

حل مساله فروشنده دوره‌گرد احتمالی توسط اتوماتای یادگیر توزیع شده

محمد علیپور **محمد علیپور**

آزمایشگاه سیستمهای نرم افزاری
دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات
دانشگاه صنعتی لرستان
تهران ایران
(alipour, meybodi)@ce.aut.ac.ir

گیرید. هدف مساله فروشنده دوره‌گرد احتمالی یافتن توری است با کمترین متوسط طول بطوریکه اگر هر زیر مجموعه تصادفی از مجموعه شهرها را انتخاب کرده و با همان ترتیبی که در این تور قرار گرفته‌اند بازدید نمائیم دارای کمترین متوسط طول باشند. به این تور که دارای کمترین طول متوسط است، یک تور اولیه^۱ گفته می‌شود. مساله فروشنده دوره‌گرد احتمالی از مسائل NP-hard بوده [۱, ۳]. و برای اولین بار در رساله‌ی دکترای جیلت^۲ معرفی شده است [۴]. استراتژی‌های مختلفی برای تعیین یک تور اولیه گزارش شده است. استراتژی یک تور اولیه شامل دو جزء می‌باشد. تعیین یک راه حل اولیه و یک روش بروزرسانی. یک راه حل اولیه، توری است که در آن طول هر زیر مجموعه ممکن از شهرها، کمینه می‌باشد. روش بروزرسانی، شهرهایی که بازدید نخواهند شد را حذف نموده و بقیه شهرها را با همان ترتیبی که در تور اولیه ظاهر شده‌اند، بازدید می‌کند. مثالی ساده از روش بروزرسانی بقرار زیر می‌باشد: هر زیر مجموعه از شهرها را بتربیتی که در تور اولیه ظاهر شده‌اند ملاقات کن و از شهرهایی که در تور اولیه بوده و متعلق به این زیر مجموعه نمی‌باشند، صرفنظر کن (پرش از شهرهایی که نیاز به ملاقات ندارند). این استراتژی، استراتژی پرش^۳ نامیده می‌شود.

تاکنون راهکارهای الگوریتمی و مکاشفه‌ای مختلفی برای یافتن جواب بهینه PTSP گزارش شده است [۵]. رسی گاویولی^۴ از قوانین مکاشفه‌ای به نامهای نزدیکترین همسایه و معیار پس انداز^۵ استفاده کرددند [۶].

چکیده: در مساله فروشنده دوره‌گرد احتمالی فروشنده دوره‌گرد، هر شهر با احتمال معینی مورد بازدید قرار می‌گیرد و هدف پیدا کردن یک تور اولیه است که نه تنها دارای حداقل طول متوسط می‌باشد بلکه اگر از هر زیر مجموعه‌ی تصادفی از شهرها، با همان ترتیبی که در تور اولیه ظاهر شده‌اند، بازدید شود، دارای کمترین طول متوسط باشند. در این مقاله با استفاده از اتوماتای یادگیر توزیع شده^۶ الگوریتمی برای حل مساله فروشنده دوره‌گرد احتمالی ارائه می‌شود. الگوریتم پیشنهادی با دو الگوریتم مکاشفه ای بهترین تصادفی^۷ و مرتب سازی محوری^۸ مقایسه شده است. طبق نتایج بدست آمده الگوریتم پیشنهادی نسبت به هر دو الگوریتم فوق الذکر نتایج بهتری را تولید می‌کند.

کلمات کلیدی: فروشنده دوره‌گرد احتمالی، اتوماتاهای یادگیر، اتوماتای یادگیر توزیع شده، مسایل مشکل

۱- مقدمه

مساله فروشنده دوره‌گرد^۹ (TSP) مساله‌ای است که در آن بایستی برای تعدادی شهر که فواصل بین آنها داده شده است توری با کمترین هزینه پیدا شود که از یک شهر شروع شده ، کلیه شهرها را فقط یکبار بازدید نماید و سپس به شهر آغازین برگرد. مساله فروشنده دوره‌گرد احتمالی^{۱۰} (PTSP) یکی از انواع مساله TSP می‌باشد که در آن هر شهر با احتمال معینی که مستقل از بازدید سایر شهرها می‌باشد مورد بازدید قرار می‌

⁶ A priori tour

⁷ Jaillet

⁸ Skipping strategy

⁹ Rossi-Gavioli

¹⁰ Savings

¹ Distributed Learning Automata

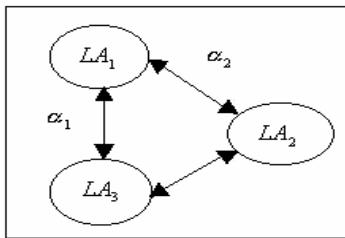
² Random Best

³ Radial Sort

⁴ TSP

⁵ PTSP

یادگیر در شبکه، اتوماتای یادگیر بر متناظر با این اقدام را فعال می‌سازد. بعنوان مثال در شکل ۱ هر اتوماتا یادگیر بر دارای دو اقدام می‌باشد. انتخاب اقدام α_2 توسط LA_1 ، اتوماتا یادگیر LA_3 را فعال خواهد کرد. اتوماتای یادگیر فعال شده (LA_3) سپس یکی از اقدامهای خود را انتخاب می‌کند که در نتیجه آن یکی از اتوماتاهای یادگیر بر متصل به آن اتوماتای یادگیر پر که متناظر با اقدام انتخاب شده می‌باشد فعال می‌شود. در هر زمان فقط یک اتوماتای یادگیر در شبکه فعال می‌باشد. بطور رسمی DLA را میتوان توسط گراف (V, E) که $DLA = \{V, E\}$ می‌باشد. مجموعه اتوماتاهای یادگیر و n تعداد اتوماتاهای یادگیر در DLA $V = \{LA_1, LA_2, \dots, LA_n\}$ مجموعه اتوماتاهای یادگیر و $E \subset V \times V$ مجموعه لیههای گراف می‌باشد، تعریف کرد. لیه (i, j) اقدام j اتوماتای یادگیر i را نشان می‌دهد. LA_j زمانی فعال خواهد شد که اقدام j اتوماتای یادگیر LA_i انتخاب شود. تعداد اقدامهای اتوماتای یادگیر LA_k ($k = 1, 2, \dots, n$) برابر درجه گره متناظر با اتوماتای یادگیر LA_k می‌باشد. برای اطلاعات بیشتر در باره اتوماتاهای یادگیر توزیع شده میتوان به مراجع [11] و [12] مراجعه نمود.



شکل ۱: اتوماتاهای یادگیر توزیع شده (DLA) با ۳ اتوماتای یادگیر

۴-تابع هدف مساله فروشنده دوره‌گرد احتمالی

برای تشریح تابع هدف مساله فروشنده دوره‌گرد احتمالی، گراف کاملی با $V = \{i = 1, 2, \dots, n\}$ گره (شهر) را که گرههای آن از مجموعه p_i می‌باشند، بعنوان نمونه مساله نظر گرفته می‌شود. فرض میکنیم احتمال ملاقات شهر i ، که مستقل از احتمال ملاقات سایر شهرها است باشد. هدف مینیمایز کردن تابع $E[L_\lambda]$ که به قرار زیر تعریف شده است میباشد.

$$E[L_\lambda] = \sum_{S \subseteq V} p(S)L_\lambda(S) \quad (1)$$

که S زیر مجموعه‌ای از گرههای V و $L_\lambda(S)$ متوسط مسافت طی شده برای بازدید شهرهای مجموعه S بترتیبی که در یک تور اولیه ظاهر شده باشند میباشد. $p(S)$ احتمال بازدید شهرهای موجود در آن مجموعه است. یک تور اولیه، (تور λ) شامل همه گرههای مجموعه V بوده و دارای طول متوسط زیر می‌باشد:

برتیماس¹¹ و همکارنش در [3] و برتیماس و هاول¹² در [2] با بررسی کامل برخی ویژگیهای P TSP تعدادی قوانین مکافنه ای که شامل قانون مکافنه ای ایجاد تور و قانون مکافنه ای بهبود تور می‌باشد پیشنهاد کرده‌اند. اغلب الگوریتمهای ارائه شده برای P TSP از تطبیق الگوریتم TSP برای ایجاد شده و یا حتی همان الگوریتم اصلی TSP باشند که در برخی موارد جوابهای P TSP خوبی تولید می‌کنند.

در این مقاله یک الگوریتم مبتنی بر اتوماتای یادگیر توزیع شده برای حل مساله فروشنده دوره گرد احتمالی ارایه میگردد. نتایج بدست آمده از الگوریتم پیشنهادی، با دو الگوریتم، مکافنه ای بهترین تصادفی و مرتب سازی محوری، مقایسه میگردد و نشان داده میشود که برای محدوده وسیعی از احتمالات بازدید شهرها، الگوریتم پیشنهادی جوابهای بهتری تولید می‌کند. در این مقاله روشی برای ارزیابی کارایی مطلق الگوریتم که براساس حد پایین تئوریکی می‌باشد معرفی و کارایی مطلق الگوریتم پیشنهادی با استفاده از این روش ارزیابی میگردد. اتوماتای یادگیر توزیع شده قبلا برای حل مساله فروشنده دوره گرد و فروشنده دوره گرد پویا مورد استفاده قرار گرفته است [20][13]. در ادامه مقاله، ابتدا در بخش ۲ اتوماتاهای یادگیر و در بخش ۳ اتوماتاهای یادگیر توزیع معرفی میگردد. در بخش ۴ تابع هدف برای مساله فروشنده دوره گرد احتمالی را تعریف میگردد. در بخش ۵ الگوریتم پیشنهادی ارایه میشود و در بخش ۶ نتایج آزمایشها ارایه میشود. بخش ۷ نتیجه گیری میباشد.

۲-اتوماتاهای یادگیر

اتوماتای یادگیر یک مدل انتزاعی است که تعداد محدودی عمل را می‌تواند انجام دهد. هر عمل انتخاب شده توسط محیطی احتمالی ارزیابی شده و پاسخی به اتوماتای یادگیر داده می‌شود. اتوماتای یادگیر از این پاسخ استفاده نموده و عمل خود را برای مرحله بعد انتخاب می‌کند. اتوماتاهای یادگیر به دو گروه با ساختار ثابت و با ساختار متغیر تقسیم بندی میگرددند برای اطلاعات بیشتر در باره اتوماتاهای یادگیر با ساختار متغیر که در این مقاله از آنها استفاده شده است می‌توان به [14],[15],[16],[17] مراجعه کرد

۳-اتوماتای یادگیر توزیع شده¹³

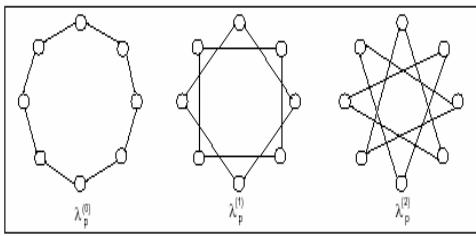
اتوماتای یادگیر توزیع شده (DLA)، شبکه‌ای از اتوماتاهای یادگیر است که برای حل یک مساله با یکدیگر همکاری می‌نمایند [2]. تعداد اقدامهای یک اتوماتا در DLA برابر تعداد اتوماتاهای یادگیر بر متصل به این اتوماتای یادگیر می‌باشد. انتخاب یک اقدام توسط یک اتوماتای

¹¹ Bertsimas

¹² Howell

¹³ Distributed Learning Automata

و بهمین صورت ادامه می‌دهیم. برای روش‌شن شدن بیشتر مطلب شکل ۲ را در نظر می‌گیریم، طبق آنچه از شکل قابل مشاهده است این نمونه ۸ شهری و متجانس (احتمال بازدید هر ۸ شهر یکسان است) بوده و $\lambda_p^{(0)}$ را میتوان بعنوان یک تور اولیه برای این نمونه در نظر گرفت. در این شکل زیر تور $\lambda_p^{(1)}$ از بازدید یک شهر و پرش از یک شهر بعدی و $\lambda_p^{(2)}$ از بازدید یک شهر و پرش از دو شهر بعدی در یک تور اولیه نمونه داده شده ($\lambda_p^{(0)}$)، حاصل شده‌اند.



شکل ۲: زیر تورهای $\lambda_p^{(0)}$ ، $\lambda_p^{(1)}$ و $\lambda_p^{(2)}$ یک نمونه ۸ شهری متجانس که طول متوسط آنها بترتیب برابر عبارتهای $L_{\lambda}^{(2)}$ ، $L_{\lambda}^{(0)}$ و $L_{\lambda}^{(1)}$ معادله ۴ می‌باشد.

۵-الگوریتم پیشنهادی

ابتدا شبکه‌ای از اتوماتاهای یادگیر که متناظر^{۱۶} با گراف مساله PTSP میباشد ایجاد می‌شود. در این شبکه هر گره (معادل یک شهر در مساله)، یک اتوماتا ی یادگیر با ساختار متغیر بوده و هر لبه‌ی خروجی این گره (جاده ای که توسط آن از این شهر میتوان به شهری دیگری رفت) یکی از اقدامهای آن اتوماتا ی یادگیر می‌باشد. تعداد اقدامهای یک اتوماتا ی یادگیر متناظر با یک شهر معادل تعداد شهرهایی می‌باشد که میتوان بطور مستقیم از این شهر به آنها مسافت کرد. خروجی DLA ترتیبی از اقدامهای انتخاب شده توسط اتوماتاهای یادگیر می‌باشد که یک تور را در گراف نشان می‌دهد. که از آن بعنوان یک تور اولیه استفاده خواهد شد. محیط از طول این تور برای تولید خروجی استفاده می‌کند. این خروجی با توجه به مطلوب یا نامطلوب بودن آن، باعث پاداش و یا جریمه دادن به اقدامهای اتوماتاهای یادگیر واقع در این تور (تور هامیلتونی ایجاد شده البته اگر تور هامیلتونی در گراف وجود داشته باشد) می‌شود.

قبل از اینکه به شرح الگوریتم پیشنهادی بپردازیم بایستی به این نکته اشاره نمود که آزمایش‌های انجام شده نشان داده است که که اگر یک اتوماتای یادگیر فعال فقط از بردار احتمال اقدامها برای انتخاب اقدام خود استفاده کند، جوابهای بدست آمده تقریباً غیر قابل قبول بوده و همچنین نرخ همگرانی الگوریتم بسیار پایین می‌باشد. جهت رفع این مشکل، به هر اتوماتای یادگیر اجازه داده شد در انتخاب اقدام خود، علاوه بر استفاده از

$$p(S) = \prod_{i \in S} p_i \prod_{i \in V-S} (1-p_i) \quad (2)$$

تابع هدف مساله فروشنده دوره‌گرد احتمالی (فرمول ۱) در زمان $O(n^2)$ قابل ارزیابی است (Jaillet [4]). اگر یک تور اولیه، $\lambda = (1, 2, \dots, n)$ را در نظر بگیریم، در اینصورت طول متوسط آن از رابطه زیر قبل محاسبه است:

$$\begin{aligned} E[L_{\lambda}] &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n d_{ij} p_i p_j \prod_{k=i+1}^{j-1} (1-p_k) + \\ &\quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} d_{ij} p_i p_j \prod_{k=i+1}^n (1-p_k) \prod_{l=1}^{i-1} (1-p_l) \end{aligned} \quad (3)$$

رابطه فوق با در نظر گرفتن احتمال بازدید هر یک از کمانهای موجود در گراف نمونه مساله، و پرش از شهرهایی که نیاز به بازدید ندارند، بدست زمانی مورد استفاده قرار خواهد (i, j) می‌آید. بعنوان مثال کمان (i, j) می‌آید. بعنوان مثال کمان p_i, p_j باشیستی بازدید شده و باید با احتمال j و i از گرفت که هر دو شهر حرکت کرده و از شهرهایی که در یک تور j به شهر i مستقیماً از شهر $i+1, i+2, \dots, j-1$ اولیه بین این دو شهر قرار دارند، صرفنظر از شهر (پرش) نمائیم و یا بعبارتی شهرهای فوق نیایستی بازدید شوند. احتمال عدم بازدید این شهرها برابر $p_i p_j \prod_{k=i+1}^{j-1} (1-p_k)$ (when $j \leq n$) می‌باشد. نوع خاصی از مساله فروشنده دوره‌گرد احتمالی که در آن احتمال بازدید همه شهرها برابر است، مساله فروشنده دوره‌گرد احتمالی متجانس^{۱۷} نامیده می‌شود که در این مقاله به حل آن پرداخته شده است. برای مساله فروشنده دوره‌گرد احتمالی متجانس معادله ۳ بصورت زیر خواهد بود:

$$E[L_{\lambda}] = p^2 \sum_{r=0}^{n-2} (1-p) L_{\lambda}^{(r)} \quad (4)$$

که $L_{\lambda}^{(r)} = \sum_{j=1}^n d(j, (j+1+r) \mod n)$

رابطه $L_{\lambda}^{(r)}$ به طول زیر تورهای $\lambda_p^{(r)}$ اطلاق می‌شود که تعداد آنها برابر بازگترین مقسم علیه مشترک $n-r+1$ می‌باشد.^{۱۸} این زیر تورها از تور λ حاصل شده‌اند بطوریکه در آنها یک شهر بازدید شده و از r شهر که در یک تور اولیه بعد از آن قرار دارند، صرفنظر می‌کنیم (پرش از r شهر بعدی) و مجدداً $r+1$ امین شهر (در صورت وجود) را بازدید کرده

¹⁴ Homogeneous Probabilistic Traveling Salesman Problem

¹⁵ $\gcd(n, r+1)$

¹⁶ Isomorphic

لیست اقدامهای خود انتخاب کنند، همزمان با آن اتوماتاهای یادگیر غیرفعال اقدام k را در لیست اقدامهای خود غیرفعال^{۱۸} می‌سازند (اما حذف نمی‌کنند). در ابتدای هر تکرار تمام اقدامهای غیرفعال شده مجدداً فعال خواهد شد. اتوماتای یادگیر فعال شده با استفاده از بردار احتمال اقدام تغییر یافته‌ی خود، اتوماتای یادگیر طرف دیگر لبه انتخاب شده را فعال می‌سازد. فرآیند انتخاب اقدام و فعال سازی اتوماتای یادگیر متناظر با اقدام انتخاب شده تا ملاقات همه گرههای (شهرهای) موجود در گراف PTSP و برگشت به شهر آغازین و یا بنابر برخی دلایل که امکان انتخاب اقدام بعدی برای اتوماتای یادگیر فعال وجود نداشته باشد (امکان ایجاد تور هامیلتونی با توجه به شهرهایی که قبلاً انتخاب شده‌اند و یا ساختار گراف نمونه مساله داده شده، وجود نداشته باشد)، تکرار می‌شود.

پس از پیدا کردن یک تور، طول متوسط آن طبق رابطه^۴ که در بخش قبل به آن اشاره شد محاسبه می‌شود و با طول متوسط بهترین توری که تا حال توسط الگوریتم ایجاد شده است مقایسه می‌گردد. بر طبق نتیجه مقایسه، بردار احتمال اقدام اتوماتاهای یادگیر DLA بروزرسانی خواهد شد. نحوی بروزرسانی بردار احتمال اقدام بدینصورت است که اگر طول متوسط تور ایجاد شده کوچکتر و یا مساوی طول متوسط بهترین توری که تا حال ایجاد شده است باشد، همه اتوماتاهای یادگیر DLA، اقدام انتخابی خود را طبق الگوریتم یادگیری L_{R-I} ، پاداش می‌دهند. برای روشن شدن بیشتر این مطلب الگوریتم^{۱۹} ذکر شده در بخش اتوماتای یادگیر را مجدداً پادآوری می‌نماییم. بعنوان مثال اگر طول متوسط تور ایجاد شده در یک تکرار کوچکتر و یا مساوی طول متوسط بهترین تور ایجاد شده تاکنون باشد، و در این تکرار (t) اتوماتای یادگیر j از مجموعه اقدامهای مجاز خود اقدام ۱ را انتخاب کرده باشد، احتمال انتخاب اقدام ۱ طبق رابطه زیر افزایش خواهد یافت:

$$p_i(t+1) = p_i(t) + a[1 - p_i(t)]$$

و احتمال انتخاب سایر اقدامهای اتوماتای یادگیر j بصورت زیر کاهش خواهد یافت:

$$p_k(t+1) = (1 - a)p_k(t) \quad k \neq i \quad k = 1, 2, \dots, r$$

در رابطه‌ی بالا پارامتر a نرخ یادگیری^{۲۰}، تعداد اقدامهای اتوماتای یادگیر j می‌باشد. فرآیند ایجاد تور تا رسیدن به شرط پایانی ادامه می‌بایسد. آخرین تور هامیلتونی ایجاد شده توسط الگوریتم جواب تولید شده توسط الگوریتم می‌باشد که "یک تور اولیه" می‌باشد که در بین همه تورهای ایجاد شده توسط الگوریتم دارای کمترین طول متوسط است.

۶- ارزیابی الگوریتم پیشنهادی

بردار احتمال اقدامها، از مقدار عکس فاصله بین دو گره (عکس فاصله بین گره فعل (اتوماتای یادگیر فعال) و گرههای متصل به این لبه نیز استفاده کنند. آزمایشها نشان داد که استفاده از این مقدار برای انتخاب شهر بعدی، بهمود قابل ملاحظه‌ای در کارایی و نرخ همگرایی الگوریتم ایجاد می‌کند و باعث تولید جوابهای بهینه و یا خیلی نزدیک به جواب بهینه^{۲۱} می‌شود. مقدار عکس فاصله بین دو گره j و i در گراف PTSP توسطتابع $(j, i)^{-1} W$ نشان داده می‌شود. برای استفاده از این تابع در انتخاب اقدام اتوماتای یادگیر فعال، بردار احتمال اقدامهای اتوماتای یادگیر j P^j را بطور موقت طبق روابط زیر به بردار P'^j تغییر می‌دهیم. پس از انتخاب اقدام، بردار احتمال اقدامها مجدداً به مقدار قبلی خود P^j برگردانده می‌شود. این کار در ابتدای هر تکرار انجام می‌گیرد. روابط زیر چگونگی محاسبه بردار P'^j را از بردار احتمال اقدام نشان می‌دهد

بردار احتمال اقدام اتوماتای یادگیر j :
بردار احتمال اقدام تغییر یافته اتوماتای یادگیر j :

$$P'^j = \{p_i^{ij} \mid p_i^{ij} = \frac{[p_i^j \times W^{-1}(j, i)]^\beta}{\sum_{i=1}^r [p_i^j \times W^{-1}(j, i)]^\beta} \quad : \quad i = 1, 2, \dots, r\}$$

در این رابطه P_i^j ، احتمال انتخاب اقدام ۱ توسط اتوماتای یادگیر j می‌باشد و $(j, i)^{-1} W$ عکس فاصله بین دو گره j و i در گراف PTSP بوده و $\beta \geq 1$ اهمیت نسبی فاصله بین دو گره در انتخاب یک اقدام را مشخص می‌کند. عبارتی دیگر احتمال انتخاب یالهایی (اقدامهایی) که که دارای احتمال انتخاب بیشتر و طول یال کمتر باشند، بالاتر رفته و بالعکس. آزمایشها نشان داده اند که با اعمال تغییرات فوق در بردار احتمال اقدام و با توجه به در نظر گرفته شدن فاصله بین دو گره، نرخ همگرایی لگوریتم پیشنهادی بمیزان قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌یابد در ضمن اینکه جوابهای نزدیک به بهینه‌ای تولید خواهد شد.

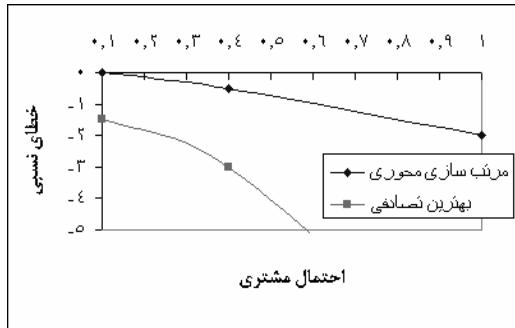
اکنون به توصیف الگوریتم پیشنهادی می‌پردازیم. در گام نخست اتوماتای یادگیر مبدأ بصورت تصادفی از گراف DTSP بعنوان شهر آغازین تور انتخاب می‌شود. این اتوماتای یادگیر یکی از اقدامهای خود را طبق بردار احتمال اقدام تغییر یافته، P^j ، انتخاب می‌کند. لجام این اقدام، اتوماتای یادگیر طرف دیگر لبه که متناظر با اقدام انتخاب شده می‌باشد را فعال می‌سازد. با توجه به اینکه در تور هامیلتونی هر شهر نبایسد بیش از یکبار انتخاب نشود. برای این منظور اگر اتوماتای یادگیر اقدام k را از

¹⁸ Disable

¹⁹ Learning Rate

²⁰ Optimal

شهرها و محور عمودی خطای نسبی که از رابطه $\frac{E[PTSPDLA] - E[heuristic]}{E[PTSPDLA]}$ محاسبه می شود را نشان می دهد که در این رابطه $E[PTSPDLA]$ طول متوسط تور ایجاد شده توسط الگوریتم پیشنهادی و $E[heuristic]$ طول تور ایجاد شده توسط هر یک از دو الگوریتم بهترین تصادفی و مرتب سازی محوری می باشد. هر نقطه از شکل میانگین نتایج بدست آمده برای ۱۶ نمونه مساله فروشنده دوره گرد احتمالی می باشد. اولین نکته قابل مشاهده در این شکل، بالاتر بودن کارایی الگوریتم پیشنهادی از هر دو الگوریتم مورد مقایسه برای همه احتمالات می باشد. مشاهده میشود که الگوریتم بهترین تصادفی در مقایسه با الگوریتم پیشنهادی و الگوریتم مرتب سازی محوری دارای نتایج ضعیفتری می باشد. دومین نکته قابل توجه، نتایج تقریباً یکسان الگوریتم پیشنهادی و مرتب سازی محوری در احتمالات کوچک (تقریباً برابر ۰,۱) می باشد. نتیجه‌ی فوق مؤید این نکته است که تورهای ایجاد شده توسط الگوریتم مرتب سازی محوری برای مقدار کوچک احتمالات بازدید نزدیک به بهینه می باشند.



شکل ۳-۴: کارایی نسبی الگوریتم پیشنهادی^{۲۱} در مقایسه با مرتب سازی محوری و بهترین تصادفی

کارایی مطلق الگوریتم پیشنهادی: با توجه به اینکه جواب بهینه هیچیک از نمونه مساله‌های فروشنده دوره گرد احتمالی در نظر گرفته شده در این مقاله، مشخص نمی باشد بنابراین کارایی مطلق الگوریتم پیشنهادی با استفاده از حد پایین جواب بهینه نمونه مساله مورد ارزیابی قرار میگیرد. میتوان با استفاده از حد پایین جواب بهینه، حد بالای خطای انجام گرفته توسط الگوریتم را بدست آورد. بعیارتی اگر LB حد پایین جواب بهینه نمونه مساله و $E[L_{\lambda^*}]$ جواب بهینه آن باشد، طبق تعریف داریم:

$$E[L_{\lambda^*}] \geq LB \quad (5)$$

و اگر جواب بدست آمده از الگوریتم برابر $E[L_{\lambda^*}]$ باشد، در اینصورت برای خطای نسبی الگوریتم، نامعادله زیر برقرار خواهد بود:

²¹ PTSPDLA

برای تولید نمونه‌های فروشنده دوره گرد احتمالی متجانس (احتمال بازدید همه شهرها برابر است) میتوان از نمونه‌های مساله فروشنده دوره گرد استفاده کرد. برای این منظور به هر یک از شهرها یک احتمال بازدید نسبت داده میشود. با توجه به اینکه مساله مورد مطالعه در این مقاله از نوع متجانس میباشد احتمال بازدید برای تمام شهرها یکسان در نظر گرفته شده است. آزمایشها برای مقادیر احتمال بازدید $p = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$ روی ۱۶ نمونه مساله فروشنده دوره گرد مقارن، اجرا و نتایج آن با نتایج دو الگوریتم مکافه ای به نامهای مرتب سازی محوری^{۲۰} و "بهترین تصادفی"^{۲۱} که برای حل لین مساله کزارش شده اند، مقایسه گردیده است. ۵ نمونه از ۱۶ نمونه مذکور از کتابخانه TSPLIB [18] انتخاب شده و شامل نمونه‌های eil101, kroa100, eil76, berlin52, eil51, berlin باشند که تعداد شهرهای آنها بین ۵۱ تا ۱۰۱ شهر است. ۱۱ نمونه DIMACS باقیمانده توسط کد تولید کننده نمونه تصادفی Challenge [19] تولید شده اند که مقارن و دارای ۲۵ تا ۱۵۰ شهر می باشند. برای انجام آزمایشها از یک کامپیوتر خانگی AMD 1300 MHz با ۱۲۸ MHZ مگابایت حافظه اصلی استفاده شده است.

الگوریتم بهترین تصادفی ابتدا تعدادی تور بصورت تصادفی که در آنها شهرهای مورد بازدید در تور بصورت تصادفی انتخاب می شوند، ایجاد کرده و سپس از بین تورهای ایجاد شده، توری که دارای کمترین طول متوسط می باشد را انتخاب می کند. الگوریتم مرتب سازی محوری ابتدا شهرهای موجود در نمونه مساله را براساس زاویه ایجاد شده بین آنها و مرکز جرم توزیع فضایی شهرها^{۲۰}، مرتب می نماید و سپس طبق نتیجه تعدادی شهر را میتوان با میانگین گیری از مختصات شهرها محاسبه کرد. یک تور اولیه ایجاد شده توسط الگوریتم مرتب سازی محوری و بسته به احتمال بازدید شهرها نبوده و بهمین دلیل احتمال بازدید شهرها در نتیجه الگوریتم دخیل نمی باشد. برغم سادگی مرتب سازی محوری، تورهایی که با این الگوریتم ایجاد می شوند زمانیکه احتمال بازدید شهرها پایین باشد، جوابهای نزدیک به بهینه تولید میکند [2]. ولی این الگوریتم برای نمونه های نامتقارن PTSP و یا نمونه هایی که مختصات شهرها مشخص نیست، قابل استفاده نمی باشد که یکی از نقاط ضعف این الگوریتم میباشد.

در شکل ۳ کارایی نسبی الگوریتم پیشنهادی در مقایسه با الگوریتمهای مرتب سازی محوری و بهترین تصادفی با توجه به مقدار مختلف احتمال بازدید نشان داده شده است. در این شکل محور افقی احتمال بازدید

²⁰ Center of mass' of the City spatial distribution

صورتیکه احتمال بازدید شهرها بالا باشد، جولهای با خطای نسبی پایین تولید می کند.

مراجع

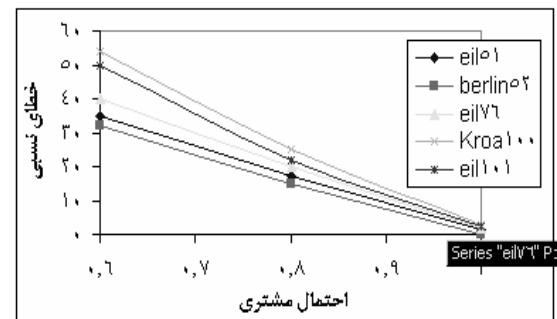
- [1] Bertsimas, D. J., Probabilistic Combinatorial Optimization Problems. PhD thesis, MIT, Cambridge, MA, 1988.
- [2] Bertsimas, D. J. and Howell, L. "Further results on the probabilistic traveling salesman problem", European Journal of Operational Research, 65:68-95, 1993.
- [3] Bertsimas, D. J., Jaillet, P. and Odoni, A. "A priori optimization. Operations Research", 38:1019-1033, 1990.
- [4] Jaillet, P. "Probabilistic Traveling Salesman Problems", PhD thesis, MIT, Cambridge, MA, 1985.
- [5] Jez_equel, A. "Probabilistic Vehicle Routing Problems", Master's thesis, MIT, Cambridge, MA, 1985.
- [6] Rossi, F. A. and Gavoli, I. "Aspects of Heuristic Methods in the Probabilistic Traveling Salesman Problem", pages 214-227. World Scienti_c, Singapore, 1987.
- [7] Lakshminarayanan, S. Learning Algorithms: Theory and Applications, New York: Springer-verlag, 1981.
- [8] Meybodi, M. R. and S. Lakshminarayanan, S. "On a Class of Learning Algorithms which have Symmetric Behavior under Success and Failure", pp. 145-155. Lecture Notes in Statistics, Berlin: Springer-Verlag, 1984.
- [9] Mars, P., Chen, J. R. and Nambir, R. "Learning Algorithms: Theory and Applications in Signal Processing, Control, and Communication", CRC Press Inc., 1996.
- [10] Narendra, K. S. and Thathachar, K. S. "Learning Automata: An Introduction", New York: Prentice-Hall, 1989.
- [11] Meybodi, M. R. and Beigy, H. "Solving Stochastic Shortest Path Problem Using Distributed Learning Automata", Proceedings 6th Annual CSI Computer Conference, University of Isfahan's Computer Engineering Department, 2001.
- [12] Beigy, H. and Meybodi, M. R. "A New Distributed Learning Automata for Solving Stochastic Shortest Path Problem", Proceedings of the Sixth International Joint Conference on Information Science, Durham, USA, pp. 339-343, 2002,
- [13] Alipour, M. and Meybodi, M. R. "Solving Traveling salesman Problem Using Distributed Learning Automata" ,Proceedings of 10th Annual CSI Computer Conference, Computer Engineering Department, Iran Telecommunication Research Center, Tehran, Iran, pp. 271-280, Feb. 2005.
- [14] Lakshminarayanan, S. "Learning Algorithms: Theory and Applications", New York: Springer-verlag, 1981.
- [15] Meybodi, M. R. and Lakshminarayanan, S. "On a Class of Learning Algorithms which have Symmetric Behavior under Success and Failure", pp. 145-155. Lecture Notes in Statistics, Berlin: Springer-Verlag, 1984.
- [16] Mars, P., Chen, J. R. and Nambir, R. "Learning Algorithms: Theory and Applications in Signal Processing, Control, and Communication", CRC Press Inc., 1996.
- [17] Narendra, K. S. and Thathachar, K. S. "Learning Automata: An Introduction", New York: Prentice-Hall, 1989.
- [18] <http://www.iwr.uniheidelberg.de/groups/comopt/software/TSPLIB>
- [19] http://www.research.att.com/_dsj/chtsp/download.html
- [20] Alipour, A. and Meybodi, M. R. "Solving Dynamic Traveling Salesman Problem Using Responsive Distributed Learning Automata", Proceedings of IKT2005 Tehran, Iran, May 24-26, 2005

$$\frac{E[L_\lambda] - E[L_{\lambda^*}]}{E[L_{\lambda^*}]} \leq \frac{E[L_\lambda] - LB}{LB} \quad (6)$$

در ادامه تکنیکی را برای ارزیابی حد پایین جواب بهینه مساله فروشند دوره‌گرد احتمالی معرفی نموده و از آن برای ارزیابی کارایی مطلق الگوریتم پیشنهادی استفاده خواهیم کرد.
برای محاسبه‌ی حد پایین جواب بهینه مساله فروشند دوره‌گرد احتمالی متجانس اگر جواب بهینه نمونه مساله فروشند دوره‌گرد (L_{TSP}) بکار برده شده مشخص باشد، میتوان از رابطه‌ی زیر استفاده کرد [۲].

$$LB = pL_{TSP}(1 - (1 - p)^{n-1}) \quad (7)$$

با قرار دادن مقدار LB از رابطه فوق در سمت راست نا معادله ۶ حد بالای خطای نسبی الگوریتم پیشنهادی بدست می آید. کارایی مطلق الگوریتم پیشنهادی که برای تعدادی از نمونه‌های موجود در کتابخانه TSPLIB مورد ارزیابی گرفته است در شکل ۴ نشان داده شده است. در این شکل محور افقی احتمال بازدید شهر و محور عمودی مقدار $100 * (E[L_\lambda(PTSPDLA)] - LB) / E[L_\lambda(PTSPDLA)]$ را نشان می دهد. نکته قابل توجه در این شکل بالا رفتن حد بالای خطای نسبی با کاهش احتمال بازدید شهرها می باشد که دلیل این امر کاهش دقت حد پایین جواب بهینه در نظر گرفته شده می باشد. برای مثال مشاهده میشود که الگوریتم پیشنهادی جوابی در حدود ۱۵٪ جواب بهینه را در احتمال بازدید برابر ۰,۹ پیدا می کند.



شکل ۴: حد بالای درصد خطای نسبی الگوریتم پیشنهادی برای ۵ نمونه از کتابخانه TSPLIB

۷-نتیجه گیری

در این مقاله الگوریتمی براساس اتوماتی یادگیر توزیع شده برای حل مساله فروشند دوره‌گرد احتمالی متجانس ارائه گردید و با دو الگوریتم مرتب سازی محوری و الگوریتم بهترین تصادفی مقایسه شد. بر طبق نتایج بدست آمده، الگوریتم پیشنهادی در مقایسه با این دو الگوریتم از کارایی بالاتری برخوردار است. نشان داده شد که الگوریتم پیشنهادی در