позиции, исходя из их свойств. Как всегда, завершающая позиция игры (король стоит на $h8$) – выигрышная. Поэтому в клетку $h8$ поставим "+" (см. рис.39). Так же мы будем отмечать все найденные выигрышные позиции. В клетках, соответствующих проигрышным позициям, будем ставить "–".

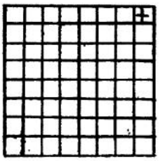


Рис. 39

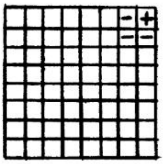


Рис. 40

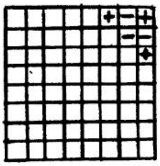


Рис. 41

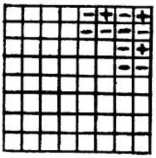


Рис. 42

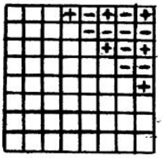


Рис. 43

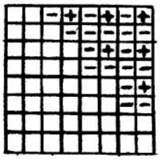


Рис. 44

Так как позиции, из которых король может за один ход попасть на выигрышное поле $h8$ – проигрышные, то возникает расстановка, изображенная на рис.40. С полей $h6$ и $f8$ за один ход можно попасть только на проигрышные поля. В этих клетках нужно поставить "+" – они выигрышные (см. рис.41). Только что полученные выигрышные позиции порождают набор новых проигрышных позиций – $h5$, $g5$, $g6$, $f7$, $e7$, $e8$ (см. рис.42). Продолжим аналогичным образом (см. рис.43, 44). После получения очередного набора минусов отмечаем плюсом те поля, из которых каждый ход ведет в проигрышную позицию. После этого отмечаем минусом те поля, из которых существует хотя бы один ход в выигрышную позицию. В итоге плюсы и минусы будут расставлены так, как показано на рисунке 45.

* * *

Только что описанный метод нахождения выигрышных позиций называется “анализом с конца”. Применяя его к задаче про ладью из предыдущего параграфа, легко получаем набор выигрышных позиций. Действуя так, как показано на рис.46 и 47, получаем расстановку знаков на рис.48.

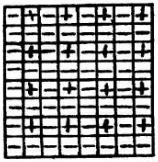


Рис. 45

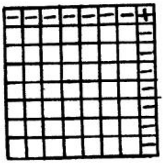


Рис. 46

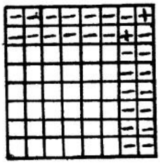


Рис. 47

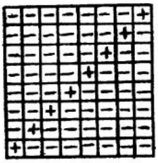


Рис. 48

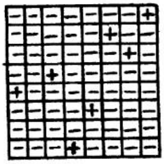


Рис. 49

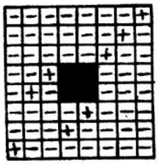


Рис. 50

<u>Для преподавателей.</u> Обсуждению этого метода полезно посвятить отдельное занятие. К этому моменту необходимо решить со школьниками несколько задач на выигрышные позиции (например, задачи о ладье и короле), не используя анализ с конца. На примере этих задач нужно подробно разобрать понятие выигрышной позиции. Само же занятие, посвященное анализу с конца, полезно начать с игры, интуитивный поиск выигрышных позиций в которой очень труден.

Задача 30. Ферзь стоит на поле $c1$. За ход его можно передвинуть на любое число полей вправо, вверх или по диагонали “вправо-вверх”. Выигрывает тот, кто поставит ферзя на поле $h8$.

Решение: Пользуясь анализом с конца, можно получить расстановку плюсов и минусов, показанную на рис.49. Итак, выигрывает первый игрок, причем у него есть три варианта первого хода: на поля $c5$, $e3$, $d1$.

<u>Методические замечания.</u> После подробного разбора этой задачи необходимо заново решить при помощи анализа с конца несколько уже известных

задач на выигрышные позиции, а затем разобрать несколько упражнений. Придумывать их очень просто. Достаточно квадратную доску в задачах 22, 23, 30 заменить на прямоугольную доску любых размеров или на доску какой-нибудь причудливой формы. Например, можно решать задачу 22 на шахматной доске с вырезанным центральным квадратом 2×2 (можно вырезать и другие поля). Расстановка плюсов и минусов на этой доске (вырезанные клетки заштрихованы) показана на рис.50.

__Для преподавателей.__ На последующих занятиях мы рекомендуем иногда давать по одной игре из списка, приведенного в конце параграфа.

Для решения некоторых задач удобно сначала переформулировать их. На эту идею мы советуем Вам обратить особое внимание. Ее иллюстрирует следующая задача:

Задача 31. Имеется две кучки камней: в первой – 7 камней, во второй – 5. За ход разрешается брать любое количество камней из одной кучки или поровну камней из обеих кучек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Решение: Покажем, как переформулировать эту задачу на уже привычном для нас языке шахматной доски. Пронумеруем вертикали и горизонтали шахматной доски числами от 0 до 7: вертикали – сверху-вниз, а горизонтали – справаналево. Каждой позиции исходной игры сопоставим клетку, находящуюся на пересечении горизонтали с номером, равным числу камней в первой кучке, и вертикали с номером, равным числу камней во второй кучке. Теперь заметим, что ходу в первоначальной игре соответствует ход ферзя вправо, вверх или по диагонали "вправо-вверх" на шахматной доске. Таким образом, мы отождествили нашу игру с игрой из задачи 30. Отметим, что точно так же можно отождествить игры в задачах 10 и 22.

* * *

А теперь еще несколько игр на анализ с конца:

Задача 32. Конь стоит на поле $a1$. За ход разрешается передвигать коня на две клетки вправо и одну клетку вверх или вниз, или на две вверх и на одну вправо или влево. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Задача 33. а) Имеется две кучки по 7 камней. За ход разрешается взять один камень из любой кучки или по камню из каждой кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

б) Кроме ходов, допустимых в пункте а), разрешается перекладывать один камень из первой кучки во вторую. В остальном правила те же.

Задача 34. Имеется две кучки по 11 спичек. За ход можно взять две спички из одной кучки и одну из другой. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Задача 35. Игра начинается с числа 0. За ход разрешается прибавить к имеющемуся числу любое натуральное число от 1 до 9. Выигрывает тот, кто получит число 100.

Задача 36. Игра начинается с числа 1. За ход разрешается умножить имеющееся число на любое натуральное число от 2 до 9. Выигрывает тот, кто первым получит число, большее 1000.

Задача 37. Игра начинается с числа 2. За ход разрешается прибавить к имеющемуся числу любое натуральное число, меньшее его. Выигрывает тот, кто получит 1000.

Задача 38. Игра начинается с числа 1000. За ход разрешается вычесть из имеющегося числа любое, не превосходящее его, натуральное число, являющееся степенью двойки ($1 = 2^0$). Выигрывает тот, кто получит ноль.

ЗАДАЧНИК ПЕРВОГО ГОДА

Как уже отмечено в предисловии, в первой части представлены основные темы занятий кружка первого года обучения (примерно 6–7 классы). Однако они, конечно, не исчерпывают всего многообразия тем, доступных школьникам этих параллелей. В этой главе мы попробуем частично ликвидировать создавшийся пробел.

Хотелось бы также подчеркнуть, что нельзя строить занятие кружка, используя только задачи "на тему". Необходимы также нестандартные задачи, для решения которых нужно придумать что-то новое, изобрести свежую идею или просто преодолеть какие-то технические трудности. Не обойтись без подобных задач и при составлении олимпиад, матбоев и т.д. Такие задачи мы и постарались собрать в этой главе.

1. Логические задачи

Главная цель занятий с младшеклассниками – научить их последовательно мыслить: не путать причину со следствием, тщательно проводить перебор, правильно строить цепочку рассуждений. Для этого очень полезны логические задачи.

1. Сегодня Петина мама сказала: "Все чемпионы хорошо учатся." Петя говорит: "Я хорошо учусь. Значит, я чемпион." Правильно ли он рассуждает?

2. На столе лежат 4 карточки, на которых сверху написано: А, Б, 4, 5. Какое наименьшее количество карточек и какие именно надо перевернуть, чтобы проверить, верно ли утверждение: "Если на одной стороне карточки написано четное число, то на другой стороне карточки – гласная буква"?

3. В кошельке лежат две монеты на общую сумму 15 копеек. Одна из них не пятак. Что это за монеты?

4. Предположим, что справедливы следующие утверждения:

а) среди людей, имеющих телевизоры, есть такие, которые не являются малярами;

б) люди, каждый день купающиеся в бассейне, но не являющиеся малярами, не имеют телевизоров.

Следует ли отсюда, что не все владельцы телевизоров каждый день купаются в бассейне?

5. В Стране Чудес проводилось следствие по делу об украденной муке. На суде Мартовский Заяц заявил, что муку украл Болванщик. В свою очередь Болванщик и Соня дали показания, которые по каким-то причинам не были записаны. В ходе судебного заседания выяснилось, что муку украл лишь один из трех подсудимых и что только он дал правдивые показания. Кто украл муку?

* * *

6. В коробке с карандашами есть карандаши разной длины и есть карандаши разного цвета. Докажите, что есть два карандаша, отличающиеся и по цвету и по длине.

7. В трех урнах лежат шары: в одной – два белых, в другой – два черных, в третьей – белый и черный. На урнах висят таблички: ББ, ЧЧ и БЧ, так, что содержимое каждой из урн не соответствует табличке. Как, вытащив один шар, определить, в какой урне что лежит?

8. Трех людей – A, B и C – усадили в ряд так, что A видит B и C, B видит только C, а C никого не видит. Затем им показали 5 колпаков – 3 красных и 2 белых, завязали глаза и надели каждому на голову красный колпак. После этого им развязали глаза и каждого спросили, может ли он определить цвет своего колпака. После того, как A, а затем и B, ответили отрицательно, C понял, какого цвета на нем колпак. Как он рассуждал?

9. В кафе встретились три друга: скульптор Белов, скрипач Чернов и художник Рыжов. "Замечательно, что один из нас блондин, другой – брюнет, а третий – рыжий, и при этом ни у одного из нас цвет не соответствует фамилии" – заметил черноволосый. "Ты прав" – сказал Белов. Определите цвет волос художника.

* * *

В следующих восьми задачах действие происходит на острове, коренными жителями которого являются рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут.

10. Человек A говорит: "Я лжец". Является ли он уроженцем острова рыцарей и лжецов?

11. Какой вопрос нужно задать на острове аборигену, чтобы узнать, куда ведет интересующая нас дорога – в город лжецов или в город рыцарей?

12. Какой вопрос нужно задать аборигену, чтобы узнать, живет ли у него дома ручной крокодил?

13. Представьте себе, что на языке острова слова "да" и "нет" звучат как "тип" и "топ", но не известно, какое именно слово что означает. Как, задав аборигену один вопрос, выяснить у него, лжец он или рыцарь?

14. Какой вопрос нужно задать аборигену, чтобы он обязательно ответил "тип"?

15. Островитянин А в присутствии другого островитянина В говорит: "По крайней мере один из нас – лжец". Кто такой А и кто такой В?

16. Есть три человека: А, В и С, про которых известно, что один из них рыцарь, другой – лжец, а третий – приезжий, нормальный человек, который может и говорить правду и лгать.

А говорит: "Я нормальный человек".

В говорит: "А и С иногда говорят правду".

С говорит: "В – нормальный человек".

Кто из них лжец, кто – рыцарь, а кто – нормальный человек?

17. Встретились несколько аборигенов, и каждый из них заявил всем остальным: "Вы все – лжецы". Сколько рыцарей могло быть среди этих аборигенов?

2. Конструкции и взвешивания

На занятиях кружка полезно предлагать задачи, решением которых является конкретная конструкция, то есть построение примера. При этом важно объяснить школьникам, что подобное построение действительно является решением задачи, в которой нужно ответить на вопрос: "Можно ли ...?" Следует также отметить, что такие задачи обычно вызывают интерес младшеклассников и решаются ими с удовольствием.

18. Имеются двое песочных часов: на 7 минут и на 11 минут. Яйцо варится 15 минут. Как отмерить это время при помощи имеющихся часов?

19. В кабине лифта 20-этажного дома есть две кнопки. При нажатии на одну из них лифт поднимается на 13 этажей, а при нажатии на другую – опускается на 8 этажей. Как попасть с 13-го этажа на 8-й?

20. За один ход число, написанное на доске, разрешается либо заменить на удвоенное, либо стереть у него последнюю цифру. Вначале на доске написано число 458. Как за несколько ходов получить число 14?

21. В ряд выложены карточки, на которых написаны числа 7, 8, 9, 4, 5, 6, 1, 2, 3. Разрешается взять несколько подряд лежащих карточек и переставить их в обратном порядке. Можно ли за три таких операции добиться расположения 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

22. В клетках таблицы 4×4 расставлены числа от 1 до 16 так, как показано на рис.51. Разрешается прибавить единицу одновременно ко всем числам любой строки или вычесть единицу из всех чисел любого столбца. Можно ли с помощью таких операций получить таблицу, приведенную на рис.52?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Рис. 51

1	5	9	13
2	6	10	14
3	7	11	15
4	8	12	16

Рис. 52

23. Можно ли натуральные числа от 1 до 100 выписать в строчку так, чтобы разность любых двух соседних (из большего вычитают меньшее) была не меньше 50?

24. Разложите гири с весами 1, 2, 3, …, 555 на три кучи, равные по весу.

25. В клетках таблицы 4×4 расставьте числа, не равные нулю так, чтобы сумма чисел, стоящих в углах любого квадрата 2×2, 3×3 или 4×4, была равна нулю.

26. Можно ли на ребрах куба расставить числа от 1 до 12 так, чтобы все суммы чисел на гранях были одинаковы?

27*. Можно ли расставить числа от 0 до 9 (каждое по разу) в кружках на рис.53 так, чтобы все суммы в вершинах заштрихованных треугольников были одинаковы?

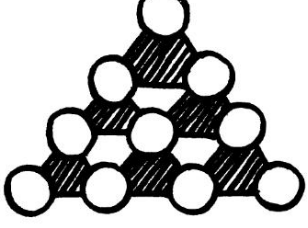


Рис. 53

28. Докажите, что в 400-значном числе 84198419...8419 можно вычеркнуть несколько цифр в начале и в конце так, чтобы сумма оставшихся цифр была равна 1984.

29. Найдите двузначное число, сумма цифр которого не меняется при умножении на любое однозначное число.

30. Существуют ли два последовательных натуральных числа, сумма цифр каждого из которых делится на 7?

31. Существуют ли несколько положительных чисел, сумма которых равна 1, а сумма их квадратов меньше 0.01?

32. Замок состоит из 64 одинаковых квадратных комнат, имеющих по двери в каждой стене и расположенных в виде квадрата 8×8. Полы в комнатах покрашены в белый цвет. Каждое утро маляр совершает прогулку по замку, причем, проходя через комнату, он перекрашивает пол в ней из белого цвета в черный, а из черного – в белый. Возможно ли, что когда-нибудь полы в замке окажутся покрашенными в шахматном порядке в черный и белый цвета?

33. Как расположить на плоскости стола несколько пятаков, чтобы каждый из них касался ровно трех других?

34. На складе в два штабеля сложены в произвольном порядке N контейнеров, которые имеют номера 1, 2, ..., N. Автопогрузчик подъезжает к одному из штабелей, снимает сверху несколько контейнеров и устанавливает их на другой штабель. Докажите, что за $2N - 1$ таких операций можно расположить все контейнеры в одном штабеле по порядку номеров.

* * *

К конструктивным задачам естественно примыкает цикл задач на взвешивания. Решая эти задачи, не забывайте проверять, что разобраны все возможные варианты, не ограничиваясь туманными и совершенно неудовлетворительными рассуждениями вроде "...рассмотрим наихудший случай ...".

Во всех задачах этого цикла, если не оговорено противное, под взвешиванием понимается взвешивание на чашечных весах без стрелки и без гирь.

35. Есть 9 монет, одна из которых фальшивая (она легче настоящих). За два взвешивания определите фальшивую монету.

36. Есть 10 мешков с монетами. Один из них целиком заполнен фальшивыми монетами, которые на один грамм легче настоящих. За одно взвешивание на весах со стрелкой, показывающей разность весов на чашках, определите "фальшивый" мешок.

37. Имеется 101 монета. Среди них 100 одинаковых настоящих монет и одна фальшивая, отличающаяся от них по весу. Необходимо выяснить, легче или тяжелее фальшивая монета, чем настоящая. Как это сделать при помощи двух взвешиваний на чашечных весах без гирь?

38. Есть 6 монет, из которых две – фальшивые, весящие меньше настоящих. За 3 взвешивания определите обе фальшивые монеты.

39. Есть 10 мешков, некоторые из которых целиком заполнены фальшивыми монетами, а все остальные – настоящими. Фальшивая монета на один грамм легче настоящей. Про один из мешков точно известно, что он наполнен настоящими монетами. За одно взвешивание на весах со стрелкой определите все "фальшивые" мешки.

40. Есть 5 монет, из которых три настоящих, одна – фальшивая, которая весит больше настоящей, и одна – фальшивая, которая весит меньше настоящей. За три взвешивания определите обе фальшивые монеты.

41. Имеется 68 монет, различных по весу. За 100 взвешиваний найдите самую тяжелую и самую легкую монеты.

42. Есть 64 камня с различными весами. За 68 взвешиваний найдите два самых тяжелых камня.

43. Имеется 6 гирь: по паре зеленых, красных и белых. В каждой паре одна гиря тяжелая, а другая – легкая, причем все тяжелые гири весят одинаково и все легкие гири весят одинаково. За 2 взвешивания определите все 3 тяжелые гири.

44. Есть 6 монет, из которых две – фальшивые, тяжелее настоящих на 0,1 грамма. Есть весы, которые реагируют только на разность весов на чашках, не меньшую 0,2 грамма. Как найти обе фальшивые монеты за 4 взвешивания?

45. а) Есть 16 монет, одна из которых – фальшивая, однако неизвестно, в какую сторону она отличается от настоящей по весу. За 4 взвешивания определите фальшивую монету.

б)*Есть 12 монет, одна из которых – фальшивая, однако неизвестно, в какую сторону она отличается от настоящей по весу. За 3 взвешивания найдите эту монету.

46*. В качестве вещественного доказательства суду были предъявлены 14 монет. Суд знает, что из них 7 монет – настоящие, а остальные 7 монет – фальшивые, весящие меньше настоящих. Адвокат обвиняемого знает, какие именно монеты настоящие, а какие – фальшивые, и хочет убедить в этом суд. Как ему это сделать всего за 3 взвешивания?

3. Геометрические задачи

Задачи, помещенные в этом параграфе, естественно распадаются на два цикла. Первый цикл (задачи 47–57) является продолжением предыдущего параграфа: он также посвящен конструированию, только на этот раз – геометрических объектов. Второй цикл составляют "обычные" геометрические задачи.

47. Нарисуйте 4-звенную ломаную, проходящую через 9 точек, изображенных на рис.54.

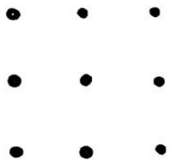


Рис. 54

48. Как разрезать квадрат на 5 прямоугольников, чтобы никакие два из них не имели общей стороны?

49. Можно ли нарисовать замкнутую 8-звенную ломаную, которая пересекает каждое свое звено ровно один раз?

50. Можно ли разрезать квадрат на несколько тупоугольных треугольников?

51. Верно ли, что среди любых 10 отрезков найдутся три, из которых можно составить треугольник?

52. Король хочет построить 6 крепостей и соединить каждые две из них дорогой. Начертите такую схему расположения крепостей и дорог, чтобы на ней было только три перекрестка, и на каждом из них пересекались только две дороги.

53. Можно ли расположить на плоскости 6 точек и соединить их непересекающимися отрезками так, чтобы каждая точка была соединена ровно с четырьмя другими?

54. Замостите плоскость одинаковыми 5-угольниками.

55. Разрежьте прямоугольник 3×9 на 8 квадратов.

56. Докажите, что квадрат можно разрезать на 1989 квадратов.

57. Как разрезать произвольный треугольник на 3 части, из которых можно сложить прямоугольник?

* * *

58. Точка M находится на стороне AB, а точка K – на стороне BC треугольника ABC. Отрезки AK и CM пересекаются в точке O. Докажите, что если $OM = OK$, и равны углы KAC и MCA, то треугольник ABC – равнобедренный.

59. Высота AK, биссектриса BH и медиана CM треугольника ABC пересекаются в одной точке O, причем $AO = BO$. Докажите, что треугольник ABC – равносторонний.

60. В 6-угольнике $ABCDEF$ треугольники ABC, ABF, FED, CDB, FEA, CDE равны. Докажите, что равны диагонали AD, BE, CF.

61. В остроугольном треугольнике ABC проведены высота CH и медиана BK, причем $BK = CH$, а также равны углы KBC и HCB. Докажите, что треугольник ABC – равносторонний.

62. В точке O пересекаются диагонали AC и BD 4-угольника $ABCD$. Периметры треугольников ABC и ABD равны. Равны и периметры треугольников ACD и BCD. Докажите, что $AO = BO$.

63. Докажите, что звезду (см. рис.55) нельзя нарисовать так, чтобы выполнялись условия: $BC > AB$, $DE > CD$, $FG > EF$, $HI > GH$, $KA > IK$.

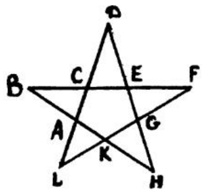


Рис. 55

4. Задачи с целыми числами

Теме "целые числа" уже посвящена одна глава нашего сборника – "Делимость и остатки". Но хороших и разных задач, связанных с целыми числами, так много, что мы сочли необходимым собрать некоторые из них в этом параграфе. В частности, цикл задач 70–84 является непосредственным дополнением к упомянутой главе. Другие же задачи выходят за рамки темы "Делимость".

64. Если каждый мальчик купит пирожок, а каждая девочка – булочку, то они потратят вместе на одну копейку меньше, чем если бы каждый мальчик купил булочку, а каждая девочка – пирожок. Известно, что мальчиков больше, чем девочек. На сколько?

65. 175 Шалтаев стоят дороже, чем 125, но дешевле, чем 126 Болтаев. Докажите, что на трех Шалтаев и одного Болтая рубля не хватит.

66. В классе каждый мальчик дружит с тремя девочками, а каждая девочка – с двумя мальчиками. При этом в классе всего 19 парт и 31 пионер. Сколько в классе учеников?

67. Две команды разыграли первенство школы в десяти видах, причем за победу команда получала 4 очка, за ничью – 2 и за проигрыш – 1 очко. Вместе обе команды набрали 46 очков. Сколько было ничьих?

68. Четверо товарищей купили вместе лодку. Первый внес половину суммы, внесенной остальными; второй – треть суммы, внесенной остальными; третий – четверть суммы, внесенной остальными, а четвертый внес 130 рублей. Сколько стоит лодка и сколько внес каждый?

69. На дороге, соединяющей два аула, нет горизонтальных участков. Автобус идет в гору всегда со скоростью 15 км/ч, а под гору – 30 км/ч. Найдите расстояние между аулами, если известно, что путь туда и обратно автобус проезжает за 4 часа.

* * *

70. Существуют ли такие натуральные a и b, что $ab(a-b) = 45045$?

71. Обозначим сумму трех последовательных натуральных чисел через a, а сумму трех следующих за ними натуральных чисел – через b. Может ли произведение ab равняться 111111111?

72. Докажите, что последняя ненулевая цифра числа 1985! четна.

73. Натуральные числа x и y таковы, что $34x = 43y$. Докажите, что число $x + y$ – составное.

74. Существуют ли такие целые числа a и b, отличные от нуля, что одно из них делится на их сумму, а другое – на их разность?

75. Простые числа p и q и натуральное число n удовлетворяют соотношению

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{pq} = \frac{1}{n}.$$

Найдите эти числа.

76. Докажите, что натуральное число, десятичная запись которого состоит из одной единицы, двух двоек, трех троек, ..., девяти девяток, не может быть точным квадратом.

77. Каждое из натуральных чисел a, b, c и d делится на $ab - cd$. Докажите, что $ab - cd$ равно 1 или -1.

78. В стране Анчурии в обращении имеются купюры четырех достоинств: 1 доллар, 10 долларов, 100 долларов, 1000 долларов. Можно ли отсчитать миллион долларов так, чтобы получилось ровно полмиллиона купюр?

79. На доске написано число 1. Каждую секунду к числу на доске прибавляют сумму его цифр. Может ли через некоторое время на доске появиться число 123456?

80. Докажите, что число 3999991 не является простым.

81. а) Найдите семизначное число, все цифры которого различны и которое делится на все эти цифры.

б) Существует ли такое восьмизначное число?

82. У числа 19^{100} вычисляют сумму цифр, после этого у полученного числа подсчитывают сумму цифр и так далее, до тех пор, пока не получится однозначное число. Какое оно?

83. Докажите, что остаток от деления простого числа на 30 – простое число или единица.

84. Существует ли натуральное число, произведение цифр которого равно 1980?

* * *

85. Некоторое число оканчивается на 2. Если эту цифру перенести в начало числа, то число удвоится. Найдите наименьшее такое число.

86. Дано шестизначное число $\overline{abcdef}$, причем $\overline{abc} - \overline{def}$ делится на 7. Докажите, что и само число делится на 7.

87. Найдите минимальное натуральное число, которое в 4 раза меньше числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке.

88. Дано трехзначное число, у которого первая и последняя цифры разнятся не менее, чем на 2. Составляется разность этого числа и числа ему обращенного (т.е. числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке). К результату прибавляется число ему обращенное. Докажите, что полученная сумма равна 1089.

* * *

89. Что больше: 2^{300} или 3^{200}?

90. Что больше: 31^{11} или 17^{14}?

91. Что больше: 50^{99} или $99!$?

92. Что больше: $888\ldots88 \times 333\ldots33$ или $444\ldots44 \times 666\ldots67$ (каждое из чисел записано 1989 цифрами)?

93. Каких 6-значных чисел больше: тех, которые представляются в виде произведения двух трехзначных чисел, или остальных?

* * *

94. Дано несколько одинаковых картонных треугольников. В вершинах каждого из них написаны числа 1, 2 и 3. Треугольники сложены в ровную стопку. Может ли оказаться так, что суммы чисел вдоль каждого вертикального ребра стопки равны 55?

95. Можно ли расположить по окружности 15 целых чисел так, чтобы сумма любых четырех чисел подряд равнялась 1 или 3?

96*. Найдите тысячу натуральных чисел таких, что их сумма равна их произведению.

97. Подряд выписаны числа 2^{1989} и 5^{1989}. Сколько всего выписано цифр?

98. Автобусный билет называется счастливым, если сумма первых его трех цифр равна сумме трех последних. Докажите, что счастливых билетов столько же, сколько билетов с суммой всех шести цифр, равной 27.

5. Смесь

99. В классе 14 человек занимаются английским языком, 8 человек – французским. Трое учеников при этом изучают оба языка. Сколько учеников в классе, если известно, что каждый изучает хотя бы один язык?

100. Плоскость раскрашена в два цвета. Докажите, что найдутся две точки одного цвета на расстоянии 1 метр.

101. Прямая раскрашена в два цвета. Докажите, что найдется отрезок ненулевой длины, середина и концы которого окрашены в один цвет.

102. Квадрат 8×8 сложен из доминошек 1×2. Докажите, что какие-то две из них образуют квадрат 2×2.

103. Числа, записанные в таблице 3×3, разрешается изменять следующим образом: прибавить по единице к каждому из чисел любого квадратика 2×2. Можно ли из таблицы, заполненной одними нулями, получить таблицу, изображенную на рис.56?

4	9	5
10	18	12
6	13	7

Рис. 56

104. Автобус назовем переполненным, если в нем больше 50 пассажиров. Едет колонна автобусов. Что больше – процент переполненных автобусов или процент пассажиров, едущих в переполненных автобусах?

105. Варианты городской олимпиады для 6–11 классов составляются так, что в каждом из них по 8 задач, и в каждом варианте есть ровно три задачи, которые встречаются в других классах. Какое максимально возможное количество задач могло использовать жюри?

106. Учащиеся школы построены прямоугольным каре. После этого в каждой колонне выбрали самого высокого школьника, и из них выбрали самого низкого – им оказался Петя Иванов. Затем в каждой шеренге выбрали самого низкого школьника и из них выбрали самого высокого – им оказался Ваня Петров. Кто выше – Ваня или Петя?

107. 30 стульев стоят в ряд. Время от времени подходит человек и садится на один из свободных стульев. При этом один из его соседей (если такие есть) встает и уходит. Какое максимальное число стульев может оказаться занятым, если исходно

а) все стулья свободны;

б) 10 стульев из 30 заняты?

108. В вершинах пятиугольника стоят рядом три фишки. Любую фишку разрешается сдвинуть вдоль диагонали на любое свободное поле. Можно ли получить такую позицию, в которой одна фишка осталась бы на старом месте, а две другие поменялись бы местами?

109. Среди чисел a, b, c, d, e, f нет равных нулю. Докажите, что среди чисел ab, cd, ef, $-ac$, $-be$, $-df$ есть и положительные и отрицательные.

110*. Рубик разрубает свой кубик на маленькие кубики. Сколько раз ему придется взмахнуть топором, чтобы это сделать, если наложения кусков кубика друг на друга при разрубании разрешены?

111. Клетки тетрадного листа раскрашены в восемь цветов. Докажите, что найдется фигура вида, указанного на рис.57, внутри которой есть две клетки одного цвета.

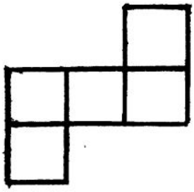


Рис. 57

112. Дан шестизначный телефонный номер. Из скольких семизначных номеров его можно получить вычеркиванием одной цифры?

113. Сколько билетов подряд надо приобрести в автобусной кассе, чтобы наверняка попался счастливый? (Билет называется счастливым, если сумма первых трех его цифр равна сумме трех последних; количество билетов в рулоне не ограничено).

114*. Состоялся волейбольный турнир в один круг. Будем говорить, что команда A сильнее команды B, если A выиграла у B или есть такая команда C, которая выиграла у B, проиграв при этом команде A. Докажите, что команда, которая выиграла турнир, сильнее всех.

115*. Дан клетчатый прямоугольник 20×30. Можно ли провести прямую, пересекающую внутренности 50 клеток?

116. В клетках шахматной доски расставлены натуральные числа от 1 до 64, причем каждое число встречается ровно один раз. Докажите, что найдутся две соседние клетки, числа в которых отличаются не менее, чем на 5.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

Глава 9. ИНДУКЦИЯ

(И.С.Рубанов)

1. Процесс и метод индукции

ВВЕДЕНИЕ (ДЛЯ ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ). Наверное, каждому приходилось выстраивать в ряд костяшки домино. Толкнешь первую – она повалит вторую, та – третью и так до тех пор, пока не упадут все. Заменим ряд доминошек бесконечным рядом утверждений: $У_1$, $У_2$, $У_3$, ..., занумерованных натуральными числами. Пусть мы умеем доказывать, что:

(Б): первое утверждение ряда истинно;

(П): из истинности любого данного утверждения ряда вытекает истинность следующего за ним утверждения.

Тогда нами доказаны все утверждения ряда. В самом деле, мы умеем "толкать первую доминошку" – доказывать первое утверждение, а (П) означает, что "каждая доминошка, падая, валит следующую". Какую бы "доминошку"-утверждение мы ни взяли, волна "падений"-доказательств, раз начавшись, рано или поздно дойдет до нее, т.е. утверждение будет доказано.

Мы описали **схему** метода математической индукции (ММИ). Теорема (Б) здесь называется **базой индукции**, а теорема (П) – индукционным переходом. Рассуждение с **утверждениями** – "доминошками" показывает, что переход (П) есть краткая запись цепочки теорем, изображенной на рисунке:

$$У_1 \longrightarrow У_2 \longrightarrow У_3 \longrightarrow \ldots \longrightarrow У_k \longrightarrow У_{k+1} \longrightarrow \ldots$$

Теоремы этой цепочки мы будем называть шагами, а процесс их последовательного доказательства – процессом индукции. Наглядно процесс индукции можно представить как волну доказательств, бегущую от утверждения к утверждению по цепочке теорем.

Психологически, суть индукции – именно в ее процессе. Как научить (или научиться) проводить его, мы показываем в форме диалога между преподавателем ("П") и учеником ("У"), который в несколько приглаженном виде отражает реальное занятие кружка. В конце первой части диалога приведены методические комментарии для читателя-преподавателя (ссылки на них даны в тексте).

* * *

П: Задача 1. Из квадрата клетчатой бумаги размером 16×16 вырезали одну клетку. Докажите, что полученную фигуру можно разрезать на "уголки" из трех клеток.

У: Все просто – в уголке три клетки, а $16^2 - 1$ делится на 3.

П: Если все так просто, разрежьте заодно на уголки полоску 1×6 – ведь 6 тоже делится на 3.

У: Да ... Так рассуждать нельзя. Тогда я не знаю как решать.[1]

П: Вы не можете решить эту задачу. Но, может быть, вы сможете придумать и решить более простую задачу, подобную этой?

У: Можно взять квадрат поменьше, например, 4×4.

П: Или 2×2.[2]

У: Для 2×2 и доказывать нечего – после удаления любой клетки остается как раз уголок. Но что это дает?

П: А вы попробуйте теперь решить задачу про 4×4.

У: Квадрат 4×4 можно разрезать на четыре квадрата 2×2. С тем из них, в котором вырезанная клетка, все ясно. А что делать с тремя другими?

П: Попробуйте вырезать из них уголок, примыкающий к центру большого квадрата (см. рис.58).

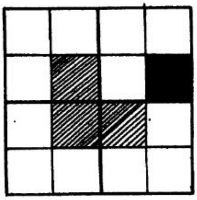


Рис. 58

У: Понял! Каждый из трех квадратов 2×2 потеряет по клетке и тоже превратится в уголок! Задача для квадрата 4×4 решена. Но что дальше?

П: Попробуйте взять квадрат 8×8. Его можно разрезать на четыре квадрата 4×4. Попробуйте это использовать.

У: Можно рассуждать так же, как и перед этим. В одном из квадратов 4×4 – вырезанная клетка. Его, как уже доказано, можно разрезать на уголки. А из трех оставшихся вырежем уголок, примыкающий к центру квадрата 8×8. Тогда они потеряют по одной клетке, и мы тоже сможем разрезать их на уголки.

П: Видно ли теперь, как решить исходную задачу?

У: Да. Разрежем квадрат 16×16 на четыре квадрата 8×8. В одном из них – вырезанная клетка. Мы только что доказали, что его можно разрезать на уголки. А из трех оставшихся вырежем уголок, примыкающий к центру квадрата 16×16. Теперь каждый из них тоже можно разрезать на уголки. Все!

П: Нет, не все. Мы решили задачу про квадрат 16×16, наведя к ней "мосты" от более простых аналогичных задач. А нельзя ли теперь от нее самой "навести мосты" к более сложным подобным задачам?(3)

У: Пожалуйста. Докажем, что на уголки можно разрезать квадрат 32×32 без клетки. Для этого разрежем его на четыре квадрата 16×16, удалим центральный уголок и используем уже доказанное утверждение про квадрат 16×16.

П: Так ведь можно и дальше идти!

У: Конечно. Из разрезаемости квадрата 32×32 можно так же получить разрезаемость квадрата 64×64, из нее – квадрата 128×128 и так далее ...

П: То есть получается бесконечная цепочка аналогичных утверждений про квадраты разных размеров. А можно ли сказать, что мы доказали все их?

У: Да. Сначала мы доказали первое утверждение цепочки – про квадрат 2×2. Затем вывели из него второе, из второго – третье, из третьего – четвертое и так можно продолжать до бесконечности. Ясно, что

<u>идя так по цепочке, мы дойдем до каждого из</u>

<u>ее утверждений. Значит, все они верны.</u>

П: Верно. Мне представляется сейчас такая картина: по цепочке утверждений и теорем: $2 \times 2 \longrightarrow 4 \times 4 \longrightarrow 8 \times 8 \longrightarrow \ldots$ бежит "волна доказательств". Ясно, что она добежит до каждого утверждения цепочки.

* * *

<u>**Методические замечания.**</u> Сделаем несколько замечаний в связи с только что произошедшим диалогом. Они относятся к местам, помеченным в тексте соответствующим номером сноски.

Комментарий №1. В тот момент, когда ученик "доказал" утверждение задачи при помощи делимости на 3, перед преподавателем возникла обычная проблема – как объяснить ученику его ошибку, одновременно не сделав ему существенной подсказки. Преподаватель решает ее при помощи заранее заготовленного контрпримера. Такие "подводные камни" и способы борьбы с ними всегда полезно знать загодя. Обходить "камни" надо непринужденно, минимально отвлекаясь от главной линии решения.

Комментарий №2. Эта реплика вставлена в текст не случайно. Тривиальный случай 2×2 ученик вряд ли назовет сам – для него это "не задача" (мы еще не раз столкнемся с этим психологическим моментом). Однако преподаватель знает, что с этого случая начинать удобнее.

Комментарий №3. В этой части диалога наглядно возникает "пошаговая" схема проведения решения:

$$2 \times 2 \longrightarrow 4 \times 4 \longrightarrow 8 \times 8 \longrightarrow 16 \times 16 .$$

Перед нами – начало процесса индукции: база 2×2 и три первых шага. Существенно, что сделано достаточно шагов индукции, чтобы ученик заметил аналогию между ними. Теперь, после наводящего вопроса, он легко сможет сам развернуть процесс индукции целиком.

Заметим, что существует еще несколько индукционных решений этой задачи, но они невыгодны нам, ибо процесс индукции не раскрывается в них так четко, как в приведенном примере. Поэтому преподаватель отвлекает от них целенаправленной подсказкой. И вообще, обратите внимание на то, как преподаватель точно ведет свою "партию": где нужно, он незаметно направляет ученика на нужный путь, отвлекает от ложной аналогии, помогает сэкономить силы. При этом очень важна ненавязчивость: одно из главных правил гласит – ученик должен как можно большую часть пути пройти сам.

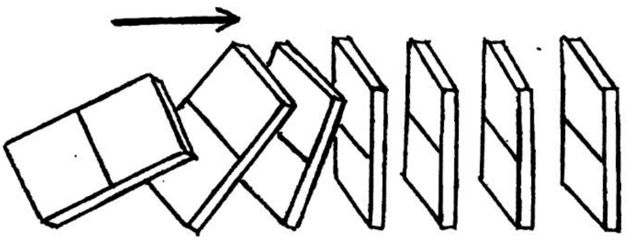


Рис. 59

Подведем промежуточный итог: ученик (а чаще это делает сам преподаватель) изложил схему ММИ. Подчеркнутая фраза "идя так по цепочке, мы дойдем до каждого из ее утверждений" – вольная формулировка принципа математической индукции, лежащего в основе ММИ. С точной его формулировкой вы сможете познакомиться по любой из книг [76], [78], [79]. Но заметим, что давать ее в начале обучения чаще всего нецелесообразно, а нередко и вредно. Формализация интуитивно ясного утверждения может вызвать у добросовестного ученика чувство непонимания и породить неуверенность. Напротив, надо всеми средствами делать схему ММИ живее и нагляднее. Кроме "волны" и "доминошек" из введения тут полезны аналогии с ходьбой по лестнице, застежкой-молнией и т.п.

* * *

Продолжим еще немного прерванный диалог.

П: Итак, мы доказали бесконечный ряд утверждений о разрезаемости квадратов. Теперь давайте запишем его целиком, без "и т.д.".

У: Так ведь никакой тетради не хватит.

П: Да, если писать каждое утверждение отдельно. Но ведь утверждения-то одинаковы, меняются только размеры квадратов. Это позволяет целиком закодировать нашу цепочку одной строкой:

(*) квадрат $2^n \times 2^n$ без одной клетки можно разрезать на уголки.

Здесь есть переменная n. Любое утверждение нашей цепочки можно получить, если подставить на место переменной число, равное номеру утверждения в цепочке. Например, утверждение про квадрат 32×32 получится при $n = 5$. А как выглядит десятое утверждение цепочки?

У: Подставим $n = 10$. Получится утверждение про квадрат $2^{10} \times 2^{10}$, т.е. 1024×1024.

П: Посмотрите: привычная вещь – переменная, а какая могучая – бесконечную цепочку позволяет свернуть в одну строку. Что же это такое – "переменная"?

У: Ну ... это буква ... неизвестное ...

П: Запомните: эта буква обозначает просто пустое место, точнее "рамку", куда можно помещать различные числа. По- английски она иногда выразительно называется "placeholder" – т.е. "местодержатель". Числа, которые разрешается подставлять на место переменной, называются ее значениями. Так, значениями переменной n в (*) служат натуральные числа. Именно благодаря этому фраза (*) заменяет бесконечную цепочку утверждений.

А теперь вспомним, как мы доказывали, что все утверждения цепочки (*) верны. Обозначим их по порядку: $У_1$ – про квадрат 2×2, $У_2$ – про 4×4 и т.д. Сначала мы доказали утверждение $У_1$, а потом – бесконечную цепочку однотипных теорем: если верно $У_1$, то верно и $У_2$; если доказано $У_2$, то верно и $У_3$; если доказано $У_3$, то верно и $У_4$ и т.д. Давайте попробуем закодировать и эту цепочку: "Для каждого натурального n ...

У: ...если доказано $У_n$, то верно и $У_{n+1}$."

П: А теперь расшифруем эту фразу: что означают $У_n$ и $У_{n+1}$?

У: Получается так:

(**) "Какое бы натуральное n ни взять, если уже доказано, что квадрат $2^n \times 2^n$ без клетки можно разрезать на уголки, то верно и то, что квадрат $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ без клетки можно разрезать на уголки."

П: А вы можете доказать полученную общую теорему?

У: Пожалуй. Разрежем квадрат $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ на четыре квадрата $2^n \times 2^n$. В одном из них – выброшенная клетка. Его можно разрезать на уголки по условию. Из трех других удалим по клетке, вырезав уголок, примыкающий к центру исходного квадрата, а потом снова используем условие теоремы.

П: Верно. Заметьте теперь, что, доказав общую теорему (**), Вы доказали сразу все однотипные теоремы закодированной ею цепочки. Например, заменив в Вашем рассуждении переменную n числом 1, получим уже знакомое нам доказательство того, что разрезаемость квадрата 2×2 влечет разрезаемость квадрата 4×4 и т.д. Таким образом, если (**) – закодированная цепочка теорем, то Ваше рассуждение – закодированная "волна доказательств" этих теорем. Думаю, Вы поняли: цепочку однотипных теорем выгоднее доказывать именно в таком свернутом виде. Но для этого, конечно, надо сначала научиться записывать их в таком виде.

* * *

Метод, которым мы решили задачу 1, и называется МЕТОДОМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ. В чем его суть?

Во-первых, мы рассмотрели утверждение (*) не как единый факт, а как бесконечный ряд однотипных утверждений.

Во-вторых, мы доказали первое из них – оно называется базой индукции.

В третьих, мы вывели из первого утверждения второе, из него тем же способом – третье и так далее до бесконечности. Это был индукционный переход; (**) – его краткая (свернутая) запись. Поскольку от базы шагами индукции можно дойти до любого из наших утверждений, все они оказываются доказанными.

* * *

"Метод есть идея, примененная дважды" (Д.Пойа).

Для успешного освоения ММИ обычно приходится проигрывать изложенный выше сценарий на нескольких задачах. Задачи, пригодные для этой цели, мы будем называть ключевыми. Одну из таких задач мы разобрали выше. Рассмотрим теперь еще четыре:

Задача 2. Докажите, что число $111\ldots11$ (243 единицы) делится на 243.

Указание: Задача обобщается до утверждения, что число, записываемое 3^n единицами, делится на 3^n. База: 111 делится на 3. Ученики обычно начинают с утверждения, что 111111111 делится на 9 – наша база для них "не задача". Есть два "подводных камня": попытка по аналогии с признаками делимости на 3 и на 9 использовать неверный "признак" делимости на 27, и рассуждения типа "если число делится на 3 и на 9, то оно делится на 27".

Нужный тип перехода: разделить число, записанное 3^{n+1} единицами на число, записанное 3^n единицами и убедиться в том, что частное делится на 3.

Задача 3. Докажите, что при каждом натуральном n, начиная с 4, существует выпуклый n-угольник, имеющий ровно три острых угла.

Указание: Эту задачу целесообразно давать, если ученики уже знают, что у выпуклого многоугольника не может быть более трех острых углов. База – $n = 4$ – проверяется прямым построением.

Переход: "отпилим" один из тупых углов, число углов возрастет на один, а острые углы сохранятся (см. рис.60). Переход с "пристраиванием" угла к одной из сторон сложнее. Есть и побочные решения (с использованием вписанных многоугольников и др.), но от них легко отвлечь идеей отрезания угла. Утверждение задачи верно, конечно, и при $n = 3$, но нам невыгодно начинать индукцию с тройки, ибо перейти от $n = 3$ к $n = 4$ описанным выше способом нельзя.

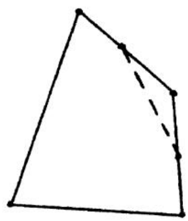


Рис. 60

Задача 3 дает пример построения по индукции. Подробнее об этом см. в [79].

Задача 4. (Игра "Ханойская башня"). У Пети есть детская пирамидка с n кольцами и два пустых стержня той же высоты. Разрешается перекладывать верхнее кольцо с одного стержня на другой, но при этом запрещается класть большее кольцо на меньшее. Докажите, что

а) Петя сможет переложить все кольца на один из пустых стержней;

б) Он сможет сделать это за $2^n - 1$ перекладываний.

в)*Меньшим числом перекладываний ему обойтись не удастся.

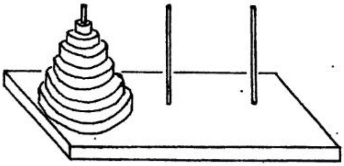


Рис. 61

Указание: а), б): База очевидна.

Переход. Пусть мы умеем перекладывать k колец за $2^k - 1$ ходов. Возьмем $k+1$ кольцо. За $2^k - 1$ ходов переложим все кольца, кроме нижнего, на третий стержень. Затем нижнее положим на второй. Потом за $2^k - 1$ ходов переложим все остальные кольца с третьего стержня на второй. Всего получится $(2^k - 1) + 1 + (2^k - 1) = 2^{k+1} - 1$ ходов. Советуем в начале провести несколько шагов индукции "вручную".

в) Давать выборочно: по трудности этот пункт уже не ключевой. Идея доказательства перехода: чтобы переложить самое нижнее кольцо на второй стержень, надо сначала все остальные переложить на третий.

Задача 5. Плоскость поделена на области несколькими прямыми. Докажите, что эти области можно раскрасить в два цвета так, чтобы любые две соседних области были окрашены в разные цвета. (Соседними называются области, имеющие общий участок границы).

Указание: Здесь мы сталкиваемся с новой трудностью: в условии задачи отсутствует явное указание на индуктивную переменную. Решение надо начинать с ее выявления. Для этого можно переформулировать условие: "На плоскости проведено n прямых ...". Далее база – $n = 1$ или $n = 0$ – по вкусу. Переход: убираем $(k+1)$-ю прямую, раскрашиваем полученную карту, снова проводим убранную прямую и перекрашиваем в противоположный цвет все области с одной стороны от нее.

<u>Для преподавателей.</u> Несколько слов о работе с ключевыми задачами. Первые одна-две (обычно это задачи 1–2) обсуждаются по сценарию приведенного выше диалога – выращивание цепочки из одного частного утверждения. Тут ученики должны понять суть процесса индукции и усвоить связь между цепочками утверждений и предложениями с натуральными переменными. С недостаточно подготовленными школьниками свертку цепочки шагов индукции на этом этапе можно не проводить. Она отрабатывается на втором этапе обучения, цель которого – научить ребят работать с переходом в свернутом виде. Задачи здесь разумно предлагать сразу в общем виде, как задачи 3 и 4 выше. В них цепочка утверждений уже дана и решение начинается с ее развертывания, примерно так: “Перед нами свернутая цепочка утверждений. Как звучит первое из них? Пятое? 1991-е?” Но цепочка шагов индукции по-прежнему выращивается и сворачивается по отработанной выше схеме, пока ученики не усвоят прочно связь развернутой цепочки с ее свернутой записью.

* * *

Подводя итоги решения ключевых задач, полезно дать ученикам четкий

ПЛАН РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

1. Найдите в условии ряд однотипных утверждений – развернутый или свернутый в предложение с переменной. Переменная может быть замаскирована. Тогда выявите ее, переделав формулировку условия. Если цепочки нет, попробуйте вырастить ее так, чтобы задача оказалась в ее составе.

2. Докажите первое утверждение ряда (базу индукции).

3. Докажите, что при каждом натуральном n из справедливости n-го утверждения ряда вытекает справедливость $(n+1)$-го утверждения (индукционный переход).

4. Если база и переход доказаны, то доказаны и все утверждения ряда, ибо до каждого из них можно дойти от базы шагами перехода.

Последний пункт во всех задачах проводится одинаково. Поэтому его обычно не проводят, а просто подразумевают. Но знать его необходимо. Обычно не выделяют явно и первый пункт – поиск ряда утверждений. Для знающих ММИ это оправдано, но с начинающими мы настоятельно советуем проводить его по крайней мере до тех пор, пока это не станет для них само собой разумеющимся.

2. ММИ и догадка по аналогии

Задача 6. На сколько частей делят плоскость n прямых, среди которых нет параллельных и никакие три не пересекаются в одной точке?

У: Попробуем действовать по плану. Есть ли в условии какая-нибудь цепочка? Кажется, да: на сколько частей делят плоскость одна прямая, две прямых, три прямых ...? Пункт второй – база: одна прямая делит плоскость на две части.

П: Или ноль прямых – на одну часть.

У: Конечно. Пункт третий – переход ...!?

П: Ваше недоумение оправдано: мы столкнулись с трудностью нового типа. В предыдущих задачах мы имели дело с цепочками утверждений. А тут цепочка есть, но не из утверждений, а из вопросов. Утверждения получатся, если дать на них ответы.

У: Но как?

П: Попробуйте угадать правило, по которому число частей $Ч_n$ зависит от n – числа прямых. Физики в таких случаях ставят эксперименты. Мы тоже можем "поэкспериментировать", найдя число частей при небольших значениях н вручную. Попробуйте.

У: Хорошо. Итак, $Ч_0 = 1$, $Ч_1 = 2$, $Ч_2 = 4$, $Ч_3 = 7$, $Ч_4 = 11$. Надо подумать .... А, кажется, я догадался! С добавлением n-й прямой число частей увеличивается на n. Стало быть, $Ч_n = 1 + (1 + 2 + 3 + \ldots + n)$. Задача решена.

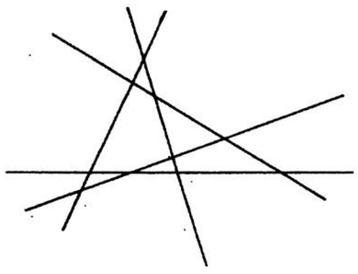


Рис. 62

П: Нет, еще не решена. Не забывайте, что на самом деле мы пока проверили это равенство только для $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Для других значений n это пока лишь догадка, основанная на предположении, что добавление n-й прямой увеличивает число частей на n. А вдруг она неверна? Гарантию может дать только доказательство.

У: ... методом математической индукции.

П: Только сначала дополним план из параграфа 1 таким пунктом:

1а. Если в задаче вместо цепочки утверждений – цепочка вопросов, замените их на предполагаемые ответы. Их можно угадать, "поэкспериментировав" с первыми вопросами цепочки. Но, угадав ответы, не забудьте их обосновать.

У: Я знаю, как обосновать нашу догадку. Базу мы уже проверили. А то, что при добавлении n-й прямой количество частей увеличится на n, доказывается просто: она пересекает старые прямые в $n-1$ точках и, значит, рассекает n старых кусков.

* * *

Догадка по аналогии, продемонстрированная нам только что – это оружие острое, но и опасное: велико искушение принять лишь угаданную закономерность за уже доказанную. Хорошим лекарством от такого заблуждения служат задачи, где напрашивающаяся догадка оказывается неверной. Вот два примера.

Задача 7. Верно ли, что число n^2+n+41 – простое при любом натуральном n?

Комментарий: Неверно: $40^2+40+41=41^2$, $41^2+41+41=41\cdot 43$. Но тот, кто попытается угадать ответ, "экспериментируя" с небольшими значениями n, рискует прийти к противоположному выводу, ибо при всех n от 1 до 39 получаются простые числа. Этот знаменитый пример принадлежит Леонарду Эйлеру.

Задача 8. На окружности взяли n точек и соединили их всевозможными отрезками. Оказалось, что никакие три из этих отрезков не пересекаются в одной точке. На сколько частей они делят круг?

Комментарий: При $n=1, 2, 3, 4, 5$ получаем соответственно 1, 2, 4, 8, 16 частей. Напрашивается вывод, что при любом n количество частей равно 2^{n-1}. А на самом деле их будет $n(n-1)(n-2)(n-3)/24+n(n-1)/2+1$.

Другие примеры можно найти во введении к [78].

3. Классические задачи

Среди классических задач на применение ММИ в элементарной математике можно выделить три большие группы: доказательство тождеств, доказательство неравенств и задачи на делимость. Несмотря на кажущуюся простоту их решений при помощи метода математической индукции, здесь возникает и ряд препятствий как методического, так и психологического характера. Мы начнем с их обсуждения.

П: Поговорим еще о задаче 6. Вам нравится запись ответа в виде $1+(1+2+3+\ldots+n)$?

У: Не очень. Выглядит довольно громоздко. И вообще, хорошо бы обойтись без многоточия.

П: Пожалуйста. Оказывается, $1+2+3+\ldots+n=n(n+1)/2$. Это можно доказать методом математической индукции.

У: Но ведь для индукции нужен ряд утверждений, а тут – одна формула.

П: Посмотрите внимательно: в формуле есть переменная n. А это, как мы уже знаем, признак свернутого ряда. Подставьте, например, вместо n число 1991.

У: Получилось $1+2+\ldots+1991=1991\cdot 1992/2$.

П: То есть числовое равенство. Из них и состоит ряд, свернутый в нашу "формулу". Доказать ее – значит убедиться, что все эти числовые равенства верны. Если это так, то про равенство с переменной говорят, что оно "верно при всех допустимых значениях переменной" и называют его тождеством. Любое тождество с натуральной переменной можно пытаться доказать по индукции.

У: А если наше равенство при каких-то n окажется неверным?

П: Тогда оно не будет тождеством и доказать его не удастся: не пройдет доказательство базы или перехода. Строго говоря, чтобы отличить тождества от произвольных равенств с переменными, перед ними следовало бы писать фразы типа "для всякого натурального ..., верно, что ...", но этого обычно не делают. Имеется в виду, что читатель сам должен по смыслу текста понять, идет ли речь об уже доказанном тождестве, или о тождестве только предполагаемом, или, например, об уравнении.

У: Что ж, применим ММИ. База: $n=1$. Надо доказать, что ... $1+2+\ldots+1=1\cdot 2/2$?!

П: Надо доказать, что $1=1\cdot 2/2$. Вас сбила с толку запись $1+2+\ldots+n$ (в целом вполне удобная). Дело в том, что при $n=1$ ее "хвост" $2+\ldots+n$ на самом деле отсутствует.

У: База ясна. Перейдем ко второму равенству ряда. Надо доказать, что $1+2=2\cdot 3/2$. Это легко: $3=3$. Теперь к третьему: $1+2+3=3\cdot 4/2$. Это тоже легко: $6=6$. К четвертому ... тоже легко. А дальше что? Так и будем проверять каждое тождество напрямую? Здесь ведь нет никакого перехода.

7 Зак. 2413.

П: А вы попробуйте записать переход сразу в общем, свернутом виде.

У(подумав): Что-то и это не получается.

__Для преподавателей.__ Человеку, хорошо владеющему ММИ, задачи на доказательство тождеств кажутся самыми простыми. Недаром они во всех пособиях идут первыми. Однако из нашего диалога видны два источника трудностей для ученика, впервые осваивающего применение ММИ к тождествам. Первое: тождество с одной натуральной переменной зачастую не воспринимается учащимися как цепочка утверждений. Одна из причин тут в том, что простые числовые равенства не воспринимаются учениками как самостоятельные утверждения. В самом деле, что содержательного в том, что $1+2+3=3\cdot 4/2=6$?

И второе: на первых шагах здесь невозможно усмотреть общий вид индукционного перехода. Ведь в начале, например, при проверке равенств $1+2=2\cdot 3/2$, $1+2+3=3\cdot 4/2$ и т.д., вы не переходите от одного равенства к другому, а просто проверяете их.

Именно поэтому тождества не могут быть ключевыми задачами, несмотря на свою простоту, и начинать с них обучение, как это часто предлагается, означает своими руками создавать себе проблемы (мы, конечно, не имеем в виду самых способных ребят – они усвоят метод на любых задачах, но только на них рассчитывать нельзя). А вот для закрепления ММИ тождества подходят очень хорошо, ибо доказательства здесь обычно несложны.

П: Хорошо, я подмогу. Представьте себе, что мы делаем шаги индукции один за другим. Пусть эта “волна доказательств” уже дошла до утверждения с номером k. Как оно выглядит?

У: Получается $1+2+3+\ldots+k=k(k+1)/2$. (#)

П: Совершенно верно. А теперь скажите, как выглядит следующее за ним утверждение – первое из тех, до которых “волна” еще не дошла?

У: Здесь $n=k+1$ и получается $1+2+\ldots+(k+1)=(k+1)(k+2)/2$.

П: Хорошо. Только давайте в стоящей слева краткой записи суммы вместе с последним слагаемым запишем еще и предпоследнее:

$$1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\frac{1}{2}(k+1)(k+2) \qquad (\#\#)$$

Теперь скажите, в чем будет состоять очередной шаг индукции.

У: Это-то понятно: в том, чтобы из (#) вывести (##).

П: А теперь представьте, что мы научились выводить (##) из (#) при каждом натуральном k. Тогда мы обоснуем все шаги перехода сразу. Получается, что теорема о переходе здесь состоит в том, что:

При каждом натуральном k из равенства $1 + 2 + \ldots + k = k(k + 1)/2$, следует равенство $1 + 2 + \ldots + (k + 1) = (k + 1)(k + 2)/2$.

Иначе говоря: дано равенство (#) – докажите равенство (##), если k – произвольное натуральное число. Для удобства доказательства давайте обозначим левые части равенств (#) и (##) через S_k и S_{k+1}.

У: Из (##) видно, что $S_{k+1} = S_k + (k + 1)$ (вот зачем учитель записал и предпоследнее слагаемое!). Но мы уже знаем, что $S_k = k(k + 1)/2$. Отсюда получаем, что

$$S_{k+1} = \frac{1}{2}k(k+1) + (k+1) = \frac{1}{2}\left[k(k+1) + 2(k+1)\right] = \frac{1}{2}(k+1)(k+2), \text{ ч.т.д.}$$

П: Запомните полезную идею, с помощью которой был доказан переход: левая часть равенства (##) была выражена через левую часть равенства (#), а потом последняя была заменена на правую часть равенства (#).

<u>**Для преподавателей.**</u> Здесь появляется еще одна связанная с тождествами трудность – ученику не ясно, как сформулировать переход "в буквах". Преподаватель показал, как справиться с этим. Существенно, что он, формулируя переход, использовал для обозначения переменной не ту же букву, что в самом тождестве. Дело в том, что при первом своем появлении эта буква ("k") играет роль не переменной, а константы (хотя и произвольной), указывающей на место, до которого дошла волна индуктивного доказательства. Переменной она становится позднее, в общей формулировке перехода.

Часто при изложении индукционного решения для краткости переменные в тождестве и переходе обозначают одной буквой, причем, формулируя переход, произносят фразы типа "... а теперь вместо n подставим $n + 1$". В начале обучения такое недопустимо, ибо затрудняет и дезориентирует большинство учащихся как идейно (труднее увидеть в теореме о переходе цепочку шагов), так и технически (подставить $n + 1$ вместо n начинающему нелегко).

Мы расстаемся с нашими персонажами и переходим к задачам. В задачах 9–16 требуется доказать тождества с натуральной переменной n.

Задача 9. $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

Задача 10. $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6$.

Задача 11. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + (n - 1) \cdot n = (n - 1)n(n + 1)/3$.

Задача 12.

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} = \frac{n-1}{n}.$$

Задача 13.

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = (x^{n+1} - 1)/(x - 1)\,.$$

Задача 14.

$$\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{(a+b)(a+2b)} + \ldots + + \frac{1}{(a+(n-1)b)(a+nb)} = n/a(a+nb)\,,$$

где a и b – произвольные числа.

Задача 15.

$$\frac{m!}{0!} + \frac{(m+1)!}{1!} + \ldots + \frac{(m+n)!}{n!} == \frac{(m+n+1)!}{n!(m+1)}\,,$$

где m, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Задача 16.

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}\,.$$

Комментарии: В задачах 9–15 переход доказывается так же, как и в разобранной выше задаче. Но в задаче 16 его удобнее доказывать, представляя $(k+1)$-ю левую часть не как сумму, а как произведение k-й левой части на $1 - \dfrac{1}{k^2}$. Такой прием полезен и при доказательстве некоторых неравенств (см.ниже).

В задаче 11 база не $n = 1$, а $n = 2$. Обратите внимание учеников, что на ход процесса индукции это никак не влияет.

В задаче 15 индукция возможна по любой из двух переменных. Полезно провести обе и сравнить. В обоих случаях начинать лучше с нуля.

Задачи 11 и 12 суть частные случаи соответственно задач 15 (при $n = 2$) и 14 (при $a = b = 1$). Беря другие значения m, a и b, можно получить любое нужное число упражнений типа 11 и 12. В сильном кружке будет полезно, дав ребятам несколько таких упражнений, попросить их восстановить общий вид породившего эти упражнения тождества.

Большинство тождеств 9–16 имеет неплохие неиндукционные доказательства. Задача 9 имеет красивое геометрическое решение (см. рис.63).

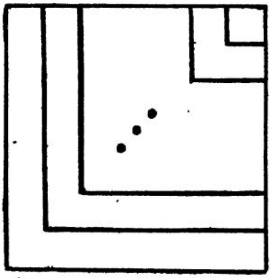


Рис. 63

Тождество 11 можно получить из тождеств 9 и 10. Тождество 13 можно доказать, поделив $x^{n+1} - 1$ на $x - 1$ “уголком”, а тождество 16 – прямым вычислением. Для доказательства же тождества 12 достаточно заметить, что его левая часть равна

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right).$$

Такой прием методически выигрышен и при доказательстве других тождеств. Для человека, достаточно хорошо усвоившего ММИ, обсуждение этих альтернативных решений будет очень полезно.

После тождеств обычно решаются задачи на делимость. Техника составления и обоснования переходов здесь похожа на соответствующую технику для тождеств: для обоснования обычно составляется приращение данного в условии выражения и проверяется его делимость на нужное число. Задачи 17–19 имеют несложные альтернативные решения (при помощи перебора остатков). Довольно трудная задача 22 может служить источником любого числа упражнений типа 18–19. Итак: докажите, что при любом натуральном n

Задача 17. $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ делится на 9.

Задача 18. $3^{2n+2} + 8n - 9$ делится на 16.

Задача 19. $4^n + 15n - 1$ делится на 9.

Задача 20. $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133.

Задача 21. $2^{3^n} + 1$ делится на 3^{n+1}.

Задача 22*. $ab^n + cn + d$ делится на натуральное число m, если известно, что делятся на m числа $a + d$, $(b-1)c$, $ab + c - a$.

Триаду типовых задач на ММИ замыкают задачи на доказательство неравенств. Здесь доказательства переходов более разнообразны (см. [78]). Докажите следующие неравенства:

Задача 23. $2^n > n$, где n – любое натуральное число.

Задача 24. При каких натуральных n

а) $2^n > 2n+1$; б) $2^n > n^2$?

Задача 25.

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24},\ n=2,3,\ldots$$

Задача 26. $2^n > 1+n\sqrt{2^{n-1}}$, $n = 2,\ 3,\ \ldots$

Задача 27. Докажите, что модуль суммы любого числа слагаемых не превосходит суммы модулей этих слагаемых.

Задача 28. $(1+x)^n > 1+nx$, где $x > -1$, $x \neq 0$ и $n = 2,\ 3,\ \ldots$

Задача 29.

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\leq\frac{1}{\sqrt{2n+1}},$$

где n – любое натуральное число.

Комментарии: 23, 24: для перехода можно проверить, что при любом n приращение левой части неравенства больше приращения правой.

24б: при доказательстве перехода можно использовать 24а.

25: Докажите, что левая часть неравенства монотонно возрастает.

27: Индукция по числу слагаемых.

28, 29: см. комментарий к задаче 16.

4. Другие схемы ММИ

До сих пор мы работали с основной версией ММИ. Когда она прочно усвоена, можно перейти и к более сложным схемам индукции. Многие из них можно формально свести к основной версии преобразованием цепочки доказываемых утверждений, но методически разумнее обосновывать их, обращаясь непосредственно к образу "волны доказательств".

Вначале рассмотрим схему "ИНДУКЦИЯ ОТ ВСЕХ $n < k$ К $n = k+1$".

В основной версии ММИ шаг индукции состоит в выведении утверждения $У_{k+1}$ из одного предыдущего – $У_k$. Но иногда для обоснования $У_{k+1}$ приходится использовать все или несколько из предыдущих утверждений – от $У_1$ до $У_k$. Это безусловно возможно, ибо если волна доказательства дошла до $У_k$, то она до этого прошла и все предшествующие утверждения цепочки. При сохранении обычной базы переход в этом случае выглядит так:

(П1): При любом натуральном k из истинности утверждений $У_1$, $У_2$, ..., $У_k$ вытекает истинность $У_{k+1}$.

* * *

Рассмотрим пример.

Задача 30. Докажите, что любое натуральное число можно представить как сумму нескольких разных степеней двойки (возможно, включая и нулевую).

Решение: Прежде всего докажем базу. Если наше число равно 1 или 2, то существование представления очевидно.

Обозначим теперь наше число через n и отыщем максимальную степень двойки, не превосходящую n. Пусть это будет 2^m, т.е. $2^m \leq n < 2^{m+1}$. Рассмотрим разность $d = n - 2^m$. Это число меньше, чем n, и меньше, чем 2^m. По индукционному предположению, его можно представить в виде суммы нескольких различных степеней двойки, причем ясно, что 2^m в это представление входить не может. Добавляем к этому представлению слагаемое 2^m и получаем требуемое представление для n. Индукция завершена.

Задача 31. Докажите, что всякий (не обязательно выпуклый) многоугольник можно разделить на треугольники непересекающимися диагоналями.

Указание: Индукция по числу сторон. Переход основан на лемме о наличии у всякого многоугольника целиком лежащей в нем диагонали. Такая диагональ делит многоугольник на два с меньшим числом сторон.

* * *

Еще одну схему ММИ демонстрирует

Задача 32. Известно, что $x + 1/x$ – целое число. Докажите, что при любом натуральном n число $x^n + 1/x^n$ – тоже целое.

Решение: Заметим, что $(x^k+1/x^k)(x+1/x) = x^{k-1}+1/x^{k-1}+x^{k+1}+1/x^{k+1}$, откуда $x^{k+1}+1/x^{k+1} = (x^k+1/x^k)(x+1/x)-(x^{k-1}+1/x^{k-1})$. Мы видим, что $(k+1)$-я сумма будет целым числом, если целыми числами являются две предыдущие суммы. Поэтому процесс индукции пойдет, если проверить, что целыми являются две начальные суммы: $x + 1/x$ и $x^2 + 1/x^2$. Проверку предоставляем читателю.

Комментарий: Особенность этого варианта ММИ в том, что при выполнении шага перехода мы опираемся не на одно, а на два предыдущих утверждения.

Поэтому и база здесь (а базой естественно называть тот начальный отрезок нашей цепочки, верность утверждений в котором надо проверять непосредственно, без всяких переходов – они там не действуют) состоит не из одного, а из двух первых утверждений ряда.

Задача 33. Последовательность чисел a_1, a_2, ..., a_n, ... такова, что $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, а $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$ при $n > 2$. Докажите, что $a_n = 2^n + 1$ при всех натуральных n.

Указание: См. более общую задачу 43.

Примечание: В задаче 33 и трех следующих за ней, мы сталкиваемся не только с доказательством, но и с определением по индукции: все члены данных здесь последовательностей, кроме нескольких первых, задаются индуктивно, через предыдущие. Заданные таким образом последовательности называются рекуррентными или возвратными; им посвящены книги [75] и [77]. Подробнее об определениях, а также построениях и вычислениях по индукции см. в [79], глава 2.

Задача 34. Дано: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$ при всех $n > 2$. Докажите, что $a_{n+6} = a_n$ при любом натуральном n.

Задача 35. Дан ряд чисел Фибоначчи: $\Phi_1 = \Phi_2 = 1$ и $\Phi_{n+1} = \Phi_n + \Phi_{n-1}$ при всех $n \geq 2$. Докажите, что любое натуральное число можно представить как сумму нескольких различных чисел Фибоначчи.

Задача 36*. Докажите, что n-е число Фибоначчи делится на 3 тогда и только тогда, когда n делится на 4.

Комментарий: В такой формулировке задачу по индукции решить вряд ли удастся. Докажите более общий факт о повторении остатков от деления чисел Фибоначчи на 3 с периодом 8. Числам Фибоначчи посвящена одноименная книга [75].

Задача 37. Банк имеет неограниченное количество трех- и пятирублевых купюр. Докажите, что он может выдать ими без сдачи любое число рублей, начиная с восьми.

Комментарий: Индукция по числу рублей. База состоит из трех утверждений: $8 = 5 + 3$, $9 = 3 + 3 + 3$, $10 = 5 + 5$. Переход: если можно выдать k, $k+1$ и $k+2$ рублей, то можно выдать и $k+3$, $k+4$ и $k+5$ рублей. Эту индукцию со сложной базой можно разложить и на три обычных со схемами:

$$8 \to 11 \to 14 \to \ldots, \quad 9 \to 12 \to 15 \to \ldots \quad \text{и} \quad 10 \to 13 \to 16 \to \ldots$$

Отметим, что в задачах 32–36 подобное было невозможно.

Имеется и неиндукционный вариант этого решения, основанный на равенствах $3n+1=5+5+3(n-3)$ и $3n+2=5+3(n-1)$, но найти его, наверно, не легче, чем приведенное выше решение.

Три следующие задачи идейно очень близки задаче 37.

Задача 38. Кусок бумаги разрешается рвать на 4 или на 6 кусков. Докажите, что по этим правилам его можно разорвать на любое число кусков, начиная с девяти.

Задача 39. Докажите, что квадрат можно разрезать на n квадратов для любого n, начиная с шести.

Задача 40. Докажите, что правильный треугольник можно разрезать на n правильных треугольников для любого n, начиная с шести.

Комментарии: 38: Если мы рвем кусок на 4 или на 6 кусков, то всего кусков становится на 3 или 5 больше. Далее см. решение задачи 37.

39, 40: квадрат (правильный треугольник) можно разрезать как на 4, так и на 6 квадратов (правильных треугольников), как показано на рис.64. Получается задача 38. Есть и простые неиндукционные решения, связанные с возможностью разрезать квадрат (правильный треугольник) на любое четное число квадратов (правильных треугольников) – см. рис.65.

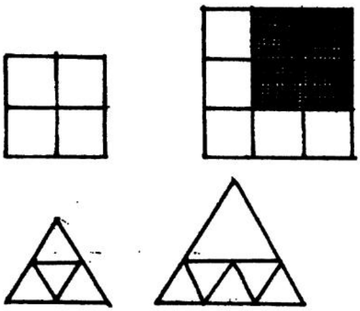


Рис. 64

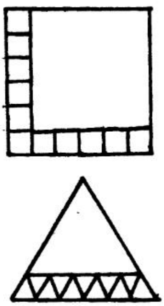


Рис. 65

Существуют и другие, кроме разобранных нами только что, схемы индукции. К таким можно отнести схему “ВЕТВЯЩАЯСЯ ИНДУКЦИЯ”, при помощи которой дается доказательство замечательного неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим.

Задача 41*. Докажите неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим: для любых положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}\,.$$

Схема решения: База: $n = 2$. Затем переходами от $n = 2^k$ к 2^{k+1} неравенство доказывается для всех n, являющихся степенями двойки. После этого доказывается, что если неравенство верно для n чисел, то оно верно и для $n-1$ чисел. Волна доказательств распространяется в соответствии со следующей схемой:

$$2\quad 3 \leftarrow 4\quad 5 \leftarrow 6 \leftarrow 7 \leftarrow 8\quad 9 \leftarrow 10 \leftarrow 11 \leftarrow 12 \leftarrow 13 \leftarrow 14 \leftarrow 15 \leftarrow 16 \ldots$$

Подробности доказательства см. в [78] (пример 24), а также в главе “Неравенства”. Индукцию по такой схеме естественно назвать “ветвящейся”.

Схему “ИНДУКЦИЯ ВНИЗ” (по отрицательным числам), а также схему “ДВОЙНАЯ ИНДУКЦИЯ”, с помощью которой доказываются различные теоремы, содержащие два натуральных параметра, иллюстрируют приведенные ниже задачи 43 и 44.

5. Задачи почти без комментариев

Задача 42. Даны два взаимно простых натуральных числа m и n, а также число 0. Имеется калькулятор, который умеет выполнять лишь одну операцию: вычисление среднего арифметического двух целых чисел, если они имеют одинаковую четность. Докажите, что при помощи этого калькулятора можно получить все натуральные числа от 1 до n.

Задача 43. Для последовательности $a_1, a_2, \ldots$ из задачи 33 определите члены $a_0, a_{-1}, \ldots$ таким образом, чтобы равенство $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$ было верно при любом целом n. Докажите, что при этом равенство $a_n = 2^n + 1$ также будет верно при любом целом n.

Задача 44. Докажите, что $2^{m+n-2} \geq mn$ при любых натуральных m и n.

Задача 45*. Дано несколько квадратов. Докажите, что их можно разрезать на такие части, из которых удастся сложить один квадрат.

Задача 46*. Докажите, что из любых 2^{n+1} натуральных чисел можно выбрать ровно 2^n, сумма которых делится на 2^n.

Задача 47. На какое наибольшее число частей могут разбивать плоскость n окружностей? n треугольников?

Примечание: Сравните с задачей 6. Не забудьте построить примеры соответствующих разбиений; это тоже делается по индукции.

Задача 48. На плоскости нарисовано несколько окружностей. В каждой из них проведено по хорде. Докажите, что получившуюся "карту" можно раскрасить тремя красками так, чтобы любые две соседние области были покрашены разными цветами.

* * *

Задача 49*. Докажите "от противного", что сформулированный в начале главы принцип математической индукции равносилен такому "принципу наименьшего числа": в любой совокупности натуральных чисел есть наименьшее. Придумайте решение какой-либо из предыдущих задач (например, задачи 46), опирающееся на этот принцип (проведите базу и дальше рассуждайте от противного), и сравните его с индукционным.

Подробнее о приложениях принципа наименьшего числа к решению задач см. [19], стр. 88–96.

* * *

Заключение. Метод математической индукции – чрезвычайно употребительная и очень полезная идея, с применениями которой Вы столкнетесь как в рамках настоящего сборника, так и во многих других задачах. Но мы хотели бы предостеречь Вас от излишне частого употребления этого замечательного инструмента математического доказательства. Не следует думать, что всякая задача, в решении которой встречаются слова "и так далее", "аналогично", есть задача на применение ММИ. Индукционные доказательства многих утверждений – с некоторыми из них Вы познакомитесь в главах "Графы–2", "Неравенства" – выглядят более искусственными, чем доказательства, использующие такие простые методы, как, например, прямой подсчет или рекурсивные рассуждения. Такие доказательства не стоит рассматривать в процессе освоения ММИ, но это полезно сделать, когда метод твердо усвоен.

ДЕЛИМОСТЬ–2

СРАВНЕНИЯ И ДИОФАНТОВЫ УРАВНЕНИЯ

1. Сравнения по модулю

В главе "Делимость и остатки" мы подробно обсудили понятие остатка при делении на натуральное число. Было замечено, что при решении многих задач, связанных с делимостью, важными оказываются не сами числа, а лишь их остатки при делении на некоторое фиксированное число.

Поэтому естественно дать следующее определение: целые числа a и b называются *сравнимыми по модулю* m, если они имеют одинаковые остатки при делении на m. Это обозначается так: $a \equiv b \pmod m$.

Например, $9 \equiv 29 \pmod{10}$, $1 \equiv 3 \pmod 2$, $16 \equiv 9 \pmod 7$, $3 \equiv 0 \pmod 3$, $2n+1 \equiv 1 \pmod n$. Заметим, что делимость A на m равносильна тому, что $A \equiv 0 \pmod m$.

Задача 1. Докажите, что $a \equiv b \pmod m$ тогда и только тогда, когда $a-b$ делится на m.

Решение: Пусть $a \equiv b \pmod m$. Обозначим одинаковый для a и b остаток при делении на m через r. Тогда

$$a = mk_1 + r, \quad b = mk_2 + r\,.$$

Отсюда $a - b = m(k_1 - k_2)$ делится на m.

Обратно, пусть $a-b$ делится на m. Разделим a и b на m с остатком. Получим $a = mk_1 + r_1$, $b = mk_2 + r_2$. Отсюда $a - b = m(k_1 - k_2) + r_1 - r_2$ делится по условию на m. Таким образом, $r_1 - r_2$ делится на m. Так как $|r_1 - r_2| < m$, то $r_1 = r_2$.

Только что разобранная задача позволяет дать другое определение сравнимости двух чисел: целые числа a и b сравнимы по модулю m, если $a - b$ делится на m.

В дальнейшем мы будем пользоваться и тем, и другим определениями.

<u>**Для преподавателей.**</u> Перед определением сравнимости целых чисел необходимо проверить, не разучились ли школьники работать с остатками. Для этого полезно решить несколько задач, аналогичных задачам § 2 главы "Делимость и остатки".

Замечательно, что введенное определение позволяет легко формулировать и доказывать основные свойства остатков.

Задача 2. Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $a + c \equiv b + d \pmod{m}$.

Решение: Так как $a - b$ делится на m и $c - d$ делится на m, то $(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$ делится на m, что и требовалось доказать.

Задача 3. Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $a - c \equiv b - d \pmod{m}$.

Задача 4. Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $ac \equiv bd \pmod{m}$.

Решение: $ac - bd = ac - bc + bc - bd = (a - b)c + b(c - d)$ делится на m, что и требовалось доказать.

Задача 5. Если $a \equiv b \pmod{m}$, n – натуральное число, то $a^n \equiv b^n \pmod{m}$.

Методические замечания. Хотелось бы еще раз обратить Ваше внимание на то, что формулировки и доказательства свойств остатков, записанных на языке сравнений, выглядят значительно привлекательней и проще. Например, условие задачи 2 раньше нужно было формулировать так: сумма двух чисел и сумма их остатков при делении на m имеют одинаковые остатки при делении на m.

Задачи 2–5 по существу утверждают, что сравнения по данному модулю можно складывать, вычитать, умножать и возводить в степень, совсем как обычные равенства. Вопрос о делении сравнений мы отложим до параграфа 4.

Прежде, чем двигаться дальше, покажем, как решение уже известной нам задачи может быть изложено на языке сравнений.

Задача 6. Докажите, что $n^2 + 1$ не делится на 3 ни при каком целом n.

Решение: Ясно, что каждое целое число n сравнимо по модулю 3 либо с 0, либо с 1, либо с 2.

Если $n \equiv 0 \pmod{3}$, то $n^2 \equiv 0 \pmod{3}$ – (умножение сравнений) и $n^2 + 1 \equiv 1 \pmod{3}$ – (сложение сравнений).

Если $n \equiv 1 \pmod{3}$, то $n^2 + 1 \equiv 2 \pmod{3}$.

Если $n \equiv 2 \pmod{3}$, то $n^2 + 1 \equiv 2 \pmod{3}$.

Таким образом, ни в одном случае мы не получим $n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{3}$.

Разберем теперь еще одну задачу.

Задача 7. Найдите остаток от деления 6^{100} на 7.

Решение: Заметим, что $6 \equiv -1 \pmod{7}$. Возводя это сравнение в сотую степень, получаем $6^{100} \equiv (-1)^{100} \pmod{7}$, то есть $6^{100} \equiv 1 \pmod{7}$.

В связи с этим решением отметим, что иногда бывает удобно использовать и отрицательные числа, сравнимые с данным.

Вот еще несколько задач, при решении которых может быть полезно указанное соображение.

Задача 8. Докажите, что $30^{99} + 61^{100}$ делится на 31.

Задача 9. Докажите, что

а) $43^{101} + 23^{101}$ делится на 66.

б) $a^n + b^n$ делится на $a + b$, если n – нечетное число.

Задача 10. Докажите, что $1^n + 2^n + \ldots + (n-1)^n$ делится на n при нечетном n.

Задача 11. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы трех точных кубов.

Задача 12. Докажите, что ни одно из чисел вида 10^{3n+1} нельзя представить в виде суммы двух кубов натуральных чисел.

Задачи 11 и 12 намного труднее предыдущих, так как для их решения нужно “угадать модуль”.

Разберем решение задачи 12. Куб натурального числа сравним по модулю 7 либо с 0, либо с 1, либо с -1 – проверьте! Поэтому сумма двух кубов сравнима с одним из следующих чисел: $-2, -1, 0, 1, 2$. Заметим, что $10 \equiv 3 \pmod 7$, а $10^3 \equiv -1 \pmod 7$. Поэтому 10^{3n+1} сравнимо либо с 3, либо с -3 по модулю 7.

* * *

Зафиксируем натуральное число n. Тогда бесконечное множество всех целых чисел естественно разбивается на n классов: в один класс попадают числа, имеющие одинаковые остатки при делении на n (сравнимые по модулю n). Например, при $n = 2$ получаем два класса: четные и нечетные числа. При решении большинства задач, связанных с делимостью, для доказательства утверждений о всех целых числах достаточно проверить эти утверждения лишь для одного (любого!) из представителей каждого из рассмотренных классов. Так, в задачах параграфа 2 главы “Делимость и остатки” обычно перебирались все остатки при делении на некоторое число, а в задачах 11, 12 этой главы оказалось удобным выбрать других представителей.

Следующие две задачи посвящены этой теме.

Задача 13. Докажите, что среди 51 целого числа найдутся два, квадраты которых дают одинаковые остатки при делении на 100.

Задача 14. Назовем натуральное число n удобным, если $n^2 + 1$ делится на 1000001. Докажите, что среди чисел $1, 2, \ldots, 1000000$ четное число удобных.

И, наконец, заключительная серия задач этого параграфа.

Задача 15. а) Может ли квадрат натурального числа оканчиваться на 2?

б) Можно ли, используя только цифры 2, 3, 7, 8 (возможно, по несколько раз), составить квадрат натурального числа?

Задача 16. Какое число нужно добавить к числу $(n^2-1)^{1000}\cdot(n^2+1)^{1001}$, чтобы результат делился на n?

Задача 17. Найдите остаток от деления на 7 числа $10^{10}+10^{100}+10^{1000}+\ldots+10^{10000000000}$.

Задача 18. Сколько существует натуральных чисел n, меньших 10000, для которых 2^n-n^2 делится на 7?

Задача 19. Обозначим через k произведение нескольких (больше одного) первых простых чисел. Докажите, что число а) $k-1$; б) $k+1$ не является точным квадратом.

Задача 20. Существует ли такое натуральное n, что n^2+n+1 делится на 1955?

Задача 21. Докажите, что $11^{n+2}+12^{2n+1}$ делится на 133 при любом натуральном n.

Решение:

$$\begin{aligned}11^{n+2}+12^{2n+1}&=121\cdot 11^n+12\cdot 12^{2n}=\\&=133\cdot 11^n-12\cdot 11^n+12\cdot 12^{2n}\equiv\\&\equiv 12(12^{2n}-11^n)=\\&=12(144^n-11^n)\equiv 0\pmod{133}.\end{aligned}$$

Это решение показывает, что иногда бывает полезно не только придумывать красивые идеи, но и кое-что “делать руками”.

Задача 22*. Пусть n – натуральное число такое, что $n+1$ делится на 24. Докажите, что сумма всех натуральных делителей n делится на 24.

Задача 23*. Последовательность a_1, a_2, a_3, … натуральных чисел такова, что $a_{n+2}=a_{n+1}a_n+1$ при всех n.

а) $a_1=a_2=1$. Докажите, что ни один из членов последовательности не делится на 4.

б) Докажите, что a_n-22 – составное число при любом $n>10$.

На этом мы обрываем список задач на сравнения. Отметим лишь, что почти все последующие задачи главы фактически продолжают его.

2. Десятичная запись и признаки делимости

Вы, конечно, хорошо знаете признаки делимости на 10, 2, 5, 4. Теперь, познакомившись со сравнениями, мы можем сформулировать и доказать значительно более сильные утверждения.

Задача 24. Докажите, что любое натуральное число сравнимо со своей последней цифрой по модулю а) 10; б) 2; в) 5.

Решение: Вычтем из числа его последнюю цифру и получим число, оканчивающееся нулем, т.е. делящееся на 10 (а значит, и на 5, и на 2).

Для преподавателей. Перед обсуждением признаков делимости необходимо еще раз проверить, что школьники хорошо понимают тождество

$$\overline{a_1a_2\ldots a_n} = a_1 10^{n-1} + a_2 10^{n-2} + \ldots + a_{n-1}10^1 + a_n\,.$$

Задача 25. Докажите, что $\overline{a_1a_2a_3\ldots a_{n-1}a_n} \equiv \overline{a_{n-1}a_n} \pmod 4$.

Задача 26. Сформулируйте и докажите признаки делимости на 2^n и 5^n.

А теперь несколько задач, в решении которых используются перечисленные признаки делимости.

Задача 27. Последняя цифра квадрата натурального числа равна 6. Докажите, что его предпоследняя цифра нечетна.

Решение: Так как последняя цифра 6, то возводимое в квадрат число четно. Раз оно является квадратом, то оно делится и на 4. Следовательно, число, составленное из двух его последних цифр, должно делиться на 4. Все требуемые двузначные числа легко выписать: 16, 36, 56, 76, 96.

Задача 28. Предпоследняя цифра квадрата натурального числа – нечетная. Докажите, что его последняя цифра 6.

Задача 29. Докажите, что степень двойки не может оканчиваться четырьмя одинаковыми цифрами.

Задача 30. Найдите 100-значное число без нулевых цифр, которое делится на сумму своих цифр.

Решение: Подберем число так, чтобы сумма его цифр равнялась 125. Делимость числа на 125 определяется тремя его последними цифрами. Следовательно, годится число $111\ldots 11599125$ (в начале записи единица написана 94 раза).

Перейдем теперь к признакам делимости на 3 и на 9, которые мы тоже сформулируем в общем виде.

Задача 31. Докажите, что любое натуральное число сравнимо с суммой своих цифр по модулю а) 3; б) 9.

Решение: Рассмотрим число

$$\overline{a_1a_2\ldots a_n} = a_1 10^{n-1} + a_2 10^{n-2} + \ldots + a_{n-1}10^1 + a_n\,.$$

Ясно, что $10 \equiv 1 \pmod 9$. Поэтому $10^k \equiv 1 \pmod 9$ для любого натурального k. Таким образом,

$$a_1 10^{n-1} + a_2 10^{n-2} + \ldots + a_{n-1}10^1 + a_n \equiv a_1 + a_2 + \ldots + a_n \pmod 9\,.$$

Рассуждения для числа 3 совершенно аналогичны.

Следующий цикл задач связан с этими признаками делимости.

Задача 32. Можно ли записать точный квадрат, использовав по 10 раз цифры а) 2, 3, 6; б) 1, 2, 3 ?

Задача 33. У числа 2^{100} нашли сумму цифр, у результата снова нашли сумму цифр и т.д. В конце концов получилось однозначное число. Найдите его.

Задача 34. Докажите, что если записать в обратном порядке цифры любого натурального числа, то разность исходного и нового числа будет делиться на 9.

Задача 35. К числу 15 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 15.

Задача 36. Сколько имеется четырехзначных чисел, которые делятся на 45, а две средние цифры у них – 97?

Задача 37. Найдите наименьшее натуральное число, делящееся на 36, в записи которого встречаются все 10 цифр.

Задача 38. Докажите, что произведение последней цифры числа 2^n и суммы всех цифр этого числа, кроме последней, делится на 3.

Задача 39. Может ли сумма цифр точного квадрата равняться 1970?

Задача 40. Из трехзначного числа вычли сумму его цифр. С полученным числом проделали то же самое и так далее, 100 раз. Докажите, что в результате получится нуль.

Задача 41*. Пусть A – сумма цифр числа 4444^{4444}, а B – сумма цифр числа A. Найдите сумму цифр числа B.

Рассуждения, очень похожие на доказательство признака делимости на 9, позволяют доказать следующий признак делимости на 11.

8 Зак. 2413.

Задача 42. Докажите, что

$$\overline{a_1a_2\ldots a_n} \equiv a_n - a_{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1}a_1 \pmod{11}.$$

Указание: $10 \equiv -1 \pmod{11}$.

А теперь несколько задач, связанных с этим признаком делимости.

Задача 43. Докажите, что число $111\ldots11$ ($2n$ единиц) – составное.

Задача 44. Докажите, что число $\overline{a_1a_2\ldots a_na_n\ldots a_2a_1}$ – составное.

Задача 45. Пусть a, b, c, d – различные цифры. Докажите, что $\overline{cdcdcdcd}$ не делится на $\overline{aabb}$.

Задача 46. A – шестизначное число, в записи которого по одному разу встречаются цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6. Докажите, что A не делится на 11.

Задача 47. Докажите, что разность числа, имеющего нечетное количество цифр, и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, делится на 99.

* * *

Признаки делимости составляют лишь незначительную часть утверждений, связывающих делимость числа с его десятичной записью. Это демонстрирует следующий цикл задач.

Задача 48. Можно ли составить из цифр 2, 3, 4, 9 (каждую цифру можно использовать сколько угодно раз) два числа, одно из которых в 19 раз больше другого?

Задача 49. Сумма двух цифр a и b делится на 7. Докажите, что число $\overline{aba}$ также делится на 7.

Задача 50. Сумма цифр трехзначного числа равна 7. Докажите, что это число делится на 7 тогда и только тогда, когда две его последние цифры равны.

Задача 51. а) Дано шестизначное число $\overline{abcdef}$, причём $\overline{def} - \overline{abc}$ делится на 7. Докажите, что и само число делится на 7.

б) Сформулируйте и докажите признак делимости на 7.

в) Сформулируйте и докажите признак делимости на 13.

Задача 52. а) Дано шестизначное число $\overline{abcdef}$, причем $\overline{abc} + \overline{def}$ делится на 37. Докажите, что и само число делится на 37.

б) Сформулируйте и докажите признак делимости на 37.

Задача 53. Существует ли такое трехзначное число $\overline{abc}$, что $\overline{abc} - \overline{cba}$ является квадратом натурального числа?

Задача 54. Найдите наименьшее число, записываемое одними единицами, делящееся на $333\ldots33$ (в записи 100 троек).

Задача 55. Может ли сумма нескольких первых натуральных чисел оканчиваться на 1989?

Задача 56. Найдите все натуральные числа, которые увеличиваются в 9 раз, если между цифрой единиц и цифрой десятков вставить ноль.

Решение: Запишем наше число в виде $10a + b$, где b – цифра единиц. Получим уравнение $100a + b = 9(10a + b)$. Отсюда $10a = 8b$, т.е. $5a = 4b$. Таким образом, b делится на 5. Рассмотрев два случая $b = 0$, $b = 5$, получаем единственный ответ: 45.

Методические замечания. Это решение мы разобрали с единственной целью: показать, что иногда бывает полезно написать уравнение, связывающее цифры искомого числа.

Задача 57. Между цифрами двузначного числа, кратного трем, вставили нуль, и к полученному трехзначному числу прибавили удвоенную цифру его сотен. Получилось число, в 9 раз большее первоначального. Найдите исходное число.

Задача 58. Найдите четырехзначное число, являющееся точным квадратом, первые две цифры которого равны между собой и последние две цифры которого также равны между собой.

Задача 59. Найдите все трехзначные числа, каждая натуральная степень которых оканчивается на три цифры, составляющие первоначальное число.

Задача 60. К числу справа приписывают тройки. Докажите, что когда-нибудь получится составное число.

Задача 61*. Докажите, что все числа ряда

$$10001,\ 100010001,\ 1000100010001,\ \ldots$$

являются составными.

3. Уравнения в целых числах и другие задачи

Хорошо известная задача утверждает, что сумму в N рублей при $N > 7$ всегда можно разменять трех- и пятирублевыми купюрами (см. главу “Индукция”, задача 37). В переводе на язык уравнений это означает, что уравнение

$$3x + 5y = N \qquad (*)$$

всегда имеет решение в неотрицательных целых числах x и y при натуральном N, большем 7. В этом параграфе мы будем иметь дело с подобными уравнениями (и многими другими), хотя решать их обычно будем в целых числах без каких-либо ограничений.

* * *

Задача 62. Решите уравнение $3x + 5y = 7$ в целых числах.

Разберем решение – оно будет весьма поучительно, так как даст нам возможность решать аналогичным образом все подобные задачи.

Найдем сначала какое-нибудь конкретное решение (эта идея, кстати, часто помогает и при решении других задач). Так как $3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) = 1$, то $3 \cdot 14 + 5 \cdot (-7) = 7$ и, следовательно, $x_0 = 14$, $y_0 = -7$ – это решение нашего уравнения (одно из многих, не более!). Итак,

$$3x + 5y = 7; \quad 3x_0 + 5y_0 = 7 .$$

Вычтем одно уравнение из другого, обозначим $x - x_0$ и $y - y_0$ через a и b, и получим

$$3a + 5b = 0 .$$

Отсюда мы видим, что b делится на 3, а a – на 5. Положим $a = 5k$, тогда $b = -3k$ – здесь k, очевидно, может быть любым целым числом. Итак, мы получаем набор решений:

$$\begin{matrix} x - x_0 = 5k \\ y - y_0 = -3k \end{matrix} \quad \text{т.е.} \quad \begin{matrix} x = 14 + 5k \\ y = -7 - 3k \end{matrix},$$

где k может быть любым целым числом. Других решений, конечно, нет.

<u>Для преподавателей.</u> Мы надеемся, что Ваши ученики также отчетливо это осознают. Не поняв этой части решения – того, что пары (x, y) исчерпывают все решения уравнения $(*)$ при $N = 7$ – невозможно двигаться дальше.

Задача 63. Найдите все целые решения уравнения $3x - 12y = 7$.

Преодолев этот "барьер", пойдем далее и разберем вкратце "очень сложную" задачу 64.

Задача 64. Решите уравнение $1990x - 173y = 11$.

Числа, участвующие в формулировке, так велики, что подбором здесь конкретного решения не найти. Однако нам поможет то, что числа 1990 и 173 взаимно просты (проверьте это).

Лемма. Их НОД, равный 1, можно представить в виде $1990m - 173n$, где m и n – некоторые целые числа.

Доказательство этой леммы следует из того факта, что все числа, которые получаются в процессе алгоритма Евклида (см. главу “Делимость и остатки”), представимы в указанном виде.

Конкретно, в данном случае, используя алгоритм Евклида, можно получить $m = 2$, $n = 23$. Итак, при помощи такого мощного оружия, как алгоритм Евклида, мы получаем конкретное решение вспомогательного уравнения $1990m - 173n = 1$: пару $(2, 23)$. Следовательно, $x_0 = 22$, $y_0 = 253$ – решение уравнения

$$1990x - 173y = 11 .$$

Дальше, точно так же, как и в задаче 62 получаем, что

$$x = x_0 + 173k = 22 + 173k$$

$$y = y_0 + 1990k = 253 + 1990k, \qquad k \text{ – любое целое число.}$$

Задача 65. Найдите все целые решения уравнения $21x + 48y = 6$.

Примечание. Теперь мы, вообще говоря, умеем решать любое уравнение вида $Ax + By = C$ (**) в целых числах x и y.

Теорема. Если целые числа A и B взаимно просты, то существуют целые числа x_0 и y_0 такие, что $Ax_0 + By_0 = C$ и все решения уравнения (**) при этом имеют вид

$$x = x_0 + Bk,\ y = y_0 - Ak .$$

Попробуйте сформулировать общий результат и строго докажите его. Не забудьте про случай, когда A и B не взаимно просты, но C не делится на НОД(A, B).

Задача 66. Решите уравнение $2x + 3y + 5z = 11$ в целых числах. (Кстати, имеет ли оно решения в натуральных числах? – это совсем простое упражнение).

Задача 67*. Фишка стоит на одном из полей бесконечной в обе стороны клетчатой полоски бумаги. Она может сдвигаться на m полей вправо или на n полей влево. При каких m и n она сможет переместиться в соседнюю справа клетку? За какое наименьшее число ходов она сможет это сделать?

* * *

Перейдем теперь к примерам более сложных уравнений в целых числах (если количество неизвестных в таком уравнении – два или более, то такие уравнения называют диофантовыми, в честь древнегреческого математика Диофанта Александрийского, исследовавшего некоторые типы таких уравнений еще до нашей эры). Начнем с самых простых.

Задача 68. $(2x+y)(5x+3y)=7$.

Задача 69. $xy=x+y+3$.

Задача 70. $x^2=14+y^2$.

Задача 71. $x^2+y^2=x+y+2$.

Решение всех этих задач связано с одной очень простой, но популярной идеей – с перебором. Хотя перебрать все пары целых чисел и для каждой из них проверить, не является ли она решением уравнения, невозможно, но небольшое преобразование уравнения позволяет без труда свести перебор до минимума.

Вот как решается задача 69. Так как $xy-x-y=3$, то $(x-1)(y-1)=4$. Осталось только перебрать возможные разложения числа 4 в произведение двух целых множителей. **Ответ:** $(x=5, y=2)$, $(2,5)$, $(0,-3)$, $(-3,0)$, $(3,3)$, $(-1,-1)$.

В задачах 70 и 71 так же, как и в разобранном решении, надо удачно преобразовать данное уравнение. Итак, запомним:

ИДЕЯ ПЕРВАЯ: Удачное преобразование уравнения и перебор вариантов.

Однако уже в следующей задаче эта идея не срабатывает.

Задача 72. $x^2+y^2=4z-1$.

Ясно, что преобразовать к более удачному виду это уравнение не удастся; осуществить перебор также не представляется возможным. Этот новый представитель нашего "диофантова зоопарка" замечателен тем, что решений в целых числах у него нет.

В самом деле, посмотрим, какие остатки могут давать точные квадраты по модулю 4 (выбор модуля 4 подсказан нам самим видом правой части уравнения). Недолгий перебор показывает, что это остатки 0 и 1. Так как сумма двух остатков такого вида не может давать остаток -1, то мы получаем, что решений данное уравнение не имеет.

Следовательно, появилась

ИДЕЯ ВТОРАЯ: Рассмотреть остатки по какому-либо модулю.

Задача 73. $x^2-7y=10$.

Задача 74. $x^3+21y^2+5=0$.

Задача 75. $15x^2-7y^2=9$.

Задача 76. $x^2 + y^2 + z^2 = 8t - 1$.

Задача 77. $3^m + 7 = 2^n$.

Разберем решение задачи 74. Так как x^3 может по модулю 7 быть сравнимым лишь с 0, 1 и -1, то выражение $x^3 + 21y^2 + 5$ сравнимо $\pmod 7$ с 5, 6 или с 4, и, следовательно, не может быть равным нулю.

<u>Методические замечания.</u> Вы, наверное, уже заметили, что "идея вторая" позволяет пока что доказывать лишь то, что некоторое уравнение решений не имеет. В самом деле, если уравнение имеет решения по модулю 7 или по модулю 3, то это еще совсем не означает, что это уравнение имеет решения в целых числах. Пример: уравнение $2x^2 - y^3 = 6$.

Давайте теперь попробуем подступиться к задаче 77. Сразу видно, что решения у этого уравнения есть: $m = 2$, $n = 4$. Так значит, нет смысла рассматривать остатки? Не торопитесь с выводами. Итак, по модулю 3 левая часть сравнима с 1, и отсюда мы делаем вывод, что n – четно, т.е. $n = 2k$. Уравнение преобразуется к виду $3^m + 7 = 4^k$. Теперь в игру включается модуль 4. $4^k - 7 = 1 \pmod 4$, и мы видим, что и m четно, т.е. $m = 2p$. Итак, мы имеем уравнение $3^{2p} + 7 = 2^{2k}$. Что дальше? Используем "идею первую" – удачно преобразуем уравнение:

$$7 = 2^{2k} - 3^{2p} = (2^k - 3^p)(2^k + 3^p)\,.$$

Отсюда $2^k + 3^p = 7$, $2^k - 3^p = 1$, и мы получаем единственное решение $k = 2$, $p = 1$, т.е. $m = 2$, $n = 4$.

Таким образом, мы использовали в решении обе идеи, оба метода, уже опробованных нами ранее. Такое комбинирование идей – чрезвычайно распространенное явление в математике.

Вот еще одна задача на использование подобной комбинации:

Задача 78. $3 \cdot 2^m + 1 = n^2$.

Решение: сразу ясно, что n не делится на 3 и, значит, $n = 3k + 1$ или $n = 3k + 2$. Разберем оба случая.

а) $n = 3k + 2$, $3 \cdot 2^m + 1 = 9k^2 + 12k + 4$. Сокращая, получаем

$$2^m = 3k^2 + 4k + 1 = (3k + 1)(k + 1)\,.$$

Следовательно, и $k + 1$ и $3k + 1$ – степени двойки. Видно, что и $k = 0$ и $k = 1$ подходят, и мы получаем решения $n = 2$, $m = 1$ и $n = 5$, $m = 3$. Но при $k \geq 2$

$4(k+1) > 3k+1 > 2(k+1)$ и, следовательно, $k+1$ и $3k+1$ не могут одновременно быть степенями двойки.

б) $n = 3k+1$. Разбирая этот случай аналогичным образом, мы получаем еще одно решение $n = 7$, $m = 4$. Вместе с идеей перебора остатков и идеей разложения на множители мы использовали идею оценки:

ИДЕЯ ТРЕТЬЯ: при решении диофантовых уравнений часто оказываются полезными различные неравенства и оценки.

Задача 79. $1/a + 1/b + 1/c = 1$.

Задача 80. $x^2 - y^2 = 1988$.

Задача 81. Докажите, что уравнение $1/x - 1/y = 1/n$ имеет единственное решение в натуральных числах тогда и только тогда, когда n – простое число.

Конечно, в этом небольшом параграфе мы не сможем подробно рассказать о других, более сложных и интересных, методах решения диофантовых уравнений. Поэтому мы и отсылаем всех заинтересовавшихся этой темой читателей к книгам [55], [58], [25]. В конце параграфа приведем еще три задачи повышенной трудности для самостоятельного решения.

Задача 82*. $x^3 + 3 = 4y(y+1)$.

Задача 83*. $x^2 + y^2 = z^2$.

Задача 84*. $x^2 - 5y^2 = 1$.

4. Малая теорема Ферма

Этот параграф посвящен замечательному и глубокому теоретико-числовому факту, который был сформулирован и доказан великим французским математиком XVII века Пьером Ферма. Однако прежде, чем мы перейдем к формулировке этого результата, обсудим, как и было обещано в параграфе 1, вопрос о сокращении сравнений.

Задача 85. Пусть $ka \equiv kb \pmod{m}$, k и m – взаимно просты. Тогда $a \equiv b \pmod{m}$.

Решение: Поскольку $ka \equiv kb \pmod{m}$, то $ka - kb = k(a-b)$ делится на m. Так как k и m взаимно просты, то $a - b$ делится на m, т.е. $a \equiv b \pmod{m}$.

На примерах легко убедиться, что требование взаимной простоты k и m необходимо. Действительно, $5 \cdot 3 \equiv 5 \cdot 7 \pmod{10}$, но при этом 3 и 7 не сравнимы $\pmod{10}$.

Однако верно следующее утверждение:

Задача 86. Пусть $ka \equiv kb \pmod{kn}$. Тогда $a \equiv b \pmod{n}$.

Теперь все готово к доказательству малой теоремы Ферма.

Теорема. Пусть p – простое число, и A не делится на p. Тогда $A^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

Доказательство: Рассмотрим $p-1$ число: A, $2A$, $3A$, ..., $(p-1)A$. Покажем, что среди них нет двух чисел, имеющих одинаковые остатки при делении на p. Действительно, если $kA \equiv nA \pmod p$, то $k = n \pmod p$ – см. задачу 85, – а это невозможно при разных натуральных k и n, меньших p. Следовательно, среди остатков при делении на p этих $p-1$ чисел встречаются ровно по одному разу все числа от 1 до $p-1$. Поэтому, перемножив все числа, получим

$$A \cdot 2A \cdot 3A \ldots (p-1)A \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-1) \pmod p\,,$$

то есть, $(p-1)! \cdot A^{p-1} \equiv (p-1)! \pmod p$. Так как p – простое число, то $(p-1)!$ и p – взаимно просты. Поэтому, вновь воспользовавшись результатом задачи 85, получим $A^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, что и требовалось доказать.

Следствие. Пусть p – простое число. Тогда для любого целого A имеем $A^p \equiv A \pmod p$.

Малая теорема Ферма представляет собой не только красивый и неожиданный факт, но и мощный инструмент для решения очень многих задач. Некоторые из них приведены в этом параграфе.

Задача 87. Найдите остаток от деления 2^{100} на 101.

Задача 88. Найдите остаток от деления 3^{102} на 101.

Решение: Так как 101 – простое число, то $3^{100} \equiv 1 \pmod{101}$. Отсюда $3^{102} \equiv 9 \cdot 3^{100} = 9 \pmod{101}$.

<u>**Для преподавателей.**</u> Конечно, подобные вычислительные упражнения на использование малой теоремы Ферма необходимо давать до тех пор, пока они не перестанут вызывать трудности у школьников.

Задача 89. Докажите, что $300^{3000} - 1$ делится на 1001.

Задача 90. Найдите остаток от деления 8^{900} на 29.

Задача 91. Докажите, что $7^{120} - 1$ делится на 143.

Решение: Докажем, что $7^{120} - 1$ делится на 11 и на 13. Действительно, $(7^{12})^{10} \equiv 1 \pmod{11}$ и $(7^{10})^{12} \equiv 1 \pmod{13}$.

Задача 92. Докажите, что число $30^{239} + 239^{30}$ – составное.

Задача 93. Пусть p – простое число. Докажите, что $(a+b)^p = a^p + b^p \pmod p$ для любых целых a и b.

Попробуйте придумать два доказательства: с использованием малой теоремы Ферма и с помощью бинома Ньютона (см. главу "Комбинаторика–2").

Задача 94. Сумма трех чисел a, b и c делится на 30. Докажите, что $a^5+b^5+c^5$ также делится на 30.

Задача 95. Пусть p и q – различные простые числа. Докажите, что

а) $p^q+q^p=p+q \pmod{pq}$.

б) $\left[\dfrac{p^q+q^p}{pq}\right]$ – четное число, если $p,\ q\neq 2$.

Задача 96. Пусть p – простое число, и a не делится на p. Докажите, что найдется натуральное число b, для которого $ab\equiv 1 \pmod{p}$.

Задача 97. (Теорема Вильсона). Пусть p – простое число. Докажите, что $(p-1)!\equiv -1 \pmod{p}$.

Задача 98. Пусть n – натуральное число, не кратное 17. Докажите, что либо n^8+1, либо n^8-1 делится на 17.

Задача 99. а) Пусть p – простое число, отличное от 3. Докажите, что число $111\ldots11$ (p единиц) не делится на p.

б) Пусть $p>5$ – простое число. Докажите, что число $111\ldots11$ ($p-1$ единица) делится на p.

Задача 100. Докажите, что для любого простого p разность

$$111\ldots11222\ldots22333\ldots33\ldots888\ldots88999\ldots99-123456789$$

(в первом числе каждая ненулевая цифра написана p раз) делится на p.

КОМБИНАТОРИКА–2

Данная глава является непосредственным продолжением главы “Комбинаторика–1”. Перед изучением изложенного здесь материала нужно вспомнить все, о чем шла речь ранее.

* * *

<u>**Для преподавателей.**</u> Обязательно предложите школьникам несколько задач на уже обсуждавшиеся комбинаторные идеи и продолжайте изучение комбинаторики только в том случае, если решение этих задач не вызывает у школьников трудностей. В противном случае мы рекомендуем вернуться к пройденному материалу.

Все содержание этой главы связано с одним очень важным комбинаторным объектом, к изучению которого мы и переходим.

1. Числа сочетаний

Начнем с простой задачи.

Задача 1. Из класса, в котором учатся 30 человек, нужно выбрать двоих школьников для участия в математической олимпиаде. Сколькими способами это можно сделать?

Решение: Первого ученика можно выбрать 30 способами, второго, независимо от выбора первого ученика, – 29 способами. При этом каждая пара учитывается дважды. Поэтому ответ: $30 \cdot 29/2 = 435$ способов. (Заметим, что мы практически дословно повторили решение задачи 22 из главы “Комбинаторика–1”).

Предположим теперь, что нам нужно выбрать для участия в математической олимпиаде команду не из двух человек, а из k, и в классе учится не 30 человек, а n. Количество способов, которыми это можно сделать, называется *числом сочетаний из n элементов по k* и обозначается C_n^k. (Читается “цэ из эн по ка”). Так, например, $C_2^1 = 2$, $C_3^2 = 3$, $C_n^1 = n$, $C_n^n = 1$. Заметим, что при таком определении чисел сочетаний записи C_n^0 также придается содержательный смысл – есть только один способ не выбрать никого (выбрать 0) из n человек, т.е. $C_n^0 = 1$ для всех n.

Интересно, что некоторые свойства чисел сочетаний можно легко доказать при помощи простых комбинаторных рассуждений, не использующих формулу для вычисления C_n^k.

Свойство 1. $C_n^{n-k} = C_n^k$.

Доказательство: Заметим, что выбор k участников олимпиады равносилен выбору $n-k$ учеников, не участвующих в олимпиаде. Поэтому число способов, которым можно выбрать k человек из n, равно числу способов, которым можно выбрать $n-k$ человек из n, то есть $C_n^{n-k} = C_n^k$.

Свойство 2. $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$.

Доказательство: Предположим, что в классе учится $n+1$ человек. Зафиксируем какого-нибудь ученика класса (обозначим его через А). Разобьем все возможные команды по k человек на две группы: те, в которые А входит, и те, в которые А не входит. Число команд в первой группе равно C_n^{k-1} – надо дополнить команду еще $k-1$ учениками, выбрав их из n оставшихся. Число команд во второй группе равно C_n^k – теперь из оставшихся n учеников надо выбрать полную команду. Поэтому $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$.

__Для преподавателей.__ Только что приведенное рассуждение позволило без всяких вычислений доказать содержательный факт. Подобное явление вообще характерно для комбинаторики. Часто несколько минут размышлений (проникновения в комбинаторный смысл задачи) могут избавить от громоздких вычислений. Поэтому мы считаем необходимым обсуждение приведенных доказательств.

Найдем теперь формулу для вычисления C_n^k.

Задача 2. Сколькими способами можно выбрать команду из трех школьников в классе, в котором учатся 30 человек?

Решение: Первого ученика можно выбрать 30 способами, второго – 29 способами, третьего – 28 способами. Таким образом получаем $30 \cdot 29 \cdot 28$ вариантов выбора. Однако каждая команда при этом подсчете учтена несколько раз: одна и та же тройка учеников может быть выбрана по разному, например, сначала А, потом В, потом С или сначала С, потом А, потом В и т.д. Поскольку число перестановок из трех элементов равно $3!$, то каждая команда учтена нами ровно $3! = 6$ раз. Поэтому C_{30}^3 равно $(30 \cdot 29 \cdot 28)/3!$.

Совершенно аналогично может быть получена формула для вычисления C_n^k при произвольных n и k:

$$C_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)/k!\,.$$

<u>**Для преподавателей.**</u> Числа C_n^k занимают центральное место в этой главе. Поэтому очень важно, чтобы все школьники поняли, что такое число сочетаний и как оно вычисляется. Возможно, перед тем, как переходить к общей формуле, придется обсудить несколько задач, аналогичных задаче 2.

Разберем еще несколько задач.

Задача 3. Сколькими способами можно выбрать 4 краски из имеющихся 7 различных?

Ответ. $C_7^4 = 35$.

Задача 4. У одного школьника есть 6 книг по математике, а у другого – 8. Сколькими способами они могут обменять три книги одного на три книги другого?

Решение: Первый школьник может выбрать 3 книги для обмена C_6^3 способами, второй – C_8^3 способами. Таким образом, число возможных обменов равно $C_6^3 \cdot C_8^3 = 1120$.

Задача 5. В шахматном кружке занимаются 2 девочки и 7 мальчиков. Для участия в соревновании необходимо составить команду из четырех человек, в которую обязательно должна входить хотя бы одна девочка. Сколькими способами это можно сделать?

Решение: В команду входит либо одна девочка, либо две. Разберем оба случая. Если в команде две девочки, то двух мальчиков к ним можно добавить C_7^2 способами. Если же в команду входит только одна девочка (ее можно выбрать двумя способами), то команду можно дополнить тремя мальчиками C_7^3 различными способами. Таким образом, общее число возможных команд равно $C_7^2 + 2C_7^3 = 91$.

Задача 6. Сколькими способами можно разбить 10 человек на две баскетбольные команды по 5 человек в каждой?

Решение: Первую команду можно выбрать C_{10}^5 способами. Этот выбор полностью определяет вторую команду. Однако при таком подсчете каждая пара команд A и B учитывается дважды: один раз, когда в качестве первой команды выбирается команда A, и второй, – когда в качестве первой команды выбирается команда B. Таким образом, ответ: $C_{10}^5/2$.

<u>Для преподавателей.</u> После усвоения этих формул не обязательно вычислять все встречающиеся при решении числа сочетаний – не страшно, если в окончательном ответе будут фигурировать числа C_n^k.

Заметим, что при рассмотрении полученной записи формулы для вычисления чисел C_n^k совершенно неочевидным оказывается уже доказанное нами их первое свойство: $C_n^{n-k} = C_n^k$. Однако формуле можно придать более симметричный вид, домножив числитель и знаменатель на $(n-k)!$:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)(n-k)!}{k!(n-k)!} =$$
$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)(n-k)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{k!(n-k)!} =$$
$$= \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Теперь первое свойство очевидно.

Упражнение. Докажите второе свойство чисел C_n^k, воспользовавшись формулой.

<u>Для преподавателей.</u> Определению, обсуждению свойств и нахождению формулы для вычисления чисел C_n^k необходимо посвятить отдельное занятие. На этом же занятии полезно решить несколько простых задач. На следующих занятиях нужно постоянно предлагать задачи на эту тему. Их можно брать из числа уже разобранных, а также из следующего списка (который, конечно, легко может быть дополнен преподавателем).

Задача 7. На плоскости отмечено 10 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

Задача 8. Рота состоит из трех офицеров, шести сержантов и 60 рядовых. Сколькими способами можно выделить из них отряд, состоящий из офицера, двух сержантов и 20 рядовых?

Задача 9. На прямой отмечено 10 точек, а на параллельной ей прямой – 11 точек. Сколько существует а) треугольников; б) четырехугольников с вершинами в этих точках?

Задача 10. Сколькими способами можно выбрать из 15 различных слов набор, состоящий не более чем из 5 слов?

Задача 11. Сколькими способами можно составить комиссию из 3 человек, выбирая ее членов из 4 супружеских пар, но так, чтобы члены одной семьи не входили в комиссию одновременно?

Задача 12. В классе, в котором учатся Петя и Ваня – 31 человек. Сколькими способами можно выбрать из класса футбольную команду (11 человек) так, чтобы Петя и Ваня не входили в команду одновременно?

Задача 13. Сколькими способами можно переставить буквы слова "ЭПИГРАФ" так, чтобы и гласные, и согласные шли в алфавитном порядке?

Задача 14. Из 12 девушек и 10 юношей выбирают команду, состоящую из пяти человек. Сколькими способами можно выбрать эту команду так, чтобы в нее вошло не более трех юношей?

Задача 15. Сколькими способами можно расставить 12 белых и 12 черных шашек на черных полях шахматной доски?

Задача 16. а) Сколькими способами можно разбить 15 человек на три команды по 5 человек в каждой?

б) Сколькими способами можно выбрать из 15 человек две команды по 5 человек в каждой?

Задача 17. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды (52 карты) 10 карт так, чтобы

а) среди них был ровно один туз?

б) среди них был хотя бы один туз?

Задача 18. Сколько существует 6-значных чисел, у которых по три четных и нечетных цифры?

Задача 19. Сколько существует 10-значных чисел, сумма цифр которых равна а) 2; б) 3; в) 4?

Задача 20. Человек имеет 6 друзей и в течение 5 дней приглашает к себе в гости каких-то троих из них так, чтобы компания ни разу не повторялась. Сколькими способами он может это сделать?

Задача 21. Как известно, для участия в лотерее "Спортлото" нужно указать шесть номеров из имеющихся на карточке 45 номеров.

а) Сколькими способами можно заполнить карточку "Спортлото"?

б) После тиража организаторы лотереи решили подсчитать, каково число возможных вариантов заполнения карточки, при которых могло быть угадано ровно три номера. Помогите им в этом подсчете.

2. Треугольник Паскаля

Этот параграф замечателен тем, что в нем соединяются практически все изложенные ранее идеи, и это приводит к нескольким чрезвычайно красивым комбинаторным фактам.

Для начала предположим, что мы знаем все числа C_n^k для некоторого фиксированного n. Тогда второе свойство:

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$$

позволяет легко вычислить числа C_n^k для всех k. Это соображение приводит к следующему построению.

Поскольку $C_0^0 = 1$, напишем в первой строке 1. В следующей строке напишем значения C_1^0 и C_1^1 (каждое из них равно 1) так, чтобы значение C_0^0 оказалось над промежутком между этими двумя числами (рис.66). Числа C_2^0 и C_2^2 также равны 1. Их мы запишем в следующей строке (см. рис.67), а между ними запишем C_2^1, равное по второму свойству $C_1^0 + C_1^1$ (рис.68). Таким образом, число C_2^1 равно сумме чисел предыдущей строки, стоящих слева и справа от него. По тому же правилу заполняем все последующие строчки: сначала по бокам пишем значения C_n^0 и C_n^n для очередного n (они всегда равны 1), а затем между каждыми двумя числами предыдущей строки записываем их сумму.

1

1 1

Рис. 66

1

1 1

1 1

Рис. 67

1

1 1

1 2 1

Рис. 68

В результате получаем числовой треугольник, изображенный на рис.69. Он называется *треугольником Паскаля*.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

. . . .

Рис. 69

По построению на $(k+1)$-м месте $(n+1)$-й строки этого треугольника стоит число C_n^k. Поэтому удобно нумеровать строки треугольника Паскаля и места в строках, начиная с нуля. Тогда получится, что C_n^k стоит на k-м месте n-й строки.

Для преподавателей. Перед тем, как двигаться дальше, необходимо проверить, что школьники полностью усвоили связь между числами C_n^k и треугольником Паскаля. Лучшее упражнение для этого – вычисление чисел сочетаний при помощи описанной процедуры.

Перейдем теперь к изучению свойств треугольника Паскаля. Подсчитаем сумму чисел в его нескольких первых строчках: 1, 2, 4, 8, 16. Возникает гипотеза, что сумма чисел в n-й строке равна 2^n. Докажем это по индукции. База уже проверена. Заметим теперь, что каждое число данной строки входит в качестве слагаемого в два соседних числа следующей строки. Таким образом, сумма чисел очередной строки в 2 раза больше суммы чисел предыдущей. Индукционный переход завершен.

Отметим, что попутно было доказано еще одно любопытное свойство треугольника Паскаля: в любой строке (кроме нулевой) сумма чисел, стоящих на четных местах, равна сумме чисел, стоящих на нечетных местах.

Записав теперь факт о сумме чисел n-й строки треугольника Паскаля в терминах чисел сочетаний, мы получаем замечательное комбинаторное тождество:

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n .$$

Дадим его прямое комбинаторное доказательство. Утверждается, что общее количество команд, выбираемых из n учеников, если число членов команды не фиксировано, равно 2^n (или, на языке теории множеств: число подмножеств n-элементного множества равно 2^n). Занумеруем учеников класса в произвольном порядке. Каждой команде сопоставим последовательность длины n из нулей и единиц следующим образом: на первом месте поставим 1, если первый ученик входит в данную команду, и 0 – в противном случае. Так же поступим со вторым, третьим и другими учениками. Таким образом, общее число команд равно числу последовательностей длины n из нулей и единиц. На каждом из n мест такой последовательности может стоять одна из двух цифр. Поэтому общее число последовательностей равно 2^n.

Методические замечания. Наиболее важным моментом в приведенном рассуждении было сопоставление каждой команде последовательности из нулей и единиц. На эту идею следует обратить внимание, так как подобная переформулировка часто бывает полезной при решении многих комбинаторных задач. Мы, в качестве примера, приведем лишь две из них.

Задача 22. Человек имеет 10 друзей и в течение нескольких дней приглашает некоторых из них в гости так, что компания ни разу не повторяется (в какой-то из дней он может не приглашать никого). Сколько дней он может так делать?

Задача 23. Лестница состоит из 7 ступенек, не считая верхней и нижней площадок. Спускаясь, можно перепрыгивать через некоторые ступеньки (можно даже через все 7). Сколькими способами можно спуститься по этой лестнице?

Прежде чем перейти к следующему замечательному свойству треугольника Паскаля, разберем одну задачу, при решении которой неожиданно возникают числа сочетаний.

Задача 24. План города имеет схему, изображенную на рис.70. На всех улицах введено одностороннее движение: можно ехать только “вправо” или “вверх”. Сколько есть разных маршрутов, ведущих из точки A в точку B?

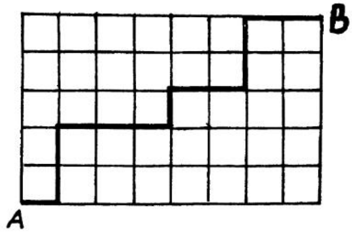


Рис. 70

Решение: Для удобства назовем улицей отрезок изображенной сетки, соединяющий два соседних узла. Ясно, что каждый маршрут содержит ровно 13 улиц, причем 8 из них расположены по горизонтали, а 5 – по вертикали. Сопоставим каждому маршруту последовательность букв Г и В следующим образом: при прохождении “горизонтальной” улицы маршрута будем дописывать в последовательность букву Г, а при прохождении “вертикальной” улицы – букву В. Например, маршруту, выделенному на рис.70, соответствует последовательность ГВВГГГВГГВВГГ. Каждая последовательность содержит 13 букв – 8 букв Г и 5 букв В. Осталось вычислить количество таких последовательностей. Последовательность однозначно задается набором из 5 мест, на которых в ней стоят буквы В (или набором из 8 мест, на которых стоят буквы Г). Пять мест из 13 можно выбрать C_{13}^5 способами. Поэтому число возможных последовательностей, а значит, и число возможных маршрутов, равно C_{13}^5.

Понятно, что в прямоугольнике $m \times n$ совершенно аналогичные рассуждения приводят к ответу C_{m+n}^m (или, что то же самое, C_{m+n}^n).

Вернемся теперь к треугольнику Паскаля. Заменим числа в нем точками (узлами) и соединим соседние точки линиями так, как показано на рис.71. Напишем теперь в вершине треугольника единицу, а в каждом узле – количество путей, которыми можно добраться до него из вершины, двигаясь вниз по линиям сетки. Видно (см. рис.72), что снова получается треугольник Паскаля.

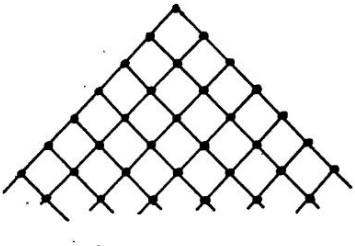


Рис. 71

Рис. 72

Доказательство этого совершенно аналогично решению предыдущей задачи. Впрочем, здесь, как и при доказательстве того, что сумма чисел в строке треугольника Паскаля является степенью двойки, можно провести и индукционное рассуждение. А именно: в k-й узел n-й строки можно попасть либо из $(k-1)$-го узла $(n-1)$-й строки, либо из k-го узла $(n-1)$-й строки (см. рис.72). Поэтому для нахождения требуемого числа путей достаточно сложить количества путей, ведущих в эти два узла $(n-1)$-й строки. Таким образом, в силу индукционного предположения, число путей, ведущих в k-й узел n-й строки, равно $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$.

<u>Методические замечания.</u> Вы, наверно, обратили внимание, что оба отмеченных свойства треугольника Паскаля были доказаны двумя способами – с использованием "геометрических" соображений и прямым комбинаторным рассуждением. Полезно использовать оба подхода при решении различных задач и особенно при доказательстве комбинаторных тождеств.

Несколько других свойств треугольника Паскаля мы приводим ниже в качестве задач. Они могут быть сформулированы как в терминах самого треугольника Паскаля, так и в виде комбинаторных тождеств.

Задача 25. Докажите, что из n предметов четное число предметов можно выбрать 2^{n-1} способами.

Задача 26. Докажите, что

$$C_n^0 - C_n^1 + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0\,.$$

Подсказка. Обратите внимание на то, что утверждения двух предыдущих задач, очевидно, эквивалентны. В задаче 25 предлагается доказать "чисто комбинаторный" факт, в то время, как вторая формулировка (в задаче 26) предлагает формульный путь решения. Таким образом, вы можете выбрать тот или иной способ решения в зависимости от ваших личных предпочтений.

* * *

Для удобства формулировки трех следующих задач введем следующие определения. Будем называть лучи, параллельные сторонам треугольника Паскаля, *диагоналями*. Причем лучи, параллельные правой стороне, будем называть правыми диагоналями (на рис.73 выделена одна из них), а левой – левыми диагоналями (см. рис.74).

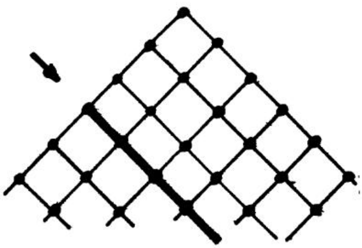


Рис. 73

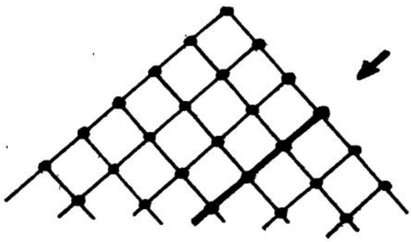


Рис. 74

Задача 27. Докажите, что каждое число a в треугольнике Паскаля равно сумме чисел предыдущей правой диагонали, начиная с самого левого вплоть до стоящего справа над числом a (см. рис.75).

Задача 28. Докажите, что каждое число a в треугольнике Паскаля равно сумме чисел в предыдущей левой диагонали, начиная с самого правого вплоть до стоящего слева над числом a (см. рис.76).

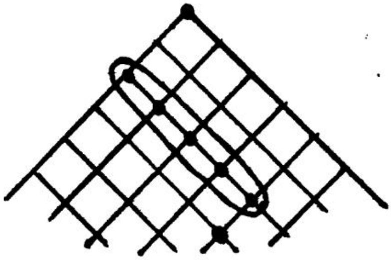


Рис. 75

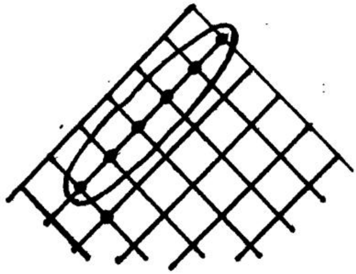


Рис. 76

Задача 29. Докажите, что каждое число a в треугольнике Паскаля, уменьшенное на 1, равно сумме всех чисел, заполняющих параллелограмм, ограниченный теми правой и левой диагоналями, на пересечении которых стоит число a (сами эти диагонали в рассматриваемый параллелограмм не включаются) (см. рис.77).

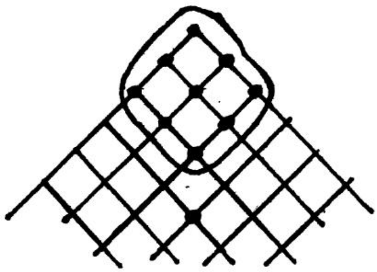


Рис. 77

Задача 30*. Докажите, что

$$\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n .$$

<u>**Для преподавателей.**</u> Все содержание этого параграфа (за исключением последней серии задач) может послужить основой одного занятия. Нам кажется, что при правильной подаче материала это занятие может стать одним из самых интересных. Мы также рекомендуем использовать материалы брошюр [49] и [51]. Однако, если Вы чувствуете, что школьники не полностью восприняли построение треугольника Паскаля или связь между биномиальными коэффициентами и числами в треугольнике, то не следует спешить закрывать тему.

Попробуйте повторить основные факты и свойства, касающиеся треугольника Паскаля, на одном из следующих занятий.

3. Шары и перегородки

Начнем этот параграф с обсуждения двух интересных задач. Обе эти задачи можно решить прямым, технически трудным подсчетом (попробуйте!). Вместе с тем переформулировка условия позволяет легко получить ответ, который в обоих случаях имеет вид C_n^k.

Задача 31. 6 ящиков занумерованы числами от 1 до 6. Сколькими способами можно разложить по этим ящикам 20 одинаковых шаров так, чтобы ни один ящик не оказался пустым?

Решение: Выложим шары в ряд. Для определения расклада наших шаров по шести ящикам разделим ряд пятью перегородками на шесть групп: первая группа для первого ящика, вторая – для второго и так далее. Таким образом, число вариантов раскладки шаров по ящикам равно числу способов расположения пяти перегородок. Перегородки могут стоять на любом из 19 мест (между 20 шарами – 19 промежутков). Поэтому число их возможных расположений равно C_{19}^5.

Упражнение. Сколькими способами можно разложить n одинаковых шаров по m пронумерованным ящикам так, чтобы ни один ящик не оказался пустым?

Задача 32. 6 ящиков занумерованы числами от 1 до 6. Сколькими способами можно разложить по этим ящикам 20 одинаковых шаров (на этот раз некоторые ящики могут оказаться пустыми)?

Решение: Рассмотрим ряд из 25 предметов: 20 одинаковых шаров и 5 одинаковых перегородок, расположенных в произвольном порядке. Каждый такой ряд однозначно соответствует некоторому способу раскладки шаров по ящикам: в первый ящик попадают шары, расположенные левее первой перегородки, во второй – расположенные между первой и второй перегородками и т.д. (между какими-то перегородками шаров может и не быть). Поэтому число способов раскладки шаров по ящикам равно числу различных рядов из 20 шаров и 5 перегородок, т.е. равно C_{25}^5 (ряд определяется теми пятью местами из 25, на которых стоят перегородки).

Отметим, что другое решение задачи 31 можно получить так: положим сначала в каждый ящик по одному шару (теперь наверняка не будет пустых ящиков), а потом воспользуемся результатом задачи 32.

Найденные при решении двух предыдущих задач идеи позволяют изящно и легко решить следующую трудную задачу.

Задача 33. Сколькими способами натуральное число n можно представить в виде суммы

а) k натуральных слагаемых;

б) k неотрицательных целых слагаемых (представления, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными)?

Указание. Представим n в виде суммы n единиц: $n = 1 + 1 + \ldots + 1$. Назовем теперь эти n единиц "шарами", а k слагаемых из условия задачи – "ящиками".
Ответ: а) C_{n-1}^{k-1}; б) C_{n+k-1}^{n}.

<u>**Методические замечания.**</u> Только что изложенные решения в очередной раз показали, насколько важна в комбинаторике удачная переформулировка условия задачи. Подробное обсуждение вопроса о раскладке шаров по ящикам объясняется тем, что подобные переформулировки (появление перегородок) оказываются полезными при решении многих, внешне не похожих друг на друга задач. Поэтому мы считаем необходимым запомнить эту идею и рекомендуем впоследствии постоянно возвращаться к ней. Для этого можно использовать задачи из следующего списка.

Задача 34. Сколькими способами 12 пятаков можно разложить по 5 различным кошелькам так, чтобы ни один кошелек не оказался пустым?

Задача 35. Переплетчик должен переплести 12 одинаковых книг в красный, зеленый или синий переплеты. Сколькими способами он может это сделать?

Задача 36. Сколькими способами можно разрезать ожерелье, состоящее из 30 различных бусин на 8 частей (резать можно только между бусинами)?

Задача 37. 30 человек голосуют по 5 предложениям. Сколькими способами могут распределиться голоса, если каждый голосует только за одно предложение и учитывается лишь количество голосов, поданных за каждое предложение?

Задача 38. В почтовом отделении продаются открытки 10 видов. Сколькими способами можно купить в нем

а) 12 открыток;

б) 8 открыток;

в) 8 различных открыток?

Задача 39. Поезду, в котором находится m пассажиров, предстоит сделать n остановок.

а) Сколькими способами могут выйти пассажиры на этих остановках?

б) Решите ту же задачу, если учитывается лишь количество пассажиров, вышедших на каждой остановке.

Задача 40. В кошельке лежит по 20 монет достоинством в 10, 15 и 20 копеек. Сколькими способами можно из этих 60 монет выбрать двадцать?

Задача 41. Сколькими способами можно расположить в 9 лузах 7 белых и 2 черных шара? Часть луз может быть пустой, а лузы считаются различными.

Задача 42. Сколькими способами 3 человека могут разделить между собой 6 одинаковых яблок, один апельсин, одну сливу и один мандарин?

Задача 43. Сколькими способами 4 черных шара, 4 белых шара и 4 синих шара можно разложить в 6 различных ящиков?

Задача 44. Общество из n членов выбирает из своего состава одного представителя.

а) Сколькими способами может произойти открытое голосование, если каждый голосует за одного человека (быть может, и за себя)?

б) Решите ту же задачу, если голосование – тайное, т.е. учитывается лишь число голосов, поданных за каждого кандидата, и не учитывается, кто за кого голосовал персонально.

Задача 45. Сколькими способами можно выложить в ряд 5 красных, 5 синих и 5 зеленых шаров так, чтобы никакие два синих шара не лежали рядом?

Задача 46*. Сколькими способами можно представить 1000000 в виде произведения трех множителей, если произведения, отличающиеся порядком множителей, считаются различными?

Задача 47*. На полке стоит 12 книг. Сколькими способами можно выбрать из них 5 книг, никакие две из которых не стоят рядом?

4*. Бином Ньютона

<u>**Для преподавателей.**</u> Этот параграф отмечен звездочкой не случайно: он достаточно труден, особенно для младшеклассников. Однако мы не сочли возможным опустить его, поскольку содержание параграфа теснейшим образом связано с числами C_n^k и треугольником Паскаля. Несомненно также, что бином Ньютона является обязательным элементом математического образования. По усмотрению преподавателя изучение этого параграфа можно перенести на следующий год обучения.

Всем, конечно, хорошо известно тождество:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 .$$

Попробуем получить формулу для возведения двучлена $(a+b)$ в произвольную степень. Выпишем несколько последовательных степеней этого двучлена:

$$\begin{array}{lccccccc}
(a+b)^0 = & & & & 1 & & & \\
(a+b)^1 = & & & a & + & b & & \\
(a+b)^2 = & & a^2 & + & 2ab & + & b^2 & \\
(a+b)^3 = & a^3 & + & 3a^2b & + & 3ab^2 & + & b^3
\end{array}$$

Бросается в глаза, что коэффициенты при одночленах в правых частях тождеств образуют соответствующие строчки треугольника Паскаля. Возникает гипотеза, что имеет место тождество:

$$(a+b)^n = \mathrm{C}_n^0 a^n + \mathrm{C}_n^1 a^{n-1} b^1 + \mathrm{C}_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + \mathrm{C}_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + \mathrm{C}_n^n b^n .$$

Это разложение действительно верно и называется *биномом Ньютона.* Докажем его. Раскроем скобки в произведении

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)(a+b)\ldots(a+b)(a+b) ,$$

не приводя пока подобных членов и не изменяя порядок сомножителей в каждом одночлене (например,

$$(a+b)(\underline{a}+\underline{b})(\overline{a}+\overline{b}) =$$
$$= a\underline{a}\overline{a} + a\underline{a}\overline{b} + a\underline{b}\overline{a} + a\underline{b}\overline{b} + b\underline{a}\overline{a} + b\underline{a}\overline{b} + b\underline{b}\overline{a} + b\underline{b}\overline{b} .$$

Подсчитаем теперь коэффициент при $a^{n-k}b^k$ после приведения подобных членов. Ясно, что этот коэффициент равен количеству одночленов, в которых b встречается ровно k раз (a, соответственно, $n-k$ раз). Число таких одночленов легко подсчитать: оно равно C_n^k – количеству способов, которыми можно выбрать k мест для букв b.

Упражнение. Выведите формулу бинома Ньютона по индукции.

5. Дополнительные задачи

<u>Для преподавателей.</u> Этот параграф является вспомогательным: в нем не излагается новый содержательный материал, а просто приводится список задач. Включение этого параграфа в нашу главу преследует две цели. Первая – пополнить запас задач для занятий. Кроме того, после изучения основных комбинаторных идей необходимо, как мы уже неоднократно отмечали, постоянно возвращаться к пройденному. Повторению можно иногда посвятить даже целое занятие (его можно проводить в виде олимпиады, матдраки и т.д.). Нижеперечисленные задачи составляют достаточно типичный комплект для такого занятия – "воспоминания".

Задача 48. Сколько ожерелий можно составить из 5 одинаковых красных бусинок и двух одинаковых синих бусинок?

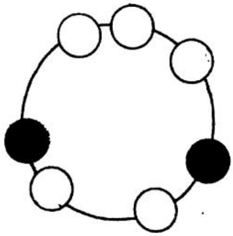


Рис. 78

Задача 49. а) Спортивный клуб насчитывает 30 членов, из которых надо выделить 4 человека для участия в забеге на 1000 метров. Сколькими способами это можно сделать?

б) Сколькими способами можно составить команду из 4 человек для участия в эстафете 100м + 200м + 300м + 400м?

Задача 50. Сколько можно составить шестибуквенных слов (слово – это произвольная последовательность букв), содержащих хотя бы один раз букву А, если можно использовать все 33 буквы алфавита?

Задача 51. Сколькими способами можно построить замкнутую ломаную, вершинами которой являются вершины правильного шестиугольника (ломаная может быть самопересекающейся)?

Задача 52. Сколько различных четырехзначных чисел, делящихся на 4, можно составить из цифр 1, 2, 3 и 4,

а) если каждая цифра может встречаться только один раз?;

б) если каждая цифра может встречаться несколько раз?

Задача 53. У отца 2 яблока и 3 груши. Каждый день в течение 5 дней он выдает сыну по одному фрукту. Сколькими способами это может быть сделано?

Задача 54. Труппа театра состоит из 20 артистов. Сколькими способами можно выбрать из нее в течение двух вечеров по 6 человек для участия в спектаклях так, чтобы ни один артист не участвовал в двух спектаклях?

Задача 55. Найдите сумму всех трехзначных чисел, которые можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4 (цифры могут повторяться).

Задача 56. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды, содержащей 52 карты, 6 карт так, чтобы среди них были представители всех четырех мастей?

Задача 57. Сколькими способами можно разложить 3 рублевых купюры и 10 полтинников в 4 различных пакета?

Задача 58. Сколько существует целых чисел от 0 до 999999, в десятичной записи которых нет двух стоящих рядом одинаковых цифр?

Задача 59. Сколькими способами можно разделить колоду из 36 карт пополам так, чтобы в каждой половине было по 2 туза?

Задача 60. Ладья стоит на левом поле клетчатой полоски 1×30 и за ход может сдвинуться на любое количество клеток вправо.

а) Сколькими способами она может добраться до крайнего правого поля?

б) Сколькими способами она может добраться до крайнего правого поля ровно за 7 ходов?

Задача 61. На каждом борту лодки должно сидеть по 4 человека. Сколькими способами можно выбрать команду для этой лодки, если есть 31 кандидат, причем десять человек хотят сидеть на левом борту лодки, двенадцать – на правом, а девяти безразлично где сидеть?

Задача 62*. Найдите число прямоугольников, составленных из клеток доски с m горизонталями и n вертикалями, которые содержат клетку с координатами (p, q).

Задача 63*. Имеется куб размером $10 \times 10 \times 10$, состоящий из маленьких единичных кубиков. В центре O одного из угловых кубиков сидит кузнечик. Он может прыгать в центр кубика, имеющего общую грань с тем, в котором кузнечик находится в данный момент; причем так, чтобы расстояние до точки O увеличивалось. Сколькими способами кузнечик может допрыгать до кубика, противоположного исходному?

ИНВАРИАНТ

1. Введение

"... Учитель: Проведем эксперимент. Видите, ребята, на доске написано 11 чисел – 6 нулей и 5 единиц. Теперь 10 раз подряд выполните такую операцию: зачеркните любые два числа и, если они были одинаковы, допишите к оставшимся числам один ноль, а если разные – единицу. Сделайте это у себя в тетрадях. Итак, все? А теперь я скажу вам, какое число у вас получилось. У всех вас должна была получиться единица!"

Эта сцена вызывает естественный вопрос: откуда же учитель заранее знал, какое число получится у ребят? Ведь операции можно выполнять самыми разными способами. Но все дело в том, что после каждой операции сумма всех чисел на доске обязательно остается нечетной, какой она и была в начале. Проверить это совсем нетрудно – сумма каждый раз меняется на 0 или 2. Значит, и после 10 операций оставшееся число должно быть нечетным, т.е. равным 1. Объяснив это детям, учитель, наверно, не удержится и упомянет волшебное слово "инвариант".

Что же это такое? Говоря по-русски, *инвариант* – это то, что не изменяется, как в нашем примере не менялась четность суммы цифр.

Вот еще один пример инварианта:

Задача 1. В алфавите языка племени УЫУ всего две буквы: У и Ы, причем этот язык обладает такими свойствами: если из слова выкинуть стоящие рядом буквы УЫ, то смысл слова не изменится. Точно так же смысл слова не изменится при добавлении в любое место слова буквосочетания ЫУ или УУЫЫ. Можно ли утверждать, что слова УЫЫ и ЫУУ имеют одинаковый смысл?

Решение: Обратите внимание, что при любой разрешенной нам операции добавления или выкидывания куска слова количества букв У и Ы в этом куске равны. Это означает, что разность между числом букв У и букв Ы в слове не изменяется. Проследите это на примере

$$\text{Ы} \to \text{ЫЫУ} \to \text{ЫУУЫЫЫУ} \to \text{ЫУЫЫУ}$$

Во всех этих словах букв Ы на одну больше, чем букв У. Вернемся к решению. В слове УЫЫ разность равна (-1), а в слове ЫУУ равна 1. Значит, из слова УЫЫ нельзя разрешенными операциями получить слово ЫУУ, и следовательно, нельзя утверждать, что эти слова обязательно имеют одинаковый смысл.

Это решение иллюстрирует главную идею применения инварианта. Нам даны некие объекты, над которыми разрешено выполнять определенные операции, после чего задается вопрос – можно ли из одного объекта получить другой при помощи этих операций? Чтобы ответить на него, мы строим некоторую величину, которая не меняется при указанных операциях. Если значения этой величины для двух указанных объектов не равны, то, конечно, ответ на заданный вопрос отрицателен.

Разберем еще один пример:

Задача 2. Круг разделен на 6 секторов (см. рис.79), в каждом из которых стоит фишка. Разрешается за один ход сдвинуть любые две фишки в соседние с ними сектора. Можно ли с помощью таких операций собрать все фишки в одном секторе?

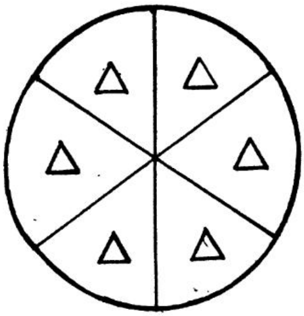


Рис. 79

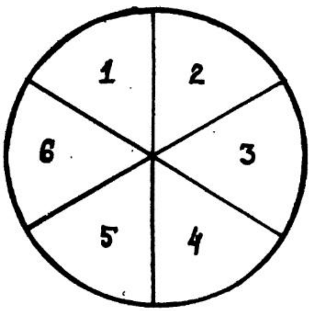


Рис. 80

Решение: Занумеруем сектора по кругу числами от 1 до 6 (см. рис.80) и для любой расстановки фишек рассмотрим следующую величину S – сумму номеров секторов, в которых стоят данные нам 6 фишек (с учетом кратности).

Пример. Для расположения на рис.81 имеем $S = 2 + 2 + 4 + 4 + 5 + 6 = 23$.

Очевидно, что при сдвиге фишки в соседний сектор соответствующее ей слагаемое в сумме S меняет четность. Значит, если сдвигаются одновременно две фишки, то четность величины S не меняется – она инвариантна. Но для расстановки на рис.79 $S = 21$. Если же все фишки находятся в одном секторе с номером A, то $S = 6A$ – это четное число (а 21 – число нечетное). Следовательно, из исходной расстановки нельзя получить расстановку, в которой все 6 фишек находятся в одном секторе.

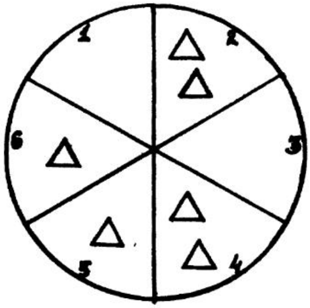


Рис. 81

Иногда инвариант применяется не для того, чтобы доказать, что какой-то объект нельзя получить из данного, а для того, чтобы узнать, какие объекты можно получить из исходного объекта. Это иллюстрирует следующая простая задача.

Задача 3. На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 19, 20. Разрешается стереть любые два числа a и b и вместо них написать число $a+b-1$. Какое число может остаться на доске после 19 таких операций?

Решение: Для любого набора из n чисел на доске рассмотрим следующую величину X: сумму всех чисел, уменьшенную на n. Допустим, что с набором произведено описанное в условии преобразование. Как же изменится эта величина? Если сумма всех чисел набора, кроме a и b, равна S, то до преобразования величина X равнялась $S+a+b-n$, а после преобразования $X = S+(a+b-1)-(n-1) = S+a+b-n$. Итак, значение величины X не изменилось, она – инвариант. Исходно (для набора из условия задачи) $X = (1+2+\ldots+19+20)-20 = 190$. Значит, и после 19 операций, когда на доске останется одно число p, X также будет равно 190. Но по своему определению, в этот момент X будет равно $p-1$. Значит, $p = 191$. Следовательно, число, оставшееся на доске обязательно будет равно 191.

<u>**Для преподавателей.**</u> Если вы на занятии и услышите решение этой задачи, то оно, скорее всего, будет звучать так: на каждом шаге сумма всех чисел уменьшается на 1. Шагов 19, а сумма исходно была равна 210. Значит, в конце она равна $210 - 19 = 191$. Следует, однако, несмотря на правильность этого ре-

шения, объяснить ребятам, что задача – на инвариант. Дело в том, что в данном случае инвариант прост настолько, что допускает совсем тривиальное истолкование. В следующей задаче, хотя она и похожа на задачу 4, такое "упрощение" решения уже не удается.

Задача 4. На доске выписаны числа 1, 2, ..., 20. Разрешается стереть любые два числа a и b и заменить их на число $ab + a + b$. Какое число может остаться на доске после 19 таких операций?

Подсказка: В качестве инварианта рассмотрите следующую величину: произведение всех чисел на доске, предварительно увеличенных на 1.

Вот еще несколько замечательных задач на метод инварианта:

Задача 5. На шести елках сидят шесть чижей, на каждой елке – по чижу. Елки растут в ряд с интервалами в 10 метров. Если какой-то чиж перелетает с одной елки на другую, то какой-то другой чиж обязательно перелетает на столько же метров, но в обратном направлении. Могут ли все чижи собраться на одной елке? А если чижей и елок – семь?

Задача 6. В таблице 8×8 одна из клеток закрашена черным цветом, все остальные – белым. Докажите, что с помощью перекрашивания строк и столбцов нельзя добиться того, чтобы все клетки стали белыми. Под перекрашиванием строки или столбца понимается изменение цвета всех клеток в строке или столбце.

Задача 7. Решите ту же задачу для таблицы 3×3 (см. рис.82). Как и прежде, исходно лишь одна клетка (угловая) покрашена в черный цвет.

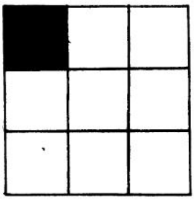


Рис. 82

Задача 8. Решите ту же задачу для таблицы 8×8, если исходно в черный цвет покрашены все 4 угловые клетки.

Задача 9. На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 1989. Разрешается стереть любые два числа и написать вместо них разность этих чисел. Можно ли добиться того, чтобы все числа на доске были нулями?

Задача 10. В стране Серобуромалин живет 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Когда встречаются два хамелеона разного цвета, они одновременно приобретают окраску третьего цвета (например, серый и бурый становятся малиновыми). Может ли через некоторое время оказаться, что все хамелеоны имеют один цвет?

Указание: Обратите внимание, что задача 6 может быть решена всего лишь с помощью соображения четности числа черных клеток в таблице в отличие от задач 7 и 8.

Разберем решение задачи 10. В чем состоит описанная операция? В том, что "пропадают" два хамелеона двух разных цветов и "появляются" два хамелеона третьего цвета. Если догадаться о том, что величину-инвариант нужно определять по набору чисел $(a,\ b,\ c)$, где a, b и c – количества серых, бурых и малиновых хамелеонов соответственно, то дальше решение получается почти сразу же. В самом деле, операция, описанная в условии, означает то, что из набора $(a,\ b,\ c)$ получается набор $(a-1,\ b-1,\ c+2)$ или набор $(a-1,\ b+2,\ c-1)$ или набор $(a+2,\ b-1,\ c-1)$ – все зависит от того, в какой цвет перекрашивается хамелеоны. Очевидно, что разности между числами набора либо не меняются, либо изменяются на 3, а значит, остатки этих разностей при делении на 3 не меняются – они инвариантны. Но в начале $a-b=13-15=-2$, а в случае, если все хамелеоны малиновые, $a-b=0-0=0$.Числа 0 и -2 имеют разные остатки при делении на 3, что и доказывает невозможность такого положения дел в стране. Аналогично разбираются и случаи, когда все хамелеоны стали серыми, или все стали бурыми.

Для преподавателей. Если тема "Четность" уже пройдена и вы решали задачи, в которых четность фигурировала как инвариант, обязательно напомните об этом Вашим ученикам.

Тема "Инвариант" носит довольно абстрактный характер и даже сам принцип применения инварианта часто остается непонятным и сложным для школьников. Именно поэтому надо обратить особое внимание на то, чтобы ребята поняли саму логику применения инварианта. Необходимо особенно тщательно разбирать решения простейших задач темы, наряду с этим стараясь достигнуть того, чтобы каждый из учеников решил какую-то задачу самостоятельно. Иллюстрируйте решения задач многочисленными примерами, постарайтесь сделать изложение как можно более наглядным, а логику решения как можно более прозрачной. Как всегда, постарайтесь вводить незнакомое слово "инвариант" и излагать общую философию инварианта лишь после того, как ребята решат или разберут несколько простейших задач на применение инварианта,

Конечно, главное в решении задач на инвариант, это – придумать сам инвариант. Это настоящее искусство, которым можно овладеть лишь при наличии известного опыта в решении подобных задач. Здесь очень важно не ограничивать фантазию. Не надо, однако, забывать о том, что

а) придумываемые величины должны быть инвариантны;

б) эти инварианты должны давать разные значения для двух данных в условии задачи объектов;

в) необходимо сразу определить класс объектов, для которых будет определяться наша величина.

Разберем еще один важный пример.

Задача 11. В вершинах правильного 12-угольника расставлены числа $+1$ и -1 так, что во всех вершинах, кроме одной, стоят $+1$. Разрешается изменять знак в любых k подряд идущих вершинах. Можно ли такими операциями добиться того, чтобы единственное число -1 сдвинулось в соседнюю с исходной вершину, если а) $k = 3$; б) $k = 4$; в) $k = 6$?

Решение: Ответ во всех пунктах отрицателен. Доказательство проходит по единой схеме: отметим некоторое множество вершин, обладающее тем свойством, что любой набор из k вершин подряд содержит четное число отмеченных вершин (см. рис.83).

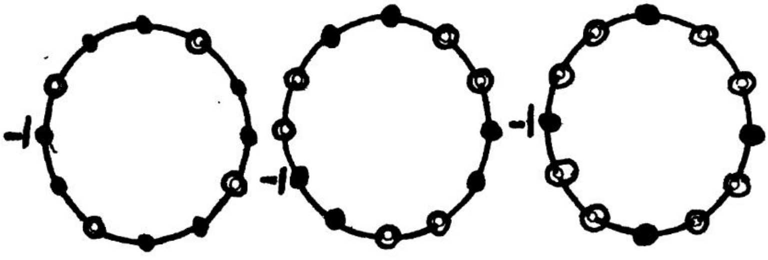


Рис. 83

Проверьте, что это свойство выполняется для множеств, указанных на рисунке.

В качестве инварианта рассмотрим произведение всех чисел в отмеченных вершинах. В начале оно равно -1, а в случае, когда число -1 сместилось в соседнюю слева (неотмеченную) вершину, равно 1. Инвариантность же введенной величины следует из описанного выше свойства множества отмеченных вершин.

<u>**Для преподавателей.**</u> В этом решении встретилась распространенная идея в методе инварианта: выделить в каждом объекте какую-то часть, в которой изменения, вызываемые разрешенными операциями, выглядят особенно просто.

Указание: С помощью этой же идеи решаются и задачи 7 и 9.

Кстати, попробуйте задать ребятам "каверзный" вопрос: мы доказали, что -1 не может сдвинуться в соседнюю слева вершину. А может быть, можно сделать так, чтобы -1 сдвинулась в соседнюю справа вершину?

2. Раскраска

Большое количество задач на инвариант решается с помощью инварианта специфического вида – так называемой "раскраски". Вот типичный пример:

Задача 12. Фигура "верблюд" ходит по доске 10×10 ходом типа $(1, 3)$ (то есть, она сдвигается сначала на соседнее поле, а затем сдвигается еще на три поля в перпендикулярном направлении; конь, например, ходит ходом типа $(1, 2)$). Можно ли пройти ходом "верблюда" с какого-то исходного поля на соседнее с ним?

Решение: Ответ: нельзя. Рассмотрим шахматную раскраску доски в черный и белый цвета. Тогда, как легко проверить, каждым своим ходом "верблюд" ходит с одного поля на поле того же цвета; иными словами, цвет поля, на котором стоит "верблюд" – инвариант. Но так как два соседних поля имеют разную окраску, то пройти с одного на другое ходом "верблюда" невозможно.

Вот еще несколько задач на метод раскраски.

Задача 13. а) Докажите, что шахматную доску 8×8 нельзя замостить 15 фигурками 1×4 и одной фигуркой, указанной на рис.84а.

б) Докажите, что доску 10×10 нельзя замостить фигурками, указанными на рис.84б.

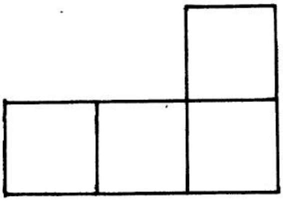


Рис. 84 а

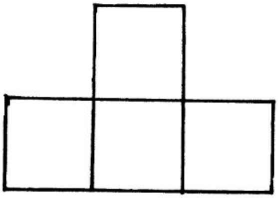


Рис. 84 б

в) Докажите, что доску 102×102 нельзя замостить фигурками 1×4.

Указание к 13б). Используйте шахматную раскраску доски.

Задача 14. Дно прямоугольной коробки вымощено плитками 1×4 и 2×2. Плитки высыпали из коробки и одна плитка 2×2 потерялась. Ее заменили на плитку 1×4. Докажите, что теперь дно коробки вымостить не удастся.

Задача 15. Можно ли доску размерами $4 \times N$ обойти ходом коня, побывав на каждом поле ровно один раз, и вернуться на исходное поле?

Разберем решение задачи 15. Раскрасим доску $4 \times N$ в 4 цвета так, как это показано на рис.85. Допустим, что существует обход конем данной доски. Указанная раскраска обладает тем свойством, что если конь стоит на поле цвета 1 (соответственно 2), то следующим ходом он встанет на поле цвета 3 (соответственно 4).

	1	2	1	2	1	2	
	3	4	3	4	3	4	
	4	3	4	3	4	3	
	2	1	2	1	2	1	

Рис. 85

А так как полей цветов 1 и 2 столько же, сколько и полей цветов 3 и 4, то в случае наличия обхода конем доски цвета пар (1, 2) и (3, 4) чередуются. Следовательно, всякий раз, как конь встает на поле цвета 3, следующим ходом он должен встать на поле цвета 1 или 2 – а легко видеть, что он может встать только на поле цвета 1. Значит, при обходе доски цвета 1 и 3 чередуются. Но это невозможно, так как тогда конь никогда не встанет на поля цветов 2 и 4. Мы пришли к противоречию.

<u>**Для преподавателей.**</u> 1. Достаточно немного пофантазировать, чтобы самому придумать несколько задач на раскраску; переберите, например, всевозможные

вариации фигурок и досок в задаче 13. Помните, что обычно отыскание нужной раскраски нацелено на доказательство отрицательного ответа.

2. Еще немного о самом методе раскраски. Существует много задач, решающихся с помощью раскраски, которые иногда не имеют никакого отношения к методу инварианта (см. [3], [42]). Некоторые варианты этого метода вполне могут рассматриваться как отдельные темы, которым может быть посвящена небольшая (час-полтора) лекция с решением задач.

3. Инвариант – остаток

Вот еще семь примеров задач на инвариант. Они примечательны тем, что здесь инвариантом служит остаток по некоторому модулю. Это довольно распространенный случай (см. задачи 3, 7–9 – остаток по модулю 2, задача 11 – по модулю 3).

Задача 16. Иван-царевич имеет два волшебных меча, один из которых может отрубить Змею Горынычу 21 голову, а второй – 4 головы, но тогда у Змея Горыныча отрастает 1985 голов. Может ли Иван отрубить Змею Горынычу все головы, если в самом начале у него было 100 голов? (Примечание: если, например, у Змея Горыныча осталось лишь три головы, то рубить их ни тем, ни другим мечом нельзя).

Задача 17. В странах Диллии и Даллии денежными единицами являются диллеры и даллеры соответственно, причем в Диллии диллер меняется на 10 даллеров, а в Даллии даллер меняется на 10 диллеров. Начинающий финансист имеет 1 диллер и может свободно переезжать из одной страны в другую и менять свои деньги в обеих странах. Докажите, что количество даллеров у него никогда не сравняется с количеством диллеров.

Задача 18. Разменный автомат меняет одну монету на пять других. Можно ли с его помощью разменять металлический рубль на 26 монет?

Задача 19. Есть три печатающих автомата. Первый по карточке с числами a и b выдает карточку с числами $a+1$ и $b+1$; второй по карточке с четными числами a и b выдает карточку с числами $a/2$ и $b/2$; третий автомат по паре карточек с числами a, b и b, c выдает карточку с числами a, c. Все автоматы возвращают заложенные в них карточки. Можно ли с помощью этих автоматов из карточки (5, 19) получить карточку (1, 1988)?

Задача 20. На доске написано число 8^n. У него вычисляется сумма цифр, у полученного числа вновь вычисляется сумма цифр, и так далее, до тех пор, пока не получится однозначное число. Что это за число, если $n = 1989$?

Задача 21. В пробирке находятся марсианские амебы трех типов: A, B и C. Две амебы любых двух разных типов могут слиться в одну амебу третьего типа. После нескольких таких слияний в пробирке оказалась одна амеба. Каков ее тип, если исходно амеб типа A было 20 штук, типа B – 21 штука и типа C – 22 штуки?

Задача 22. Фишка ходит по квадратной доске, каждым своим ходом сдвигаясь либо на клетку вверх, либо на клетку вправо, либо по диагонали вниз-влево (см. рис.86). Может ли она обойти всю доску, побывав на всех полях ровно по одному разу, и закончить на поле, соседнем справа от исходного?

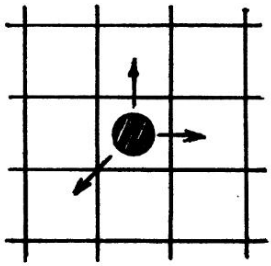


Рис. 86

Попробуем промоделировать сам процесс решения задачи 19.

Для преподавателей: если вы излагаете решение школьникам, то попробуйте представить его именно в форме рассказа о том, как вы к нему пришли, как догадались о том, что задача – на инвариант и т.д.

Итак, внешний вид задачи: дан набор разрешенных операций и нас просят выяснить, можно ли из одной карточки получить другую – наталкивает нас на то, что нужно искать инвариант. Начнем поиск.

1-я операция: $(a, b) \to (a+1, b+1)$. Что же не меняется при этой операции? Ну, конечно же, разность чисел на карточке: $(a+1)-(b+1) = a-b$. Но вот уже 2-я операция меняет разность: $a/2 - b/2 = (a-b)/2$ – она делит ее пополам. 3-я операция складывает эти разности: $a - c = (a-b) + (b-c)$.

Все это приводит нас к мысли, что, видимо, инвариантом является не сама разность, а... что же? Что можно сделать с этим числом? Вполне возможно, что ответ на этот вопрос не сразу придет вам на ум. Ну что же, займемся небольшим исследованием. Наудачу попробуем получить какие-то карточки из данной:

(1) $(5, 19) \to (6, 20)$ (2) $(6, 20) \to (3, 10)$

(3) $(3, 10) \to (20, 27)$ (4) $(6, 20), (20, 27) \to (6, 27)$

Пока хватит. Теперь уже можно посмотреть на плоды наших трудов. Мы имеем набор карточек: (5, 19), (6, 20), (3, 10), (20, 27), (6, 27). Вычислим для них разность чисел на карточке и получим набор чисел: 14, 14, 7, 7, 21. Тут, конечно, мы сразу догадались, что нужно доказывать! Конечно же то, что наша разность $a - b$ всегда будет делиться на 7. Доказывается это очень просто, стоит только еще раз посмотреть, что происходит с разностью при разрешенных операциях (см. выше). Но у той карточки, которую нам хочется получить – (1, 1988) – разность чисел равна $1 - 1988 = -1987$ и на 7 не делится. Задача решена.

* * *

И, наконец, заключительная серия задач:

Задача 23. В таблице $m \times n$ расставлены числа так, что сумма чисел в любой строке или столбце равна 1. Докажите, что $m = n$.

Примечание. Как ни странно, но в некотором смысле это тоже задача на инвариант.

Задача 24. На столе стоят 7 стаканов – все вверх дном. Разрешается за один ход перевернуть любые 4 стакана. Можно ли за несколько ходов добиться того, чтобы все стаканы стояли правильно?

Задача 25. В вершинах куба расставлены числа: 7 нулей и одна единица. За один ход разрешается прибавить по единице к числам в концах любого ребра куба. Можно ли добиться того, чтобы все числа стали равными? А можно ли добиться того, чтобы все числа делились на 3?

Задача 26. Круг разделен на 6 секторов, как в задаче 3, и в них по часовой стрелке расставлены числа: 1, 0, 1, 0, 0, 0. Разрешается прибавить по единице к числам в любых двух соседних секторах. Можно ли такими операциями добиться того, чтобы все числа в секторах были одинаковыми?

Задача 27. В задаче 20 выясните, какие карточки можно получить из карточки (5, 19), а какие нельзя.

Задача 28. На столе лежит куча из 1001 камня. Ход состоит в том, что из какой-либо кучи, содержащей более одного камня, выкидывают камень, а затем одну из куч делят на две. Можно ли через несколько ходов оставить на столе только кучки, состоящие из трех камней?

Задача 29. В ряд выписаны числа $1, 2, 3, \dots, n$. За один ход разрешается поменять местами любые два числа. Может ли после 1989 таких операций порядок чисел оказаться исходным?

Задача 30. Дана некоторая тройка чисел. С любыми двумя из них разрешается проделывать следующее: если эти числа равны a и b, то их можно заменить на $(a+b)/\sqrt{2}$ и $(a-b)/\sqrt{2}$. Можно ли с помощью таких операций получить тройку $(1, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ из тройки $(2, \sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$?

Эти упражнения в среднем более трудны, чем большинство из задач 1–23, но при этом они могут послужить хорошими задачами для домашнего исследования.

Для преподавателей.

1. Задачи на инвариант чрезвычайно распространены. Так, например, каждый год на Санкт-Петербургской (Ленинградской) городской олимпиаде не менее двух или трех задач решаются методом инварианта. Это следует сообщить ребятам – возможно, это подтолкнет их на более детальное изучение этой темы (хотя бы и из соображений спортивного характера).
2. Идея инварианта проникает в самые различные области науки. Если ваши ученики достаточно знакомы с физикой, то в качестве примера вы можете разобрать с ними различные следствия закона сохранения энергии, а также теоремы типа закона сохранения импульса и т.п.
3. Школьники должны понять, что если подобранный инвариант дает одинаковые значения для двух данных объектов, то это еще совсем не означает того, что их можно получить друг из друга с помощью указанных в задаче операций. Это довольно стандартное заблуждение, которое обычно появляется при первом знакомстве с методом инварианта. Придумайте во время занятия несколько простейших примеров, опровергающих эту "идею".
4. Напомним еще раз некоторые стандартные инварианты:
   1) остаток по некоторому модулю – задачи 3, 7–11, 17–22.
   2) выделение части объекта – задачи 7, 9, 12.
   3) раскраска – задачи 13–16.
   4) алгебраическое выражение от данных задачи; как в задачах 4, 26, 30.

ГРАФЫ–2

В этой главе продолжается изучение графов, начатое в первой части книги. Почему же мы считаем необходимым вернуться к этой теме? Во-первых, графы являются интересным объектом изучения. А во-вторых, и это самое главное, элементарные рассуждения, связанные с графами, позволяют непосредственно приблизиться к серьезной математике (в первую очередь это относится к параграфам 1 и 3 этой главы).

1. Изоморфизм

Как уже отмечалось, один и тот же граф можно нарисовать разными способами. Так, одной и той же схеме знакомств или одной и той же системе авиалиний могут соответствовать внешне не похожие друг на друга картинки. Рассмотрим следующий пример: на турнире пяти команд А, В, С, Д, Е команда А сыграла с В, Д и Е, кроме того, С сыграла с В и Д, а Д с Е. Обе картинки, изображенные на рис.87, правильно отражают описанную ситуацию.

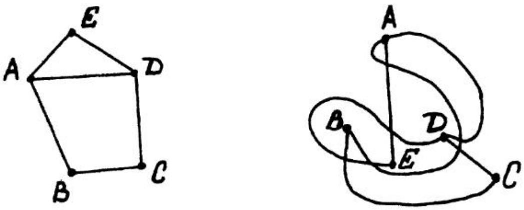


Рис. 87

Дадим точное определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Два графа называются ***изоморфными***, если у них поровну вершин (по n), и вершины каждого графа можно занумеровать числами от 1 до n так, чтобы вершины первого графа были соединены ребром тогда и только тогда, когда соединены ребром соответствующие (занумерованные теми же числами) вершины второго графа.

Теперь мы можем вернуть долг и доказать, что графы, изображенные на рисунках 26б и 22 (см. главу "Графы-1"; эти графы воспроизведены здесь на рис.88), не изоморфны.

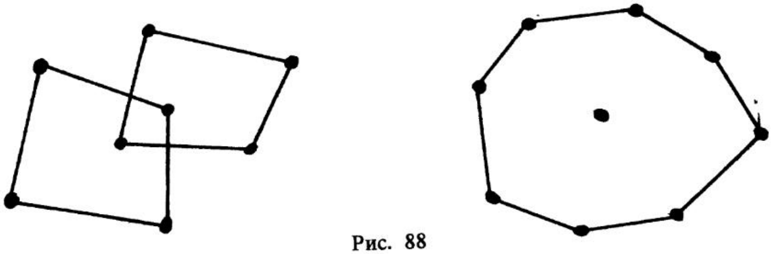


Рис. 88

Дело в том, что эти графы имеют разное число компонент связности: первый – три, а второй – две.

Покажем, что изоморфные графы должны иметь равное количество компонент связности. Для этого достаточно заметить, что если две вершины первого графа принадлежат одной компоненте, то они соединены путем, а тогда и соответствующие им вершины второго графа также соединены путем, то есть лежат в одной компоненте связности.

Задача 1. Изоморфны ли графы в парах, изображенных на рис.89?

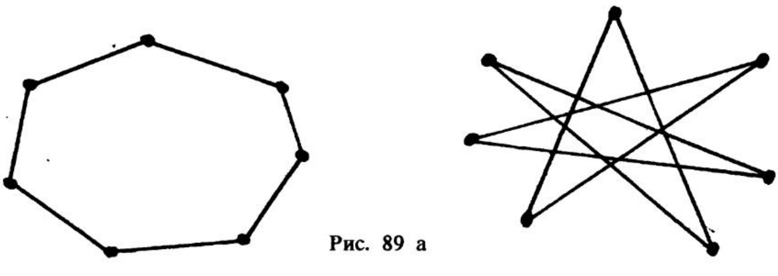


Рис. 89 а

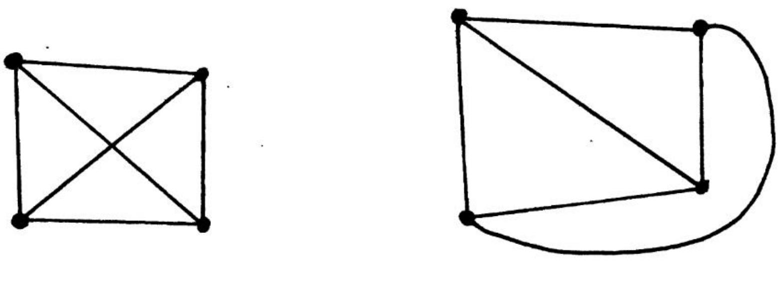


Рис. 89 б

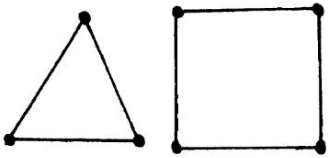


Рис. 89 в

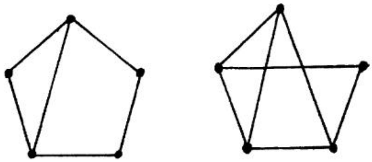


Рис. 89 г

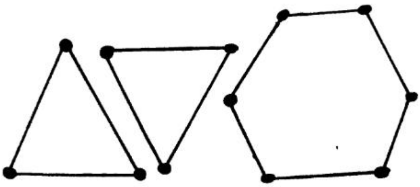


Рис. 89 д

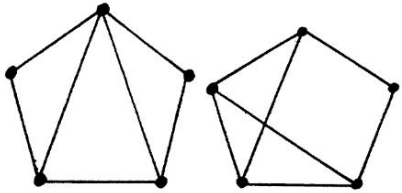


Рис. 89 е

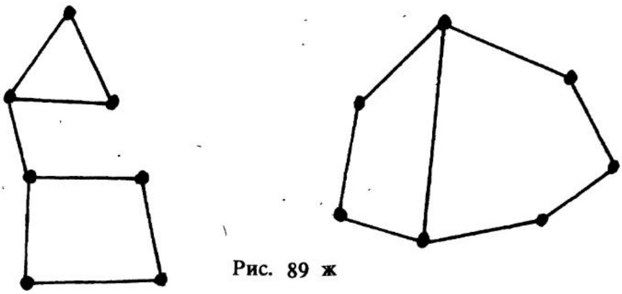


Рис. 89 ж

Решение: В пунктах а) и б) приведены изоморфные графы, что доказывается рисунками 90 и 91.

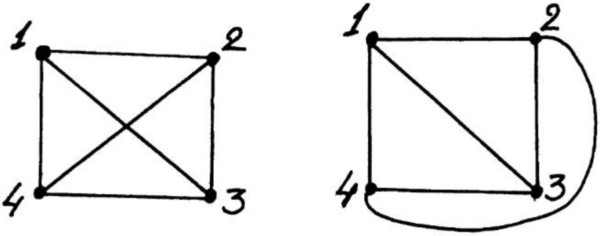


Рис. 90

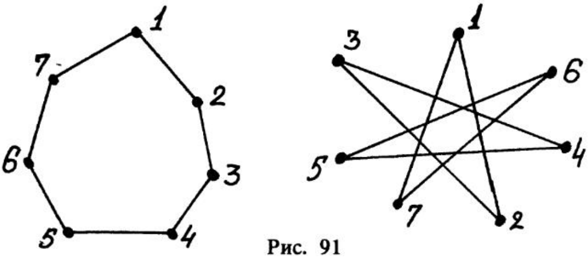


Рис. 91

Во всех остальных пунктах графы не изоморфны. Подсказки:

в) Разное число вершин;

г) Разное число ребер;

д) Разное число компонент связности;

е) В первом графе есть вершина, из которой выходит 4 ребра, а во втором – нет.

ж) В первом графе есть ребро, после удаления которого граф распадается на две компоненты связности, а во втором такого ребра нет. То, что данные графы не изоморфны, можно показать и другим способом. Будем рассматривать замкнутые пути, не проходящие через одну и ту же вершину. В первом графе таких путей два: длины 3 (длина пути – это число ребер, из которых он состоит) и длины 4, а во втором – три, их длины – 4, 5, 7.

<u>**Для преподавателей.**</u> Школьники, конечно, интуитивно хорошо понимают, что такое "одинаковые" графы. Поэтому полезно и интересно попробовать заставить их самостоятельно дать точное определение изоморфности графов. При этом надо быть готовым к "определениям" типа: это графы с одинаковым числом вершин и ребер и т.п. Можно попытаться превратить в свободное обсуждение и решение задачи 1, предоставив школьникам возможность самим искать различные критерии неизоморфности графов.

В решении задачи 1 было вскользь упомянуто важное понятие. Дадим аккуратное определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: *Циклом* называется замкнутый путь, не проходящий дважды через одну и ту же вершину. При обсуждении пункта ж) задачи 1 мы заметили, что в графе, изображенном на рис.92а, – два цикла: 1–2–3–4–1 и 5–6–7–5; а в графе на рис.92б, три цикла: 1–5–6–7–1, 1–2–3–4–5–1, 1–2–3–4–5–6–7–1.

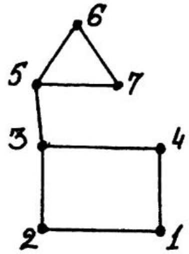


Рис. 92 а

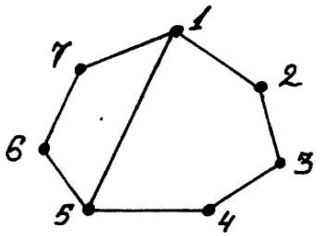


Рис. 92 б

Вот еще две задачи, связанные с введенными определениями.

Задача 2. Докажите, что не существует графа с пятью вершинами, степени которых равны 4, 4, 4, 4, 2.

Задача 3. Докажите, что существует граф с $2n$ вершинами, степени которых равны $1, 1, 2, 2, \ldots, n, n$.

Задача 4. Верно ли, что два графа изоморфны, если

а) у них по 10 вершин, степень каждой из которых равна 9?

б) у них по 8 вершин, степень каждой из которых равна 3?

в) они связны, без циклов и содержат по 6 ребер?

Задача 5. В связном графе степени четырех вершин равны 3, а степени остальных вершин равны 4. Докажите, что нельзя удалить ребро так, чтобы граф распался на две изоморфные компоненты связности.

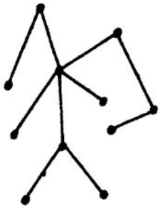
2. Деревья

В этом параграфе речь пойдет о графах, устроенных достаточно просто, однако играющих заметную роль в изучаемой теории.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: ***Деревом*** называется связный граф, не имеющий циклов.

Таким образом, в дереве невозможно, передвигаясь по ребрам и не проходя по одному ребру два или более раз, вернуться в исходную вершину. Этот факт будет не раз использован при доказательстве других свойств деревьев.

Приведем несколько примеров. Графы, изображенные на рис.93, являются деревьями, а изображенные на рис.94 и 95, – нет.



А

Рис. 93

Б

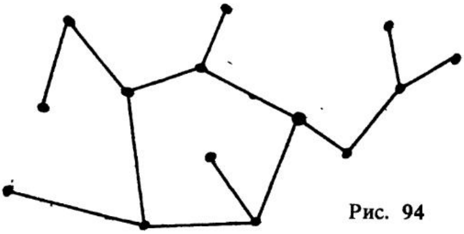


Рис. 94

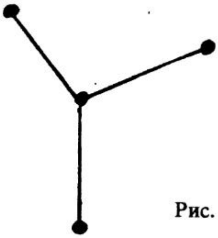


Рис. 95

Столь странное название этих графов можно объяснить тем, что некоторые из них действительно чем-то похожи на деревья (см. рис.93б).

При изучении свойств деревьев полезным оказывается понятие простого пути. Понятие пути уже было определено в главе “Графы–1”. *Простым путем* называется путь, в котором никакое ребро не встречается дважды.

Задача 6. Докажите, что граф, в котором любые две вершины соединены ровно одним простым путем, является деревом.

Решение: Очевидно, что данный граф связен. Предположим теперь, что в нем есть цикл. Тогда любые две вершины этого цикла соединены по крайней мере двумя простыми путями (см. рис.96). Получили противоречие, значит, наше предположение неверно.

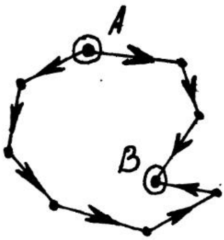


Рис. 96

Докажем теперь утверждение, обратное утверждению предыдущей задачи.

Задача 7. Докажите, что в дереве любые две вершины соединены ровно одним простым путем.

Решение: Предположим противное и рассмотрим те две вершины, которые соединены двумя разными простыми путями. На первый взгляд кажется, что пройдя от одной вершины к другой по первому пути, и вернувшись по второму, мы получим цикл. К сожалению, это не совсем так. Дело в том, что первый и второй пути могут иметь общие вершины (кроме начала и конца; см. рис.97), а по определению цикла вершины в нем не должны повторяться. Для того, чтобы выделить настоящий цикл из уже полученного нужно сделать следующее:

1) выбрать первую точку, в которой пути расходятся (на рис.97 это точка A),

2) за выбранной точкой на пути № 1 найти первую точку, принадлежащую также и пути № 2 (на рис.97 – точка B).

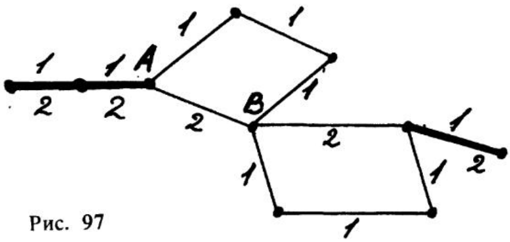


Рис. 97

Теперь участки первого и второго пути между точками A и B образуют простой цикл.

<u>**Для преподавателей.**</u> В первых двух фразах записанного решения содержится его основная идея. Дальнейшие технические подробности имеет смысл обсуждать только в достаточно сильном кружке.

Из утверждений задач 6 и 7 следует, что можно дать и другое определение дерева:

Дерево – это граф, в котором любые две вершины соединены ровно одним простым путем.

При решении следующих задач мы будем использовать как одно, так и другое определение.

Задача 8. Докажите, что в дереве есть вершина, из которой выходит ровно одно ребро (такая вершина называется *висячей*).

Решение: Рассмотрим произвольную вершину дерева и пойдем по любому выходящему из нее ребру в другую вершину. Если из новой вершины больше ребер не выходит, то мы остаемся в ней, а в противном случае идем по любому другому ребру дальше. Понятно, что в этом путешествии мы никогда не сможем попасть в вершину, в которой уже побывали: это означало бы наличие цикла. Так как у графа конечное число вершин, то наше путешествие обязательно должно закончиться. Но закончиться оно может только в висячей вершине!

Утверждение задачи 8 называется леммой о висячей вершине. Эта лемма будет содержательно использоваться при решении многих задач.

Для преподавателей. Начиная с этого параграфа, мы будем формулировать задачи как на языке теории графов, так и в "игровом" виде. По-видимому, во время занятий не надо злоупотреблять ни тем, ни другим типом формулировок. С одной стороны, надо приучать школьников к точному формальному языку, а с другой – видеть за игровой формулировкой истинный смысл задачи.

Задача 9. В графе все вершины имеют степень 3. Докажите, что в нем есть цикл.

Задача 10. Докажите, что при удалении любого ребра из дерева оно превращается в несвязный граф.

Задача 11. В стране Древляндия 101 город, и некоторые из них соединены дорогами. При этом любые два города соединяет ровно один путь. Сколько в этой стране дорог?

Решение: Из условия задачи следует, что граф дорог Древляндии – дерево. У этого дерева есть висячая вершина. Удалим ее вместе с ребром, которое из нее выходит. Оставшийся граф также является деревом. Поэтому у него есть висячая вершина, которую мы также удалим вместе с выходящим из нее ребром. Проделав эту операцию 100 раз, мы получим граф, состоящий из одной вершины (в котором, конечно, нет ребер). Поскольку каждый раз удалялось ровно одно ребро, то сначала их было 100.

Совершенно аналогично можно доказать и общий факт:

Теорема. В дереве число вершин на 1 больше числа ребер.

Верен и обратный факт (он используется намного реже).

Задача 12. Докажите, что связный граф, у которого число ребер на единицу меньше числа вершин, является деревом.

* * *

Задача 13. Волейбольная сетка имеет вид прямоугольника размером 50×600 клеток. Какое наибольшее число веревочек можно перерезать так, чтобы сетка не распалась на куски?

Решение: Будем рассматривать волейбольную сетку как граф, вершинами которого являются узлы сетки, а ребрами – веревочки. В этом графе нужно удалить как можно больше ребер так, чтобы он остался связным. Будем убирать ребра по очереди до тех пор, пока это возможно. Заметим, что если в графе есть цикл, то возможно удаление любого ребра этого цикла. Связный граф, не имеющий циклов, является деревом. Поэтому, только получив дерево, мы не сможем убрать ни одного ребра. Подсчитаем число ребер в нашем графе в этот момент. Количество вершин осталось тем же – $51 \cdot 601 = 30651$. Число ребер в дереве на 1 меньше числа вершин и, следовательно, в нашем дереве будет 30650 ребер. Сначала же их было $601 \cdot 50 + 600 \cdot 51 = 60650$. Таким образом, можно удалить 30000 ребер, то есть у волейбольной сетки можно перерезать 30000 веревочек (но не более!).

<u>**Методические замечания.**</u> Отметим ключевую идею решения этой задачи – выделение "максимального" дерева, содержащегося в данном графе. Конечно, такое "максимальное" дерево не единственно. Это соображение (выделение максимального дерева) является основным и при решении еще трех задач.

Задача 14. В некоторой стране 30 городов, причем каждый соединен с каждым дорогой. Какое наибольшее число дорог можно закрыть на ремонт так, чтобы из каждого города можно было проехать в каждый?

Задача 15. Докажите, что в любом связном графе можно удалить вершину вместе со всеми выходящими из нее ребрами так, чтобы он остался связным.

Задача 16*. В стране 100 городов, некоторые из которых соединены авиалиниями. Известно, что от любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Докажите, что можно побывать в каждом городе, совершив не более а) 198 перелетов; б) 196 перелетов.

<u>**Для преподавателей.**</u> Понятию дерева, лемме о висячей вершине и связанным с ней задачам естественно посвятить отдельное занятие. Задачи из цикла о

максимальном дереве можно предлагать по одной, подробно обсудив основную идею при разборе первой из них.

3. Теорема Эйлера

В этом параграфе доказывается классическая теорема, носящая имя великого математика Леонарда Эйлера. В связи с этим обсуждаются свойства важного класса графов, к определению которого мы сейчас и переходим.

Определение. Граф, который можно нарисовать так, чтобы его ребра не пересекались (нигде, кроме вершин), называется *плоским*.

Так, например, граф, изображенный на рисунке 98, – плоский (изоморфный ему граф изображен на рисунке 99), а на рисунке 100 – не плоский (это содержательное утверждение будет доказано позже).

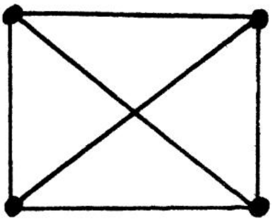


Рис. 98

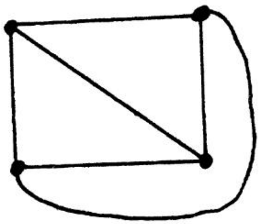


Рис. 99

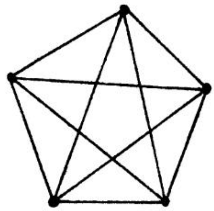


Рис. 100

Будем говорить, что плоский граф правильно нарисован, если его ребра на рисунке не пересекаются.

Для преподавателей. Может быть, Вы уже заметили, что иногда мы не очень точно используем понятие графа – не различаем разные, но изоморфные графы. Эта неточность особенно бросается в глаза при определении плоского графа. Если Вы считаете возможным, то обсудите это место со школьниками. Но главное, чтобы они поняли, что граф может быть плоским, даже если его ребра на картинке пересекаются (см. рис.98).

Заметим, что правильно нарисованный плоский граф разбивает плоскость на куски. Обозначим число этих кусков через F, число вершин графа – через V и число ребер – через E. Так для графа, изображенного на рисунке 99, получаем $V = 4$, $E = 6$, $F = 4$ (внешний кусок плоскости тоже учитывается).

Справедлива следующая теорема

Теорема (Эйлера). Для правильно нарисованного связного плоского графа имеет место равенство $V - E + F = 2$.

Доказательство. Повторим рассуждение, использованное при решении задачи о волейбольной сетке: будем удалять ребра до тех пор, пока не получим дерево. Посмотрим, как при удалении очередного ребра изменяются величины V, E и F. Ясно, что количество вершин не изменяется, а количество ребер уменьшается на 1. Число кусков также уменьшается на 1 – см. рис.101, так как при удалении ребра два примыкающих к нему куска сливаются в один.

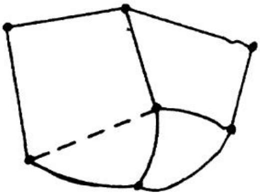


Рис. 101

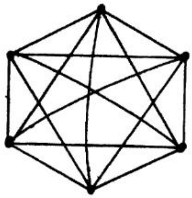


Рис. 102

Поэтому величина $V - E + F$ при такой операции не изменяется (инвариант!). Так как для полученного дерева $V - E = 1$ (по теореме из предыдущего параграфа) и $F = 1$, то $V - E + F = 2$, и следовательно, для исходного графа также выполняется это равенство.

Равенство $V - E + F = 2$ называется ***формулой Эйлера.***

Теорема Эйлера – очень сильный факт, и из него можно получить много красивых и интересных следствий. Начнем с простой задачи.

Задача 17. В стране Озерная 7 озер, соединенных между собой 10 каналами, причем от любого озера можно доплыть до любого другого. Сколько в этой стране островов?

Следующая задача несколько труднее.

Задача 18. В квадрате отметили 20 точек и соединили их непересекающимися отрезками друг с другом и с вершинами квадрата так, что квадрат разбился на треугольники. Сколько получилось треугольников?

Решение: Будем считать отмеченные точки и вершины квадрата вершинами, а соединяющие их отрезки и стороны квадрата – ребрами плоского графа. Для каждого куска, на которые этот граф разбивает плоскость, подсчитаем число ограничивающих его ребер, и все полученные числа сложим. Поскольку каждое ребро разделяет два куска, то в итоге получим удвоенное число ребер. Так как все куски, кроме внешнего – треугольники, а внешний кусок ограничен 4 ребрами, то получаем $3(F-1)+4=2E$, т.е. $E=3(F-1)/2+2$. Заметим, что число вершин нашего графа равно 24 и подставим количества вершин и ребер в формулу Эйлера:

$$24-\left(\frac{3(F-1)}{2}+2\right)+F=2\,.$$

Отсюда $F=43$. Таким образом, число треугольников, на которые разбился квадрат, равно 42.

Задача 19. Докажите, что для плоского графа справедливо неравенство $2E \geq 3F$.

Перейдем теперь к доказательству некоторых классических следствий теоремы Эйлера. Начнем с неравенства.

Задача 20. Для плоского связного графа справедливо неравенство $E \leq 3V-6$.

Решение: Из предыдущей задачи известно, что $2E \geq 3F$. Подставим это в формулу Эйлера. Получим $V-E+2E/3 \geq 2$. Отсюда $E \leq 3V-6$, что и требовалось.

Задача 21. Докажите, что для любого плоского графа (в том числе и несвязного) справедливо неравенство $E \leq 3V-6$.

Указание: Требуемое утверждение получается сложением неравенств для компонент связности.

Замечательно, что только что доказанное неравенство позволяет находить неплоские графы. Так, например, можно легко доказать сформулированное в начале параграфа утверждение.

Задача 22. Граф, имеющий 5 вершин, каждая из которых соединена ребром с любой другой, не является плоским.

Указание: Для этого графа не выполнено неравенство $E \leq 3V-6$.

Граф, каждая вершина которого соединена ребром с любой другой вершиной, называется *полным*. На рис.102 изображен полный граф с 6 вершинами.

Из результата задачи 22 следует, что полный граф более чем с 4 вершинами не является плоским.

Задача 23. Можно ли построить три дома, вырыть три колодца и соединить тропинками каждый дом с каждым колодцем так, чтобы тропинки не пересекались?

Указание: Для графа из этой задачи неравенство $2E \geq 3F$ можно усилить. Поскольку в этом графе каждый кусок должен быть ограничен по меньшей мере 4 ребрами, то рассуждения, аналогичные решению задачи 19, приводят к неравенству $E \geq 2F$.

Задача 24. Докажите, что граф, имеющий 10 вершин, степень каждой из которых равна 5, – не плоский.

При помощи неравенства $E \leq 3V - 6$ можно доказать и следующие три изящных факта.

Задача 25. Докажите, что в плоском графе есть вершина, степень которой не превосходит 5.

Задача 26. Каждое ребро полного графа с 11 вершинами покрашено в один из двух цветов: красный или синий. Докажите, что либо "красный", либо "синий" граф не является плоским.

Задача 27*. Семиугольник разбит на выпуклые пяти- и шестиугольники, причем так, что каждая его вершина является вершиной по крайней мере двух многоугольников разбиения. Докажите, что число пятиугольников разбиения не меньше 13.

<u>Для преподавателей.</u> Подчеркнем еще раз, что материал этого параграфа очень важен. Мы рекомендуем посвятить отдельное занятие теореме Эйлера и ее следствиям и не забывать возвращаться к задачам на эту тему в дальнейшем.

4. Разные задачи

В этом параграфе собрано несколько задач из разных разделов теории графов. При их решении необходимо сочетать идеи, изложенные в этой главе и в главе "Графы", с другими содержательными соображениями. Поэтому эти задачи, как правило, трудны.

Задача 28. Докажите, что связный граф, имеющий не более двух нечетных вершин, можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и проводя каждое ребро ровно один раз.

План решения: Разберем случай, когда граф не имеет нечетных вершин. Проведем доказательство с помощью индукции по числу ребер графа. База (граф без ребер) очевидна. Для доказательства индукционного перехода рассмотрим произвольный связный граф, степени всех вершин которого четны. Поскольку в этом графе нет висячих вершин, то он не является деревом, и следовательно, в нем есть цикл. Временно удалим из графа ребра этого цикла. Ясно, что граф распадется на несколько компонент связности, имеющих общие вершины с выкинутым циклом и удовлетворяющих условиям теоремы (см. рис.103). В силу индукционного предположения каждую из этих компонент связности можно нарисовать требуемым образом. Теперь ясно как нарисовать требуемым образом исходный граф: обходим цикл и попадая в вершину, относящуюся к какой-то компоненте, переходим в нее и рисуем ее, в конце возвращаясь в ту же вершину, после чего продолжаем движение по циклу.

Доказательство для случая графа с двумя нечетными вершинами аналогично (нужно временно удалить путь, соединяющий две нечетные вершины).

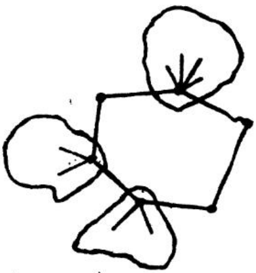


Рис. 103

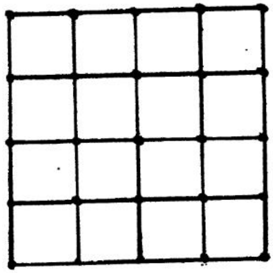


Рис. 104

Граф, который можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и проводя каждое ребро ровно один раз, называется *эйлеровым* или *уникурсальным*.

В главе "Графы" было доказано, что эйлеров граф имеет не более двух нечетных вершин. Только что разобранная задача позволяет сформулировать теорему

Теорема. Граф эйлеров тогда и только тогда, когда он связен и имеет не более двух нечетных вершин.

Вот еще три задачи.

Задача 29. Можно ли составить решетку, изображенную на рис.104,

а) из 5 ломаных длины 8?

б) из 8 ломаных длины 5? (длина стороны клетки равна 1).

Задача 30. На плоскости дано 100 окружностей, составляющих связную (т.е. не распадающуюся на части) фигуру. Докажите, что эту фигуру можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя дважды одну и ту же линию.

Задача 31. Докажите, что связный граф с $2n$ нечетными вершинами можно нарисовать, оторвав карандаш от бумаги ровно $n-1$ раз и не проводя никакое ребро дважды.

* * *

Задача 32. На конференции присутствуют 50 ученых, каждый из которых знаком по крайней мере с 25 участниками конференции. Докажите, что найдутся четверо из них, которых можно усадить за круглый стол так, чтобы каждый сидел рядом со знакомыми ему людьми.

Задача 33. Каждый из 102 учеников одной школы знаком не менее, чем с 68 другими. Докажите, что среди них найдутся четверо, имеющие одинаковое число знакомых.

Задача 34*. Расстоянием между двумя произвольными вершинами дерева будем называть длину простого пути, соединяющего их. Удаленностью вершины дерева назовем сумму расстояний от нее до всех остальных вершин. Докажите, что в дереве, у которого есть две вершины с удаленностями, отличающимися на 1, – нечетное число вершин.

Задача 35. Дима нарисовал на доске 7 графов, каждый из которых является деревом с 6 вершинами. Докажите, что среди них есть два изоморфных.

Задача 36. В некоторой стране любые два города соединены либо авиалинией, либо железной дорогой. Докажите, что

а) можно выбрать вид транспорта так, чтобы от любого города можно было добраться до любого другого, пользуясь только этим видом транспорта;

б) из некоторого города, выбрав один из видов транспорта, можно добраться до любого другого города не более, чем с одной пересадкой (пользоваться можно только выбранным видом транспорта);

в) каждый город обладает свойством из пункта б);

г) можно выбрать вид транспорта так, чтобы пользуясь только им, можно было добраться из любого города до любого другого не более, чем с двумя пересадками.

Задача 37. Каждое из ребер полного графа с 6 вершинами покрашено в один из двух цветов. Докажите, что есть три вершины, все ребра между которыми – одного цвета.

Задача 38. Каждое из ребер полного графа с 17 вершинами покрашено в один из трех цветов. Докажите, что есть три вершины, все ребра между которыми – одного цвета.

Задача 39*. Каждое из ребер полного графа с 9 вершинами покрашено в синий или красный цвет. Докажите, что либо есть четыре вершины, все ребра между которыми – синие, либо есть три вершины, все ребра между которыми – красные.

Задача 40*. Каждое из ребер полного графа с 18 вершинами покрашено в один из двух цветов. Докажите, что есть четыре вершины, все ребра между которыми – одного цвета.

Для преподавателей. Несколько слов о том, как пользоваться материалом этого параграфа. Теорема об эйлеровых графах является содержательным теоретическим результатом, поэтому ее необходимо тщательно разобрать на занятии. Остальные задачи этого параграфа можно использовать произвольным образом. Самые трудные задачи (помеченные звездочкой) естественно предлагать школьникам для домашнего размышления.

5. Ориентированные графы

Основным объектом этого параграфа является ориентированный граф – т.е. граф, на ребрах которого расставлены стрелки. Фундаментальных теорем об ориентированных графах (таких, как теорема Эйлера) мы доказывать не будем. Появление этого параграфа объясняется тем, что понятие ориентированного графа является обязательным элементом общематематической культуры, и, кроме того, такие графы появляются при решении многих задач. Некоторые из них представлены в этом параграфе.

Задача 41. Дима, приехав из Врунляндии, рассказал, что там есть несколько озер, соединенных между собой реками. Из каждого озера вытекают три реки, и в каждое озеро впадают четыре реки. Докажите, что он ошибается.

Указание: Общее количество "втекающих" рек должно быть равно общему количеству "вытекающих" рек.

Вот еще одна подобная задача.

Задача 42. В некоторой стране есть столица и еще 100 городов. Некоторые города (в том числе и столица) соединены дорогами с односторонним движением. Из каждого нестоличного города выходит 20 дорог, и в каждый такой город входит 21 дорога. Докажите, что в столицу нельзя проехать ни из одного города.

* * *

Следующие две задачи достаточно просты. Их объединяет то, что в каждой из них нужно расставить стрелки на ребрах неориентированного графа так, чтобы выполнялись некоторые условия.

Задача 43. В некотором государстве каждый город соединен с каждым дорогой. Сумасшедший король хочет ввести на дорогах одностороннее движение так, чтобы выехав из любого города, в него нельзя было вернуться. Можно ли так сделать?

Задача 44. Докажите, что на ребрах связного графа можно так расставить стрелки, чтобы из некоторой вершины можно было добраться по стрелкам до любой другой.

* * *

Для решения следующих двух задач полезно вспомнить понятие эйлерова графа и доказательство достаточного условия эйлеровости.

Задача 45. В связном графе степени всех вершин четны. Докажите, что на ребрах этого графа можно расставить стрелки так, чтобы выполнялись следующие условия:

а) двигаясь по стрелкам, можно добраться от любой вершины до любой другой;

б) для каждой вершины числа входящих и выходящих ребер равны.

Задача 46. На ребрах связного графа расставлены стрелки так, что для каждой вершины числа входящих и выходящих ребер равны. Докажите, что двигаясь по стрелкам, можно добраться от любой вершины до любой другой.

* * *

Решения задач следующего цикла легко оформляются при помощи метода математической индукции.

Задача 47. В некоторой стране каждый город соединен с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что найдется город, из которого можно добраться в любой другой.

Решение: Индукция по числу городов. База очевидна. Для доказательства индукционного перехода удалим сначала один из городов. В силу индукционного предположения есть город A с требуемым свойством. Вспомним теперь про удаленный город. Если в него ведет хотя бы одна дорога, то город A – искомый. В противном случае сам удаленный город удовлетворяет требуемому свойству.

Задача 48. Несколько команд сыграли между собой круговой турнир по волейболу. Будем говорить, что команда A сильнее команды B, если либо A выиграла у B, либо существует команда C такая, что A выиграла у C, а C – у B.

а) Докажите, что есть команда, которая сильнее всех.

б) Докажите, что команда, выигравшая турнир, сильнее всех.

Задача 49. В одном государстве 100 городов и каждый соединен с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что можно поменять направление движения на одной дороге так, чтобы от любого города можно было доехать до любого другого.

Задача 50. 20 команд сыграли круговой турнир по волейболу. Докажите, что команды можно занумеровать числами от 1 до 20 так, что 1-я команда выиграла у 2-й, 2-я – у 3-й, …, 19-я у 20-й.

* * *

И, наконец, три последние задачи этого параграфа.

Задача 51. Какие-то две команды набрали в круговом волейбольном турнире одинаковое число очков. Докажите, что найдутся команды A, B и C такие, что A выиграла у B, B выиграла у C, а C выиграла у A.

Задача 52. В некотором государстве 101 город.

а) Каждый город соединен с каждым дорогой с односторонним движением, причем в каждый город входит 50 дорог и из каждого города выходит 50 дорог. Докажите, что из любого города можно доехать в любой другой, проехав не более, чем по двум дорогам;

б) Некоторые города соединены дорогами с односторонним движением, причем в каждый город входит 40 дорог и из каждого города выходит 40 дорог. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого, проехав не более, чем по трем дорогам.

Задача 53*. В стране Ориентация на всех дорогах введено одностороннее движение, причем из любого города в любой другой можно добраться, проехав не более, чем по двум дорогам. Одну дорогу закрыли на ремонт так, что из каждого города по-прежнему можно добраться до каждого. Докажите, что для любых двух городов это можно сделать, проехав не более, чем по трем дорогам.

ГЕОМЕТРИЯ

Часто приходится слышать вопрос: "А зачем вообще нужна школьная геометрия? Ведь это "наука в себе" – она не имеет никаких продолжений в высшей математике, частенько излишне сложна и запутанна".

Ответ (не претендующий на полноту) таков: то, что вы имеете в виду, задавая этот вопрос, та часть "школьной геометрии", которая кажется вам лишенной всякого смысла, есть замечательный полигон для выработки хорошего, логичного и последовательного мышления. Эта "наука" есть не что иное, как большая игра по неким аксиоматическим правилам, выработанным еще древними греками – ведь Евклиду и его предшественникам (равно как и последователям) казалось, что эти правила стопроцентно точно отражают закономерности окружающего нас физического мира.

Игра эта, однако, зашла так далеко, что может сравниться, пожалуй, лишь с шахматами. Это привело к неимоверному разрастанию замечательной игры в геометрию, так что теперь полным знанием ее секретов похвастаться, видимо, не может никто. Этим, а также и соображениями размера текста, объясняется то, что в этой главе рассматриваются лишь некоторые "плодотворные дебютные идеи".

Помимо такого подхода к геометрии, необходимо помнить и о том, что геометрия, безусловно, является неотъемлемой частью математики и у нее существует много связей со смежными областями; компетентный преподаватель найдет здесь отличную возможность продемонстрировать идейное единство математики.

* * *

Наше изложение не согласовано с существующими ныне школьными учебниками, что не в последнюю очередь вызвано тем, что в настоящее время существует несколько школьных программ по геометрии, которые зачастую сильно противоречат друг другу, особенно на начальном этапе.

Однако это лишь первая причина. Вторая заключается в том, что мы и не хотим привязывать наше изложение к какому-либо учебнику – нам хотелось бы, чтобы преподаватель сам мог выбирать темы для занятия, сообразуясь с уровнем кружка или факультатива. При этом не нужно слепо следовать школьной программе – нужно опираться на нее.

Не стоит удивляться тому, что большинство задач практически не отличается по формулировке от задач из учебников. И в самом деле, странно требовать "олимпиадных" задач по "школьной" геометрии (к тому же и в необходимом количестве – само выражение "олимпиадная" подразумевает нешкольность, выход за рамки программы). Дело еще и в том, что геометрическая тематика в школе достаточно разработана и представлена в учебниках геометрии, так что в некоторых местах мы просто будем отсылать вас к учебникам и другим книгам в поисках соответствующего задачного материала.

1. Два неравенства

Хотя "школьная" геометрия имеет обычно дело с точными высказываниями, вроде:

... точки A, B и C лежат на одной прямой ...

... высоты треугольника пересекаются в одной точке ...

... сумма углов треугольника равна 180 градусов ...

но двумя основными (на первых порах) орудиями исследования в младших классах служат два неравенства:

Неравенство № 1. Для любых трех точек A, B и C на плоскости имеем $AB + BC \geq AC$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда точка B лежит на отрезке $[AC]$.

Неравенство № 2. В треугольнике против большего угла лежит большая сторона. Это означает, что если в треугольнике ABC $AB > AC$, то $\angle C > \angle B$ и наоборот.

Во вводном параграфе мы хотим еще раз напомнить эти неравенства и дать несколько задач на их применение.

Задача 1. Докажите, что при $b + c > a$, $a + c > b$, $a + b > c$, где a, b и c – положительные числа, существует треугольник со сторонами a, b и c.

Задача 2. Докажите, что медиана AM в треугольнике ABC по длине больше, чем $(AB + AC - BC)/2$.

Задача 3. Докажите, что из отрезков длины a, b и c можно составить треугольник тогда и только тогда, когда есть такие положительные x, y, z, что $a = x + y$, $b = y + z$, $c = x + z$.

Задача 4. Докажите, что если $AB = AC$, то углы ABC и ACB равны.

Задача 5. В треугольнике ABC длина медианы AM больше половины длины BC. Докажите, что угол BAC – острый.

<u>**Для преподавателей.**</u> Задачи 1–5 представляют собой, по сути дела, очень простые упражнения – их решение навряд ли вызовет большие затруднения у школьников, особенно в том случае, если соответствующие темы уже пройдены ими в школе. Тщательно разберите решения, выслушайте самих ребят и предложите следующую серию задач.

Задача 6. Докажите, что если из отрезков длины a, b и c можно составить треугольник,то его можно составить и из отрезков длины $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$.

Задача 7. $ABCD$ – выпуклый 4-угольник, причем $AB + BD < AC + CD$. Докажите, что $AB < AC$.

Задача 8. Центры трех непересекающихся кругов расположены на одной прямой. Докажите, что если окружность касается всех кругов, то ее радиус больше радиуса одного из них.

Задача 9. Пусть $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ – два выпуклых 4-угольника с соответственно равными сторонами. Докажите, что если $\angle A > \angle A_1$, то $\angle B < \angle B_1$, $\angle C > \angle C_1$, $\angle D < \angle D_1$.

Задача 10. Докажите, что медиана треугольника, заключенная между двумя его неравными сторонами, образует больший угол с меньшей из двух этих сторон.

Задача 11. Могут ли в прямолинейной пятиконечной звезде $ABCDEFGHIK$ (см. рис.105) выполняться неравенства: $AB > BC$, $CD > DE$, $EF > FG$, $GH > HI$, $IK > KA$?

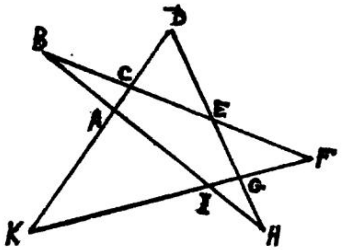


Рис. 105

<u>**Методические замечания.**</u> Задачи этой серии несколько сложнее, чем задачи 1–5, но и они не являются чрезмерно трудными. Еще несколько задач на неравенство треугольника приведено в главе “Неравенство треугольника” книги [21]. См. также книги [65], [42].

<u>**Для преподавателей.**</u> Не следует посвящать этой теме отдельное занятие, но полезно на протяжении нескольких занятий давать ученикам по две-три за-

дачи на применение этих неравенств. Цель этого – добиться того, чтобы эти неравенства вошли в сознание ребят не как отдельные приемы решения задач, а как нечто основное, чем надо пользоваться практически на подсознательном уровне, автоматически.

Разберем теперь решение задачи 8. Она замечательна тем, что ее можно решить как применением неравенства № 1, так и применением неравенства № 2.

Решение № 1: Можно считать, что все касания внешние (см. рис.106), иначе утверждение задачи очевидно. Тогда, если мы обозначим радиусы окружностей с центрами A, B, C и D соответственно через r_1, r_2, r_3 и R, то по неравенству треугольника $AD + DC > AC$, то есть

$$R + r_1 + R + r_3 > AC > r_1 + r_3 + 2r_2$$

и значит, $R > r_2$, ч.т.д.

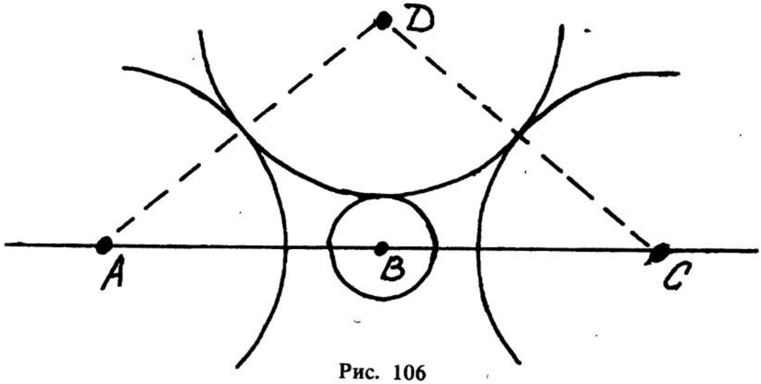


Рис. 106

Решение № 2: Один из углов DBA и DBC – неострый и значит, наибольший в соответствующем треугольнике. Пусть это угол DBA. Тогда по неравенству № 2 $DA > AB$, т.е. $R + r_1 > AB > r_1 + r_2$ и значит, $R > r_2$, ч.т.д.

* * *

В завершение этого параграфа несколько более сложных задач, для решения которых необходима некоторая дополнительная идея, дающая вместе с неравенствами треугольника ключ к доказательству.

Задача 12. Дан равнобедренный треугольник ABC с углом при вершине B, равным 20 градусов. Докажите, что а) $AB < 3AC$; б) $AB > 2AC$.

Задача 13. Периметр пятиконечной звезды с вершинами в вершинах выпуклого пятиугольника Ф, периметр самого Ф, и периметр внутреннего пятиугольника звезды – простые числа. Докажите, что их сумма не меньше 20.

Примечание: Не удивляйтесь, эта задача – по геометрии.

Задача 14. На каждой стороне квадрата отмечено по точке. Докажите, что периметр образованного ими четырехугольника не меньше удвоенной длины диагонали квадрата.

2. Движения плоскости и равенство фигур

Богатство и примечательность этой темы заключаются в том, что она, в числе немногих геометрических тем, соприкасается с высшей математикой. Кристаллографические группы, алгебраические свойства группы движений плоскости, геометрия Лобачевского – если преподаватель знаком с этими замечательными разделами геометрии, то он может исподволь подвести своих учеников к пониманию роли симметрии в математике и к понятию группы.

<u>Для преподавателей.</u> 1. Прежде всего, нужно добиться того, чтобы ребята овладели азами "теории" – признаками равенства треугольников. Этому можно посвятить значительную часть занятия: проверка признаков и решение стандартных упражнений (отсылаем вас к учебникам).

2. Далее необходимо начать изучение понятия движения плоскости. Пусть ребята сами перечислят те движения плоскости, которые им уже известны.

Вот набор задач, утверждения которых должны быть достаточно твердо усвоены школьниками:

Задача 15. Докажите, что любые два треугольника со сторонами a, b и c каждый, могут быть совмещены движением плоскости.

Задача 16. а) Если движение T оставляет вершины треугольника ABC на месте, то T есть тождественное преобразование.

б) Если оба движения T и T' переводят вершины треугольника ABC в точки A', B', C' соответственно, то T и T' совпадают.

Задача 17. а) Каким движением является композиция двух параллельных переносов?

б)*Докажите, что любой параллельный перенос можно представить как композицию двух симметрий относительно различных точек M и N.

в)*Рассмотрим следующее движение: композицию осевой симметрии относительно прямой m и параллельного переноса на единичное расстояние параллельно прямой m. Докажите, что это движение не является ни поворотом, ни параллельным переносом, ни осевой симметрией.

<u>**Для преподавателей.**</u> Решение этой задачи (желательно, конечно, чтобы оно было геометрическим) надо тщательно разо- брать, чтобы ребята усвоили понятие композиции. Задача 17 скорее подходит для домашнего задания, чем для решения на самом занятии.

Задача 18. Даны две равные окружности. Можно ли отобразить одну на другую поворотом?

Задача 19. Может ли поворот переводить полуплоскость в самое себя? А какая-либо симметрия?

Задача 20. Про некоторую фигуру на плоскости известно, что она самосовмещается при повороте на 48 градусов вокруг точки O. Верно ли, что она самосовмещается при повороте на 72 градуса вокруг точки O?

<u>**Для преподавателей.**</u> 1. После усвоения ребятами понятий движения и композиции движений (а этому надо уделить особое внимание) вам представляется замечательная возможность поговорить с ними об общих понятиях отображения и композиции, иллюстрируя их геометрическими примерами.

2. В некоторый момент занятия полезно выяснить у ребят, умеют ли они "строить" движения плоскости – т.е. могут ли они, например, построить образ данной окружности при осевой симметрии и т.п.

Следующая тема внутри нашего параграфа – применение движений плоскости для решения геометрических задач – заслуживает отдельной и довольно увесистой книжки. Однако мы попытаемся дать здесь хотя бы некоторое представление о ней.

Задача 21. Через точку внутри треугольника проведите отрезок с концами на контуре треугольника так, чтобы эта точка делила отрезок пополам.

Задача 22. Дан угол, вершина которого не поместилась на чертеже. Постройте угол, величина которого в два раза больше величины данного угла.

Задача 23. В данную окружность впишите пятиугольник, стороны которого параллельны пяти данным прямым.

Задача 24. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) M и N – середины оснований и прямая MN образует равные углы с прямыми AB и CD. Докажите, что эта трапеция равнобочна.

Задача 25. На сторонах AB, BC, CD и DA квадрата $ABCD$ взяты точки P, Q, R и S так, что $AP : PB = BQ : QC = CR : RD = DS : SA$. Докажите, что $PQRS$ – квадрат.

Задача 26. На плоскости дана точка P и две параллельные прямые. Постройте равносторонний треугольник, одна из вершин которого совпадает с P, а две другие лежат на этих прямых соответственно.

Задача 27. Найти на данной прямой точку M такую, что а) сумма расстояний от M до двух данных точек минимальна; б) разность расстояний от M до двух данных точек максимальна.

Еще раз упомянем о том, что исчерпать эту красивейшую геометрическую тему практически невозможно, и отошлем любознательного читателя к книгам [42], [65], [71], [68], в которых он найдет десятки замечательных и довольно трудных задач на применение движений плоскости. Вот еще несколько задач, в которых исследуются свойства движений плоскости и симметрии фигур.

Задача 28. Докажите, что если треугольник имеет две оси симметрии, то он имеет и третью ось.

Задача 29. Какие буквы русского алфавита имеют а) ось симметрии; б) центр симметрии ?

Задача 30. Существует ли пятиугольник, имеющий ровно две оси симметрии?

Задача 31. Найдите множество M всех точек X на плоскости таких, что при данном повороте точка X переходит в точку X' такую, что прямая XX' проходит через данную точку S.

* * *

Разберем теперь решение довольно трудной задачи 23.

Вместо данных нам пяти прямых $L_1, L_2, \ldots, L_5$ рассмотрим прямые $K_1, K_2, \ldots, K_5$, перпендикулярные к ним и проходящие через центр нашей окружности. Тогда, как нетрудно понять, прямые L_i и AB (A и B – точки на окружности) параллельны тогда и только тогда, когда A и B симметричны относительно прямой K_i. Осталось лишь найти точку M на окружности, которая после применения к ней всех пяти симметрий – относительно $K_1, K_2, \ldots, K_5$ – останется на месте.

Но композиция пяти осевых симметрий – это осевая симметрия, причем ее ось также проходит через центр нашей окружности (подумайте, почему это утверждение верно). Следовательно, такая точка M есть и легко строится (как одна из точек пересечения оси симметрии и окружности).

Вопрос: В изложенном решении опущен один "тонкий" момент. Найдите его и восполните пробел.

3. Подсчет углов

Как известно, "углы счет любят". Эта поговорка поможет вам запомнить метод, которому посвящен этот параграф.

Что же нужно знать, чтобы уметь считать углы? Всего, конечно, не перечислить, но главные факты указать совсем не трудно:

(1) сумма углов треугольника равна 180 градусов;

(2) вертикальные углы равны;

(3) смежные углы дополняют друг друга до 180 градусов;

(4) вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу и, как следствие

(5) вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны;

(6) движения плоскости не меняют величин углов.

* * *

Задача 32. В равнобедренном треугольнике ABC с углом при вершине A, равным 36 градусов, проведена биссектриса BK. Докажите, что $BK = BC$.

Задача 33. Докажите, что сумма углов в вершинах пятиугольной звезды (см. рис.107) равна 180 градусов.

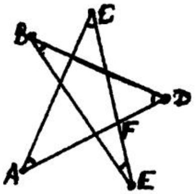


Рис. 107

Задача 34. Могут ли биссектрисы двух углов треугольника быть перпендикулярными?

Решение задачи 32: Так как $\angle C = 72°$, и $\angle B = 72°$, то величина угла KBC равна 36 градусов и значит, величина угла CKB – 72 градуса. Следовательно, треугольник KBC – равнобедренный и $BK = BC$.

Решение задачи 33: $180° = \angle EBD + \angle BED + \angle BDE = \angle E + \angle B + \angle D + \angle FED + \angle FDE$. Но $\angle FED + \angle FDE = 180° - \angle EFD = 180° - \angle CFA = \angle A + \angle C$. Значит, $180° = \angle E + \angle B + \angle D + \angle A + \angle C$, ч.т.д.

Итак, мы видим, что применение метода в простых задачах заключается в следующем: обозначаем какие-нибудь узлы через α, β, γ, δ, ... (традиционно использование именно греческого алфавита) и выражаем все углы через них, а потом, используя (1)–(6), получаем требуемое.

__Методические замечания.__ Здесь перед нами встает довольно тонкая альтернатива. С одной стороны, введение малого количества углов может привести к невозможности достаточно легко вывести через них остальные параметры задачи. С другой стороны, введение слишком большого количества углов загромождает чертеж и, плюс к тому, может привести к невозможности решения задачи из-за того, что мы не используем возможные соотношения между этими углами.

__Для преподавателей.__ Обычно выбор самих исходных углов (и их количества) составляет одну из важнейших частей решения. Научиться правильно вводить исходные величины (здесь это углы) – это один из определяющих моментов математической культуры на "олимпиадном" уровне. Здесь Вашим ученикам поможет либо опыт, либо достаточно развитое методологическое мышление.

Вот еще пять задач (см. также [65], [70], учебники).

Задача 35. Хорды AB и CD окружности S параллельны. Докажите, что $AC = BD$.

Задача 36. Три угла вписанного четырехугольника относятся как $2:3:4$. Найдите эти углы.

Задача 37. В треугольнике ABC $\angle A = 90°$. Проведены медиана AM, биссектриса AK и высота AH. Докажите, что $\angle MAK = \angle KAH$.

Задача 38. В квадрате $ABCD$ O – точка пересечения окружности с центром A и радиусом AB и серединного перпендикуляра к BC, более близкая к C. Найдите величину угла AOC.

Задача 39. Две окружности пересекаются в точках A и B. S –точка, диаметрально противоположная к A на первой окружности, D – на второй. Докажите, что точки B, C и D лежат на одной прямой.

Разберем решение задачи 37 – оно достаточно стандартно.

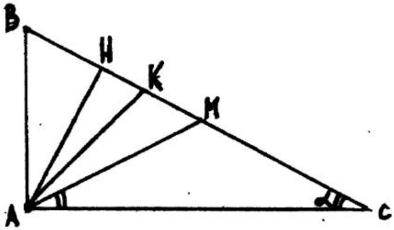


Рис. 108

Обозначим угол BCA через α (см. рис.108). Тогда, так как $AM = MC$, то $\angle MAC = \alpha$ и значит, $\angle MAK = 45° - \alpha$ (надо, как теперь видно, взять тот из углов треугольника, который меньше 45 градусов). Далее, $\angle ABC = 90° - \alpha$ и значит, $\angle BAH = \alpha$. Следовательно, $\angle KAH = 45° - \alpha = \angle MAK$, ч.т.д.

Для преподавателей. 1. Существует масса более сложных задач на подсчет углов. В сущности, большинство задач по геометрии (школьной) включает в себя подсчет углов – поэтому надо и здесь добиваться от ребят практически автоматического выписывания углов на чертеже (ни в коем случае не загромождая его).

2. Видимо, не стоит посвящать теме "подсчет углов" отдельное занятие. Вполне хватит нескольких серий задач на разных занятиях и "внедрения" этой идеи в голову ваших учеников.

4. Площадь

Эта тема совершенно необъятна (как и многие другие геометрические темы) и поэтому здесь мы сосредоточимся в основном на методологии. Каковы основные принципы в решении задач на площадь?

Назовем лишь самое основное, о чем полезно знать и помнить:

а) основные свойства площади: площадь не меняется при движении фигуры; если фигура составлена из двух непересекающихся фигур, то ее площадь равна сумме их площадей.

б) главные вычислительные формулы: $S = ah/2$ (a – сторона треугольника, h – высота, опущенная на эту сторону); $S = pr$ (p – полупериметр треугольника, r – радиус вписанной окружности) и т.п.

в) основные неравенства типа $S \leq ab/2$ (a, b – две стороны треугольника) (см. например, задачу 40).

г) если в формулировке задачи участвуют выражения вида ab или $a^2 + b^2$ (то есть выражения степени 2), то вполне возможно, что в решении задачи участвует площадь.

д) если в задаче используются различные выражения, которые естественным образом связываются друг с другом через какую-то формулу площади, то напишите эту формулу (хуже от этого не будет).

Для преподавателей. Пункты а), б), в) дают вам большую программу для проверки знаний ваших подопечных по этой теме.

Мы не советуем вам устраивать отдельные занятия по теме "Площадь" (особенно если она уже проходилась в школе). Эта тема, опять-таки относится к числу тех, усвоение основных понятий которых должно произойти на очень высоком уровне. Это, конечно, не может стать результатом нескольких занятий и если по истечении года занятий вы добьетесь желаемых результатов, то можете смело двигаться в более глубокие дебри этой темы (например, аксиоматика площади).

Задача 40. Длины сторон выпуклого четырехугольника равны a, b, c и d (перечислены по часовой стрелке). Докажите, что площадь четырехугольника не превосходит а) $(ab + cd)/2$; б) $(a + b)(c + d)/4$.

Задача 41. Могут ли длины высот треугольника относиться друг к другу как $1 : 2 : 3$?

Задача 42. Треугольник площади 1 имеет стороны с длинами a, b и c, причем $a \geq b \geq c$. Докажите, что $b \geq \sqrt{2}$.

Задача 43. Могут ли длины всех сторон треугольника площади 1 быть больше 1000?

Решение задачи 41: Пусть S – площадь этого треугольника, a, b и c – длины его сторон. Тогда длины высот равны $2S/a$, $2S/b$ и $2S/c$. Значит, $a : b : c = 1 : 1/2 : 1/3$, что, как нетрудно видеть, противоречит неравенству треугольника.

Как же мы догадались до идеи ввести площадь и стороны треугольника? Прочитайте еще раз пункт д) и вам, наверно, это станет ясно.

Три предыдущих задачи – вполне достойные представители подтемы " площадь и неравенства ".

А вот несколько задач из области "точного" вычисления:

Задача 44. Точки K, L, M и N – середины сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$. Докажите, что $2S(KLMN) = S(ABCD)$.

Задача 45. Найдите площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$, если прямая AC перпендикулярна прямой BD и $AC = 3$, $BD = 8$.

Задача 46. Дан треугольник ABC. Точка A_1 лежит на продолжении стороны BC за точку C, причем $BC = CA_1$. Аналогично строятся точки B_1 и C_1 (см. рис.109). Найдите $S(A_1B_1C_1)$, если $S(ABC) = 1$.

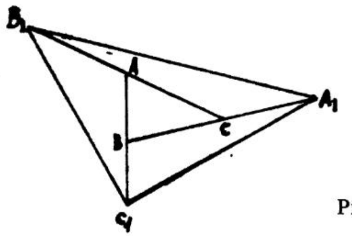


Рис. 109

Задача 47. Точка M лежит внутри треугольника ABC. Докажите, что площади треугольников ABM и BCM тогда и только тогда, когда M лежит на медиане BK.

И наконец, серия задач на доказательство.

Задача 48. Если два выпуклых четырехугольника расположены так, что середины сторон у них совпадают, то их площади равны. Докажите это.

Задача 49. Диагонали трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) пересекаются в точке O. Докажите, что треугольники AOB и COD равновелики.

Задача 50. Докажите, что сумма расстояний от точки, находящейся внутри правильного треугольника, до его сторон не зависит от положения точки.

<u>Для преподавателей.</u> Как видно, например, из решения задач 44–47, в задачах на площадь часто применяются и "шаблонные" геометрические идеи: равные треугольники, подобие, теорема Фалеса. Это естественно, так как тема "площадь" органично вписывается в общую геометрическую картину. На примерах такого рода можно объяснить школьникам, что решение задачи обычно объединяет в себе несколько соображений – очень редко задача решается "в один ход". Это – общий принцип решения задач, как на олимпиадах, так и в сфере "высшей" математики.

5. Разное

Данный параграф состоит из трех циклов задач по темам, которые мы не затрагивали в этой главе. Эти задачи предназначены в основном для самостоятельного решения и их можно рассматривать просто как упражнения, которые должны сопровождать развернутое изучение указанных тем (см. также литературу по теме "Геометрия").

Цикл 1. Построения

Задача 51. Постройте треугольник

а) по основанию, длине опущенной на него высоты и углу при основании.

б) по трем серединам его сторон.

в) по длинам двух сторон и медианы между ними.

г) по двум прямым, являющимися биссектрисами треугольника, и его третьей вершине.

Задача 52*. Разделите отрезок пополам

а) при помощи одного циркуля.

б) при помощи двусторонней линейки, ширина которой меньше длины отрезка.

в) при помощи двусторонней линейки, ширина которой больше длины отрезка.

Задача 53. На плоскости дан отрезок AB. На нем выбирается произвольная точка M и на отрезках AM и MB как на гипотенузах строятся равнобедренные прямоугольные треугольники AMC и BMD, причем вершины C и D находятся по одну сторону от отрезка AB. Постройте множество середин всех отрезков CD.

Задача 54. Имеется инструмент для геометрических построений, при помощи которого можно

а) провести прямую через две данные точки;

б) восстановить перпендикуляр к данной прямой в точке, лежащей на этой прямой.

Как при помощи этого инструмента опустить перпендикуляр из точки на прямую?

Задача 55. Петя утверждает, что множество точек на плоскости, равноудаленных от данной прямой и данной точки, – это окружность. Прав ли он?

Цикл 2. Вычисления

Задача 56. Найдите ошибку в доказательстве того, что катет равен гипотенузе (см. рис.110). M – точка пересечения биссектрисы угла C и серединного перпендикуляра к отрезку AB; K, L и N – основания перпендикуляров, опущенных из M на стороны треугольника. Тогда треугольники AMK и MKB равны по катету и гипотенузе, и поэтому $AM = MB$, и треугольники ALM и MNB равны по катету и гипотенузе. Значит, $AL = NB$. Поэтому $AC = AL + LC = NB + CN = BC$.

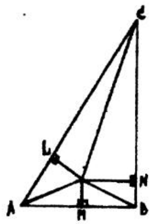


Рис. 110

Задача 57. В четырехугольнике $ABCD$ $BC = AD$, M – середина AD, N – середина BC. Серединные перпендикуляры к AB и CD пересекаются в точке P. Докажите, что P лежит и на серединном перпендикуляре к отрезку MN.

Задача 58. Дан прямоугольный треугольник с острым углом 30°. Докажите, что длина отрезка серединного перпендикуляра к гипотенузе, заключенного внутри треугольника, равна трети длины большего катета треугольника.

Задача 59. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1, и медианы AA_2, BB_2, CC_2. Докажите, что длина ломаной $A_1B_2C_1A_2B_1C_2A_1$ равна периметру треугольника ABC.

Цикл 3. Подобие

Задача 60. Одна из диагоналей вписанного четырехугольника – диаметр. Докажите, что проекции противоположных сторон на другую диагональ равны.

Задача 61. На окружности с центром O дана дуга AB величиной 60°. На дуге AB взята точка M. Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков MA и OB перпендикулярна прямой, проходящей через середины отрезков MB и OA.

Задача 62. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Докажите, что $CD/DB = CA/AB$.

Задача 63. В равнобедренном треугольнике ABC из середины H основания BC опущен перпендикуляр HE на боковую сторону AC; O– середина HE. Докажите, что прямые AO и BE перпендикулярны.

ПОСЛЕСЛОВИЕ

1. Тема "геометрические неравенства", начатая в параграфе 1, может быть развита чрезвычайно далеко – существует очень много красивейших примеров: начиная с простого неравенства треугольника и его следствий и кончая такими жемчужинами геометрии, как изопериметрическое неравенство (см. [42], главы 15, 16).

2. Не забывайте о том (и это чрезвычайно важно), что в этой главе мы не только указываем конкретные темы и задачи, но и намечаем возможные направления течения занятия. В связи с этим отнеситесь внимательнее к методическим замечаниям и "внезадачному" тексту в параграфах.

3. Тема "подсчет углов" – лишь одна из весьма представительного класса "вычислительных" тем, которым также необходимо уделить соответствующее внимание.

4. В контраст с предыдущими темами тема "площадь" в нашей главе начинается сразу с достаточно содержательных задач, а не просто с упражнений. Их можно найти в школьных учебниках (хотя таких упражнений довольно мало).

5. **Для преподавателей.** Постарайтесь, чтобы ребята усвоили следующее: если задача не поддается лихому кавалерийскому наскоку (часто с негодными средствами), то ее, возможно, удастся одолеть тщательной осадой (которая не обязательно должна занимать много времени). Осада, конечно, ведется по всем правилам: комбинирование приемов, перебор возможных подходов, применение вычислительных методов, постепенное накопление фактов.

6. Многие красивые темы планиметрии, доступные школьникам 6–8 классов, не затронуты в этой главе: подобие и его применение, вписанные и описанные многоугольники, замечательные точки в треугольнике, численные соотношения и т.д. Безусловно, они заслуживают изучения, однако их включение в эту главу превратило бы ее в однообразный и все равно очень неполный справочник. Мы же постарались затронуть основные аспекты этой своеобразной науки-игры, опустив из важнейших лишь довольно сложную тему "подобие". Несмотря на огромное разнообразие всего этого пестрого материала, нужно

донести до школьников идею его единства – как в тематическом, так и в методологическом плане.

7. Краткий путеводитель.

а) Огромный задачный материал по "обычной" геометрии собран в книгах [42], [44], [34], [65], [70], [64] и др., хотя первые две из них быстро переходят на высоты, обычно недоступные школьнику 8 класса.

б) Книги [67], [71] можно порекомендовать тем, кто склонен видеть в математике скорее алгебру, чем геометрию. Там же собран отличный задачный материал по преобразованиям плоскости.

в) Книги [68], [69] представляют собой тот разряд редких книг, которые приятно просто читать (хотя естественно возникает вопрос о том, для кого написаны эти книги – видимо, в основном для тех, кто все написанное и так хорошо знает). Это те книги, которые необходимо рекомендовать для чтения школьникам – беллетристичность изложения сразу же привлекает заинтересованного читателя. Обязательно надо прочитать и геометрические (а впрочем, и другие тоже) главы книг Гарднера [5], [6], [7].

СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

1. Что это такое?

Каждый школьник, увидев запись "2653", понимает, что речь идет о числе "две тысячи шестьсот пятьдесят три". Задумаемся, откуда он узнает это. Дело в том, что все привыкли к следующему способу записи чисел (способы записи чисел и называют *системами счисления*): последняя цифра числа обозначает количество единиц в нем, предпоследняя – количество десятков, третья с конца цифра – количество сотен и т.д. Таким образом, записывая "2653", мы подразумеваем число $2 \cdot 1000 + 6 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 3 \cdot 1$ или, в более компактной форме, $2 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$. Видно, что особая роль в нашем способе отводится числу десять: все числа представляются в виде суммы различных степеней десятки с коэффициентами, принимающими значения от 0 до 9. Поэтому эта система счисления и называется десятичной. При записи в этой системе используются десять символов: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, называемых цифрами. Они обозначают числа от нуля до девяти. Следующее число, то есть десять принимается за единицу следующего разряда и записывается так: 10.

А что будет, если вместо десяти использовать какое-нибудь другое число, например, шесть? По аналогии, нам потребуется шесть цифр-символов. В качестве них мы можем взять знакомые нам символы 0, 1, 2, 3, 4, 5, которые будут обозначать числа от нуля до пяти. Число шесть мы примем за единицу следующего разряда и поэтому в нашей новой системе счисления оно будет записываться так: 10. Продолжая аналогию, мы можем представить любое натуральное число в виде суммы различных степеней шестерки с коэффициентами от нуля до пяти. Например (запись всех чисел - -десятичная).

$$7 = 1 \cdot 6^1 + 1 \cdot 6^0$$

$$12 = 2 \cdot 6^1 + 0 \cdot 6^0$$

$$35 = 5 \cdot 6^1 + 5 \cdot 6^0$$

$$45 = 1 \cdot 6^2 + 1 \cdot 6^1 + 3 \cdot 6^0.$$

Поэтому в нашей новой системе счисления, которая называется шестиричной, естественно записывать число 7 как "11", число 12 как "20", 35 как "55", а 45 как "113".

Нетрудно понять, что в шестиричной системе счисления можно записать любое натуральное число. Покажем, как это сделать для числа 450 (и в этом примере, как и ранее, запись всех чисел десятичная). Наибольшее число, являющееся степенью шестерки и не превосходящее 450 – это 216. Разделим 450 на 216 с остатком. Неполное частное от этого деления равно двойке. Поэтому первой цифрой шестиричной записи числа 450 будет 2. Остаток от деления равен 18. Разделим его на предыдущую степень шестерки (на первом этапе мы делили на 6^3, а теперь – на 6^2) с остатком. Неполное частное равно нулю, поэтому вторая цифра – 0. Остаток равен 18. Разделив с остатком 18 на 6^1, найдем, что третья цифра равна 3, а остаток – 0. Таким образом, последняя цифра равна 0. Итак, шестиричная запись числа 450 такова: "2030".

При построении новой системы счисления мы не пользовались никакими специфическими свойствами числа шесть. Аналогично по любому натуральному числу n, большему 1, можно построить n-ичную систему счисления, в которой запись числа связана с его разложением по степеням числа n. Число n называется *основанием* этой системы счисления. В случае, когда могут возникнуть недоразумения, мы будем приписывать справа – внизу от числа основание системы счисления, в которой оно записано. Таким образом, как было установлено выше, выполняются равенства:

$$7_{10} = 11_6, 12_{10} = 20_6, 35_{10} = 55_6, 45_{10} = 113_6 .$$

Упражнение 1. Сколько цифр-символов необходимо иметь

а) в двоичной системе счисления;

б) в n-ичной системе счисления?

Для того, чтобы записать данное натуральное число в n-ичной системе счисления нужно представить его в виде

$$a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_2 n^2 + a_1 n^1 + a_0 n^0 ,$$

где все a_i принимают значения от нуля до $n-1$, а a_k, кроме того, не равно нулю.

Упражнение 2. Запишите в десятичной системе счисления числа 10101_2, 10101_3, 211_4, 126_7, 158_{11}.

Упражнение 3. Запишите число 100_{10} в двоичной, троичной, четверичной, пятеричной, шестеричной, семеричной, восьмеричной и девятеричной системах счисления.

Упражнение 4. Запишите число 111_{10} в одиннадцатиричной системе счисления (в качестве недостающей цифры "10" принято использовать букву A).

Научимся теперь складывать и умножать числа, записанные в произвольной системе счисления. Это делается так же, как и в десятичной системе ("в столбик"). Однако нужно помнить, что перенос в следующий разряд происходит тогда, когда результат превышает основание данной системы счисления (или равен ему).

Для успешного выполнения этих операций необходимо (так же как и в десятичной системе счисления) знать таблицы сложения и умножения для чисел, меньших основания системы счисления, то есть, записываемых одной цифрой.

Упражнение 5. Составьте таблицы сложения и умножения для двоичной, троичной, четверичной и пятиричной систем счисления.

Упражнение 6. Вычислите а) $1100_2 + 1101_2$; б) $201_3 \cdot 102_3$.

__Для преподавателей.__ Мы очень коротко объяснили, как нужно складывать и умножать числа в произвольной системе счисления. На занятии это должно, конечно, занять немного больше времени. При этом нужно обсудить большое количество примеров – только они позволяют приобрести необходимые навыки в технике.

Опишем теперь эффективный алгоритм перевода записи числа из одной системы счисления в другую. Он отличается от уже известного нам тем, что запись числа в новой системе возникает не "слева-направо", а "справа-налево". Последняя цифра является остатком от деления исходного числа на основание новой системы счисления. Затем очередная цифра находится так: неполное частное предыдущего деления вновь делится на основание системы счисления и берется остаток.

Пример. Запишем число 250_{10} в 8-ричной системе счисления.

$$250 = 31 \cdot 8 + 2$$

$$31 = 3 \cdot 8 + 7$$

$$3 = 0 \cdot 8 + 3\,.$$

Таким образом, $250_{10} = 372_8$.

Упражнение 7. Запишите в семеричной системе счисления числа а) 1000_{10}; б) 532_8.

В заключение параграфа приведем несколько более интересных задач, связанных с системами счисления.

Задача 1. В какой системе счисления справедливо равенство $3 \cdot 4 = 10$?

Задача 2. Существует ли система счисления, в которой одновременно

а) $3 + 4 = 10$ и $3 \cdot 4 = 15$;

б) $2 + 3 = 5$ и $2 \cdot 3 = 11$?

Задача 3. Сформулируйте (и докажите) условие, позволяющее определить четность числа по его записи

а) в троичной системе счисления;

б) в системе счисления с основанием n.

Задача 4. На доске сохранилась полустертая запись

$$\begin{array}{r} 2\ 3\ \ 5\ \\ +\ 1\ \ 6\ 4\ 2 \\ \hline 4\ 2\ 4\ 2\ 3 \end{array}$$

Выясните, в какой системе счисления записан пример и восстановите слагаемые.

Задача 5. Один школьный учитель заявил, что у него в классе 100 детей, из них 24 мальчика и 32 девочки. Какой системой счисления он пользовался?

Для преподавателей. Материал этого параграфа естественно обсуждать на двух-трех последовательных занятиях. На них школьники должны осознать:

– понятие системы счисления;

– технику перевода из одной системы счисления в другую;

– арифметику в произвольной системе счисления.

Для того, чтобы сделать освоение этого технического материала менее скучным, можно воспользоваться задачами 1–5 и аналогичными им.

2. Признаки делимости

В предыдущем параграфе мы научились складывать и умножать числа, записанные в произвольной системе. Что касается обратных операций – вычитания и деления – они также производятся по схемам, аналогичным тем, которые известны вам по десятичной системе счисления („в столбик“ и „уголком“). Однако, как вы знаете, деление „уголком“ даже в привычной десятичной системе счисления – достаточно трудоемкий процесс. Поэтому часто бывает удобно воспользоваться признаком делимости для того, чтобы выяснить, делится ли одно число на другое, не производя деления (для десятичной системы счисления признаки делимости подробно обсуждаются в главе „Делимость и остатки“). В недесятичных системах счисления деление „уголком“ еще более трудоемко – дело усугубляется непривычностью ситуации (попробуйте, например, выяснить, делится ли число 123456654321_7 на 6). В связи с этим естественно попытаться найти аналоги известных признаков делимости для произвольных систем счисления.

Начнем с самого простого. Почему мы уверены, что число, оканчивающееся нулем в десятичной системе счисления, делится на 10? Дело в том, что в разложении

$$a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0 10^0 ,$$

этого числа, соответствующем его десятичной записи, последняя цифра a_0 равна 0, и поэтому каждое из слагаемых делится на 10. Столь же очевидно и обратное утверждение: число, делящееся на 10, должно оканчиваться нулем.

Рассмотрим теперь произвольную систему счисления. Аналогичные рассуждения позволяют доказать следующий признак делимости (на основание системы счисления):

В n-ичной системе счисления запись числа заканчивается нулем тогда и только тогда, когда это число делится на n.

Задача 6. Сформулируйте и докажите признак делимости на

а) степень основания системы счисления (аналогичный признакам делимости на 100, 1000, ...).

б) делитель основания системы счисления (аналогичный признакам делимости на 2 и на 5).

<u>Методические замечания.</u> Хотелось бы еще раз подчеркнуть, что различные системы счисления – лишь разные способы записи чисел. Поэтому делимость одного числа на другое не зависит от системы счисления, в которой они записаны.

В то же время в каждой системе счисления существуют приемы для определения делимости на некоторые фиксированные числа. Это и есть признаки делимости.

Перейдем теперь к более содержательным признакам делимости. По-видимому, самым известным из них является признак делимости на 9. Попробуем его обобщить. Выясним, какое соображение оказалось решающим при доказательстве этого признака делимости в десятичной системе счисления (см. главу "Делимость и остатки"). Дело было в том, что $9 = 10 - 1$, и поэтому $10 \equiv 1 \pmod 9$.

Это наводит нас на мысль аналогичным образом сформулировать и доказать признак делимости на $n-1$ в n-ичной системе счисления. Действительно, $n \equiv 1 \pmod{n-1}$. Отсюда $n^s \equiv 1 \pmod{n-1}$ для любого натурального s. Поэтому

$$a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n^1 + a_0 n^0 \equiv a_k + a_{k-1} + \ldots + a_1 + a_0 \pmod{n-1} .$$

Таким образом, сумма цифр числа, записанного в n-ичной системе счисления, делится на $n-1$ тогда и только тогда, когда само число делится на $n-1$.

Напомним теперь вопрос, заданный в начале параграфа: делится ли число 123456654321_7 на 6? Надеемся, что теперь вы легко сможете на него ответить.

Задача 7. Сформулируйте и докажите признак делимости на

а) делитель числа "основание системы счисления − 1" (аналогичный признаку делимости на 3).

б) "основание + 1" (аналогичный признаку делимости на 11).

в) делитель числа "основание + 1" (аналога нет!).

<u>**Для преподавателей.**</u> Теме этого параграфа, видимо, нужно посвятить одно занятие. Было бы хорошо, если бы на нем школьники, используя подсказки преподавателя, сами формулировали и доказывали новые признаки делимости.

3. Задачи

До этого параграфа системы счисления интересовали нас сами по себе. Теперь мы разберем несколько задач, внешне не имеющих к нашей теме никакого отношения. Однако недесятичные системы счисления естественно возникают при решении этих задач.

Задача 8. Какое наименьшее число гирь необходимо для того, чтобы иметь возможность взвесить любое число граммов от 1 до 100 на чашечных весах, если гири можно класть только на одну чашку весов?

Решение: Любое число можно записать в двоичной системе счисления. Поэтому для взвешивания любого числа граммов от 1 до 100 достаточно иметь семь гирь с весами: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64. Шестью гирями обойтись нельзя, так как с их помощью можно взвесить не более $2^6-1=63$ различных весов (каждая гиря либо участвует, либо не участвует во взвешивании).

Задача 9*. Тот же вопрос, если гири разрешается класть на обе чашки весов.

Решение: При решении этой задачи нам понадобится следующее интересное свойство троичной системы счисления:

любое натуральное число можно представить в виде разности двух чисел, запись которых в троичной системе счисления содержит только 0 и 1.

Для доказательства нужно записать исходное число в троичной системе счисления и построить требуемые числа поразрядно справа налево. При этом если у получившихся чисел в каких-то одноименных разрядах стоят единицы, то их можно заменить нулями.

Теперь понятно, что достаточно иметь 5 гирь с весами 1, 3, 9, 27, 81 (подумайте, почему не нужна гиря весом 243 грамма).

Четырех же гирь явно недостаточно, так как с их помощью можно взвесить не более $3^4 - 1 = 80$ различных весов (каждая гиря либо на левой чашке весов, либо на правой, либо не участвует во взвешивании).

Задача 10. Кащей Бессмертный загадывает три двузначных числа: a, b и c. Иван Царевич должен назвать ему три числа: X, Y, Z, после чего Кащей сообщит ему сумму $aX + bY + cZ$. Царевич должен отгадать задуманные числа, иначе ему отрубят голову. Как ему спастись?

Решение: Царевич должен назвать числа 1, 100, $100^2 = 10000$. Числа a, b, c – "цифры" ответа Кащея в 100-ичной записи.

Задача 11*. Докажите, что из набора $0, 1, 2, \ldots, 3^{k-1}$ можно выбрать 2^k чисел так, чтобы никакое из них не являлось средним арифметическим двух других выбранных чисел.

Решение: Воспользуемся троичной системой счисления. Будем считать, что троичная запись каждого из данных чисел состоит ровно из k цифр (при необходимости заполним пустующие старшие разряды нулями). Выберем теперь те числа, троичная запись которых содержит только цифры 0 и 1. Очевидно, что их ровно 2^k. Покажем, что это и есть искомый набор. Предположим противное: среди выбранных чисел есть три различных числа x, y, z, удовлетворяющих равенству $x + y = 2z$. Так как числа x и y различаются хотя бы в одном разряде, то в троичной записи их суммы $x + y$ в этом разряде стоит цифра 1. Однако в записи числа $2z$ встречаются только 0 и 2.

Задача 12. Докажите, что 2^k чисел с требуемым свойством можно выбрать и из набора $0, 1, 2, \ldots, (3^k - 1)/2$.

<u>**Для преподавателей.**</u> Задачи этого параграфа можно давать по одной на занятии и использовать в различных математических соревнованиях.

4. Игра "Ним"

В этом параграфе речь пойдет об известной игре "Ним". Правила ее таковы. Имеется три кучки камней. Двое играющих по очереди берут камни из этих кучек, причем за один ход можно брать любое количество камней, но только из одной кучки. Выигрывает тот, кто забирает последний камень.

Замечательно, что выигрышная стратегия в этой игре формулируется с использованием двоичной системы счисления.Мы разберем решение этой игры в более общей ситуации: для произвольного числа кучек. Заметим, что в случае двух кучек “Ним” превращается в игру с ладьей на прямоугольной доске (см. задачи 10, 16, 22 главы “Игры”).

Как обычно (см. параграф 3 указанной выше главы), для решения игры достаточно указать набор выигрышных позиций. Выпишем двоичные записи количеств камней в кучках друг под другом так, чтобы одноименные разряды находились в одном столбце (см. ниже). Вычислим теперь четность числа единиц в каждом разряде.

1	1	0	0	1	0	1
	1	1	1	1	0	
	1	0	1	1	1	1

1	1	0	0	1	0	1
	1	1	1	1	0	
	1	0	1	1	1	1
Н	Ч	Н	Ч	Н	Ч	Ч

Наше утверждение состоит в том, что выигрышными являются те и только те позиции, в которых количество единиц в каждом разряде четно (позиция, изображенная на рисунках 1 и 2 – проигрышная).

Для доказательства этого необходимо показать, что

1. Завершающая позиция игры – выигрышная.

2. Любой ход из выигрышной позиции ведет в проигрышную.

3. Из любой проигрышной позиции за один ход можно попасть в какую-нибудь выигрышную.

Пункт 1 очевиден.

Для доказательства пункта 2 достаточно заметить, что после любого хода изменяется число камней в какой-то кучке, а значит, меняется некоторый разряд его двоичной записи и, следовательно, меняется четность числа единиц в соответствующем столбце.

Покажем теперь, как из произвольной проигрышной позиции перейти к выигрышной. Для этого нужно, взяв несколько камней из одной кучки, изменить четность числа единиц во всех столбцах с нечетным количеством единиц (и только в них). Рассмотрим крайний левый столбец с нечетным числом единиц и выделим кучку, у которой в этом разряде стоит 1 (здесь мы позволяем себе известную вольность речи). Кстати, почему такая кучка есть? Из этой кучки мы и будем брать камни.

Легко понять, сколько камней должно остаться в ней после хода: двоичную запись исходного числа камней нужно изменить в разрядах, соответствующих столбцам с нечетным числом единиц. Так как в старшем из изменившихся разрядов вместо единицы будет стоять ноль, то число камней в выбранной кучке действительно уменьшится.

Задача 13. Разберите следующие две игры:

а) На первой горизонтали шахматной доски стоит восемь белых шашек, на последней – восемь черных. За ход каждый из играющих может передвинуть шашку своего цвета вперед по вертикали на любое количество клеток, но так, чтобы не перепрыгнуть шашку соперника. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

б) Та же игра, но шашки разрешается двигать не только вперед, но и назад.

<u>Для преподавателей.</u> Обсуждать игру "Ним" имеет смысл только в сильном кружке. При этом необходимо дать возможность ребятам поиграть друг с другом и высказать свои гипотезы о выигрышной стратегии. Придумать правильную стратегию очень трудно, однако умелые и вовремя сделанные подсказки могут создать иллюзию самостоятельного решения задачи.

НЕРАВЕНСТВА

1. Что больше?

Вопрос, вынесенный в название параграфа, по сути, один из самых распространенных детских вопросов:

– А кто сильнее: папа или чемпион мира?

– Что выше: наш дом или Останкинская телебашня?

– Где больше живет людей: в Риге или в Калуге?

В математике такие "наивные" вопросы, хотя и не имеют глубокого содержания, но помогают научиться лучше и точнее вычислять, оперировать с большими числами.

Для преподавателей. Техника вычислений и оценок вообще является очень значимым аспектом математической культуры. Необходимо, чтобы школьник владел различными методами вычислений и оценок, причем не на уровне "слепого" применения. Невозможно помнить все технические фокусы. Но можно и нужно научить ребят все делать самим, как говорится, "руками". Умение точно проводить вычисления шлифуется именно на задачах с конкретными численными данными, подобных тем, которые рассматриваются в этом параграфе.

Вот типичный вопрос из этой серии.

Задача 1. Какое число больше: 31^{11} или 17^{14}?

Выписать оба этих числа, конечно, можно – в каждом из них не более 20 цифр. Однако этот путь решения вопроса очень трудоемок и не увенчается успехом в других, более трудных задачах. Попробуем по-другому

$$31^{11} < 32^{11} = (2^5)^{11} = 2^{55} < 2^{56} = (2^4)^{14} = 16^{14} < 17^{14}.$$

Вот такая цепочка неравенств сразу дает нам результат: 31^{11} меньше, чем 17^{14}. Единственное, что нам было необходимо для решения – это подметить, что числа 31 и 17 находятся "рядом" со степенями двойки.

Задача 2. Что больше

а) 2^{300} или 3^{200}?

б) 2^{40} или 3^{28}?

в) 5^{44} или 4^{53}?

Задача 3. Докажите, что $2^{100} + 3^{100} < 4^{100}$.

Решение: $2^{100} < 3^{100}$ и значит, нам достаточно доказать, что $2 \cdot 3^{100} < 4^{100}$ или, что $\left(\frac{4}{3}\right)^{100} > 2$. Но даже $\left(\frac{4}{3}\right)^{3} = \frac{64}{27}$ уже больше, чем 2.

Задача 4. Что больше: 7^{92} или 8^{91}?

Исследуя далее пример из задачи 3, попробуем понять, каково же натуральное n такое, что $4^n < 2^{100} + 3^{100} < 4^{n+1}$. В связи с этим возникает следующая задача.

Задача 5*. Докажите, что $4^{79} < 2^{100} + 3^{100} < 4^{80}$.

Решение: Так как $2 \cdot 3^{100} > 2^{100} + 3^{100}$, то нам достаточно доказать, что $4^{80} > 2 \cdot 3^{100}$, или $\left(\dfrac{4^4}{3^5}\right)^{20} = \left(\dfrac{256}{243}\right)^{20} > 2$.

Так как нам известно неравенство Бернулли $(1+x)^n \geq 1 + nx$ при $x \geq -1$, $n \geq 1$ (см. задачу 56 или статью "Индукция" настоящего сборника), то хотелось бы выяснить, правда ли, что $\frac{256}{243} > 1 + \frac{1}{20}$. Это на самом деле так (проверьте!). Следовательно, $\left(\frac{256}{243}\right)^{20} > (1 + \frac{1}{20})^{20} \geq 2$. Осталось доказать, что $2^{100} + 3^{100} > 4^{79}$. Докажем, что $3^{100} > 4^{79}$. Для этого нужно доказать, что $4^{80}/3^{100} < 4$. Построим следующую цепочку неравенств:

$$\frac{4^{80}}{3^{100}} = \left(\frac{256}{243}\right)^{20} < \left(\frac{19}{18}\right)^{20} = \left(\frac{361}{324}\right)^{10} <$$
$$< \left(\frac{9}{8}\right)^{10} = \left(\frac{81}{64}\right)^{5} < \left(\frac{9}{7}\right)^{5} = \frac{59049}{16807} < 4.$$

Комментарий: Метод, как видите, состоит в постепенном упрощении "ужасно сложного" выражения вроде $4^{80}/3^{100}$.

<u>**Для преподавателей.**</u> Для того, чтобы хорошо овладеть этим методом, необходимо, чтобы ученики были "на короткой ноге" с различными небольшими степенями и вообще не пугались конкретных вычислений. Этому могут помочь задачи наподобие следующей.

Задача 6. Найдите все степени чисел 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, лежащие в промежутке от 1 до 10000 и выстройте их по порядку. Найдите среди них пары чисел, разность между которыми не превосходит 10.

Комментарий: Прекрасная задача для домашнего задания.

Решение трех следующих задач основано совсем на других идеях. Пока что мы доказывали неравенства между конкретными числами, преобразуя их и вычисляя результаты преобразований. Новая идея состоит в том, чтобы для удобства вычислений заменить конкретное число на переменную.

Задача 7. Что больше: $1234567 \cdot 1234569$ или 1234568^2?

Решение: Обозначим число 1234568 через x. Тогда левое выражение превратится в $(x-1)(x+1) = x^2 - 1 < x^2$. Таким образом, отпала необходимость перемножать и возводить в квадрат семизначные числа.

Задача 8. Что больше: $10\ldots01/10\ldots01$ или $10\ldots01/10\ldots01$? (в каждой из дробей число в знаменателе имеет на один ноль в записи больше, чем число в числителе; при этом слева в верхнем числе 1984 нуля, а справа – 1985).

Задача 9. Что больше: $1234567/7654321$ или $1234568/7654322$?

Вот еще несколько задач на оценки различного типа.

Задача 10. Какое число больше: 100^{100} или $50^{50} \cdot 150^{50}$?

Задача 11. Что больше: $(1.01)^{1000}$ или 1000?

Задача 12. Докажите, что

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{99} + \frac{1}{100} > \frac{1}{5}.$$

Задача 13. (почти шутка). Если к числу 100 применить 99 раз операцию “факториал”, то получится число A. Если к числу 99 применить 100 раз операцию “факториал”, то получится число B. Какое из этих двух чисел больше?

Разберем решение задачи 12. Разобьем слагаемые на пары:

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{98} - \frac{1}{99}\right) + \frac{1}{100}.$$

Что мы получим в начале этой суммы, состоящей, заметьте, только из положительных чисел? Очевидно, $1/6 + 1/20 + 1/42 + \ldots$ Но уже $1/6 + 1/20 > 1/5$, откуда и следует требуемый результат.

Задачи для самостоятельного решения

14. Сколько цифр у числа 2^{1000}?

15. Найдите наибольшее из чисел 5^{100}, 6^{91}, 7^{90}, 8^{85}.

16*. Рассмотрим число $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \ldots \frac{99}{100}$. Докажите, что оно а) меньше $1/10$; б) меньше $1/12$; в) больше $1/15$.

<u>**Для преподавателей.**</u> Несомненно, задач, подобных задачам 1–10, можно придумать самостоятельно неисчислимое множество. Приведем пример. Возьмем два небольших числа – 5 и 7. Рассмотрим большую степень пятерки – пусть это будет 5^{73}. Теперь подберем небольшие степени чисел 5 и 7, отличающиеся "не слишком сильно" (это уже зависит от вашего чувства меры). Пусть это будут числа $5^4 = 625$ и $7^3 = 343$ – показатели должны быть разными! Так как $5^4 > 7^3$, то $5^{72} > 7^{54}$. Итак, $5^{73} > 5^{72} > 7^{54}$. Теперь еще можно немножко "подправить" показатель 54 и получится очередное упражнение: доказать, что $5^{73} > 7^{53}$.

Комментарий: Подобного типа неравенства, получающиеся в результате композиции нескольких грубых и более простых неравенств, носят в фольклоре название "неравенств по-ленинградски".

<u>**Для преподавателей.**</u> Решение подобных числовых неравенств очень способствует развитию вычислительных способностей и техники оценок. Не забывайте, однако, что некоторые из школьников, обладающие хорошими логико-комбинаторными способностями, могут совершенно "не переваривать" подобных технико-вычислительных задач.

2. Главное неравенство

Главным (и по сути, единственным) неравенством в области вещественных чисел является неравенство $x^2 \geq 0$ – его верность сомнений не вызывает. Из него уже следуют другие, очень известные и употребительные неравенства, первым из которых, безусловно, является неравенство Коши или, как его еще называют, неравенство о средних:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad \text{для любых } a, b \geq 0$$

– числа $(a+b)/2$ и $\sqrt{ab}$ носят название *среднего арифметического* и *среднего геометрического* чисел a и b.

Доказывается оно очень просто:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0\,.$$

– отсюда и следует не только верность неравенства Коши, но и то, что в равенство оно обращается лишь при $a = b$.

Задача 17. Докажите, что $1 + x \geq 2\sqrt{x}$ при $x \geq 0$.

Задача 18. Докажите, что $x + 1/x \geq 2$ при $x > 0$.

Задача 19. Докажите, что $(x^2 + y^2)/2 \geq xy$ при любых x и y.

Задача 20. Докажите, что $2(x^2+y^2) \geq (x+y)^2$ при любых x и y.

Задача 21. Докажите, что $1/x + 1/y \geq 4/(x+y)$ при $x, y > 0$.

Решение задачи 18: $(x+1/x) - 2 = (\sqrt{x} - \sqrt{1/x})^2 \geq 0$, ч.т.д.

Замечание. Вообще, решение всех подобных задач сводится либо к подходящему применению неравенства Коши, либо после удачного преобразования выражения к использованию неравенства $x^2 \geq 0$.

Более сложные неравенства, однако, решаются либо многократным применением неравенства Коши, либо при помощи сочетания нескольких разных идей. Вот типичный пример:

Задача 22. Докажите, что $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$ при любых x, y, z.

При решении воспользуемся результатом задачи 18, и запишем три неравенства:

$$\frac{1}{2}(x^2+y^2) \geq xy, \quad \frac{1}{2}(x^2+z^2) \geq xz, \quad \frac{1}{2}(y^2+z^2) \geq yz\,.$$

Сложив их, мы и получим требуемое неравенство.

Задача 23. a, b, $c \geq 0$. Докажите, что $(a+b)(a+c)(b+c) \geq 8abc$.

Задача 24. a, b, $c \geq 0$. Докажите, что $ab+bc+ca \geq a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}+c\sqrt{ab}$.

Задача 25. Докажите, что $x^2+y^2+1 \geq xy+x+y$ при любых x и y.

Задача 26. Докажите, что при любых a, b, c имеет место неравенство: $a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c)$.

Решение: Воспользуемся неравенством из задачи 22, причем дважды:

$$\begin{aligned} a^4+b^4+c^4 &= (a^2)^2+(b^2)^2+(c^2)^2 \geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 = \\ &= (ab)^2+(bc)^2+(ca)^2 \geq (ab)(bc)+(bc)(ca)+(ca)(ab) = \\ &= abc(a+b+c)\,. \end{aligned}$$

Неравенство Коши замечательно двумя своими свойствами. Первое: оно позволяет оценивать сумму положительных чисел через их произведение. Второе: оно имеет место не только для двух чисел, но распространяется и на произвольное количество чисел. Вот, например, как выглядит неравенство Коши для четырех чисел:

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd} \quad \text{для любых } a,b,c,d \geq 0\,,$$

где, опять-таки, левая и правая часть неравенства носят названия среднего арифметического и среднего геометрического данных четырех чисел соответственно.

Доказывается неравенство Коши для четырех чисел так:

$$\frac{a+b+c+d}{4}=\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}\right)\geq\frac{1}{2}(\sqrt{ab}+\sqrt{cd})\geq\sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}}=\sqrt[4]{abcd}$$

– несколько раз применяется неравенство Коши для двух чисел.

Задача 27. Докажите, что $x^4+y^4+8\geq 8xy$ при любых x и y.

Задача 28. a, b, c, d – положительные числа. Докажите, что

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\geq 16\,.$$

Для трех чисел неравенство Коши доказывается более сложным способом. Выглядит само неравенство так:

$$\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}\quad \text{для любых } a,b,c\geq 0\,.$$

Чтобы доказать его, рассмотрим четыре числа: a, b, c и $m=\sqrt[3]{abc}$. Тогда

$$\frac{a+b+c+m}{4}\geq\sqrt[4]{abcm}=\sqrt[4]{m^3\cdot m}=m\,.$$

Следовательно, $(a+b+c)/4\geq 3m/4$, и значит, $a+b+c\geq 3m$, $(a+b+c)/3\geq\sqrt[3]{abc}$, ч.т.д.

Задача 29. a, b, c – положительные числа. Докажите, что

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3\,.$$

Задача 30. Докажите, что при $x\geq 0$ имеет место неравенство $3x^3-6x^2+4\geq 0$.

Решение: Докажем, что $3x^3+4\geq 6x^2$. Но $3x^3+4=2x^3+x^3+4$. Применяя неравенство Коши, получаем

$$2x^3+x^3+4\geq 3\sqrt[3]{2x^3\cdot x^3\cdot 4}=3\cdot 2x^2=6x^2$$

ч.т.д.

Задачи для самостоятельного решения

31. Докажите, что при a, b, $c>0$ имеет место неравенство $1/a+1/b+1/c\geq 1/\sqrt{ab}+1/\sqrt{bc}+1/\sqrt{ac}$.

32. Докажите, что при a, b, $c>0$ имеет место неравенство $ab/c+ac/b+bc/a\geq a+b+c$.

33. Докажите, что при a, b, $c\geq 0$ имеет место неравенство $((a+b+c)/3)^2\geq(ab+bc+ca)/3$.

34. Докажите, что при a, b, $c \geq 0$ имеет место неравенство $(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c)$.

35. Сумма трех положительных чисел равна шести. Докажите, что сумма их квадратов не меньше 12.

36. Докажите, что при $x \geq 0$ имеет место неравенство $2x + 3/8 \geq 4\sqrt{x}$.

37. Сумма двух неотрицательных чисел равна 10. Какое максимальное и какое минимальное значение может принимать сумма их квадратов?

38*. Докажите неравенство Коши для пяти чисел, т.е. докажите, что при a, b, c, d, $e \geq 0$ имеет место неравенство

$$\frac{a+b+c+d+e}{5} \geq \sqrt[5]{abcde}\,.$$

Указание. Докажите сначала неравенство Коши для восьми чисел, а затем воспользуйтесь той же идеей, что и при доказательстве неравенства Коши для трех чисел.

3. Тождественные преобразования

Нередко удачно подобранное тождественное преобразование помогает решить задачу или немедленно доказывает неравенство. Вот **ПРИМЕР:** вспомним неравенство $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ из задачи 22. Его можно доказать так – перепишем выражение $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx = ((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2)/2 \geq 0$.

Это типичный пример простейшего метода, который называется "выделением квадрата" (частенько выделяется несколько квадратов). Приведем еще один пример.

Задача 39. Решите уравнение $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - bc - cd - d + 2/5 = 0$.

Как, скажете вы, это же не неравенство! Да, конечно, но во-первых, здесь действует метод выделения квадрата, а во-вторых, на самом деле имеет место неравенство. Действительно:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - bc - cd - d + 2/5 =$$
$$= \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(b - \frac{2c}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(c - \frac{3d}{4}\right)^2 + \frac{5}{8}\left(d - \frac{4}{5}\right)^2.$$

Отсюда и следует решение задачи.

Задача 40. $a + b = 1$. Каково максимальное значение величины ab?

Указание: $a(1-a) = 1/4 - (1/2 - a)^2$.

Задача 41. Докажите неравенство $(a^2/4)+b^2+c^2 \geq ab-ac+2bc$ при любых a, b, c.

Задача 42. k, l, m – натуральные числа. Докажите, что

$$2^{k+l}+2^{k+m}+2^{l+m} \leq 2^{k+l+m+1}+1\,.$$

Задача 43. $a+b+c=0$. Докажите, что $ab+bc+ca \leq 0$.

Разберем решение задачи 41. Переносим все на одну сторону и выделяем квадрат: $(a^2/4)+b^2+c^2-ab+ac-2bc=(a/2-b+c)^2 \geq 0$.

* * *

Теперь разберем одну замечательную идею, позволяющую доказывать некоторые симметричные неравенства (она также связана с разложением на множители).

ЛЕММА. Если $a \geq b$, $x \geq y$, то $ax+by \geq ay+bx$.

Доказательство: В самом деле, $ax+by-ay-bx=(a-b)(x-y) \geq 0$.

Комментарий: Если, например, f – это некоторая возрастающая функция, то $(a-b)(f(a)-f(b)) \geq 0$ для любых чисел a и b – это просто переформулировка определения возрастающей функции.

Эта идея применяется, например, так:

Задача 44. Докажите, что $x^6/y^2+y^6/x^2 \geq x^4+y^4$ при любых x и y.

Решение: Обозначим $x^2=a$, $y^2=b$. Тогда

$$\frac{x^6}{y^2}+\frac{y^6}{x^2}-x^4-y^4=a^3/b+b^3/a-a^2-b^2=$$

$$=\frac{(a-b)a^2}{b}++\frac{(b-a)b^2}{a}=(a-b)\left(\frac{a^2}{b}-\frac{b^2}{a}\right)=\frac{(a-b)(a^3-b^3)}{ab} \geq 0$$

– еще раз подчеркнем, что числа $a-b$ и a^3-b^3 имеют один знак.

Задача 45. $x, y>0$. Докажите, что $\sqrt{x^2/y}+\sqrt{y^2/x} \geq \sqrt{x}+\sqrt{y}$.

Задача 46. $a, b, c \geq 0$. Докажите, что

$$2(a^3+b^3+c^3) \geq a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2\,.$$

Решение: Перенесем все на одну сторону и разобьем слагаемые на четверки: $[a^3+b^3-a^2b-ab^2]+[b^3+c^3-b^2c-bc^2]+[a^3+c^3-a^2c-ac^2]$.

Внутри каждой четверки выражение можно разложить на множители таким образом: $a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 = (a-b)(a^2 - b^2) \geq 0$. Отсюда и следует требуемое неравенство.

Задача 47*. $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ и $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$. Докажите, что

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \geq a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_nc_n\,,$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – любая перестановка чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Задачи для самостоятельного решения

48. Докажите, что при любом x выполняется неравенство

$$x(x+1)(x+2)(x+3) \geq -1\,.$$

49. Докажите, что при любых x, y, z выполнено неравенство:

$$x^4 + y^4 + z^2 + 1 \geq 2x(xy^2 - x + z + 1)\,.$$

50*. Докажите, что

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} > \frac{9}{2}$$

51. $x, y \geq 0$. Докажите, что $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^8 \geq 64xy(x+y)^2$.

<u>Для преподавателей.</u> Существует масса более сложных неравенств на использование как идеи из ЛЕММЫ, так и неравенства из задачи 47 (см. например, [7], [8]). Если задачи такого рода не подходят по уровню сложности для Вашего кружка (факультатива), то следует лишь ознакомить школьников с основной идеей, продемонстрировав ее на двух-трех примерах.

4. Индукция в неравенствах

Часто в неравенстве либо участвует переменная, пробегающая натуральные значения, либо одно из конкретных чисел, задействованных в неравенстве, является лишь "прикрытием" подобной натуральной переменной (см. например, задачу 7; кстати, умение распознать такую спрятавшуюся переменную представляет один из необходимых аспектов работы с задачей). Такие "натуральные" неравенства часто решаются при помощи метода математической индукции. Разберем пример:

Задача 52. Докажите, что при $n \geq 3$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{3}{5}\,.$$

Решение: База: $n = 3$. Имеем $1/4 + 1/5 + 1/6 = 37/60 > 3/5$. Докажем индукционный переход от $n = k$ к $n = k + 1$:

$$\left(\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{2k+2}\right) =$$
$$= \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1}\right) >$$
$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k} > 3/5, \text{ ч.т.д.}$$

Вообще, один из наиболее часто употребляемых методов индуктивного доказательства неравенств таков: допустим, что нам даны две последовательности чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, причем известно, что

а) $a_1 \geq b_1$ (База);

б) $a_k - a_{k-1} \geq b_k - b_{k-1}$ при любом $k \leq n$ (Переход).

Тогда $a_n \geq b_n$.

Задача 53. n – натуральное число. Докажите, что

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}\,.$$

Задача 54. n – натуральное число. Докажите, что

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1)\,.$$

Задача 55. n – натуральное число. Докажите, что

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1\,.$$

Если вы попробуете решить задачу 55 по приведенной выше схеме, то потерпите сокрушительное поражение. Последовательность $a_n = 1/2^2 + 1/3^2 + \ldots + 1/n^2$ монотонно растет, а последовательность $b_n = 1$ не меняется. Утверждение пункта б) схемы просто неверно.

Что же делать? И вот здесь проявляется одно из удивительнейших свойств метода математической индукции. Оказывается, с его помощью часто бывает гораздо проще доказывать более трудное (так, во всяком случае, кажется) утверждение – или, как в нашем случае, более точное неравенство. Итак:

Решение: В качестве b_n выберем последовательность $(1 - 1/n)$.

База: $n = 2$. $1/2^2 < 1 - 1/2$ – все в порядке.

Индукционный переход (по схеме!): $a_k - a_{k-1} = 1/k^2$, $b_k - b_{k-1} = 1/k(k-1)$, т.е. $a_k - a_{k-1} < b_k - b_{k-1}$. Отсюда вывод: для любого натурального n имеем

$a_n < b_n = 1 - 1/n < 1$.

* * *

Задача 56. (Неравенство Бернулли). $x \geq 0$, n – натуральное число. Докажите, что $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Комментарий: У задачи, конечно, есть неиндукционное решение, несложное для тех, кто хорошо знаком с биномом Ньютона (см. статьи настоящей книги, посвященные комбинаторике). В самом деле,

$$(1+x)^n = 1 + \mathrm{C}_n^1 x + \underline{\mathrm{C}_n^2 x^2 + \ldots + \mathrm{C}_n^n x^n}\,,$$

причем все подчеркнутые слагаемые, безусловно, неотрицательны. Следовательно, $(1+x)^n \geq 1 + \mathrm{C}_n^1 x = 1 + nx$, ч.т.д.

Задачи такого типа доказываются методом математической индукции уже по другой схеме: а именно, если доказано, что

а) $a_1 \geq b_1$ (База);

б) $a_k/a_{k-1} \geq b_k/b_{k-1}$ при всех $k \leq n$ (Переход),

то $a_n \geq b_n$. Это опять очевидно следует из ММИ.

Задача 57. n – натуральное число. Докажите, что $n^n > (n+1)^{n-1}$.

Задача 58. n – натуральное число, $n \geq 4$. Докажите, что $n! \geq 2n$.

Задача 59. n – натуральное число. Докажите, что $2^n \geq 2n$.

Задача 60. При каких натуральных n выполняется неравенство $2^n \geq n^3$?

Разберем решение задачи 57. $a_n = n^n$, $b_n = (n+1)^{n-1}$. Проверяем первые значения $n = 1$, 2 и убеждаемся в том, что для них утверждение задачи верно – это база индукции. Чтобы доказать индукционный переход, достаточно показать, что

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}} \geq \frac{b_k}{b_{k-1}} = \frac{(k+1)^{k-1}}{k^{k-2}}$$

или, что то же, $k^{2k-2} \geq (k^2-1)^{k-1}$, т.е., $(k^2)^{k-1} \geq (k^2-1)^{k-1}$, ч.т.д.

Задачи для самостоятельного решения

61. Докажите, что для любого натурального n выполняется неравенство $3^n > n \cdot 2^n$.

62. Какое из чисел

$$2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}} \quad (10 \text{ двоек}) \quad \text{и} \quad 3^{3^{\cdot^{\cdot^{3}}}} \quad 9 \text{ троек}$$

больше? А если троек не 9, а 8?

63. Произведение положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равно 1. Докажите, что

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geq 2^n .$$

Замечание. У задачи 63 имеются и другие решения, помимо индуктивного.

64. Докажите неравенство Бернулли $(1+x)^n \geq 1+nx$, если известно лишь, что $x \geq -1$ и $n \geq 1$.

65. Сумма положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равна 1/2. Докажите, что

$$\frac{1-x_1}{1+x_1} \cdot \frac{1-x_2}{1+x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1-x_n}{1+x_n} \geq \frac{1}{3} .$$

<u>Для преподавателей.</u> В этом параграфе смыкаются две большие темы, каждой из которых необходимо посвятить не одно занятие. Это темы “Неравенства” и “Индукция”. Нужно отметить, что в теме “Индукция” раздел “Индукция в неравенствах” обычно усваивается школьниками лучше, чем другие (более абстрактные) разделы – особенно при четком выделении двух стандартных схем индуктивного доказательства неравенств (это же отмечается и в главе “Индукция”). Однако не надо этим злоупотреблять, хотя задач, подобных задачам 52–61, можно придумать почти произвольное количество. Почаще давайте ребятам задачи на нестандартные рассуждения, не требуйте от них обязательно индуктивного решения. Теме “Индукция в неравенствах” вполне можно посвятить отдельное занятие кружка (факультатива).

5. Неравенства на все вкусы

Задачи в этом параграфе даны подряд, без всякого упорядочения по идеям решения. Однако они примерно выстроены по их сложности и предназначены для самостоятельного решения.

66. Вокруг экватора натянули веревку. Затем ее удлинили на 1 см и опять натянули, приподняв в одном месте. Сможет ли человек пройти в образовавшийся зазор?

67. Представьте себе, что Землю “раскатали в колбаску” так, чтобы она достала до Солнца. Какой толщины будет эта “колбаска”? Постарайтесь ошибиться не более, чем в 10 раз.

68. Поместится ли все население Земли, все здания и сооружения на ней в куб с длиной ребра 3 километра?

69. Представьте себе, что вы стоите на Дворцовой набережной Невы. Как вам, используя только подручные средства и глазомер, оценить высоту шпиля на соборе Петропавловской крепости?

70. Докажите, что $100! < 50^{100}$.

71. n – натуральное число. Докажите, что $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} > 1/\sqrt{n}$.

72. $1 > x > y > 0$. Докажите, что $(x-y)/(1-xy) < 1$.

73. a, b, c, $d \geq 0$, причем $c + d \leq a$, $c + d \leq b$. Докажите, что $ad + bc \leq ab$.

74. Существует ли набор чисел, сумма которых равна 1, а сумма их квадратов меньше 0.01?

75. a, b, $c > 0$ и $abc = 1$. Известно, что $a + b + c > 1/a + 1/b + +1/c$. Докажите, что ровно одно из чисел a, b, c больше 1.

76. x, y – числа из отрезка [0;1]. Докажите неравенство

$$\frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} \leq 1\,.$$

77. a, b, c – натуральные числа и $1/a+1/b+1/c < 1$. Докажите, что $1/a+1/b+1/c \leq 41/42$.

78. x, y, z – положительные числа. Докажите неравенство

$$\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} \leq 2\,.$$

79. Докажите, что

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) > \frac{1}{2}\,.$$

80. Докажите, что для любого x выполнено неравенство $x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x + 2 \geq 0$.

81. Числа a, b, c, d – из отрезка [0;1]. Докажите, что

$$(a+b+c+d+1)^2 \geq 4(a^2+b^2+c^2+d^2)\,.$$

82. x, $y > 0$. Через S обозначим наименьшее из чисел x, $1/y$, $y + 1/x$. Какое максимальное значение может принимать величина S?

83*. a, b, c, d – положительные числа. Докажите, что по крайней мере одно из неравенств

1) $a + b < c + d$;
2) $(a+b)cd < ab(c+d)$;

3) $(a+b)(c+d) < ab+cd$

неверно.

84*. Докажите, что три неравенства

$$\frac{a_1b_2}{a_1+b_2} < \frac{a_2b_1}{a_2+b_1}, \quad \frac{a_2b_3}{a_2+b_3} < \frac{a_3b_2}{a_3+b_2}, \quad \frac{a_3b_1}{a_3+b_1} < \frac{a_1b_3}{a_1+b_3}$$

не могут быть все верны одновременно, если числа a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 положительны.

85*. Докажите, что если $x+y+z \geq xyz$, то $x^2+y^2+z^2 \geq xyz$.

ЗАДАЧНИК ВТОРОГО ГОДА

Отметим, что некоторые темы “первого года” получили свое развитие во второй части; другие же (“Четность”, “Принцип Дирихле”, “Игры”) – нет. Однако многие задачи по этим трем темам ввиду своей трудности не были включены в материалы первой части. Мы начинаем задачник второго года с восполнения этого пробела.

1. Четность

1. Докажите, что уравнение $1/a+1/b+1/c+1/d+1/e+1/f=1$ не имеет решений в нечетных натуральных числах.

2. На шахматной доске стоят 8 ладей, никакие две из которых не бьют друг друга. Докажите, что число ладей, стоящих на черных полях, четно.

3. Можно ли расставить по окружности 20 красных и несколько синих фишек так, чтобы в каждой точке, диаметрально противоположной красной фишке, стояла синяя, и никакие две синие фишки не стояли рядом?

4. На прямой даны точки A и B, а также 1001 точка вне отрезка AB, которые покрашены в красный и синий цвета. Докажите, что сумма расстояний от A до красных точек, сложенная с суммой расстояний от B до синих точек, отлична от суммы расстояний от B до красных точек, сложенной с суммой расстояний от A до синих точек.

5. Есть 10 пар карточек, на которых написаны числа: 0, 0, 1, 1, …, 8, 8, 9, 9. Докажите, что их нельзя выложить в ряд так, чтобы между любыми двумя карточками, на которых написаны одинаковые цифры n, лежало ровно n других карточек ($n = 0, 1, \ldots, 9$).

6. На окружности отмечено 20 точек, являющихся вершинами правильного 20-угольника, после чего они разбиты на 10 пар и в каждой паре точки соединены хордой. Докажите, что какие-то две хорды имеют одинаковую длину.

7. Квадрат размерами 6×6 покрыт без наложения костями домино размером 1×2. Докажите, что квадрат можно разрезать по вертикали или горизонтали, не повредив ни одной доминошки.

8. Улитка выползла из начала координат и поползла по плоскости с постоянной скоростью, поворачивая каждые полчаса на 60°. Докажите, что вернуться в начало координат она может только за целое число часов.

9*. Дано n магнитофонных лент, намотанных красными концами наружу и зелеными внутрь. При каких n можно их перемотать, пользуясь одной пустой катушкой так, чтобы они оказались на своих прежних местах зелеными концами наружу?

2. Принцип Дирихле

10. Прямая раскрашена в 11 цветов. Докажите, что найдутся две точки одного цвета на целом расстоянии.

11. На плоскости дано 7 прямых. Докажите, что какие-то две из них образуют угол, меньший $26°$.

12. Каждая клетка прямоугольной таблицы 5×41 покрашена в белый или черный цвет. Докажите, что можно выбрать 3 столбца и 3 строки, все 9 клеток пересечения которых покрашены в один цвет.

13*. Плоскость раскрашена а) в 2; б) в 3; в) в 100 цветов. Докажите, что найдется прямоугольник с вершинами одного цвета.

14. Шестеро друзей решили в воскресенье побывать в семи кинотеатрах, сеансы в которых начинаются в 9, 10, 11, ..., 19 часов. На каждый сеанс двое из них шли в один кинотеатр, остальные – в другой. Вечером выяснилось, что каждый из них посетил в этот день все семь кинотеатров. Докажите, что в каждом кинотеатре хотя бы на одном сеансе в этот день не был никто из друзей.

15. Какое наибольшее число пауков может находиться на ребрах куба, если паук терпит соседа на расстоянии, не меньшем а) 1 м; б) 1.1 м? Длина ребра куба – 1 м, расстояние измеряется вдоль ребер.

16. В каждом из двух одинаковых правильных 16-угольников отмечено по 7 вершин. Докажите, что можно так наложить эти многоугольники друг на друга, чтобы не менее 4 отмеченных вершин одного многоугольника совпали с отмеченными вершинами другого.

17. Докажите, что из любых 10 двузначных чисел можно выбрать две непересекающиеся группы с равными суммами.

18. На плоскости дано 25 точек. Известно, что из любых трех точек можно выбрать две, расстояние между которыми меньше 1. Докажите, что среди данных точек найдутся 13, лежащие в круге радиуса 1.

19. В прямоугольнике 3×4 отмечено 6 точек. Докажите, что расстояние между какими-то двумя из них не превосходит $\sqrt{5}$.

20. Множество A состоит из натуральных чисел, причем среди любых 100 идущих подряд натуральных чисел есть число из A. Докажите, что в A найдутся четыре различных числа a, b, c, d такие, что $a+b=c+d$.

21. Из листа клетчатой бумаги размером 29×29 клеток вырезали 99 квадратиков, каждый из которых состоит из 4 клеток. Докажите, что можно вырезать еще один такой же квадратик.

22. Клетчатый лист бумаги размером 10×10 покрыт 55 квадратиками, состоящими из 4 клеток. Докажите, что один из них можно убрать так, что оставшиеся будут по-прежнему покрывать всю доску.

23*. Шахматист играет не менее одной партии в день и не более 12 за календарную неделю. Докажите, что в течение года найдутся несколько идущих подряд дней, за которые он сыграл ровно 20 партий.

24. На отрезке длины 10 несколько меньших непересекающихся отрезков покрашены в красный цвет, причем никакие две красные точки не находятся на расстоянии 1. Докажите, что сумма длин закрашенных отрезков не превосходит 5.

25. В квадрате 1×1 дана 101 точка. Докажите, что какие-то три из них лежат в вершинах треугольника площади не большей 0.01.

26. В квадрат 1×1 поместили несколько кругов, сумма радиусов которых равна $3/5$. Докажите, что есть прямая, параллельная стороне квадрата, которая пересекает не менее двух кругов.

27. В окружности радиуса 1 проведено несколько хорд так, что любой диаметр пересекает не более четырех из них. Докажите, что сумма длин хорд не превосходит 13.

28*. На квадратном столе лежат 100 механических часов. Докажите, что в некоторый момент времени сумма расстояний от центра стола до центров часов будет меньше, чем сумма расстояний от центра стола до концов минутных стрелок.

3. Игры

Во всех задачах этого параграфа предполагается, что играют двое, и ходы делаются по очереди. Если явно не оговорено противное, требуется выяснить, кто побеждает: начинающий или его партнер?

29. В каждом из первых (слева) трех полей полоски 1×20 стоит по фишке. За ход разрешается передвинуть любую фишку на произвольное свободное поле справа от нее, не перенося ее через другие фишки. Проигрывает тот, кто не может сделать хода.

30. В каждом из первых (слева) трех полей полоски 1×20 стоит по фишке. За ход разрешается либо передвинуть любую фишку в соседнюю справа клетку, если она не занята, либо, если эта клетка занята, но следующая за ней свободна, переставить фишку в эту свободную клетку. Проигрывает тот, кто не может сделать хода.

31. На доске написано число 1234. Ход состоит в том, чтобы вычесть из числа какую-либо его ненулевую цифру, и написать полученное число вместо старого. Выигрывает тот, кто получит 0.

32. В ряд выписаны числа от 1 до 100. За ход разрешается вставить между любыми двумя числами один из знаков "+", "−", "×" (игроки сами выбирают, на какое из свободных мест поставить очередной знак). Начинающий выигрывает, если значение получившегося выражения нечетно, и проигрывает в противном случае.

33. В ряд выписаны числа 1, 2, 3, ..., 20, 21. За ход разрешается вычеркнуть любое из еще невычеркнутых чисел. Игра продолжается до тех пор, пока не останется два числа. Если сумма этих чисел делится на 5, то выигрывает начинающий, в противном случае – его партнер.

34. Дана доска размером а) 10×10; б) 9×9. За ход разрешается поставить в любую незанятую клетку крестик или нолик (игрок сам решает, что ставить). Выигравшим считается игрок, после хода которого на доске окажутся три одинаковых знака в ряд (по горизонтали, вертикали или диагонали).

35. На столе есть две кучки конфет: в первой – 22 конфеты, во второй – 23. За ход можно либо съесть две конфеты из одной кучки, либо переложить одну конфету из первой кучки во вторую. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

36. Начинающий пишет на доске одну из цифр 6, 7, 8, 9. Каждый следующий ход состоит в дописывании одной из этих цифр к уже имеющемуся числу. Игра заканчивается после а) 10-го; б) 12-го хода. Может ли начинающий добиться того, чтобы получившееся число не делилось на 9?

37. Двое играют в крестики-нолики на бесконечном листе клетчатой бумаги. Начинающий ставит крестик в любую клетку. Каждым следующим ходом он должен ставить крестик в любую свободную клетку, соседнюю с одной из клеток, где уже стоит крестик; соседними называются клетки, имеющие хотя бы одну общую вершину. Второй играющий любым своим ходом может ставить сразу три нолика в любые три свободные клетки (не обязательно рядом с друг другом). Докажите, что как бы ни играл начинающий, второй игрок может его запереть: добиться того, чтобы начинающему некуда было поставить крестик.

38. В куче – 1001 спичка. За ход можно выкинуть из кучи спички в количестве p^n штук (где p – любое простое число, $n = 0, 1, 2, \ldots$). Выигрывает тот, кто берет последнюю спичку.

39. Из доски торчит 1991 гвоздь. За ход разрешается соединить проводом любые два не соединенных еще гвоздя. Если в результате хода цепь замкнулась, то сделавший этот ход считается а) проигравшим; б) выигравшим.

40. Ход состоит в закрашивании одной или нескольких клеток, образующих квадрат, на доске размером а) 19×91; б) 19×92. Закрашивать клетки дважды запрещается. Выигрывает тот, кто закрашивает последнюю клетку.

41*. Имеется лист клетчатой бумаги размером 30×45. За один ход производится разрез по линии, соединяющей два соседних узла сетки. Первый игрок начинает резать от края листа. Каждый следующий разрез должен продолжать линию, образованную предыдущими разрезами. Выигрывает игрок, после хода которого лист распадается на два куска.

42*. Король за ход может поставить по крестику в любые две свободные клетки бесконечного листа бумаги. Министр за ход может поставить нолик в любую свободную клетку. Может ли король поставить 100 крестиков в ряд?

4. Задачи на конструкцию

43. Путешественник прибыл в гостиницу, имея золотую цепочку из 7 звеньев. Хозяин требует с него плату за проживание – одно звено ежедневно. Какое минимальное число звеньев надо распилить путешественнику, чтобы каждый день платить хозяину гостиницы требуемое количество золота?

44. Можно ли выписать в ряд 10 чисел так, чтобы сумма любых пяти чисел подряд была бы положительна, а сумма любых семи подряд – отрицательна?

45. Найдите 10-значное число, первая цифра которого равна количеству нулей в записи этого числа, вторая цифра равна количеству единиц в записи и т.д., а десятая цифра равна количеству девяток в записи.

46. Али-Баба хочет проникнуть в Сезам. Перед входом в пещеру установлен барабан с 4 отверстиями, внутри каждого из которых находится кувшин с селедкой внутри. Селедка может лежать в кувшине либо хвостом вверх, либо хвостом вниз. Али-Баба может засунуть руки в любые два отверстия и, ощупав селедки, положить их там произвольным образом. После этого барабан приходит во вращение и, после того, как он остановится, Али-Баба не может определить, в какие отверстия он засовывал руки до этого. Сезам откроется в тот момент, когда все 4 селедки будут расположены одинаково. Как надо действовать Али-Бабе?

47. Как раскрасить лист клетчатой бумаги в 5 цветов так, чтобы внутри любой фигуры типа A (см. рис.111) клетки были окрашены во все 5 цветов, а внутри любой фигуры типа B – не во все?

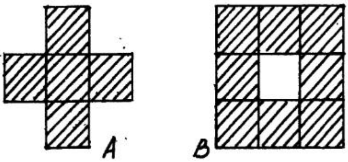


Рис. 111

48. Нарисуйте фигуру, которой нельзя покрыть полукруг радиуса 1, но двумя экземплярами которой можно покрыть круг радиуса 1.

49. Отметьте на плоскости 6 точек так, чтобы любые три из них лежали в вершинах равнобедренного треугольника.

50. Нарисуйте на плоскости 11 неперекрывающихся квадратов так, чтобы их нельзя было правильно раскрасить в 3 цвета. Правильной называется раскраска, при которой любые две фигуры, имеющие общую часть границы, окрашены в разные цвета.

51. Покройте плоскость неперекрывающимися квадратами, среди которых всего два одинаковых.

52. Постройте многоугольник и точку на плоскости такие, чтобы ни одна сторона многоугольника не была целиком видна из этой точки, если а) точка находится внутри многоугольника; б) точка находится вне многоугольника.

53*. Отметьте на плоскости 7 точек таких, что среди любых трех из них найдутся две на расстоянии 1.

5. Геометрия

Цикл 1. Геометрические неравенства

В главе "Геометрия" мы уже познакомили читателя с некоторыми задачами на доказательство геометрических неравенств. В данном цикле собрано несколько более трудных и нестандартных задач на эту тему.

54. Докажите, что круги, основанные на двух сторонах треугольника, как на диаметрах, покрывают весь треугольник.

55. Докажите, что круги, основанные на сторонах выпуклого четырехугольника, как на диаметрах, покрывают весь четырехугольник.

56. Докажите, что у выпуклого многоугольника не может быть более трех острых углов.

57. Докажите, что в любом выпуклом многоугольнике сумма любых двух углов больше, чем разность любых двух других углов.

58. На плоскости дан круг радиуса 1 и пять прямых, пересекающих его. Про точку X известно, что она находится на расстоянии 11.1 от центра круга. Докажите, что если последовательно отразить точку X относительно всех пяти прямых, то полученная точка не может находиться внутри данного круга.

59. Астроном наблюдает 50 звезд, сумма попарных расстояний между которыми равна S. Набежавшее облако заслонило 25 звезд. Докажите, что сумма попарных расстояний между видимыми звездами меньше, чем $S/2$.

60. Квадрат 1×1 разрезан на несколько прямоугольников. Для каждого из них вычисляется отношение меньшей стороны к большей. Докажите, что сумма этих чисел не превосходит 1.

61. Вершины треугольника ABC находятся в узлах сетки листа клетчатой бумаги с длиной стороны клетки 1. Известно, что $|AB| > |AC|$. Докажите, что $|AB| - |AC| > 1/p$, где p – периметр треугольника ABC.

Цикл 2. Комбинаторная геометрия

Здесь собраны задачи, относящиеся к так называемой "комбинаторной геометрии". Этот раздел геометрии изучает различные комбинаторные свойства расположений на плоскости (и в пространстве) геометрических фигур: точек, прямых, многоугольников и т.д. В этот же раздел обычно включают и изучение свойств выпуклости.

62. На отрезке AB отмечено 200 точек так, что весь набор симметричен относительно середины отрезка. Сто точек покрашено в синий, а остальные – в красный цвет. Докажите, что сумма расстояний от A до красных точек равна сумме расстояний от B до синих точек.

63. На плоскости дано 5 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что какие-то четыре из них лежат в вершинах выпуклого четырехугольника.

64. Квадрат 2×2 разрезан на несколько прямоугольников. Докажите, что мы можем заштриховать несколько из них так, чтобы проекция заштрихованной фигуры на одну сторону квадрата имела длину не меньше 1, а на другую – не больше 1.

65. Шесть пятаков лежат на столе, образуя замкнутую цепочку. Седьмой пятак прокатывается по внешней стороне цепочки без скольжения, касаясь по очереди всех пятаков цепочки. Сколько оборотов он сделает, вернувшись в исходное положение?

66. В пространстве дана 8-звенная замкнутая ломаная, вершины которой совпадают с вершинами некоторого куба. Докажите, что одно из звеньев ломаной совпадает с ребром куба.

67*. На прямой дано несколько отрезков, причем любые два из них пересекаются. Докажите, что есть точка, принадлежащая всем отрезкам.

68. Несколько отрезков покрывают отрезок $[0;1]$. Докажите, что из них можно выбрать несколько непересекающихся отрезков, сумма длин которых не меньше $1/2$.

69*. В отрезке находится несколько меньших отрезков, покрывающих его. Докажите, что левые половины этих отрезков покрывают не менее половины длины исходного отрезка.

6. Целые числа

70. Найдите все натуральные числа, равные сумме факториалов своих цифр.

71. Число $\overline{abc}$ – простое. Докажите, что $b^2 - 4ac$ не является квадратом.

72. Четвертая степень некоторого натурального числа записывается цифрами 0, 1, 4, 6, 7, 9 в некотором порядке. Найдите это число.

73. Каково минимальное целое число вида $111\ldots11$, делящееся на $333\ldots33$ (100 троек)?

74. Докажите, что среди любых 39 последовательных натуральных чисел найдется одно, сумма цифр которого делится на 11.

75. Существуют ли два различных семизначных числа, каждое из которых записано цифрами $1, 2, \ldots, 7$ без повторений, таких, что одно из них делится на другое?

76. Разность чисел $\overline{abcdef}$ и $\overline{fdebca}$ делится на 271. Докажите, что $b = d$ и $c = e$.

77. Существуют ли двузначные числа, квадрат которых оканчивается на те же цифры, которыми записано исходное число, но в обратном порядке?

78. Целые числа A, B и C таковы, что $Ax^2 + Bx + C$ делится на 5 при любом целом x. Докажите, что A, B и C делятся на 5.

79. Найдите все натуральные n такие, что число $n^n + 1$ имеет не более 19 цифр и является простым.

80* Натуральное число y получено из числа x перестановкой цифр. Известно, что $x + y = 10^{200}$. Докажите, что x делится на 50.

81* Докажите, что число вида $\overline{a000\ldots00b}$ не может быть точным квадратом.

7. Задачи на оптимизацию

Цикл 1. Принцип крайнего

Основной идеей решения задач этого цикла является рассмотрение самого "крайнего" в каком-либо смысле объекта: самого большого числа, пары наиболее удаленных точек, наименьшего угла и т.д.

82. а) В вершинах 100-угольника расставлены числа так, что каждое есть среднее арифметическое своих соседей. Докажите, что все эти числа равны между собой.

б) Докажите то же, если числа расставлены в клетках шахматной доски, причем каждое число не превосходит среднего арифметического своих соседей.

Разберем решение задачи 82а. Рассмотрим самое маленькое число. Очевидно, что соседние с ним числа должны совпадать с ним, а значит, и соседние с ними должны быть такими же, и т.д.

83. Докажите, что для любых 10 точек на плоскости найдутся пять непересекающихся отрезков, концы которых совпадают с данными точками.

84. Можно ли выбрать на плоскости несколько отрезков так, чтобы любая точка, являющаяся концом одного из них, лежала внутри какого-то другого отрезка?

85. Безрукий вор хочет столкнуть носом какую-нибудь монету со стола менялы, не задев ею других монет. Удастся ли ему это?

86. а) На столе лежат монеты одинакового радиуса. Докажите, что есть монета, касающаяся не более чем трех других монет.

б) В случае монет разных радиусов докажите, что есть монета, касающаяся не более чем пяти других.

87. В некотором государстве расположено несколько аэродромов, все расстояния между которыми различны. С каждого аэродрома взлетает самолет и летит на ближайший аэродром. Докажите, что на любом аэродроме приземлится не более пяти самолетов.

88. В космическом пространстве летает 1991 астероидов, на каждом из которых сидит астроном, причем все расстояния между астероидами различны. Каждый астроном наблюдает за ближайшим астероидом. Докажите, что за одним из астероидов никто не наблюдает.

Цикл 2. Полуинвариант

Идея "полуинварианта" естественным образом продолжает идею инварианта. Под полуинвариантом понимается величина, которая в процессе преобразований изменяется монотонно, т.е. увеличивается или уменьшается. Типичный пример полуинварианта: возраст человека, который может только увеличиваться с течением времени.

89. Сумасшедший путешественник едет из родного города A в самый удаленный от него город B. Затем оттуда он едет в самый удаленный от B город C, который оказывается отличным от A, и так далее. Докажите, что он никогда не вернется в A.

90. В ряд выложены 100 монет: орел, решка, орел, решка, ... За один ход разрешается перевернуть несколько подряд лежащих монет. За какое минимальное количество ходов можно добиться того, чтобы все монеты лежали орлом вверх?

91. В колонию из 1984 бактерий попадает вирус. Каждую секунду каждый вирус уничтожает одну бактерию, после чего все бактерии и все вирусы делятся надвое. Докажите, что рано или поздно все бактерии будут уничтожены, и выясните, в какой момент это произойдет?

92. В клетках прямоугольной таблицы расставлены вещественные числа. Разрешается одним ходом сменить знак у всех чисел, стоящих в любой строке или в любом столбце. Докажите, что такими операциями можно добиться того, чтобы сумма чисел в таблице была неотрицательна.

93*. В графе с n вершинами степень каждой вершины не превосходит пяти. Докажите, что вершины можно раскрасить в три цвета так, что ребер с одноцветными концами будет не более $n/2$.

94*. По окружности расставлены вещественные числа. Если четыре последовательно стоящих числа a, b, c и d таковы, что $(a-d)(b-c)>0$, то числа b и c

разрешается поменять местами. Докажите, что такие перестановки мы сможем выполнять лишь конечное число раз.

8. Дискретная непрерывность

В этом параграфе собраны задачи, решение которых основано на очень простом соображении, которое можно наглядно продемонстрировать следующим образом. Пусть блоха прыгает по целым числам, каждый раз перепрыгивая на соседнее число. Тогда, если исходно она находилась на отрицательном числе, а в конце – на положительном, то в какой-то момент блоха побывала в нуле.

95. На плоскости дано 100 точек. Докажите, что есть прямая, по обе стороны от которой лежит по 50 точек данного набора.

Разберем решение задачи 95. Рассмотрим всевозможные прямые, проходящие через пары точек нашего 100-элементного множества. Проведем любую прямую, не параллельную ни одной из них, и такую, что все 100 точек лежат по одну сторону от нее. Начнем параллельно самой себе двигать ее к этим точкам и следить за тем, как изменяется количество точек за прямой. Очевидно, что в какой-то момент оно станет равно 50. Это и есть нужная нам прямая.

96. В ряд выложено 100 черных и 100 красных шаров, причем самый левый и самый правый шары – черные. Докажите, что можно выбрать слева подряд несколько шаров (но не все!) так, что среди них количество красных равно количеству синих.

97. Матч "Зенит"–"Ювентус" окончился со счетом 8:5. Докажите, что в матче был такой момент, когда "Зениту" оставалось забить столько мячей, сколько "Ювентус" уже забил к этому времени.

98. Докажите, что в шестизначном числе цифры можно переставить так, чтобы разность между суммой трех первых и трех последних цифр находилась бы в промежутке от 0 до 9.

99. В клетках доски 8×8 расставлены $+1$ и -1, причем так, что сумма всех чисел равна нулю. Докажите, что доску можно разрезать на два куска так, что сумма чисел в каждом из кусков равна нулю.

100. Грани восьми единичных кубиков окрашены в черный и белый цвета так, что черных и белых граней поровну. Докажите, что из этих кубиков можно сложить куб $2 \times 2 \times 2$, на поверхности которого черных и белых квадратиков поровну.

101. В некоторых клетках квадрата 50×50 стоят $+1$ и -1, причем абсолютная величина суммы всех чисел не больше 100. Докажите, что есть квадрат 25×25, абсолютная величина суммы чисел в котором не превосходит 25.

102*. Последовательность (a_n) такова, что $a_1 = 1$, и $a_{n+1} - a_n$ равно 0 или 1 при любом n. Известно, что $a_n = n/1000$ для некоторого n. Докажите, что $a_m = m/500$ для некоторого m.

9. Исследовательские задачи

В этом параграфе собрано несколько так называемых "исследовательских" задач, суть которых состоит в последовательном решении цепочки нетрудных лемм, складывающихся в доказательство довольно трудной теоремы. Такие задачи очень полезно использовать в качестве домашнего задания, а по некоторым из них даже можно проводить отдельные занятия.

103. Правильный треугольник на клетчатой бумаге.

а) Докажите, что у всякого треугольника с вершинами в узлах клетчатой бумаги удвоенная площадь есть целое число.

б) Вычислите высоту равностороннего треугольника со стороной a и найдите его площадь.

в) Докажите, что квадрат длины отрезка с вершинами в узлах клетчатой бумаги – целое число.

г) Докажите, что если существует равносторонний треугольник с вершинами в узлах, то $\sqrt{3}$ является отношением двух натуральных чисел.

д) Докажите, что если квадрат несократимой дроби – целое число, то знаменатель этой дроби равен единице.

е) Докажите, что нельзя расположить равносторонний треугольник на клетчатой бумаге так, чтобы его вершины лежали в узлах.

104. Формула Пика. Докажите, что площадь многоугольника, вершины которого лежат в узлах клетчатой бумаги, равна $a + b/2 - 1$, где a – число узлов, лежащих внутри многоугольника, b – число узлов на его сторонах.

а) Проверьте формулу Пика для прямоугольника со сторонами, идущими по линиям сетки.

б) Проверьте формулу Пика для прямоугольного треугольника с катетами, идущими по линиям сетки.

в) Докажите формулу Пика для многоугольника, составленного из двух многоугольников, для которых формула Пика уже доказана.

г) Пусть многоугольник, для которого формула Пика уже проверена, составлен из двух многоугольников. Докажите, что если формула Пика выполняется для одного из этих двух многоугольников, то она выполняется и для другого.

д) Докажите, что для любого треугольника с вершинами в узлах сетки формула Пика верна.

е)*Докажите, что любой многоугольник можно разбить диагоналями на треугольники (см. задачу 31 главы “Индукция”).

ж) Докажите формулу Пика в общем случае.

105. Теорема Бойяи-Гервина. Докажите, что любые два равновеликих многоугольника равносоставлены, т.е. один из них можно разбить на части, из которых можно составить другой.

а) Докажите, что параллелограммы с общим основанием и равными высотами равносоставлены.

б) Докажите, что если многоугольники P_1 и P_2 равносоставлены, а также равносоставлены многоугольники P_2 и P_3, то и многоугольники P_1 и P_3 равносоставлены.

в) Докажите, что два равновеликих параллелограмма равносоставлены.

г) Докажите, что любой треугольник равносоставлен с некоторым параллелограммом.

д) Докажите, что любой треугольник равносоставлен с прямоугольником, одна из сторон которого имеет длину 1.

е) Докажите теорему Бойяи-Гервина.

106. Делимость чисел Фибоначчи.

а) Докажите для любых натуральных m и n индукцией по n формулу:

$$F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1} .$$

б) Докажите, что F_{km} делится на F_m (индукция по k).

в) Докажите, что если n делится на $m > 2$, то F_n – составное.

г) Докажите, что у любого составного числа, не равного 4, есть собственный делитель, больший 2.

д) Докажите, что если число F_n – простое, то либо $n = 4$, либо n – простое число.

107. Теорема Хелли. На плоскости дано несколько выпуклых множеств, любые три из которых имеют общую точку. Докажите, что все эти множества имеют общую точку.

а) На плоскости отмечено четыре точки, помеченные наборами цифр 123, 124, 234 и 134. Разрешается соединять любые две точки, помеченные какими-либо цифрами, и помечать все точки этого отрезка всеми цифрами, которыми одновременно помечены оба его конца. Докажите, что так можно построить точку, которая будет помечена всеми четырьмя цифрами.

б) Докажите, что пересечение выпуклых множеств выпукло.

в) Докажите теорему Хелли для четырех множеств A_1, A_2, A_3 и A_4: помните, что у любых трех из них есть общая точка.

г) Докажите теорему Хелли в общем случае индукцией по количеству выпуклых множеств.

10. Смесь

108. Клетки доски 9×9 окрашены в два цвета. Разрешается в любом прямоугольнике 3×1 перекрасить все клетки в тот цвет, который превалировал в нем ранее. Докажите, что при помощи таких операций можно добиться того, чтобы вся доска была окрашена в один цвет.

109. Могут ли 6 попарных разностей между 4 числами быть равны 2, 2, 3, 4, 5, 6?

110. В поселке 1970 жителей. Ежедневно некоторые из них меняют друг у друга гривенник на два пятака. Может ли так оказаться, что в течение недели каждый из жителей поселка отдал при обменах ровно 10 монет?

111. Петя, Коля и Вася решали задачи из задачника и решили вместе 100 задач, при этом каждый из них решил ровно 60 задач. Будем называть задачу, которую решили все трое, "легкой", а задачу, которую решил только один из них, – "трудной". Докажите, что "трудных" задач ровно на 20 больше, чем "легких".

112. Известно, что квадрат числа x имеет десятичную запись вида: $0.999\ldots99\ldots$ (после запятой 100 девяток). Докажите, что и само число x имеет десятичную запись такого типа.

113. На доске 100×100 стоят 49 ладей, и в левом нижнем углу стоит король. Король идет в правый верхний угол доски, и после каждого его хода одна из ладей также делает ход. Докажите, что в какой-то момент король окажется под боем одной из ладей.

114. В дроби $0,1234567891011\ldots$ после запятой подряд выписаны все натуральные числа. Является ли эта дробь периодической?

115. Трое игроков играют в настольный теннис, причем тот, кто не принимает участия в данной партии, в следующей игре играет с победителем. В результате первый игрок сыграл 10 партий, второй – 21. Сколько партий сыграл третий игрок?

116. Про числа x и y известно, что $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 10$. Докажите неравенство: $x - 2y < 200$.

117. В таблице 10×10 все клетки левой половины доски окрашены в черный цвет, остальные – в белый. Разрешается за ход менять цвет всех клеток в любой строке и в любом столбце. Можно ли при помощи нескольких таких операций добиться шахматной раскраски?

118. Набор детской железной дороги состоит из участков полотна двух типов (см. рис.112), причем из них можно сложить замкнутую железную дорогу так, что направление движения поезда будет совпадать со всеми направлениями стрелок. Один из участков типа A был потерян и его заменили на участок типа B. Докажите, что теперь сложить такую же замкнутую дорогу не удастся.

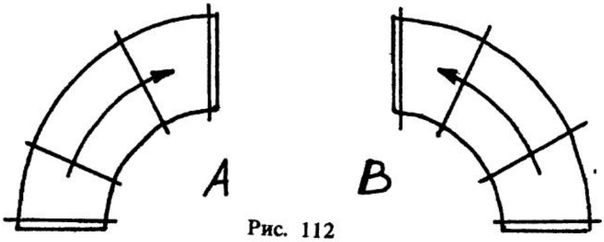


Рис. 112

119. Город представляет собой выпуклый многоугольник, диагонали которого – улицы, а точки пересечения диагоналей и вершины – перекрестки. По некоторым улицам проложены трамвайные линии. Известно, что через любой перекресток проходит не менее одной такой линии. Докажите, что от любого перекрестка до любого другого можно добраться, сделав не более двух пересадок.

120. В трех деревнях живет соответственно 100, 200 и 300 школьников. В каком месте надо строить школу, чтобы суммарное расстояние, проходимое детьми, было минимально?

121. Можно ли разрезать выпуклый 17-угольник на 14 треугольников?

122. В трех вершинах квадрата сидят три кузнечика. Они начинают играть в чехарду, перепрыгивая друг через друга, причем на то же расстояние, которое разделяло их до прыжка. Может ли один из кузнечиков оказаться в четвертой вершине квадрата?

123. На арене цирка в ряд выстроено 25 слонов, каждый из которых весит целое число килограммов. Известно, что если к весу каждого слона (кроме самого правого) прибавить половину веса его соседа справа, то получится ровно 6 тонн. Сколько весит каждый слон?

124. Из угла биллиардного стола размерами 101×200 по биссектрисе этого угла выкатывается шар и двигается далее, отражаясь от сторон биллиарда. Попадет ли он когда-нибудь вновь в какой-то угол?

125. В выпуклом 13-угольнике проведены все диагонали, которые делят его на несколько частей. Какое наибольшее число сторон может иметь такая часть?

126. Докажите, что при любом натуральном $n > 1$ число $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \ldots + 1/n$ не является целым.

127. Какой наибольший радиус может иметь окружность, расположенная на шахматной доске так, что она проходит лишь по черным полям?

128. Есть розетка, по краю которой равномерно проделаны 6 отверстий, и аналогичный штепсель. Отверстия в розетке как-то занумерованы числами от 1 до 6, и то же самое сделано со штырями штепселя. Докажите, что штепсель можно воткнуть в розетку так, что ни один штырь не войдет в дырку с тем же номером, что и он сам, если штырей и отверстий семь?

129. Два натуральных числа m и n имеют своими делителями числа $a_1, \ldots, a_p$ и $b_1, \ldots, b_q$ соответственно, причем известно, что

$$a_1 + \ldots + a_p = b_1 + \ldots + b_q$$
$$\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_p} = \frac{1}{b_1} + \ldots + \frac{1}{b_q}$$

Докажите, что $m = n$.

130. Имеется неограниченный запас монет достоинством 1 коп., 2 коп., 5 коп., 10 коп., 20 коп., 50 коп. и 1 рубль. Известно, что сумму в A копеек можно разменять при помощи B таких монет. Докажите, что сумму в B рублей можно разменять при помощи A таких монет.

131. Можно ли расставить по окружности 100 последовательных натуральных чисел так, чтобы произведение любых двух соседних было бы точным квадратом?

132. За круглым столом сидят n физиков и n химиков, причем некоторые из них всегда лгут, а остальные всегда говорят только правду. Известно также, что

15 Зак. 2413.

число физиков-лжецов равно количеству химиков-лжецов. Каждый из сидящих за столом произносит: “Мой сосед справа – химик”. Докажите, что n четно.

133. Натуральные числа a и b таковы, что $a^2 + ab + 1$ делится на $b^2 + ba + 1$. Докажите, что $a = b$.

134. Каждому из двух гениальных математиков сообщили по натуральному числу, причем им известно, что эти числа отличаются на единицу. Они поочередно спрашивают друг друга: “Известно ли тебе мое число?” Докажите, что рано или поздно кто-то из них ответит на вопрос утвердительно.

135. По окружности выписано 100 целых чисел, сумма которых равна 1. Назовем цепочкой набор из нескольких подряд стоящих чисел. Сколько цепочек, сумма чисел в которых положительна?

136. В шахматном турнире каждый из шахматистов набрал ровно половину своих очков во встречах с участниками, занявшими три последних места. Сколько человек принимало участие в турнире?

137. Про числа a, b, c известно, что $a+b+c = 7$ и $1/(a+b)+1/(b+c)+1/(c+a) = 7/10$. Найти значение выражения $a/(b+c) + b/(a+c) + c/(a+b)$.

138*. В 120-квартирном доме живут 119 человек. Квартира называется перенаселенной, если в ней живет не менее 15 человек. Каждый день жильцы одной из перенаселенных квартир ссорятся и разъезжаются по разным квартирам. Верно ли, что переезды рано или поздно прекратятся?

139*. На кольцевой автотрассе стоит несколько машин, в баках которых находится количество бензина, достаточное для того, чтобы объехать всю трассу. Докажите, что одна из машин может объехать трассу, забирая по дороге бензин у других машин.

140*. Последовательность 1, 9, 8, 2, ... такова, что каждый ее член, начиная с пятого, равен последней цифре суммы четырех предыдущих членов. Встретится ли когда-нибудь в этой последовательности четверка подряд идущих членов 3, 0, 4, 4?

141*. В куче лежат 25 камней. Ее делят на две части, затем одну из частей опять делят надвое и т.д., до тех пор, пока не получат 25 отдельно лежащих камней. При каждом делении одной из куч на две части на доску записывается произведение количеств камней в этих частях. Докажите, что в конце сумма всех чисел на доске будет равна 300.

142*. В деревне Мартышкино у каждого мальчика все знакомые с ним девочки знакомы между собой. У каждой девочки среди ее знакомых мальчиков больше, чем девочек. Докажите, что в Мартышкино мальчиков живет не меньше, чем девочек.

143*. Улитка ползет по прямой на протяжении 6 минут, при этом за ней наблюдают несколько человек. Каждый из них наблюдал за ней ровно минуту, и за эту минуту улитка проползла ровно 1 метр. Известно, что в любой момент времени на протяжении этих 6 минут за улиткой наблюдал хотя бы один человек. Какое наибольшее расстояние она могла проползти за это время?

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СОРЕВНОВАНИЯ

1. Введение

"Всех путников, проходивших мимо, заставлял Сфинкс отгадывать свою загадку, но никто не мог этого сделать, и все гибли мучительной смертью ... Пришел Эдип к Сфинксу; тот предложил ему свою загадку:

— Скажи мне, кто ходит утром на четырех ногах, днем – на двух, а вечером на трех? Никто из всех существ, живущих на земле, не изменяется так, как он. Когда ходит он на четырех ногах, тогда меньше у него сил и медленнее двигается он, чем в другое время."

Н.А.Кун "Легенды и мифы Древней Греции"

Судя по всему, загадка, которую предложил Эдипу Сфинкс, была первой олимпиадной задачей в полном смысле слова. К счастью, соревнование между этими античными персонажами закончилось для Эдипа благополучно.

Современные математические соревнования не требуют человеческих жертв, и многие школьники с удовольствием принимают в них участие. Некоторые увлекаются ими настолько, что становятся настоящими профессионалами на арене этих уникальных испытаний, совмещающих в себе математику, спорт и тест на психологическую устойчивость. Мы надеемся, что и Вам, уважаемый читатель, понравятся те соревнования, о которых пойдет речь в этом приложении.

* * *

<u>Для преподавателей.</u> 1. Помните, что школьники, особенно в младших классах, очень любят превращать серьезное дело в игру, в спортивное развлечение. На первых порах это вполне приемлемо и может использоваться как один из путей для знакомства ребят с новой для них математикой. Однако это ни в коем случае не должно превратиться в основное направление деятельности кружка, иначе он превратится в аттракцион.

2. Материал для соревнований вполне можно почерпнуть в других главах этой книги. Впрочем, есть множество других хороших книг, из которых можно брать задачи для олимпиад, матбоев, матдрак и т.д. – большинство из них указано в списке литературы. Много несложных задач по элементарной математике и на сообразительность собрано в книге [44].

2. Математический бой

Матбой – одно из самых популярных в Ленинграде математических соревнований. Он был изобретен в середине 60-х годов учителем математики ленинградской школы № 30 Иосифом Яковлевичем Веребейчиком. Это командное соревнование, замечательным образом сочетающее в себе математику, спорт и театральное действо.

Изложим вкратце правила матбоя. Каждая из двух команд получает список задач, подготовленный жюри (задачи, естественно, у команд одни и те же). Через некоторое время, отведенное для решения этих задач, команды собираются в одном месте (с доской и мелом) и, наконец, начинается собственно матбой.

Сначала, при помощи конкурса капитанов, определяется очередность выступления команд. Капитанам одновременно задается какой-либо простой вопрос, на который они должны тут же, у доски, ответить. Например: Является ли число 7999 простым? или: Можно ли сцепить 7 резиновых колец так, чтобы каждое было сцеплено ровно с тремя другими?

Как только один из капитанов дает ответ, конкурс заканчивается – если ответ правильный, то команда, давшая его, побеждает, если ответ неверен, автоматически побеждает в конкурсе другая команда.

Победившая команда определяет, какая из команд первой будет "вызывать" соперников, после чего должен последовать вызов на одну из задач списка.

Вызванная команда может принять вызов и выставить одного из своих членов как отвечающего решение этой задачи – тогда вызвавшая команда посылает к доске оппонента, который должен проверять решение. Если же задача не решена, то капитан сообщает об отказе рассказывать решение. В этом случае происходит так называемая "проверка корректности вызова". Решение должна рассказывать вызвавшая команда, вызванная же команда выставляет оппонента.

Во всех случаях, кроме одного: при проверке корректности вызвавшая команда не смогла изложить правильное решение (а на матбое за отсутствием ошибок следит не только оппонент, но и жюри) – право на вызов переходит к другой команде. Если же вызов оказался "некорректным", команда, сделавшая его, наказывается определенным штрафом и должна повторить вызов (уже, конечно, на другую задачу).

После того, как обсуждение задачи закончилось, жюри распределяет очки, исходя из того, что каждая задача стоит 12 очков. Какую-то долю очков может получить и оппонент, даже если решение отвечающего было верным; оппонент мог найти пробелы в решении, которые затем были исправлены отвечающим. В том случае, когда обнаруженная оппонентом ошибка не была исправлена за некоторое ограниченное время (например, за 1 минуту) и была признана жюри достаточно серьезной, ответ прерывается, и жюри может заслушать оппонента, после чего принять решение о распределении очков.

Если одна из команд отказывается от права на вызов, то другая команда может рассказать решения всех еще не разобранных задач, решенных этой командой (все это происходит с участием оппонента).

Существует также еще масса мелких правил и ограничений, которые "наслоились" за 25 лет существования матбоев, однако основная схема уже изложена выше. Среди таких правил есть, например, следующие:

1) штраф за "некорректный" вызов равен 6 очкам;

2) каждый из участников боя может выходить к доске (не считая конкурса капитанов) не более X раз – значение X сообщается командам при выдаче задач. Обычно $X = 2$ или 3.

3) вести переговоры с жюри может лишь капитан или его временный заместитель.

* * *

Последний и главный закон матбоя: в любой ситуации последнее слово – за жюри; оно является одновременно и высшим законодательным органом и верховным судом матбоя.

* * *

Более подробные варианты правил матбоя Вы можете прочитать в журнале "Квант" № 10 за 1972 год или в журнале "Математика в школе" № 4 за 1990 год.

Для правильного ведения матбоя необходим определенный опыт и знание стандартных приемов – так, например, чрезвычайно стандартным (как в шахматах ходы $e2$–$e4$, $d2$–$d4$) является вызов противника на самую трудную из решенных самой командой задач. Полезным является проведение легких тренировочных матбоев. Стоит упомянуть, что популярность матбоев в Ленинграде иногда доходила до того, что проводились "матбойные" первенства некоторых физико-математических школ между классами – но только в старших параллелях. Неоднократно проводились обычные и тройные матбои между командами 30-й, 45-й и 239-й школ.

Здесь мы приведем пример списка задач и протокола матбоя (он проходил 20 апреля 1984 года между кружками 6 класса Юношеской Математической Школы и Ленинградского Дворца Пионеров).

* * *

1. "Крокодилом" называется фигура, ход которой на бесконечной клетчатой доске заключается в сдвиге на одну клетку, а затем на n клеток перпендикулярно направлению первоначального сдвига (если $n = 2$, то это просто шахматный конь). При каких n "крокодил" может дойти от любой клетки доски до любой другой?

2. Числа p и $2^p + p^2$ – простые. Найдите p.

3. Может ли куб натурального числа оканчиваться на 1985 единиц?

4. Докажите, что из диагоналей любого выпуклого пятиугольника можно выбрать три такие, из которых можно составить треугольник.

5. В таблице $n \times (n+1)$ расставлены целые числа. Докажите, что можно вычеркнуть несколько столбцов (но не все) так, что после этого суммы чисел во всех строчках будут четны.

6. Сколькими способами можно представить число 15 в виде суммы нескольких натуральных чисел, если способы, отличающиеся перестановкой слагаемых, считать различными?

7. Точка A называется "почти центром симметрии" множества M на плоскости, состоящего более, чем из одной точки, если из множества M можно удалить одну точку так, что точка A будет центром симметрии получившегося множества. Сколько может быть "почти центров симметрии" у конечного множества точек на плоскости?

8. На окружности расставлено 30 чисел так, что каждое число равно модулю разности двух следующих за ним по часовой стрелке, а сумма всех равна 1.

Какие числа и как расставлены?

* * *

Конкурс капитанов: просто ли число 227? (выигран командой ЛДП)

<table>
<tr><th>Жюри</th><th></th><th>Ю М Ш</th><th></th><th>Л Д П</th><th></th></tr>
<tr><td></td><td>0</td><td>Иванов</td><td>—6→</td><td>Доголяцкий</td><td>12</td></tr>
<tr><td>18</td><td>0</td><td></td><td>|←5—</td><td>некорр.вызов</td><td>−6</td></tr>
<tr><td></td><td>12</td><td>Демченко</td><td>←8—</td><td>Гуревич</td><td>0</td></tr>
<tr><td></td><td>12</td><td>Выскубов</td><td>—4→|</td><td>Пчелинцев</td><td>0</td></tr>
<tr><td></td><td>12</td><td>Иванов</td><td>←2—</td><td>Рогинская</td><td>0</td></tr>
<tr><td></td><td>12</td><td>Виро</td><td>—3→|</td><td>Доголяцкий</td><td>0</td></tr>
<tr><td></td><td>12</td><td>Новик</td><td>←1—</td><td>Гуревич</td><td>0</td></tr>
<tr><td>18</td><td>−6</td><td>некорр.вызов</td><td>|—7→</td><td></td><td>0</td></tr>
</table>

Примечание 1. Символ —6→ означает вызов на шестую задачу. Если же стрелка оканчивается вертикальной чертой: —3→ |, то это означает отказ вызываемой команды.

Примечание 2. Из протокола видно, что выигравшая команда совершила грубейшую ошибку. Какую именно?

3. Математическая драка

В отличие от матбоя, это личное соревнование. Его рекомендуется проводить в достаточно однородном по силе кружке (факультативе).

Участникам предлагается несколько задач, условия которых выписываются на доску; при этом рядом с каждой задачей выписывается ее цена в очках. Как только кто-то хочет рассказать решение одной из задач, он поднимает руку и называет номер задачи. Если решение оказывается верным, рассказчик получает соответствующее количество очков. В противном случае цена задачи немного увеличивается – размер этого изменения определяется преподавателем – и такое же количество очков вычитается из очков неудачника.

Матдрака рискует затянуться на неопределенное время, если какие-то задачи окажутся чрезмерно сложными; преподаватель должен позаботиться о том, чтобы этого не случилось.

Обязательно надо обратить внимание участников на необходимость тщательной проверки своих решений – иначе школьник вполне может закончить драку с отрицательным количеством очков. Это должно приучить ребят к самоконтролю.

В завершение этого параграфа приведем пример матдраки:

9. Какое максимальное число дамок можно поставить на шахматной доске так, чтобы любую дамку могла бы побить какая-то другая? (5 очков)

10. ABC – остроугольный треугольник. Из середин сторон на все стороны треугольника опущены перпендикуляры. Докажите, что площадь получившегося шестиугольника равна половине площади треугольника ABC. (6 очков)

11. Найдите два трехзначных числа x и y такие, что сумма всех остальных трехзначных чисел равна $600x$. (6 очков)

12. С помощью угольника (умеет проводить прямую через две точки и восстанавливать перпендикуляр к прямой в данной точке этой прямой) опустите перпендикуляр из данной точки на данную прямую. (10 очков)

13. На танцплощадке собралось 10 юношей и 10 девушек. Известно, что для любой группы из k юношей количество девушек, знакомых хотя бы с одним юношей из этой группы, не меньше k. Докажите, что все присутствующие на танцах могут разбиться на 10 пар так, чтобы каждый юноша танцевал со знакомой ему девушкой. (20 очков)

Итоги по задачам:

(9): 5 – Петькин

(10): 6 → 7 – Федькин

(11): 6 → 9 – Редькин

(12): 10 → 15 → 18 – Сидоров

(13): 20 → 27 – Петькин

Результаты участников:

Петькин – (+24)

Федькин – (+7)

Редькин – (+9)

Сидоров – (+12)

Мошкин – (–5)

Упражнение. Попробуйте восстановить ход матдраки. После номера каждой задачи записано, как росла ее цена, и кто ее, наконец, решил.

Примечание: Задачи из списка можно предлагать и по одной, последовательно.

4. Олимпиада-марафон

Это устная олимпиада кружка, для проведения которой преподавателю необходимо иметь одного-двух помощников и длинный список достаточно простых задач. Прежде чем описать методику проведения марафона, несколько слов о системе устной олимпиады, которая широко распространена в Санкт-Петербурге, но не слишком известна за его пределами.

Все решения отвечаются устно одному из проверяющих и не обязательно должны быть записаны. Результат ответа ставится в протокол: "плюс" (+) или "минус" (−). Попыток по каждой задаче три, после третьего неверного решения участник олимпиады теряет право на дальнейшие попытки рассказывать решение этой задачи. В протоколе, как следствие, могут возникать такие оценки как "два минуса" (=) или "плюс с двумя минусами" $(\stackrel{+}{=})$.

Для удобства проведения массовой олимпиады устная олимпиада обычно (как это делается, например, при проведении олимпиады в нашем городе) делится на два этапа: "довыводной" и "вывод". На первом этапе все участники решают 4 довыводных задачи и лишь те, кто решил две (или три) из них, переводятся в "вывод", где они получают полный вариант олимпиады, состоящий из 6 (или 7) задач: 4 общих и 2–3 выводных.

Марафон есть продукт абсолютизации выводной системы. Преподаватель должен заранее заготовить список из 10–20 задач, первые 5–10 из которых должны быть очень легкими и достаточно стандартными. Сложность задач от начала к концу списка должна нарастать, но очень медленно.

В начале марафона все участники получают задачи 1 и 2 из списка. После этого они решают и рассказывают свои решения преподавателю или его помощникам. В том случае, если задача решена правильно, проверяющий ставит плюс в протокол и дает участнику следующую задачу по списку. Например, если у школьника были задачи 3 и 7, то после решения любой из них он получит задачу 8.

Таким образом, в любой момент олимпиады ее участник имеет перед собой ровно две еще нерешенных им задачи – следующих задач из списка он пока не знает.

Опыт проведения олимпиад-марафонов показывает, что за то же время участники успевают решить большее число задач, лучше сосредотачиваются; относятся они к подобным олимпиадам с большим интересом, чем к уже известным формам математических соревнований.

Для преподавателей. Используя задачи из этой книги, можно составить несколько очень простых марафонов, а также и марафоны большей сложности. Мы рекомендуем Вам для составления первой половины марафона, взяв по несколько простых задач по интересующим Вас темам – "Делимость", "Геометрия", "Принцип Дирихле", "Неравенства" и т.д. – перемешать их почти в произвольном порядке. Во второй половине марафона сложность надо постепенно увеличить.

Предостережение: Самая неприятная ошибка, которую можно допустить при подготовке марафона, – это недооценить сложность первых задач олимпиады. Если одна из первых 5–6 задач не будет решена большинством участников, марафон провалится. Постарайтесь, чтобы этого не случилось, иначе у Ваших подопечных останутся не слишком приятные воспоминания от олимпиады, которая закончилась, едва успев начаться.

5. Математический хоккей

Эту увлекательную математическую игру лучше всего проводить в кружках младших классов. В ней принимают участие две команды – по 5 школьников в каждой. В каждой команде должен быть один "вратарь", два "защитника" и два "нападающих".

Преподавателю нужно иметь большой список простых задач, в основном вычислительного характера, на решение которых у школьников не должно уходить более пяти минут.

В начале игры шайба (воображаемая; впрочем, можно изобразить хоккейное поле и шайбу на доске) находится в центре. Вбрасывание состоит в том, что "полевым игрокам" обеих команд предлагается первая задача списка. Побеждает команда А, быстрее нашедшая правильное решение, – и шайба перемещается в зону проигравшей команды В. Тут уже противостоят друг другу нападающие команды А и защитники команды В – их спор решается при помощи второй задачи. В зависимости от того, кто побеждает, игра перемещается обратно в центр или на вратарский "пятачок", где против нападающих команды А играет лишь голкипер команды В. Если и он терпит поражение (при решении очередной задачи из списка), это означает, что счет в матче открыт – 1:0 в пользу команды А, и игра начинается заново. В противном случае шайба возвращается на вбрасывание в зоне команды В и так далее.

Можно считать, что игровое поле состоит из пяти частей, как это показано на рис.113, и шайба в любой момент игры находится в одной из них. В зависимости от исхода каждого игрового эпизода она перемещается либо влево, либо вправо в соседнюю часть.

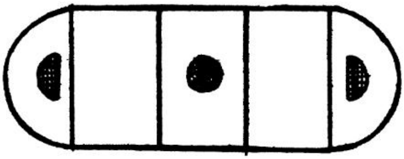


Рис. 113

Советы: 1. Если Вы хотите сделать игру более динамичной, центральную часть поля можно удалить, а вбрасывание в центре разыгрывать при помощи монетки.

2. Если в Вашем кружке много учеников, то его можно разбить на три команды с игрой "на вылет". Отдыхающая команда будет играть роль зрителей.

3. Разбивать кружок на команды надо очень аккуратно. Постарайтесь добиться примерного равенства силы команд (это же касается и других командных математических соревнований).

6. Математический аукцион

Это математическое соревнование вполне заслуживает того, чтобы его назвали азартной игрой. Опыт показывает, что школьники с большим энтузиазмом участвуют в подобных состязаниях. Аукцион можно проводить и как личное, и как командное соревнование.

Суть его в следующем. Преподавателем предлагается специальная исследовательская задача (для проведения аукциона их должно быть не менее пяти-шести), полное решение которой может быть ему и неизвестно. Специфика задачи должна заключаться в том, что задача обязана допускать промежуточные ответы, постепенное достижение цели. Приведем несколько примеров, которые, мы надеемся, прояснят вышеизложенное.

14. Какое максимальное количество слонов можно поставить на доске 8×8 (Варианты: коней, ладей; доска 10×10 и т.п.) так, чтобы никакие две фигуры не били друг друга?

15. Какое максимальное количество фигурок, изображенных на рис.114, можно расположить без наложения внутри квадрата 10×10?

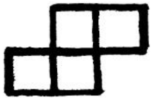


Рис. 114

16. Найдите как можно больше решений ребуса ТРОС + СТАР = КРУПА.

17. Используя цифры 1, 9, 8, 4 в указанном порядке и стандартные математические операции, запишите числа от 1 до возможно большего натурального числа. Пример: $5 = (1+9):(8:4)$.

18. Запишите число 1991, используя только четверки, и обойдясь при этом как можно меньшим числом цифр. Количество арифметических операций, возведений в степень, извлечений корня и т.п. не ограничивается.

19. Провести на плоскости 7 (Варианты: 8, 9, 10) прямых так, чтобы среди частей, на которые разобьется плоскость, оказалось как можно больше треугольников.

20. На доске 10×10 расставить как можно меньшее количество "магараджи" (это "супершахматная" фигура, которая ходит и как ферзь, и как конь) так, чтобы вся доска оказалась под боем.

* * *

Важное примечание: Обратите внимание, что формулировки предложенных только что задач можно варьировать, заменяя в них числа, фигурки и т.д.

* * *

После того, как задача предложена, некоторое время (скажем, полчаса) отводится на ее решение. Вообще говоря, можно предложить сразу несколько задач – так лучше поступать при командном матаукционе.

Затем каждая команда получает равное количество условных денежных единиц: пиастров, или, скажем, слоников. Например, исходный капитал может составлять 1000 пиастров.

Наконец, начинается сам матаукцион, на котором поочередно продаются задачи из объявленного списка. Роль ведущего исполняет преподаватель. Он объявляет о продаже задачи и называет ее цену (допустим, 180 пиастров) – это та сумма, которую получит счастливый победитель. После объявления цены та команда, которая в аукционной борьбе покупает задачу, рассказывает свои результаты, оценки.

* * *

Пример: Команда А платит за право рассказать задачу 17 сумму в 132 пиастра и объявляет о том, что она умеет представлять в нужном виде все числа от 1 до 62. При демонстрации решения выясняется, что в представлении числа 51 допущена ошибка. Таким образом, результат команды А – 50.

* * *

Затем задача опять ставится на продажу, но на этот раз победившая команда может рассказать лишь то решение, которое улучшает уже имеющийся результат.

* * *

Продолжение примера: Команда В платит за право дополнить решение задачи 17 сумму в 25 пиастров и демонстрирует представление чисел 51–68 (естественно, числа 1–50 показывать уже не нужно).

* * *

Затем задача вновь ставится на продажу и так далее, до тех пор, пока команды не откажутся от торговли. После этого команда, рассказавшая наилучшее решение, получает цену задачи. В том случае, если команда-победитель хочет рассказать полное решение, т.е. представить доказательство того, что ее решение неулучшаемо, то доказательство должно быть выслушано. В том случае, если оно верно, команда получает еще и призовой фонд задачи (например, еще 50 пиастров).

* * *

Продолжение примера: Команда С покупает право рассказать улучшение решения команды В за 6 пиастров и излагает неверное представление числа 69.

Конечно же, уплаченные ею пиастры пропадают впустую. После этого аукционная продажа задачи 17 прекратилась.

Результат: Команда A потеряла 132 пиастра.
Команда B приобрела 155 пиастров ($180 - 25 = 155$).
Команда C потеряла 6 пиастров.

* * *

Теперь ставится на продажу следующая задача, и аукцион продолжается.

Приведем в заключение еще пять исследовательских задач, пригодных для использования на матаукционе.

21. На деревянной линейке нанесите как можно меньшее количество меток так, чтобы любое расстояние, выражающееся целым числом сантиметров от 1 до 15 (Варианты: от 1 до 20, 30), можно было отложить при помощи двух каких-то меток.

22. Каким наименьшим числом разрезов можно рассечь куб $5 \times 5 \times 5$ на 125 единичных кубиков, если куски можно класть друг на друга?

23. Есть 10 кирпичей, длиной 30 см каждый. Разрешается складывать их в устойчивую стопку так, что кирпичи не обязаны лежать точно над предыдущими. Сколь сильно может быть сдвинут самый верхний кирпич относительно самого нижнего?

24. Разрежьте квадрат на наименьшее возможное число остроугольных треугольников.

25. Найдите как можно больше решений уравнения $x^2 + y^2 = z^2$ в натуральных числах, не превосходящих 50 (Варианты: 40, 100).

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

Нулевой цикл

1. Через 59 секунд. **2.** Аня и Ваня платят Сане 15 копеек, получая от него по 10 копеек сдачи. После этого он платит 15 копеек в кассу. **3.** Поскольку последняя страница должна иметь номер другой, нежели начальная, четности, то ее номер 823. Ответ: 495 страниц. **4.** Разбиваем сначала гвозди пополам – на две группы по 12 кг, после чего одну из этих групп делим пополам, а затем еще раз пополам. Полученные 3 кг гвоздей откладываем и получаем 9 кг в остатке. **5.** Червяк окажется вверху к вечеру 71-го дня. **6.** Воскресенье. **7.** Диагональ пересекает $199 + 991 - 1 = 1189$ клеток. **8.** Максимальное число это 553451234512345. **9.** Да, может, если день рождения Пети – 31 декабря, а указанную фразу он произносит 1 января. **10.** Нет, не прав. **11.** Всего нарисовано 12 кружков: пять на одной стороне листка и семь – на другой. **12.** Да, может, если профессор – женщина. **13.** Третья черепаха лжет. **14.** Он рассуждал так: "Если у меня лицо не испачкано, то другой мудрец, увидев, что третий над чем-то смеется, понял бы, что его лицо испачкано, и перестал бы смеяться. Однако он смеется, следовательно, у меня лицо тоже испачкано." **15.** Конечно же, чая в молоке столько же, сколько молока в чае. **16.** См. рис.115. **17.** Ответ: 95343. **18.** Ответ единственный: $51286 + 1582 = 52868$. **19.** 127 бумажек надо разложить так: $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$. **20.** См. рис.116. **21.** См. рис.117. **22.** См. рис.118.

4	3	8
9	5	1
2	7	6

Рис. 115

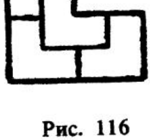


Рис. 116

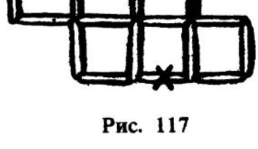


Рис. 117

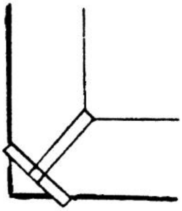


Рис. 118

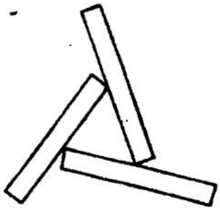


Рис. 119

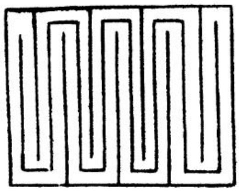


Рис. 120

23. Три карандаша кладутся так, как указано на рис.119. Еще три, уложенные аналогично, но "закрученные" в противоположном направлении, кладутся на них сверху. **24.** См. рис.120. **25.** Нужно убрать 4 монеты, указанные на рис.121.

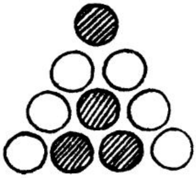


Рис. 121

Четность

2. Поскольку при каждом ходе меняется цвет поля, на котором стоит конь, то имеет место чередование цветов: белого и черного. **3.** Ответ: нет, не может. Так как конь должен сделать 63 хода, то последним (нечетным) ходом он встанет на поле другой четности, нежели $a1$; но $h8$ имеет тот же цвет. **4.** Ответ: нет, не может. Если мы обойдем контур ломаной, переходя из каждой вершины в следующую, то каждый раз, пересекая прямую, будем оказываться в другой полуплоскости (прямая делит плоскость на две половины). Таким образом, имеет место чередование, и значит, количество вершин должно быть четным. **5.** Ответ: нет, не могут. Будем называть расположение шайб правильным, если обходя вершины треугольника ABC именно в порядке A–B–C, мы получим обход по часовой стрелке, и неправильным в противном случае. Легко видеть, что при каждом ударе тип расположения меняется. **6.** Ответ: пять. Если у кого-то из Катиных друзей соседи – того же пола, то очевидно, что все стоящие в кругу – одного пола. Значит, мальчики и девочки чередуются и следовательно, девочек столько же, сколько и мальчиков. **8.** Нельзя, так как общее количество клеток (25) не делится на два, а каждая доминошка покрывает две клетки. **9.** Если ось симметрии не проходит через вершину, то данные 101 точка должны разбиваться на пары симметричных, что невозможно. **10.** Поскольку внутри цепи все числа встречаются парами, а общее количество половинок домино с пятерками – восемь, то и на другом конце цепи стоит пятерка. **11.** Ответ: нет, нельзя. Докажем это от противного. Если такая цепь имеется, то одно из чисел 1, 2, 3 не встречается на концах. Пусть это число 3. Но так как внутри цепи троек четное количество, а всего их осталось после выкидывания костей с пустышками семь, то получаем противоречие. **12.** Ответ: нет, нельзя. Если выпуклый многоугольник можно разрезать на параллелограммы, то его стороны обязательно разбиваются на пары параллельных. **13.** Поскольку в противном случае шашки разбиваются на пары симметричных, то на диагонали обязательно должно стоять нечетное число шашек. **14.** Допустим, что это не так. Соединим шашки, симметричные относительно какой-либо из диагоналей, ниткой. После этого разложим все шашки на "ожерелья" – группы шашек, соединенных нитками. Тогда в каждом из "ожерелий" – либо две, либо четыре шашки. Значит, общее количество шашек должно быть четным – противоречие. **15.** Поскольку единиц 25 штук, то на главной диагонали должна быть хотя бы одна единица (см. решение задачи 13). Аналогично, на главной диагонали есть двойка, тройка и т.д. **17.** Ответ: нет, не могло. На каждом листе сумма номеров страниц нечетна, а сумма 25 нечетных чисел – нечетна. **18.** Среди этих чисел – четное число "минус единиц", а для того, чтобы сумма равнялась нулю, их должно быть ровно 11. **19.** Ответ: нет, нельзя. Среди этих чисел одно (2) – четное, а остальные – нечетные. Поэтому в той строке, где стоит двойка, сумма чисел нечетна, а в других – четна. **20.** Ответ: нет, нельзя. В самом деле, сумма чисел от 1 до 10 равна 55, и изменяя в ней знаки, мы меняем все выражение на четное число. **21.** Доказывается так же, как и в задаче 20, так как сумма $1 + 2 + \ldots + 1985$ нечетна. **22.** Ответ: нет, не может. Проверьте, что при указанных операциях четность суммы всех написанных на доске чисел не меняется. **23.** Ответ: нельзя. Каждая доминошка покрывает одно черное и одно белое поле, а при выкидывании полей $a1$ и $h8$ черных полей остается на 2 меньше, чем белых. **24.** Разберите два случая: сумма первой и последней цифр числа меньше 10, и сумма первой и последней цифр числа не меньше 10. Если допустить, что все цифры суммы – нечетны, то в первом случае не должно быть ни одного переноса в разрядах (что, очевидно, приводит к противоречию), а во втором случае наличие переноса при движении справа налево или слева направо чередуется с отсутствием переноса, и в результате мы получим, что цифра суммы в девятом разряде обязательно четна. **25.** Ответ: нет, не может. Так как на каждом дежурстве, в котором участвует данный человек, он дежурит с двумя другими, то всех остальных можно разбить на пары. Однако 99 – нечетное число. **26.** Для любой точки X, лежащей вне AB, имеем $AX - BX = \pm AB$. Если предположить, что суммы расстояний равны, то мы получим, что выражение $\pm AB \pm AB \pm \ldots \pm AB$, в котором участвует 45 слагаемых, равно нулю. Но это невозможно. **27.** Ясно, что комбинация из девяти единиц раньше, чем девять нулей, получиться не может. Если же получилось девять нулей, то на предыдущем ходу нули и единицы должны были чередоваться, что невозможно, так как их всего нечетное количество. **28.** Проведем наше доказательство от противного. Занумеруем всех сидящих за столом по порядку, начиная с какого-то места. Если на k-м месте сидит мальчик, то ясно, что на $(k-2)$-м и на $(k+2)$-м местах сидят девочки. Но поскольку мальчиков и девочек поровну, то и для любой девочки, сидящей на n-м месте, верно, что на $(n-2)$-м и на $(n+2)$-м местах сидят мальчики. Если мы теперь рассмотрим только тех 25 человек, которые сидят на "четных" местах, то получим, что среди них мальчики и девочки чередуются, если обходить стол в каком-то направлении. Но 25 – нечетное число. **29.** Ясно, что количество a участков, на которых улитка ползла вверх или вниз, равно количеству участков, на которых она ползла вправо или влево. Осталось только заметить, что a – четно. **30.** Ответ; нет, не могут. Обозначим кузнечиков A, B и C. Назовем расстановки кузнечиков ABC, BCA и CAB (слева направо) – правильными, а ACB, BAC и CBA – неправильными. Легко видеть, что при любом прыжке тип расстановки меняется. **31.** Нужно отложить данную монету в сторону, а затем разделить остальные 100 монет на две кучки по 50 монет, и сравнить веса этих кучек. Если они отличаются на четное число грамм, то интересующая нас монета настоящая. Если же разность весов нечетна, то монета фальшивая. **32.** Ответ; нет, нельзя. В противном случае все цифры в ряду стояли бы на местах одной и той же четности.

Комбинаторика-1

28. $5{\cdot}4 = 20$ **29.** $2{\cdot}3 = 6$ **30.** $7{\cdot}5{\cdot}2 = 70$ **31.** $20{\cdot}20{+}10{\cdot}10 = 500$ **32.** $5^6+4{\cdot}5^5$ **33.** 3^6 **34.** $13\cdot12\cdot11\cdot10$ **35.** $5+5\cdot4+5\cdot4\cdot3+5\cdot4\cdot3\cdot2+5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 325$ **36.** $8!$ **37.** $n!$ **38.** $18{\cdot}17/2 = 153$ **39.** а) $64{\cdot}49/2 = 1568$ б) $(4{\cdot}60+24{\cdot}58+36{\cdot}55)/2 = 1806$ в) $(28{\cdot}56+20{\cdot}54+12{\cdot}52+4{\cdot}50)/2 = 1736$ г) $(4{\cdot}61+8{\cdot}60+20{\cdot}59+16{\cdot}57+16{\cdot}55)/2 = 1848$ д) $(28{\cdot}42+20{\cdot}40+12{\cdot}38+4{\cdot}36)/2 = 1288$ **40.** $9!/2!3!4!$ **41.** $7!/1!2!4!$ **42.** $8!/2!2!2!2!$ **43.** $1 + 6!/5!1! + 7!/5!2! + 8!/5!3! = 84$ **44.** $9\cdot10^9 - 9\cdot9!$ **45.** $8\cdot9^6 < 9\cdot10^6 - 8\cdot9^6$, и потому чисел с единицей больше. **46.** $6^3 - 5^3$ **47.** $13\cdot11\cdot9\cdot7\cdot5\cdot3\cdot1$ **48.** $9\cdot10^7\cdot5$

Делимость и остатки

1. а) 4; б) 6; в) 9; г) $(n+1)(m+1)$. **3.** Среди этих чисел есть число, кратное 3, есть число, кратное 5, и есть два четных числа, одно из которых делится на 4. **4.** а) $p-1$; б) p^2-p. **5.** Поскольку $990 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$, то $n = 11$. **6.** Нет, поскольку 24! оканчивается на 4 нуля, а 25! – уже на 6 нулей. **7.** Ответ: 24. Это степень, в которой входит число 5 в разложение числа 100! на простые множители. **8.** Указание: если d – делитель n, то n/d – также делитель n. **9.** Число слева не делится на 11, а справа – делится. **11.** $65(a+b) = 65a + 65b = 65a + 56a = 121a$. Так как 65 и 121 взаимно просты, то $a+b$ делится на 121. Поскольку $121 = 11^2$ – составное число, то и $a+b$ – составное. **12.** а) $x = 16$, $y = 15$; б) $x = 152$, $y = 151$ или $x = 52$, $y = 49$. **13.** $x(x^2+x+1) = 3$. Отсюда либо $x = \pm 1$, либо $x = \pm 3$. Ответ: $x = 1$. **14.** Указание: проверьте, что любое простое число p входит в одной и той же степени в обе части равенства. **15.** а) 0; б) 1, так как 9 дает остаток 1 при делении на 8. **17.** Переберите остатки от деления на 5. **18.** Переберите остатки от деления на 3. **19.** Переберите остатки от деления на 9. **21.** Докажите, что указанные числа делятся и на 3 и на 8. **22.** Если ни x, ни y не делятся на 3, то x^2 и y^2 дают остаток 1 от деления на 3. Таким образом, их сумма имеет остаток 2 от деления на 3. Но z^2 не может иметь такого остатка. **23.** Проверьте, что и a и b делятся и на 3 и на 7. **24.** Проверьте, что числа x^3 и x имеют одинаковые остатки от деления на 6. **25.** Если d – нечетно, то среди чисел p и q есть четное, что невозможно. Если d не делится на 3, то среди чисел p, q и r есть делящееся на 3, что тоже невозможно. **26.** Выясните возможные остатки квадратов при делении на 8. **27.** Возможные остатки квадратов от деления на 9: 0, 1, 4, 7. Проверьте, что если сумма трех из них делится на 9, то среди них есть два одинаковых. **30.** 7. **31.** 1. **32.** 6. **33.** 3. **35.** Одно из этих чисел делится на 3. а) $p = 3$; б) $p = 3$. **36.** $p = 3$ **37.** Докажите, что $p = 3$. **38.** Рассмотрите остатки по модулю 3. **39, 40.** Проверьте, что остаток квадрата нечетного числа от деления на 4 равен 1, а остаток квадрата четного числа – 0. **41.** Ответ: $p = 5$. Рассмотрите остатки при делении на 5. **42.** Это число дает остаток 7 от деления на 9. **43.** Выясните, какой остаток может давать число $a^3 + b^3 + 4$ от деления на 9. **44.** Выясните, какой остаток может давать число $6n^3 + 3$ от деления на 7. **45.** Если ни одно из чисел x, y не делится на 3, то z^2 дает остаток 2 при делении на 3, что невозможно. Заметьте теперь, что квадрат нечетного числа при делении на 8 дает остаток 1, квадрат четного числа, не делящегося на 4, – остаток 4, квадрат числа, делящегося на 4, – остаток 0. Докажите, что либо x и y оба четны, либо среди них есть число, кратное 4.

46. Указания: а) $4 + 7a = 4(a+1) + 3a$; б) $a + b = (2+a) - (35-b) + 33$. **47.** 0. **48.** Докажите, что любые два числа из этих семи дают одинаковый остаток от деления на 5. Для этого рассмотрите две шестерки: одну – не содержащую первое из них, вторую – не содержащую второе. **49.** Обозначим первое из этих чисел через a. Получим

$$a + (a+2) + (a+4) + \ldots + (a + 2(n-1)) = na + 2(1+2+3+\ldots+(n-1)) =$$
$$= na + n(n-1) = n(a+n-1)\,.$$

50. Заметим, что это число, увеличенное на 1, делится на 2, 3, 4, 5, 6. Ответ: 59. **51.** Если n – составное число ($n > 4$), то $(n-1)!$ делится на n. **55.** $\text{НОД}(30n+2, 12n+1) = \text{НОД}(12n+1, 6n) = \text{НОД}(6n, 1) = 1$. **56–57.** Воспользуйтесь алгоритмом Евклида.

Принцип Дирихле

3. Остатки по модулю 11 – "клетки", числа – "кролики". **4.** Постройте миллион клеток с номерами от 0 до 999999 и рассадите там людей, поместив каждого ленинградца в клетку, номер которой равен количеству волос на его голове. **6.** Так как перевезено всего $10m + 1$ футболистов, то, рассадив их по клеткам-командам, получаем, что в какой-то клетке сидит 11 футболистов. **8.** Вариантов числа знакомых всего 5: от 0 до 4. Осталось заметить, что если у кого-то 4 знакомых, то ни у кого не может быть 0 знакомых. **9.** Примените то же дополнительное соображение, что и в задаче 8. **11.** Из условий следует, что найдутся 7 школьников, решивших $35 - 6 = 29$ задач. Так как $29 = 4 \cdot 7 + 1$, то найдется школьник, решивший не менее пяти задач. **12.** Ответ: 32 короля. Посмотрите на подсказку к задаче 10а. **13.** Разбейте паутину на 4 "клетки", в каждой из которых не может находиться более одного паука. **14.** Каждый из меньших треугольников не может накрывать более одной вершины большого треугольника. **16.** Если бы каждый из рабочих мог купить магнитофон, то у них в сумме было бы не менее $5 \cdot 320 = 1600$ рублей. **18.** Покрасим всю сушу в синий цвет, а все точки, диаметрально противоположные суше – в красный. Тогда обязательно есть точка, которая покрашена в оба цвета. В ней и надо рыть туннель. **19.** Рассмотрите 1988 степеней и их остатки по модулю 1987. **20.** Квадраты при делении на 100 могут давать лишь 51 остаток, так как остатки x и $100 - x$ при возведении в квадрат дают один и тот же остаток. **22.** Если 3^m и 3^n – степени тройки, дающие один и тот же остаток при делении на 1000, то $3^m - 3^n = 3^n(3^{m-n} - 1)$ делится на 1000 (мы считаем для определенности, что $m > n$). **23.** Эти суммы могут принимать лишь 7 разных значений: от -3 до

3. **24.** Разобьем всех людей на 50 пар так, что в каждой паре – два человека, сидящих друг напротив друга. Ясно, что в одной из этих пар-"клеток" оба человека – мужчины. **25.** Если это не так, то, очевидно, что мальчики собрали не менее, чем $0+1+2+\ldots+14=105$ орехов – противоречие. **26.** Произведение чисел во всех группах равно $9! = 362880$, а $71^3 = 357911$. **27.** Поскольку от любой клетки до любой другой можно добраться, не более 19 раз сдвинувшись в соседнюю клетку, то все числа находятся между числами a и $a+95$, где a – минимальное из всех расставленных чисел. Значит, среди этих чисел не более 96 различных. **28.** У данного человека среди остальных пяти есть либо не менее трех знакомых, либо не менее трех незнакомых ему. Разберем, например, первый случай. Среди этих трех людей есть либо двое знакомых – тогда они вместе с выбранным нами исходно человеком образуют нужную тройку, либо они все трое попарно незнакомы. **29.** Рассмотрите координаты этих точек и их остатки при делении на 2. **30.** В каждом размере каких-то сапог меньше: правых или левых. Выпишем эти типы сапог по размерам. Какой-то тип, например, левый, повторится по крайней мере дважды, например, в 41 и 42 размерах. Но так как количество левых сапог в этих размерах суммарно не меньше 100 (почему?), то мы имеем не менее 100 годных пар обуви в этих размерах. **31.** Докажите, что в одной из групп разность между числом согласных и числом гласных не больше 1. **32.** Рассмотрите 10 сумм: $x_1, x_1+x_2, \ldots, x_1+x_2+\ldots+x_{10}$ и их остатки при делении на 10. **33.** Разбейте числа от 1 до 20 на 10 наборов, в каждом из которых в любой паре чисел одно делится на другое: $\{11\}$, $\{13\}$, $\{15\}$, $\{17\}$, $\{19\}$, $\{1,2,4,8,16\}$, $\{3,6,12\}$, $\{5,10,20\}$, $\{7,14\}$, $\{9,18\}$. **34.** Занумеруем кружки числами от 1 до 5 и вместо каждого пионера будем рассматривать тот набор кружков – подмножество множества $\{1,2,3,4,5\}$ – который состоит из посещаемых им кружков. Осталось разбить 32 подмножества указанного множества на 10 наборов так, чтобы в каждом из наборов из любых двух множеств этого набора одно содержалось в другом. В качестве таких наборов рассмотрим следующие: $[\emptyset,\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\},\{1,2,3,4\},\{1,2,3,4,5\}]$, $[\{2\},\{2,5\},\{1,2,5\},\{1,2,3,5\}]$, $[\{3\},\{1,3\},\{1,3,4\},\{1,3,4,5\}]$, $[\{4\},\{1,4\},\{1,2,4\},\{1,2,4,5\}]$, $[\{5\},\{1,5\},\{1,3,5\}]$, $[\{2,4\},\{2,4,5\},\{2,3,4,5\}]$, $[\{3,4\},\{3,4,5\}]$, $[\{3,5\},\{2,3,5\}]$, $[\{4,5\},\{1,4,5\}]$, $[\{2,3\},\{2,3,4\}]$.

Графы

3. Да, такой обход возможен. **4.** Нет, нельзя. Рассмотрите остатки получающихся двузначных чисел при делении на 9. **6.** Общее число дорог равно $100\cdot 4/2=200$. **8.** Нельзя. Примените теорему о числе нечетных вершин. **9.**

Нет, не может. В противном случае получился бы граф соседства баронств с нечетным количеством нечетных вершин. **10.** Если в государстве k городов, то дорог – $3k/2$. Это число не может быть равно 100. **11.** Да, верно, иначе нарушается теорема о числе нечетных вершин. **12.** Это в точности теорема о нечетных вершинах. **13.** Нет, нельзя. Примените теорему к графу, вершины которого – данные отрезки, а ребро соединяет две вершины тогда, когда два соответствующих отрезка пересекаются. **15.** Решение этой задачи совершенно аналогично решению задачи 14. **17.** Если закрыта дорога AB, то нам достаточно доказать, что и после этого можно добраться из A в B. Если это не так, то в компоненте связности, содержащей A, все вершины, кроме A, – четные. Но наличие ровно одной нечетной вершины противоречит теореме о числе нечетных вершин. **19.** Нет, нельзя. У этого графа слишком много нечетных вершин. **20.** а) шесть; б) пять; в) четыре. **21.** Нет, нельзя. **22.** а) Если это возможно, то ясно, что проволока идет по ребрам куба без наложения, то есть мы как бы нарисовали каркас куба, не отрывая карандаша от бумаги. Но это невозможно, так как у куба восемь нечетных вершин. б) Поскольку нечетных вершин восемь, то таких кусков нужно не менее четырех.

Неравенство треугольника

1. Это само неравенство треугольника в чистом виде. **2.** Ответ: 4. **3.** Обозначим длины сторон треугольника через a, b, c. Так как $b + c > a$, то $a + b + c > 2a$. **5.** Первый самолет прилетит раньше. **7.** Сложите неравенства треугольника $AC + OC > OA$ и $OB + OD > BD$. Так как $AC = BD$, то, сокращая, получаем требуемое. **8.** Пусть диагонали пересекаются в точке O. Требуемые неравенства легко выводятся из неравенств треугольника для треугольников OAB, OBC, OCD, ODA и для треугольников ABC, BCD, CDA и DAB. **9.** Решение аналогично решению задачи 7. **10.** Продолжите отрезок, соединяющий эти точки, в обе стороны до пересечения с контуром треугольника. **12.** Решение изображено на рисунке к задаче 13. **13.** Воспользуйтесь тем, что $AD = BD$, $AE = EC$ и неравенством $AD + AE > DE$. **15.** Ответ: ей следует ползти через середину ребра, разделяющего две соседние грани, содержащие точки X и Y. **16.** Указание: рассмотрите две одинаковые развертки боковой поверхности стакана, одна из которых будет представлять внутреннюю, а другая – внешнюю поверхность стакана. Склейте их по общей границе и отметьте две данные точки. **17.** Ответ: он должен проползти по средним линиям двух соседних граней, на противоположных ребрах которых находятся паук и цель его пути. **18.** Продолжите отрезок AO до пересечения со стороной BC в точке D. Сложите теперь неравенства треугольника $AB+BD > AD$ и $OD+DC > OC$ и сократите по OD в обеих частях неравенства. **19.** Решается сложением трех неравенств, аналогичных неравенству из задачи 18. **20.** Лесник должен идти к вершине угла, а затем обратно к дому. **21.** Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABDC$. Тогда по неравенству треугольника $AB + BD > AD$, при этом $BD = AC$, а $AD = 2AM$. **23.** При таком складывании при подсчете периметра по сравнению с периметром исходного многоугольника теряется длина ломаной $A \ldots X \ldots B$, но добавляется длина отрезка AB (где AB – отрезок, по которому прямая пересекает многоугольник). Из неравенства треугольника следует, что периметр уменьшается. **24.** Рассмотрим те две из этих сторон, которые не имеют общих вершин – это стороны AB и CD (см. рис.122). Тогда, с одной стороны, $AC + BD < AB + CD$ (так как AC и BD – диагонали), а с другой стороны, если AC и BD пересекаются в точке O, то $OA + OB > AB$ и $OC+OD > CD$, и, складывая эти неравенства, мы получаем: $AB+CD < AC+BD$ – противоречие.

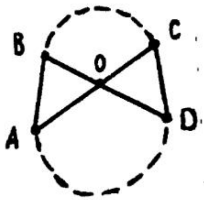


Рис. 122

25. Пусть медианы пересекаются в точке M. Тогда, складывая неравенства $AM + BM > AB$, $BM + CM > BC$ и $CM + AM > AC$ и, учитывая то, что длины отрезков AM, BM и CM составляют $2/3$ длин медиан, получаем требуемое неравенство. **26.** Если ширина реки – h, а деревни расположены в точках A и B, то концы моста расположены в точках пересечения прямых $A'B$ и AB' с берегами, где A' и B' получаются из A и B при параллельном переносе на расстояние h к реке. **27.** Рассмотрите самую длинную диагональ XY пятиугольника и две пересекающихся диагонали, один из концов которых есть точка X или Y соответственно.

Игры

2. После каждого хода количество кучек увеличивается на 1. Сначала их было 3, в конце – 45. Таким образом, всего будет сделано 42 хода. Последний выигрывающий 42-й ход сделает второй игрок. **3.** Четность результата не зависит от расстановки плюсов и минусов, а зависит только от количества нечетных чисел в первоначальном наборе. Так как в данном случае их 10 (т.е. четное число), то выигрывает первый игрок. **4.** После каждого хода и количество вертикалей, и количество горизонталей, на которые можно поставить ладей, уменьшается на 1. Поэтому игра будет продолжаться ровно 8 ходов. Последний, выигрышный ход будет сделан вторым игроком. **5.** Четность числа единиц на доске после каждого хода не меняется. Поскольку сначала единиц было четное число, то после последнего хода на доске не может оставаться одна (нечетное число!) единица. Поэтому выигрывает второй игрок. **6.** В процессе игры (сравните с алгоритмом Евклида) обязательно будет выписан наибольший общий делитель исходных чисел. Следовательно, будут выписаны и все числа, кратные ему, не превосходящие большего из исходных чисел. В нашем случае НОД равен 1. Поэтому будут выписаны все числа от 1 до 36. Таким образом игра будет продолжаться 34 хода (два числа были написаны сначала), и выигрывает второй игрок. **7.** Эта игра – не совсем шутка. В ней выигрывающий, допустив ошибку, может проиграть. Эта ошибка состоит в том, что он после своего хода оставляет невычеркнутые клетки только в одном столбце или только в одной строке, предоставляя противнику возможность выиграть в один ход. Проигравшим в этой игре является, тем самым, тот, кто сделает этот роковой ход. Заметим, что оставшуюся после вычеркивания горизонтали часть клетчатой доски $m \times n$ можно представить себе как доску $(m-1) \times n$. Аналогично, после вычеркивания вертикали остается доска $m \times (n-1)$. Ситуация, в которой каждый ход является "роковым", только одна – это доска 2×2. Таким образом, выигрывает игрок, после хода которого она возникла. Однако, как мы видели, при каждом ходе суммарное количество горизонталей и вертикалей на доске уменьшается на 1. Поэтому четность этой суммы в начале игры определяет победителя. В пункте а) выигрывает первый игрок, а в пунктах б) и в) – второй. Заметим, что в пункте б) решающим соображением может быть и симметричная стратегия второго игрока (см. параграф 2). **11.** Выигрывает второй. Можно использовать и центральную, и осевую симметрию. **12.** Выигрывает первый. Первый ход в центр доски, а затем – центральная симметрия. **13.** В обоих пунктах выигрывает первый игрок. а) Осевая симметрия; б) Центральная симметрия. Решающим соображением является то, что если два симметричных поля не побиты, то поля, с которых оба они бьются, также не побиты. **14.** Выигрывает второй. Центральная симметрия. **15.** Выигрывает первый. Первым ходом он снимает центральную шашку, а потом играет центрально-симметрично. **16.** Выигрывает первый. Первым ходом он уравнивает количество камней в кучках, после чего играет как в задаче 10. **17.**

Выигрывает первый. Первым ходом он проводит хорду, по обе стороны от которой расположено по 9 вершин. После этого, на каждый ход второго он отвечает аналогичным ходом по другую сторону от этой хорды. **18.** В обоих пунктах выигрывает второй игрок. Независимо от хода первого игрока, второй может после своего хода оставить две одинаковые по длине цепочки лепестков. Дальше – симметрия. **19.** а) и б) – выигрывает второй. Центральная симметрия. в) Выигрывает первый. Первым ходом он протыкает ряд, состоящий из центральных кубиков четырех слоев 3×3. Дальше – центральная симметрия. **20.** В этой игре проигрывает тот, кто отломит кусок ширины 1. Выигрывает первый игрок. Первым ходом он разламывает шоколадку на два куска 5×5. Дальше – симметрия. **21.** Выигрывает первый. Первым ходом он ставит крестик в центральную клетку. Затем после каждого хода второго игрока первый ставит крестик в центрально-симметричную клетку. **23.** Выигрывает первый игрок. Занумеруем горизонтали и вертикали шахматной доски в естественном порядке. Координаты поля $a1$ – $(1, 1)$, поля $h8$ – $(8, 8)$. Выигрышными являются позиции, в которых король стоит на поле с четными координатами. Первый ход – на поле $b2$. **24.** Выигрывает первый игрок. Выигрышными являются позиции с двумя нечетными кучками. Первый ход – съесть кучку из 21 конфеты и разделить кучку из 20 конфет на любые две нечетные кучки. **25.** Выигрывает второй игрок. Выигрышными являются позиции, в которых между шашками находится кратное 3 число пустых клеток. **26.** Выигрывает первый игрок. Выигрышными являются позиции, при которых в коробке остается $2n - 1$ спичка. Первый ход – оставить 255 спичек. **27.** Выигрывает первый игрок. Выигрышными являются позиции, при которых в максимальной по количеству камней кучке остается $2n - 1$ камень. Первый ход – первую и вторую кучки можно разбивать как угодно, а третью – на кучку из 63 камней и кучку из 7 камней. **28.** В этой игре выигрывает тот, кто получит единицу. Побеждает первый. Выигрышными позициями являются нечетные числа. **29.** В пункте а) выигрывает второй игрок, в пункте б) – первый. В этой игре выигрышными являются позиции, при которых в каждой кучке нечетное число спичек. **32.** Выигрывает второй игрок. Расстановка плюсов и минусов приведена на рис.123. **33.** Переформулируем пункты а) и б) в терминах шахматной доски. Игра а) оказывается тождественной игре из задачи 23. Расстановка плюсов и минусов в пункте б) такая же, как в пункте а) (см. рисунок 45). В обоих пунктах выигрывает первый игрок. **34.** Выигрывает первый. Расстановка плюсов и минусов после переформулировки в терминах клетчатой доски показана на рис.124.

−	−	+	+	−	−	+	+
−	−	+	+	−	−	+	+
−	−	−	−	−	−	−	−
−	−	−	−	−	−	−	−
−	−	+	+	−	−	+	+
−	−	+	+	−	−	+	+
−	−	−	−	−	−	−	−
+	−	−	−	−	−	−	−

Рис. 123

+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+
−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	+
+	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	+
−	−	−	−	−	−	−	+	+	−	−	+
−	−	−	−	−	−	−	−	+	−	−	+
+	+	+	+	+	+	−	−	+	−	−	+
−	−	−	−	+	+	−	−	+	−	−	+
−	−	−	−	−	+	−	−	+	−	−	+
+	+	+	−	−	+	−	−	+	−	−	+
−	+	+	−	−	+	−	−	+	−	−	+
−	−	+	−	−	+	−	−	+	−	−	+

Рис. 124

35. Эта задача является примером того, что геометрическая интерпретация необязательна для проведения анализа с конца. Здесь плюсами и минусами удобно помечать числа. Плюсом оказываются помечены числа, делящиеся на 10. Таким образом, выигрывает второй игрок. **36.** Анализируя с конца, находим выигрышные позиции. Это числа от 56 до 111 и от 4 до 6. Таким образом, выигрывает первый игрок (его первый ход – в 4, 5 или 6). **37.** Анализируя с конца, находим выигрышные позиции: 500, 250, 125, 62, 31, 15, 7, 3. Выигрывает первый игрок. **38.** Анализируя с конца, находим выигрышные позиции. Это числа, делящиеся на 3. Выигрывает первый игрок. Первым ходом он может, например, вычесть 1, 4, 16.

Индукция

34. В самом деле, $a_3 = 1$, $a_4 = -1$, $a_5 = -2$, $a_6 = -1$, $a_7 = 1$, $a_8 = 2$. Значит, при $n = 1$, 2 имеем $a_{n+6} = a_n$. Далее – очевидная индукция. **35.** Для натуральных чисел от 1 до 5 это проверяется непосредственно. Если x – данное натуральное число, то рассмотрим Φ_n – максимальное из чисел Фибоначчи, не больших x. Тогда $0 \le x - \Phi_n < \Phi_{n-1}$, и значит, $x - \Phi_n$ можно представить как сумму нескольких различных чисел Фибоначчи, меньших Φ_{n-1}. **42.** Указание. Вычислите сначала некоторое произвольное число, не равное m и n, после чего используйте индукцию по сумме чисел m и n. **43.** Индукционный переход следует из формулы

$$3(2^n + 1) - 2(2^{n-1} + 1) = 2^{n+1} + 1\,,$$

верной для любого целого n. **44.** Достаточно доказать, что $2^x \ge x + 1$ для любого неотрицательного целого x. **45.** Указание: докажите сначала, что любой квадрат можно разрезать на несколько частей, из которых можно сложить прямоугольник, одна из сторон которого имеет длину 1. **46.** Индукционный переход доказывается так: разобьем 2^{n+1} чисел на две половины по 2^n чисел в каждой. В этих половинах выберем по 2^{n-1} чисел, сумма которых делится на 2^{n-1}. Затем из оставшихся 2^n чисел опять выберем третий набор из 2^{n-1} чисел, сумма которых делится на 2^{n-1}. Пусть суммы чисел в этих трех наборах равны $2^{n-1}a$, $2^{n-1}b$ и $2^{n-1}c$. Тогда среди чисел a, b, c есть два числа одинаковой четности. Соответствующие им наборы надо объединить в один набор из 2^n чисел – сумма чисел в нем будет делиться на 2^n. **47.** Ответы: а) n^2-n+2; б) $3n^2-3n+2$. **48.** Указание: допустим, что искомая раскраска в три цвета у вас уже имеется. Докажите тогда, что при добавлении еще одной окружности с хордой можно изменить старую раскраску так, чтобы новая раскраска возникшей конфигурации была правильной.

Делимость-2

8. $30^{99} \equiv (-1)^{99} \equiv -1 \pmod{31}$, $61^{100} \equiv (-1)^{100} \equiv 1 \pmod{31}$. **9б.** $a^n+b^n = (a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\ldots+(-1)^{n-1}b^{n-1})$ **10.** Рассмотрите сумму симметричных слагаемых. **11.** Рассмотрите числа вида $8k+7$. **13.** Используйте тождество $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$. **14.** Если x – удобное число, то и $1000001-x$ – также удобное. **15.** а) нет; б) нет. **16.** Например, -1 или $n-1$. **17.** 5. **18.** 2858. **19.** а) $k-1=3p+2$, а по модулю 3 квадраты могут давать лишь остатки 0 или 1. б) $k+1=4q+3$, а по модулю 4 квадраты могут давать лишь остатки 0 или 1. **20.** Нет. n^2+n+1 не может даже делиться на 5. **22.** Докажите, что сумма делителей делится и на 3, и на 8. **23.** а) Рассмотрите остатки членов последовательности по модулю 4 и докажите, что они повторяются по циклу. б) a_n-22 делится на a_{n-6}. **25.** Указание: все степени десяти, начиная со 100, делятся на 4. **26.** Число делится на 2^n (на 5^n) тогда и только тогда, когда число, образованное его последними n цифрами, делится на 2^n (на 5^n). **28.** Две последние цифры квадрата числа n зависят только от двух последних цифр числа n. Пусть $n=\overline{\ldots ab}$. Тогда $\overline{ab}^2=(10a+b)^2=100a^2+20ab+b^2$. Ясно, что цифра десятков числа b^2 должна быть нечетной. Прямой перебор показывает, что цифра единиц должна тогда быть равной 6. **29.** Рассмотрите остатки по модулю 16. **32.** а) нет; б) нет. Рассмотрите остатки по модулю 9. **33.** 7. **34.** Эти числа имеют одинаковые суммы цифр и, значит, одинаковые остатки по модулю 9. **35.** Это можно сделать шестью способами: 1155, 4155, 7155, 3150, 6150, 9150. **36.** Два числа: 6975, 2970. **37.** Это число 1023457896. **38.** Разберите два случая: последняя цифра равна или не равна 6. **39.** Нет. Рассмотрите остатки по модулю 3. **41.** 7. **43, 44.** Это число делится на 11. **45.** $\overline{aabb}$ делится на 11, а $\overline{cdcdcdcd}$ – нет. **46.** Цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6 нельзя разбить на две тройки, разность сумм в которых делится на 11. **47.** Эти два числа имеют одинаковые остатки как при делении на 9, так и при делении на 11. **48.** Нельзя. Проследите за последней цифрой. **49.** $\overline{aba} = 101a + 10b = 7(14a+b)+3(a+b)$. **50.** $\overline{abc} = 100a+10b+c \equiv 2a+3b+c \pmod 7 \equiv b-c \pmod 7$, так как $2(a+b+c) \equiv 0 \pmod 7$. Значит, $\overline{abc}$ делится на 7 тогда и только тогда, когда $b-c$ делится на 7. Но так как b, $c < 7$, то это условие равносильно тому, что $b = c$. **51.** а) $\overline{abcdef} = 1000\overline{abc} + \overline{def} \equiv \overline{def} - \overline{abc} \pmod 7$, так как 1001 делится на 7. б), в) Число делится на 7 (13) тогда и только тогда, когда на 7 (13) делится знакопеременная сумма чисел, образованных последовательными тройками цифр данного числа. Пример: 10345678. Образуем знакопеременную сумму: $678 - 345 + 10 = 343$ – делится на 7. Значит, и исходное число делится на 7. И в самом деле, оно равно $7 \cdot 1477954$. **52.** Число делится на 37 тогда и только тогда, когда сумма чисел, образованных тройками последовательных цифр данного числа, должна делиться на 37. **53.** Нет, не существует. $\overline{abc} - \overline{cba} = 99(a-c)$, где a и c – разные цифры. **54.** Запись этого числа состоит из 300 единиц. **55.** Нет. Рассмотрите остатки по модулю 5. **57.** 69. **58.** $7744 = 88^2$. **59.** 625 и 376. **60.** Рассмотрите остатки по модулю 7. **61.** Домножьте число на 1111 и докажите, что результат делится на число вида $1000\ldots001$. **63.** Это уравнение не имеет целых решений. Левая часть делится на 3, в то время как правая часть не делится на 3. **65.** $x = 16k - 2$, $y = -7k + 1$; k – любое целое число. **66.** $x = 5p + 3q - 11$, $y = 11 - 5p - 2q$, $z = p$; p, q – любые целые числа. **67.** При взаимно простых m и n. **68.** $(-4, 9)$, $(14, -21)$, $(4, -9)$, $(-14, 21)$. **70.** Решений в целых числах нет. **71.** $(2,0)$, $(2,1)$, $(-1,0)$, $(-1,1)$, $(0,2)$, $(1,2)$, $(0,-1)$, $(1,-1)$. **73.** Решений в целых числах нет (модуль 7). **75.** Решений в целых числах нет (модуль 5). **76.** Решений в целых числах нет (модуль 8). **79.** $a = b = c = 3$; $\{a,b,c\} = \{1,2,3\}$ или $\{2,4,4\}$; одно из чисел равно 1, а сумма двух других равна 0, например, $a = 1$, $b = -c = 13$. **80.** $x = \pm 498$, $y = \pm 496$ или $x = \pm 78$, $y = \pm 64$, причем знаки выбираются независимо. **81.** Если $n = pq$ (p, $q > 1$), то $1/n = 1/(n-1) - 1/n(n-1)$ и $1/n = 1/p(q-1) - 1/pq(q-1)$. Если же n – простое, то $n(y-x) = xy$, и значит, xy делится на n, т.е. x или y делится на n. Ясно, что именно y делится на n: $y = kn$. Тогда $x = kn/(n+1)$, откуда $k = n-1$, т.е. есть ровно одно представление $1/n = 1/(n-1) - 1/n(n-1)$. **86.** $ka - kb$ делится на kn, т.е. $k(a-b) = mkn$. Следовательно, $a - b = mn$, ч.т.д. **87.** Вследствие МТФ, он равен 1. **89.** $300^{3000} = (300^{500})^6 \equiv 1 \pmod 7$. Аналогично, $300^{3000} \equiv 1 \pmod{11}$ и $\pmod{13}$. Следовательно, $300^{3000} - 1$ делится и на 7, и на 11, и на 13, т.е. на 1001. **90.** 7. **92.** Это число делится на 31. **93.** $(a+b)^p \equiv (a+b) = a + b \equiv a^p + b^p \pmod p$. **94.** Докажите, что для произвольного целого x верно сравнение $x^5 \equiv x \pmod{30}$. **95а.** Докажите, что $p^q + q^p - p - q$ делится и на p, и на q. **96.** Положите $b = a^{p-2}$. **98.** $(n^8+1)(n^8-1) = n^{16} - 1 = 0 \pmod{17}$. **99.** а) $111\ldots11$ (p единиц) $= (10^p - 1)/9$, а $10^p - 1$ не делится на p, так как $10^p - 1 \equiv 10 - 1 = 9 \pmod p$. б) $111\ldots11$ ($p-1$ единица) $= (10^{p-1} - 1)/9$, а $10^{p-1} - 1$ делится на p, так как p взаимно просто с 10 и с 9. **100.** Воспользуйтесь тем, что $10^p \equiv 10 \pmod p$, $10^{2p} \equiv 100 \pmod p$, …, $10^{8p} \equiv 10^8 \pmod p$.

Комбинаторика-2

7. $C_{10}^3 = 120$. **8.** $3 \cdot C_6^2 \cdot C_{60}^{20}$. **9.** а) $10 \cdot C_{11}^2 + 11 \cdot C_{10}^2 = 1045$ б) $C_{11}^2 \cdot C_{10}^2 = 2475$. **10.** $C_{15}^0 + C_{15}^1 + C_{15}^2 + C_{15}^3 + C_{15}^4 + C_{15}^5 = 4944$. **11.** Выберите сначала семьи, а потом в каждой паре конкретного представителя. Ответ: $C_4^3 \cdot 2^3 = 32$. **12.** Разберите три случая: в команду входит только Петя; в команду входит только Ваня; оба они в команду не входят. Ответ: $2C_{30}^{10} + C_{29}^{11}$. **13.** Все определяется местами, на которых стоят гласные буквы. Ответ: $C_7^3 = 35$. **14.** $C_{12}^5 + 10C_{12}^4 + C_{10}^2 \cdot C_{12}^3 + C_{10}^3 C_{12}^2 = 23562$. **15.** $C_{32}^{12} \cdot C_{20}^{12}$. **16.** а) $C_{15}^5 C_{10}^5 C_5^5/3!$; б) $C_{15}^5 C_{10}^5/2$. **17.** а) $4 \cdot C_{49}^8$; б) Перейдите к дополнению. Ответ: $C_{52}^{10} - C_{48}^{10}$. **18.** Разберите случаи в соответствии с тем, цифра какой четности стоит на первом месте. Затем в каждом случае выберите места для нечетных цифр. Ответ: $C_5^2 \cdot 5^6 + C_5^3 \cdot 4 \cdot 5^5$. **19.** Разберите все возможные представления чисел 2, 3, 4 в виде суммы нескольких натуральных слагаемых. Не забывайте, что первая цифра – не ноль. Ответ: а) 10; б) $1 + C_9^2 + 9 + 9 + 1 = 55$; в) $1 + 2C_9^1 + C_9^1 + C_9^2 \cdot 3!/2! + C_9^3 = 220$. **20.** $C_6^3(C_6^3 - 1)(C_6^3 - 2)(C_6^3 - 3)(C_6^4 - 4)$. **21.** а) C_{45}^6; б) $C_6^3 \cdot C_{39}^6 = 182780$. **22.** $2^{10} = 1024$. **23.** $2^7 = 128$. **25–26.** Сумма чисел, стоящих на четных местах в n-й строке треугольника Паскаля, равна сумме чисел, стоящих на нечетных местах той же строки. **27–28.** Указание: индукция по количеству чисел на диагонали. **29.** Воспользуйтесь результатами решения задач 27 и 28. **30.** C_{2n}^n – количество путей, ведущих из вершины треугольника Паскаля к числу, стоящему на n-м месте в $2n$-й строке. Каждый такой путь проходит ровно через одно число n-й строки. При этом количество путей, проходящих через число, стоящее на k-ом месте, равно $\left(C_n^k\right)^2$. **34.** $C_{11}^4 = 330$. **35.** $C_{14}^2 = 91$. **36.** Нужно указать 8 мест из 30, в которых будут произведены разрезы. Ответ: C_{30}^8. **37.** C_{34}^4. **38.** а) C_{21}^9; б) C_{17}^9; в) $10!/2! = 1814400$. **39.** а) n^m; б) C_{n+m-1}^m. **40.** $C_{22}^2 = 231$. **41.** $C_{16}^8 \cdot C_{10}^8$. **42.** $C_8^2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 756$. **43.** $\left(C_9^5\right)^3$. **44.** а) n^n; б) C_{2n-1}^{n-1}. **45.** $C_{11}^5 C_{10}^5$. **46.** $1000000 = 2^6 \cdot 5^6$. Каждый множитель однозначно определяется количеством двоек и пятерок, входящих в его разложение. Суммарное количество в трех множителях как двоек, так и пятерок, равно 6. Ответ:

$\left(C_8^2\right)^2 = 784$. **47.** Рассмотрите 7 оставшихся на полке книг. Между каждыми двумя соседними (и справа и слева от крайних) либо есть пустое место (от одной вынутой книги) либо нет. Набор пустых мест однозначно определяет комплект вынутых книг. Ответ: C_8^5. **48.** 3 **49.** а) $C_{30}^4 = 27405$; б) $30\cdot 29\cdot 28\cdot 27 = 657720$. **50.** Перейдите к дополнению. Ответ: $33^6 - 32^6 = 217726145$. **51.** $5! = 120$. **52.** Переберите возможные варианты двух последних цифр. а) $2\cdot 2+2=6$; б) $2\cdot 2\cdot 4^2 = 64$. **53.** $C_5^2 = 10$ **54.** $C_{20}^6\cdot C_{14}^6$. **55.** На каждом месте каждая из цифр встречается $4^2 = 16$ раз. Ответ: 17760. **56.** Число 6 представляется в виде суммы четырех натуральных слагаемых двумя способами: $6=1+1+1+3$, $6=1+1+2+2$. Ответ: $4\cdot C_{13}^3\cdot 13^3 + C_4^2\cdot 13^2\cdot \left(C_{13}^2\right)^2 = 8682544$. **57.** $C_6^3\cdot C_{13}^3 = 5720$. **58.** $10+9^2+9^3+9^4+9^5+9^6 = 597871$. **59.** $C_4^2\cdot C_{32}^{16}/2$. **60.** а) Она может побывать или не побывать на каждом из 28 некрайних полей. Ответ: 2^{28}. б) Надо представить число 29 в виде суммы 7 натуральных слагаемых (порядок важен!). Ответ: C_{28}^6. **61.** $C_{10}^0\cdot C_9^4C_{17}^4 + C_{10}^1C_9^3C_{18}^4 + C_{10}^2C_9^2C_{19}^4 + C_{10}^3C_9^1C_{20}^4 + C_{10}^4C_9^0C_{21}^4 = 15638850$. **62.** Каждый прямоугольник однозначно определяется своим левым нижним и правым верхним углами. Ответ: $pq(n-p+1)(m-q+1)$. **63.** Из условия задачи следует, что кузнечик должен совершить всего 27 прыжков – по 9 в каждом направлении. Обозначим направления буквами A, B и C. Каждый путь однозначно определяется последовательностью длины 27, в которой буквы A, B и C встречаются по 9 раз. Ответ: $27!/(9!)^3$.

Инвариант

5. В качестве инварианта рассмотрите следующую величину: пусть каждый чиж получает номер, равный номеру елки, на которой он сидит (считая слева). Тогда сумма номеров чижей S – инвариант. **7.** Докажите, что четность числа черных клеток среди четырех угловых не меняется при перекрашиваниях. **8.** Задача решается как и задача 7 – надо лишь рассмотреть другие четыре клетки, а именно: $a1$, $a2$, $b1$, $b2$ (в шахматной нотации). **9.** Проверьте, что четность суммы чисел на доске неизменна. **13.** а) Используйте раскраску доски в два цвета одноцветными и чередующимися по цвету строками. в) Используйте аналогичную раскраску в четыре цвета. **14.** Рассмотрим раскраску в 4 цвета, указанную на рис.125. Тогда каждая плитка 2×2 содержит ровно одну клетку цвета 1, а каждая плитка 1×4 – ни одной или две клетки цвета 1. Следовательно, четность числа плиток 2×2 должна совпадать с четностью числа клеток цвета 1, что и доказывает утверждение задачи.

1	4	1	4	1
2	3	2	3	2
1	4	1	4	1
2	3	2	3	2
1	4	1	4	1

Рис. 125

16. Инвариант – остаток числа голов Змея Горыныча по модулю 7. **17.** Инвариант – остаток по модулю 11 разности между числом диллеров и число даллеров у финансиста. **18.** Нельзя. Проследите за остатками по модулю 4. **20.** Используйте то, что у суммы цифр тот же остаток при делении на 9, что и у самого числа. **21.** Ее тип – B. Проследите за четностью разностей $N(A)-N(B)$, $N(B)-N(C)$, $N(C)-N(A)$, где $N(X)$ – число амеб типа X. **22.** Сумма номеров строки и столбца при каждом ходе либо уменьшается на 2, либо увеличивается на 1. Значит, ее остаток по модулю 3 каждый раз увеличивается на 1. Так как всего ходов n^2-1, а в конце сумма должна быть на 1 больше исходной, то мы получаем, что n^2-2 должно делиться на 3, что невозможно. Следовательно, такого обхода нет. **Примечание:** Обратите внимание на то, что решение изложено без упоминания слова "инвариант". Что же здесь инвариантно? **23.** Сумма чисел в таблице не зависит от способа ее подсчета. Именно в этом смысле это – задача на инвариант. **24–26.** Нельзя. В задаче 24 инвариантом служит четность числа неправильно стоящих стаканов; в задаче 25 нужно пометить четыре вершины куба такие, что никакие две из них не соединены ребром, после чего рассмотреть разность между суммой чисел в помеченных вершинах и суммой чисел в непомеченных вершинах; в задаче 26 нужно занумеровать сектора числами от 1 до 6 по порядку, после чего рассмотреть разность между суммой чисел в "четных" секторах и суммой чисел в "нечетных" секторах. **27.** В точности те карточки (a,b), для которых $a<b$ и $b-a$ делится на 7. **28.** Нельзя. Рассмотрите величину s, равную сумме числа камней и числа куч. **29.** Нет, не может. В качестве инварианта рассмотрите четность величины p, равной числу пар (a,b), в которых число a стоит правее числа b и при этом $a>b$. **30.** Нельзя. Рассмотрите сумму квадратов чисел тройки.

Графы-2

2. Поскольку из всех вершин, кроме одной выходит по 4 ребра, то и из пятой вершины также должно выходить четыре ребра. **3.** Используйте индукцию по *n.* **4.** а) Верно. Каждая вершина соединена с каждой. б) Нет – см. рисунок 126. в) Нет – см. рисунок 127.

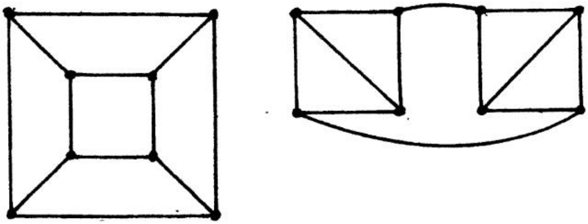


Рис. 126

Рис. 127

5. Если это ребро соединяет вершины с одинаковыми степенями, то в каждой компоненте нечетное число нечетных вершин. В противном случае только в одной компоненте будет вершина степени 2. **9.** Рассмотрим произвольную компоненту связности этого графа. Она не является деревом, так как в ней нет висячей вершины. Значит, в ней есть цикл. **10.** Предположим, что концы удаленного ребра в новом графе соединены простым путем. Тогда этот путь вместе с удаленным ребром образует в исходном графе цикл. **12.** Если нет, то удалением нескольких ребер из него можно получить дерево. **14.** Ответ: $30 \cdot 29/2 - 29 = 406$. **15.** Выделите максимальное дерево и удалите его висячую вершину. **16.** а), б) Рассмотрите "максимальное" дерево и выберите путь, соединяющий две висячие вершины. **17.** 4. **19.** Указание: каждый кусок ограничивается не менее, чем тремя ребрами. **24.** Не выполняется неравенство $3V - 6 \geq E$. **25.** Предположим противное. Тогда $2E \geq 6V$, т.е. $E \geq 3V$, что противоречит неравенству. **26.** Пусть оба эти графа – плоские. Тогда у них вместе не более, чем $(3 \cdot 11 - 6) + (3 \cdot 11 - 6) = 54$ ребра. Однако в полном графе с 11 вершинами 55 ребер. Противоречие. **27.** Докажите сначала неравенство $E \leq 3V - 6$, используя то, что из каждой вершины выходит по крайней мере 3 ребра. Обозначим количество пятиугольников через a, количество шестиугольников через b. Заметим, что $5a + 6b + 7 = 2E \leq 6F - 12 = 6(a + b + 1) - 12$. Отсюда $a \geq 13$. **29.** а) Нельзя – 12 нечетных вершин. б) Можно. **30.** Граф связен,

17 Зак. 2413.

степени всех его вершин четны. **31.** Доказательство можно провести индукцией по n. Для доказательства индукционного перехода выберем две нечетные вершины, соединим их путем и временно удалим все его ребра. Граф распадется на компоненты связности. Присоединим теперь к удаленному пути компоненты связности, которые, очевидно, не содержат нечетных вершин. **32.** Рассмотрите двух незнакомых ученых и их знакомых. **33.** Предположим противное. Тогда для каждого числа от 68 до 101 есть ровно три человека, имеющие такое число знакомых. Но тогда количество людей, имеющих нечетное число знакомых, нечетно. Противоречие. **34.** Соединим эти две вершины путем. Пусть a – его длина. Расстояние от любой вершины до двух данных отличаются на величину, имеющую ту же четность, что и a. **35.** Покажите, что любое дерево с 6 вершинами изоморфно одному из шести графов на рис.128.

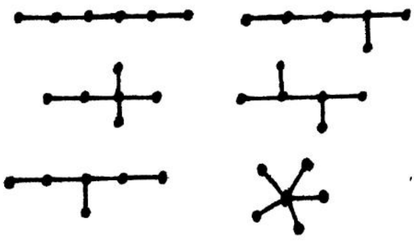


Рис. 128

36. в) Рассмотрите произвольный город X, город A, в который из X нельзя долететь не более, чем с одной пересадкой, и город B, в который из X нельзя доехать на поезде не более, чем с одной пересадкой. Заметьте, что эти города соединены каким-то видом транспорта. г) Пусть из A в B нельзя долететь не более, чем с двумя пересадками; из C в D нельзя доехать на поезде не более, чем с двумя пересадками. Рассмотрите граф сообщений четырех упомянутых городов. **37.** См. задачу 28 главы “Принцип Дирихле”. **38.** Из произвольной вершины выходит по крайней мере 6 ребер одного цвета. Воспользуйтесь результатом задачи 37. **39.** Пусть есть вершина, из которой выходит 6 синих ребер. Тогда воспользуемся результатом задачи 37. Пусть есть вершина, из которой выходит не более 4 синих ребер (из всех 9-ти вершин не может выходить по 5 синих ребер). Тогда из нее выходит по крайней мере 4 красных ребра. **40.** Из произвольной вершины выходит по крайней мере 9 ребер одного цвета. Воспользуйтесь результатом задачи 39. **42.** Пусть в столицу входит a дорог. Тогда общее число “входящих дорог равно $21 \cdot 100 + a$, а общее количество "выходящих" дорог не больше $20 \cdot 100 + (100 - a)$. Поэтому $21 \cdot 100 + a \leq 20 \cdot 100 + (100 - a)$, то есть $2a \leq 0$. Таким образом, $a = 0$. **43.** Занумеруйте города и направьте движение от городов с меньшими номерами к городам с большими номерами. **44.** Рассмотрите сначала вершины, соединенные с любой фиксированной вершиной A, затем – новые вершины, соединенные с ними и т.д. При этом ребра, соединяющие добавляемые вершины с уже рассмотренными, ориентируем в направлении к новым вершинам. **45.** Рассмотрим эйлеров цикл, проходящий по всем ребрам графа, и ориентируем все ребра в соответствии с порядком прохождения цикла. **46.** Докажите, что существует замкнутый путь вдоль стрелок, проходящий по каждому ребру ровно один раз. **48.** Если существует команда, выигравшая и у команды-победительницы, и у всех команд, проигравших победителям, то у такой команды очков больше, чем у победителей турнира, что невозможно. **49.** База – для трех городов. Для доказательства индукционного перехода удалите город, имеющий и входящие и выходящие дороги. **51.** Пусть А и В набрали одинаковое количество очков, причем В выиграла у А. Тогда если для любой команды С, у которой выиграла А, выиграла и В, то у В должно быть очков больше, чем у А. Следовательно, есть команда С такая, что А выиграла у С, а С выиграла у В. **52.** Пусть из города А нельзя доехать до города В. Рассмотрите города, в которые входят дороги из А, и города, из которых выходят дороги в В. б) Вычислите общее количество дорог, выходящих из первой группы городов. Заметьте, что этих дорог достаточно много для того, чтобы хотя бы одна из них кончалась в городе из второй группы. **53.** Пусть удалено ребро между вершинами А и В. Выберем две произвольные вершины. Рассмотрите три случая: обе эти вершины не совпадают с А или В, одна из них совпадает с А или с В, эти вершины – А и В.

Геометрия

1. Указание: выясните, какой может быть длина третьей стороны в треугольнике, две стороны которого имеют длины a и b. **2.** Указание: докажите неравенства $AM > AB - BC/2$ и $AM > AC - BC/2$. **3.** Указание: рассмотрите окружность, вписанную в треугольник, и длины отрезков, на которые точки касания делят стороны. **4.** Указание: проведите доказательство от противного. **5.** Указание: используйте неравенства $\angle BAM > \angle ABM$ и $\angle CAM > \angle ACM$. **6.** Это простое упражнение на применение неравенства № 1. **7.** Так как $AB + CD < AC + BD$ (кстати, почему?), то, складывая это неравенство с данным в условии, получаем требуемое. **9.** Раз

$\angle A > \angle A_1$, то $BD > B_1D_1$, и значит $\angle C > \angle C_1$. Если же $\angle B > \angle B_1$, то аналогично $\angle D > \angle D_1$, чего быть не может, так как сумма углов в четырехугольниках одна и та же. **10.** Надо достроить треугольник ABC до параллелограмма $ABDC$ и применить неравенство № 2. **11.** Из неравенства № 2 следует, что $\angle BAC > \angle BCA = \angle DCE > \angle DEC = \ldots > \angle KAI = \angle BAC$ – противоречие! **12.** а) Приложите друг к другу боковыми сторонами три копии данного треугольника. б) Отложите на стороне AB отрезок AE, равный основанию AC, и докажите, что $EB > CE > AC$. **13.** Если обозначить три указанных периметра через a, b, c, то $a > c$, $a + c < b$, $2a > b$. Дальше действуйте перебором. **14.** "Разверните" периметр четырехугольника, как это показано на рис.129.

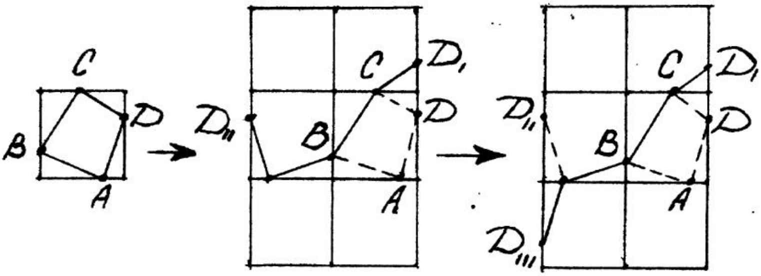


Рис. 129

15. Совместите последовательно вершины данных треугольников. **16.** а) Докажите, что любая точка D остается на месте. б) Примените результат пункта а). **17.** а) Это вновь параллельный перенос. б) Возьмите две параллельные прямые, перпендикулярные направлению переноса, расстояние между которыми равно половине длины переноса. **18.** Да, всегда. Достаточно перевести центр в центр. **19.** Только тождественный поворот. Осевая симметрия может, в отличие от центральной. **20.** Да, это верно. Убедитесь, что фигура самосовмещается при повороте на 24 градуса вокруг точки O. **21.** Указание: используйте центральную симметрию. **22, 24.** Указание: используйте параллельный перенос. **25, 26.** Указание: используйте поворот на 90 и 60 градусов. **27.** а) Если эти точки X и Y лежат по разные стороны от данной прямой L, то то $M = (XY) \cap L$; если же по разные, то $M = (XY_1) \cap L$, где Y_1 симметрична точке Y относительно L. б) Если X и Y – по одну сторону от L, то $M = (XY) \cap L$; если по разные, то $M = (XY_1) \cap L$, где Y_1 симметрична Y относительно L. **28.** Отразите первую ось относительно второй. **29.** а)

А, В, Д, Е, Ж, З, К, Л, М, Н, О, П, С, Т, Ф, Х, Ш, Э, Ю. б) Ж, И, Н, О, Ф, Х. Конечно, здесь ответ частично зависит от написания букв. **30.** Нет. **31.** Это точки, из которых отрезок OS (O – центр поворота) виден под углом $90° + \alpha/2$ или $90° - \alpha/2$ – уточните это ГМТ (α – угол поворота). **34.** Нет, иначе сумма этих углов будет равна 180°. **35, 36.** Это простейшие упражнения. **38.** Угол AOD равен, очевидно, 60°. Далее, треугольник DOC – равнобедренный и мы получаем $\angle DOC = 75°$. Следовательно, ответ: $\angle AOC = 135°$. **39.** Углы ABC и ABD равны 90° и значит, $\angle CBD = 180°$, ч.т.д. **40.** а) Пусть $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$. Тогда $S(ABC) \le ab/2$, $S(CDA) \le cd/2$ и осталось лишь сложить эти неравенства. б) Используйте пункт а) и то, что четырехугольник $ABCD$ можно, разрезав по диагонали AC и перевернув одну из частей, превратить в четырехугольник с той же площадью, но с порядком сторон a, b, d, c. **42.** Так как $bc/2 \ge 1$, то $b^2 \ge 2$. **43.** Да, такое возможно. Рассмотрите треугольник ABC, в котором $AC = 2002 + \varepsilon$, $AB = BC = 1001$, где ε – маленькое положительное число. **44.** Разрежьте $ABCD$ на две части диагональю AC и докажите требуемое равенство для каждой части отдельно. **45.** Ответ: 12. **46.** Ответ: 7. Площадь каждого из трех "дополнительных" треугольников равна 2 – докажите это. **47.** Равенство площадей равносильно равенству высот, опущенных из A и C соответственно на BM, а это ввиду наличия соответствующих равных треугольников, равносильно тому, что точка пересечения (BM) и $[AC]$ делит $[AC]$ пополам. **48.** Воспользуйтесь результатом задачи 44. **49.** Докажите, что треугольники ABD и ACD равновелики. **50.** Если дана точка O в равностороннем треугольнике ABC, то можно подсчитать площадь треугольника ABC как сумму площадей треугольников OAB, OBC и OAC, опуская перпендикуляры из O на стороны треугольника.

Системы счисления

Упражнения **1.** а) 2; б) n. **2.** $10101_2 = 21$, $10101_3 = 91$, $211_4 = 37$, $126_7 = 69$, $158_{11} = 184$. **3.** $100_{10} = 1100100_2 = 10201_3 = 1210_4 = 400_5 = 244_6 = 202_7 = 144_8 = 121_9$. **4.** $111_{10} = A1_{11}$. **6.** а) 11001_2; б) 21202_3. **7.** а) 2626_7; б) 1003_7.

Задачи **1.** В 12-ричной. **2.** а) Да (7-ричная система счисления). б) Нет. Второе равенство могло бы выполняться только в 5-ричной системе счисления. **3.** Число четно тогда и только тогда, когда а) в его троичной записи четное число единиц (сумма цифр четна). б) его n-ичная запись оканчивается четной цифрой при четном n, сумма цифр четна при нечетном n. **4.** $23451 + 15642 = 42423$.

7-ричная система счисления. **5.** Пусть n – основание системы счисления. Тогда $n^2 = (2n+4)+(3n+2)$, то есть $n^2-5n-6=0$. Отсюда $n=-1$ или $n=6$. Ответ: $n=6$. **6.** а) В n-ичной системе счисления запись числа заканчивается k нулями тогда и только тогда, когда это число делится на n^k. б) Пусть m – делитель n. Последняя цифра n-ичной записи числа делится на m тогда и только тогда, когда само число делится на m. **7.** а) Пусть m – делитель $n-1$. Сумма цифр n-ичной записи числа делится на m тогда и только тогда, когда само число делится на m. б) Знакопеременная сумма цифр n-ичной записи числа делится на $n+1$ тогда и только тогда, когда само число делится на $n+1$. в) Пусть m – делитель $n+1$. Знакопеременная сумма цифр n-ичной записи числа делится на m тогда и только тогда, когда само число делится на m. **12.** Набор чисел такой же, как и в задаче 11.

Неравенства

2. а) $3^2=9>8=2^3$, и значит, $3^{200}>2^{300}$. б) $2^{10}=1024<2187=3^7$, и значит, $2^{40}<3^{28}$. в) 4^{53}. **4.** $8^{91}>7^{92}$. **6.** $|2^3-3^2|=1$, $|3^3-5^2|=2$, $|6^2-2^5|=4$, $|3^3-2^5|=5$, $|2^7-5^3|=3$, $|11^2-5^3|=4$, $|11^2-2^7|=7$. **8.** Обозначим число в числителе через x. Тогда вся дробь равна $a=x/(10x-9)$, $1/a=10-9/x$. Отсюда видно, что чем больше x, тем меньше a. Итак, первая дробь больше. **9.** Ответим на более общий вопрос: когда x/y больше, чем $(x+1)/(y+1)$? Выясним это при положительных x и y:

$$\frac{x}{y}-\frac{x+1}{y+1}=\frac{x-y}{y(y+1)}.$$

Следовательно, все зависит от того, что больше: x или y. В данном случае $y>x$ и потому $1234568/7654322$ – большее из двух данных чисел. **10.** 100^{100} – больше, так как $100^2>150\cdot 50$. **11.** $(1.01)^{1000}>1000$. В самом деле, $(1.01)^8>1.08$; $(1.01)^{1000}=((1.01)^8)^{125}>(1.08)^{125}$. Далее, $(1.08)^5>1.4$; $(1.01)^{1000}>(1.4)^{25}>(1.4)^{24}>(2.7)^8>7^4=2401>1000$, что и требовалось доказать. **13.** Поскольку $99!>100$, то $A<B$. **17.** $1+x-2\sqrt{x}=(\sqrt{x}-1)^2\geq 0$. **19, 20.** Перегруппировав члены, получаем $(x-y)^2\geq 0$. **21.** Приводим к общему знаменателю и получаем $(x-y)^2\geq 0$. **23.** Надо перемножить три неравенства: $a+b\geq 2\sqrt{ab}$, $b+c\geq 2\sqrt{bc}$, $c+a\geq 2\sqrt{ca}$. **24.** $(\sqrt{ab}-\sqrt{ac})^2+(\sqrt{ac}-\sqrt{bc})^2+(\sqrt{bc}-\sqrt{ab})^2\geq 0$. **25.** $x^2+y^2+1-xy-x-y=((x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2)/2\geq 0$. **27.** $x^4+y^4+8=x^4+y^4+4+4\geq 4\sqrt[4]{x^4y^4\cdot 4\cdot 4}=8xy$. **28.** $a+b+c+d\geq 4\sqrt[4]{abcd}$; $1/a+1/b+1/c+1/d\geq 4\sqrt[4]{1/abcd}$. Осталось лишь перемножить неравенства. **29.** $a/b+b/c+c/a\geq 3\sqrt[3]{(a/b)\cdot(b/c)\cdot(c/a)}=3$. **42.** Неравенство доказывается

сложением двух очевидных неравенств:

$$(2^k-1)(2^l-1)(2^m-1)>0;$$
$$2^{k+l+m}>2^k+2^l+2^m\,,$$

так как $2^{k+l+m}>2^{k+2}=4\cdot 2^k>2^k+2^l+2^m$ (при $k\geq l\geq m$). **43.** $ab+bc+ca=((a+b+c)^2-a^2-b^2-c^2)/2=-(a^2+b^2+c^2)/2\leq 0$. **45.** Перенося все члены в одну часть, получаем $(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})/\sqrt{xy}\geq 0$. **47.** Основная идея: если перестановка (c_i) не тождественная, то есть номера i и j такие, что $c_i>c_j$ при $i<j$. Тогда, поменяв c_i и c_j местами, мы увеличим сумму произведений. В самом деле,

$$c_ia_i+c_ja_j-c_ja_i-c_ia_j=(a_i-a_j)(c_i-c_j)<0\,.$$

Такими двойными перестановками мы приведем перестановку (c_i) к тождественной, в то время как сумма произведений не уменьшится. **53.** База очевидна. Переход: $1+1/\sqrt{2}+\ldots+1/\sqrt{n-1}+1/\sqrt{n}\ <\ 2\sqrt{n-1}+1/\sqrt{n}\ <\ 2\sqrt{n}$, так как $1/\sqrt{n}<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})=2/(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})$. **54.** Решение совершенно аналогично предыдущему. Нужно лишь поменять знаки неравенств. **58.** База $n=4$ проверяется непосредственно. Переход: $(n+1)!=(n+1)n!>2^n(n+1)>2\cdot 2^n=2^{n+1}$. **59.** База $n=1$ очевидна. Переход: $2^{n+1}=2\cdot 2^n>2\cdot 2n=4n>2(n+1)$ (при $n>1$). **60.** При $n\geq 10$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Общая литература

1. Барр Ст. Россыпи головоломок. – М.: Мир, 1978.
2. Бизам Д., Герцег Я. Игра и логика. – М.: Мир, 1975.
3.* Бизам Д., Герцег Я. Многоцветная логика. – М.: Мир, 1978.
4. Виленкин Н.Я. Рассказы о множествах. – М.: Наука, 1969.
5.* Гарднер М. Математические головоломки и развлечения. – М.: Мир, 1971.
6.* Гарднер М. Математические досуги. – М.: Мир, 1972.
7.* Гарднер М. Математические новеллы. – М.: Мир, 1974.
8. Гарднер М. Есть идея! – М.: Мир, 1982.
9. Гарднер М. А ну-ка, догадайся! – М.: Мир, 1984.
10. Гарднер М. Крестики-нолики. – М.: Мир, 1988.
11. Гарднер М. Путешествие во времени. – М.: Мир, 1990.
12. Дынкин Е.Г., Успенский В.А. Математические беседы. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1952.
13. Кордемский Б.А. Математическая смекалка. – М.: ГИТТЛ, 1958.
14. Линдгрен Г. Занимательные задачи на разрезание. – М.: Мир, 1977.
15. Радемахер Г.Р., Теплиц О. Числа и фигуры. – М.: Физматгиз, 1962.
16. Смаллиан Р. Как же называется эта книга? – М.: Мир, 1981.
17. Смаллиан Р. Принцесса или тигр? – М.: Мир, 1985.
18. Смаллиан Р. Алиса в стране Смекалки. – М.: Мир, 1987.
19. Уфнаровский В.Л. Математический аквариум. – Кишинев: Штиинца, 1987.

2. Методическая литература

20.* Гусев В.А., Орлов А.И., Розенталь А.Л. Внеклассная работа по математике в 6-8 классах. – М.: Просвещение, 1977, 1984.
21. Математический кружок. Первый год обучения, 5-6 классы. (коллектив авторов). – М.: Изд-во АПН СССР, 1990, 1991.
22. Пойа Д. Как решать задачу. – М.: Учпедгиз, 1959, 1961.
23. Пойа Д. Математическое открытие. – М.: Наука, 1970.
24.* Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. – М.: Наука, 1975.
25. Сикорский К.П.(сост.). Дополнительные главы по курсу математики 7-8 классов для факультативных занятий. – М.: Просвещение, 1969.

3. Литература для младших школьников

26. Бобров С. Волшебный двурог. – М.: Детская литература, 1967.
27. Левшин В. Три дня в Карликании. Сказка да не сказка. – М.: Детская литература, 1964.
28. Левшин В., Александрова Э. Черная маска из Аль-Джебры. Путешествие в письмах с прологом. – М.: Детская литература, 1965.
29. Левшин В. Фрегат капитана Единицы. – М.: Детская литература, 1968.
30. Левшин В. Магистр Рассеянных Наук: математическая трилогия. – М.: Детская литература, 1987.

4. Задачники

31.* Бабинская И.Л. Задачи математических олимпиад. – М.: Наука, 1975.
32.* Бураго Д.Ю., Финашин С.М., Фомин Д.В. Факультативный курс математики для 6-7 классов в задачах. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.
33.* Васильев Н.Б., Гутенмахер В.Л., Раббот Ж.М., Тоом А.Л. Заочные математические олимпиады. – М.: Наука, 1986.
34. Васильев Н.Б., Молчанов С.А., Розенталь А.Л., Савин А.П. Математические соревнования (геометрия). – М.: Наука, 1974.
35. Гальперин Г.А., Толпыго А.К. Московские математические олимпиады. – М.: Просвещение, 1986.
36. Германович П.Ю. Сборник задач по математике на сообразительность. – М.: Учпедгиз, 1960.
37. Дынкин Е.Б., Молчанов С.А., Розенталь А.Л. Математические соревнования. Арифметика и алгебра. – М.: Наука, 1970.
38. Дынкин Е.Б., Молчанов С.А., Розенталь А.Л., Толпыго А.К. Математические задачи. – М.: Наука, 1971.
39. Зубелевич Г.И. Сборник задач Московских математических олимпиад (V–VIII классы). – М.: Просвещение, 1971.
40.* Леман А.А. Сборник задач Московских математических олимпиад. – М.: Просвещение, 1965.
41. Островский А.И. 75 задач по элементарной математике – простых, но .... – М.: Просвещение, 1966.
42. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. Части 1, 2. – М.: Наука, 1986.
43. Рубанов И.С., Гершкович В.Я., Молочников И.Е. Методические материалы для внеклассной работы со школьниками по математике. – Л.: Ленинградский дворец пионеров, 1973.

44. Сергеев И.Н., Олехник С.Н., Гашков С.Б. Примени математику. – М.: Наука, 1989.

45.* Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра. – М.: Наука, 1965.

46. Штейнгауз Г. Сто задач. – М.: Наука, 1976.

5. К теме "Комбинаторика"

47.* Виленкин Н.Я. Комбинаторика. – М.: Наука, 1964.

48. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. – "Квант", 1971, № 1.

49.* Виленкин Н.Я. Популярная комбинаторика. – М.: Наука, 1975.

50. Ежов И.И. и др. Элементы комбинаторики. – М.: Наука, 1977.

51. Успенский В.А. Треугольник Паскаля ("Популярные лекции по математике", вып.43). – М.: Наука, ...

6. К теме "Делимость"

52. Башмаков М.И. Нравится ли вам возиться с целыми числами? – "Квант", 1971, № 3.

53. Вагутен В.Н. Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики. – "Квант", 1972, № 6.

54. Воробьев Н.Н. Признаки делимости ("Популярные лекции по математике", вып. 39). – М.: Наука, 1963.

55. Гельфонд А.О. Решение уравнений в целых числах ("Популярные лекции по математике", вып.8). – М.: Наука, 1983.

56.* Егоров А.А. Сравнения по модулю и арифметика остатков. – "Квант", 1970, № 5.

57.* Калужнин Л.А. Основная теорема арифметики ("Популярные лекции по математике", вып.47). – М.: Наука, 1969.

58.* Оре О. Приглашение в теорию чисел. (Библиотечка "Квант"). – М.: Наука, 1980.

См. также [25].

7. К теме "Принцип Дирихле"

59. Болтянский В.Г. Шесть зайцев в пяти клетках. – "Квант", 1977, № 2.

60. Орлов А.И. Принцип Дирихле. – "Квант", 1971, № 3.

См. также [19]; [20]; [42], гл.20; [43].

8. К теме "Графы"

61. Березина Л.Ю. Графы и их применение. – М.: Просвещение, 1979.
62.* Оре О. Графы и их применение. – М.: Мир, 1965.
63. Уилсон Р. Введение в теорию графов. – М.: Мир, 1977.

См. также [12]; [20].

9. К теме "Геометрия"

64. Адамар Ж. Элементарная геометрия. Часть 1. Планиметрия. – М.: Учпедгиз, 1948.
65.* Гусев В.А. и др. Сборник задач по геометрии для 6–8 классов. – М.: Просвещение, 1975.
66. Кантор П.Р., Раббот Ж.М. Площади многоугольников. – "Квант", 1972, № 2.
67. Кокстер Г. Введение в геометрию. – М.: Наука, 1966.
68. Коксетер Г., Грейтцер С. Новые встречи с геометрией. – М.: Наука, 1978.
69. Пидоу Д. Геометрия и искусство. – М.: Мир, 1979.
70. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Избранные задачи и теоремы планиметрии. – М.: Наука, 1967.
71. Яглом И.М. Геометрические преобразования, т.1. – М.: Гостехиздат, 1955.

См. также [34]; [42]; [44].

10. К теме "Игры"

72. Гик Е.Я. Занимательные математические игры. – М.: Знание, 1987.
73. Касаткин В.Н., Владыкина Л.И. Алгоритмы и игры. – Киев: Радяньска школа, 1984.
74.* Орлов А.И. Ставь на минус. – "Квант", 1977, № 3.

См. также [20]; [5], гл. 8, 14, 39; [6], гл. 5, 30, 33; [7], гл. 7, 18, 23, 26, 33, 36.

11. К теме "Индукция"

75. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи ("Популярные лекции по математике", вып.6). – М.: Наука, 1978.
76. Головина Л.И., Яглом И.М. Индукция в геометрии ("Популярные лекции по математике", вып.21). – М.: ГИТТЛ, 1956.

77. Маркушевич А.И. Возвратные последовательности ("Популярные лекции по математике", вып.1). – М.: Наука, 1975.
78.* Соминский И.С. Метод математической индукции ("Популярные лекции по математике", вып.3). – М.: Наука, 1965, 1974.
79.* Соминский И.С., Головина Л.И., Яглом И.М. О математической индукции. – М.: Наука, 1967.
См. также [19]; [42], гл.27.

12. К теме "Инвариант"

80.* Ионин Ю.И., Курляндчик Л.Д. Поиск инварианта. – "Квант", 1976, № 2.
81. Толпыго А.К. Инварианты. – "Квант", 1976, № 12.
См. также [19]; [42], гл.22.

13. К теме "Системы счисления"

82.* Фомин С.В. Системы счисления ("Популярные лекции по математике", вып.40). – М.: Наука, 1968.
83. Яглом И.М. Системы счисления. – "Квант", 1970, № 6.
84. Яглом И.М. Две игры со спичками. – "Квант", 1971, № 2.
См. также [5], гл.35; [10], гл.14; [25]; [58];

14. К теме "Неравенства"

85.* Беккенбах Э. Беллман Р. Введение в неравенства. – М.: Мир, 1965.
86. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. – М.: Мир, 1965.
87.* Коровкин П.П. Введение в неравенства ("Популярные лекции по математике", вып.5). – М.: Наука, 1983.
88. Кречмар В.А. Задачи по алгебре. – М.: Наука, 1964.
89. Невяжский Г.Л. Неравенства. – М.: Учпедгиз, 1947.
90. Пинтер Л., Хегедыш Й. Упорядоченные наборы чисел и неравенства. – "Квант", 1985, № 12.

СОДЕРЖАНИЕ

С. А. Генкин, И. В. Итенберг, Д. В. Фомин

ЛЕНИНГРАДСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КРУЖКИ

Ответственный за выпуск Д. В. Фомин

Художник А. С. Паков

Технический редактор Е. С. Ивонина

Подписано к печати 4.10.94 г. Формат $60x84^1/_{16}$.
Бумага типографская № 2. Печать офсетная с готовых фотоформ.
Усл. печ. л. 15,81. Заказ 2413. Тираж 30 000.

Издательство «АСА»
г. Киров, ул. Московская, 122

Кировская областная типография.
610 000, г. Киров, Динамовский пр., 4.

Ленинградские математические кружки: пособие для внеклассной работы. Киров, издательство «АСА», 1994.— 272 с.

Книга обобщает опыт, накопленный многими поколениями преподавателей школьных математических кружков при математико-механическом факультете ЛГУ и ранее недоступный массовому читателю.
Книга построена в форме задачника, отражающего тематику первых двух лет работы типичного ленинградского кружка. Она вполне обеспечивает материалом 2—3 года работы школьного математического кружка или факультатива для учащихся 6—9, а отчасти и 10—11 классов. Все тематические главы снабжены методическими комментариями для учителя.
Пособие адресовано учителям математики и интересующимся математикой учащимся.

ISBN 5—87400—072—0