



چند رنگ آمیزی پهنهای باند در گراف مبتنی بر اتماتاتی یادگیر سلوی

محمد رضا میبدی

دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات

دانشگاه صنعتی امیر کبیر

تهران ایران

mmeybodi@aut.ac.ir

جواد اکبری ترکستانی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه آزاد اسلامی

اراک ایران

j-akbari@iau-arak.ac.ir

علیرضا انعامی عراقی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه آزاد اسلامی

فراهان ایران

alireza_enami@yahoo.com

چکیده: در این مقاله، الگوریتمی مبتنی بر اتماتاتی یادگیر سلوی نامنظم برای حل مسائل رنگ آمیزی پهنهای باند گراف و چند رنگ آمیزی پهنهای باند گراف پیشنهاد می‌گردد. در الگوریتم پیشنهادی، ابتدا گراف ورودی تبدیل به گرافهای پایه می‌گردد و سپس به هر یک از رئوس گراف، یک سلوول متناظر می‌شود و همچنین به هر سلوول، یک اتماتاتی یادگیر اختصاص می‌یابد. هر یک از اتماتاتی یادگیر، یک عمل از مجموعه اعمال خود را با توجه به بردار احتمال مربوطه انتخاب می‌کند. اگر قدر مطلق تفاضل عمل انتخابی یک سلوول نسبت به تمامی همسایگانش بزرگتر یا مساوی وزن یا مرتبط بین آن دو باشد؛ در این صورت، به عمل انتخابی این سلوول پاداش داده می‌شود و در غیر این صورت سلوول جریمه می‌شود. الگوریتم تا زمانی ادامه می‌یابد که تمام سلوولها پاداش بگیرند. الگوریتم پیشنهادی، با الگوریتم‌های موجود همچون لیم، پرستویچ و مالاگوتی مقایسه شده و طبق نتایج بدست آمده بر روی گرافهای نمونه نشان داده می‌شود که الگوریتم پیشنهادی نتایج به مراتب بهتری را تولید می‌کند.

کلمات کلیدی: مسئله چند رنگ آمیزی گراف، مسئله رنگ آمیزی پهنهای باند گراف، اتماتاتی یادگیر سلوولی.

با استی حداقل مساوی با فاصله بین آن دو باشد. این نوع رنگ آمیزی برای مدل کردن بعضی از کاربردها مفید است؛ برای مثال در مسئله انتساب کانال بطوری که به هر ایستگاه یک یا چند کانال اختصاص یابد و همچنین برای جلوگیری از تداخل آنها تفاضلشان از حد معینی بیشتر باشد [۲,۳].

لیم و همکارانش [۴] یک روش برای حل رنگ آمیزی اصلی گراف، رنگ آمیزی پهنهای باند گراف، چند رنگ آمیزی گراف و چند رنگ آمیزی پهنهای باند گراف پیشنهاد کردند که در آن تکنیکهای تپه نوردهی SWO با هم ترکیب شده بود، همچنین لیم و همکارانش در [۵] کارآیی روش‌های مکاشفه ای شامل SWO، جستجوی Tabu و ترکیب آنها را برای رنگ آمیزی پهنهای باند گراف، چند رنگ آمیزی گراف و چند رنگ آمیزی پهنهای باند گراف مورد مطالعه قرار دادند. پرستویچ در [۶] الگوریتم‌های جستجوی محلی را با برنامه نویسی محدود ترکیب کرد؛ بدین ترتیب با استفاده از این روش، در رنگ آمیزی پهنهای باند و چند رنگ آمیزی پهنهای باند روی گرافهای بزرگ، نتایج خوبی را تولید کرد. مالاگوتی و توت در [۷] یک روش تکاملی برای مسئله رنگ آمیزی پهنهای باند گراف ارائه کردند که ترکیب الگوریتم جستجوی Tabu با مدل‌های مدیریت تراکم بود. او روش خود را کمی تغییر روی مسئله چند رنگ آمیزی پهنهای باند گراف نیز اجرا کرد.

در این مقاله، الگوریتمی مبتنی بر اتماتاتی یادگیر سلوولی نامنظم برای حل مسائل رنگ آمیزی پهنهای باند و چند رنگ آمیزی پهنهای باند در گراف پیشنهاد می‌گردد. الگوریتم پیشنهادی با الگوریتم‌های ارائه شده توسط لیم [۴,۵]، پرستویچ [۶] و مالاگوتی [۷] مقایسه می‌گردد. نتایج آزمایشها نشان می‌دهد که الگوریتم پیشنهادی نتایج بهتری را تولید می‌کند. ادامه مقاله به این صورت سازماندهی شده است: در بخش ۲ به معرفی اجمالی اتماتاتی یادگیر سلوولی نامنظم می‌پردازیم. در

۱- مقدمه

مسئله رنگ آمیزی اصلی رئوس گراف $G=(V,E)$ که در آن V مجموعه رئوس و $E \subseteq [V]$ مجموعه یالهای گراف G می‌باشد؛ نکاشتی است بصورت $S: V \rightarrow C$ بطوری که برای دو رأس همسایه v و w داریم $S(v) \neq S(w)$. اعضای S را رنگها تشکیل می‌دهند. کوچکترین عدد صحیح k برای G در نکاشت $\{1, 2, \dots, k\} \rightarrow C: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ عدد رنگی G نامیده می‌شود و با (G, k) نشان داده می‌شود. یک گراف G رنگ $-k$ نامیده می‌شود اگر $\chi(G) = k$ باشد، آنگاه G را $-k$ -رنگ پذیر می‌نامیم. یافتن عدد رنگی گراف برای گرافهای $-k$ -رنگ پذیر که در آن $k \geq 3$ یک مسئله بعنوان می‌باشد [۱]. رنگ آمیزی مجاز عبارتست از انتساب یک رنگ به رئوس گراف؛ بطوری که رئوس همسایه دارای رنگ متفاوتی باشند و رنگ آمیزی بهینه گراف برابر با حداقل تعداد رنگ مورد نیاز برای یک رنگ آمیزی مجاز می‌باشد.

در رنگ آمیزی پهنهای باند یک فاصله (وزن) $d(i,j)$ برای هر یال $(i,j) \in E$ تعریف می‌شود و مقدار قدر مطلق تفاضل بین رنگهای اختصاص یافته به i و j با استی حداقل مساوی با این فاصله باشد: $|C(i) - C(j)| \geq d(i,j)$. در مسئله چند رنگ آمیزی گراف یک وزن $w(i)$ برای هر نود $i \in V$ تعریف می‌شود و آن تعداد رنگی است که باید به هر نود اختصاص یابد؛ بطوری که برای هر $(i,j) \in E$ اشتراک مجموعه های رنگ اختصاص یافته به نودهای i و j با استی تهی باشد. مسئله چند رنگ آمیزی پهنهای باند تلقیق هر دو مسئله فوق است بدین صورت که به هر رأس، با استی $w(i) > 0$ رنگ اختصاص یابد بطوری که اشتراک مجموعه های رنگ اختصاص یافته به نودهای همسایه تهی باشد و همچنین به هر یال یک فاصله مناسب شده است و مقدار قدر مطلق تفاضل بین رنگهای اختصاص یافته به نودهای همسایه تهی باشد و همچنین به هر یال یک فاصله مناسب شده است و مقدار قدر مطلق تفاضل بین رنگهای اختصاص یافته به دو رأس همسایه،



برای رنگ‌آمیزی گراف می‌باشد. مجموعه رنگ‌ها، مجموعه اعمال هر یک از اتماتاهای یادگیر می‌باشد. اتماتای یادگیر در هر سلول از نوع L_{RP} با ضرایب پاداش و جریمه $0/1$ می‌باشد. در ابتدا احتمال انتخاب اعمال هر یک از اتماتاهای یادگیر مساوی و برابر با یک تقسیم بر تعداد رنگ‌های مورد استفاده می‌باشد.

[۶] نشان داده شده است که اگر Δ بزرگترین درجه یک رأس در گراف باشد در این صورت Δ تعداد رنگ‌های مورد نیاز برای رنگ آمیزی اصلی مجاز گراف کوچکتر یا مساوی $\Delta+1$ می‌باشد یعنی $\Delta \leq \Delta+1$. ما تعداد اعضای مجموعه عمل در این الگوریتم را برابر $\Delta+1 \times \text{Max}_{\forall(i,j) \in E}(d(i,j))$ قرار دادیم که در واقع حالت کلی و عمومی رنگ آمیزی اصلی رئوس گراف است؛ چون در آنجا $\text{Max}_{\forall(i,j) \in E}(d(i,j))=1$ می‌باشد.

در این الگوریتم، ابتدا گراف ورودی تبدیل به گرافهای پایه می‌شود که هر رأس تنها یک رنگ می‌گیرد، همچنین از شرط $|C(i)-C(j)| \geq d(i,j)$ که در آن $C(i)$ و $C(j)$ عمل(رنگ) منتبث به رئوس i و j وزن یال بین 0 و z می‌باشد؛ برای دادن جریمه و پاداش استفاده می‌شود. الگوریتم بدین صورت است که هر یک از اتماتاهای یادگیر در اتماتای یادگیر سلولی، یکی از اعمال خود را با توجه به بردار احتمال مربوطه انتخاب می‌کند. اگر عمل انتخابی یک سلول، در شرط فوق صدق کند؛ به عمل انتخابی این سلول پاداش داده می‌شود، و در غیر این صورت سلول جریمه می‌شود. الگوریتم تا زمانی ادامه می‌یابد که تمام سلولها پاداش بگیرند. مراحل الگوریتم پیشنهادی را می‌توان در گامهای زیر تشریح کرد:

گام اول: تبدیل مسئله به مسئله رنگ آمیزی اصلی گراف.

در این گام با استفاده از رأس هر وزن هر رأس در گراف ورودی، به همان تعداد رأس که با یکدیگر همسایه می‌باشند و همچنین بدون حلقه هستند در گراف جدید با وزن یک در نظر گرفت و وزن یال بین آنها برابر با وزن حلقه موجود بر روی رأس مورد نظر در گراف ورودی می‌باشد. دو رأسی که در گراف ورودی همسایه بودند، در گراف جدید نیز با استفاده همسایه باشند بطوری که وزن یالها بدون تغییر باقی می‌ماند.

گام دوم: ساخت یک اتماتای یادگیر سلولی نامنظم همراه با گراف ورودی.

در این گام به هر یک از رئوس گراف یک سلول متناظر می‌شود و دو سلول در صورتی همسایه هستند که رئوس متناظر آنها در گراف ورودی نیز همسایه باشند، همچنین به هر سلول یک اتماتای یادگیر اختصاص می‌یابد.

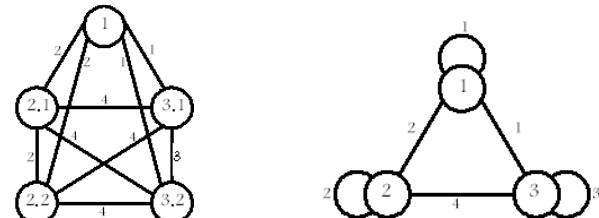
گام سوم: انتخاب تصادفی عملها توسط اتماتای یادگیر هر سلول.

بخش ۳ الگوریتم پیشنهادی مبتنی بر اتماتای یادگیر سلولی نامنظم شرح داده می‌شود و در بخش ۴ الگوریتم ارایه شده با الگوریتم‌های لیم، پرستویچ و مالاگوتی مقایسه می‌گردد. بخش نهایی مقاله نتیجه گیری می‌باشد.

۲- اتماتای یادگیر سلولی نامنظم: اتماتای یادگیر سلولی نامنظم [۸]، یک اتماتای یادگیر سلولی است با حذف این محدودیت که اتماتای یادگیر سلولی در این نوع، دارای ساختار شبکه ای نمی‌باشد. این نوع اتماتای یادگیر سلولی، برای کاربردهایی مثل شبکه‌های حسگر بسیمیم، سیستمهای شبکه ای آزاد و کاربردهای مبتنی بر گراف که بر اساس یک شبکه مستطبی نمی‌توانند مدل شوند، بسیار مؤثر است. یک اتماتای یادگیر سلولی نامنظم، بصورت یک گراف بدون جهت تعریف می‌شود؛ بطوری که هر رأس آن متناظر با یک سلول است که دارای یک اتماتای یادگیر می‌باشد. اتماتای یادگیر که در هر سلول وجود دارد، حالت(عمل)، آن سلول را بر اساس بردار احتمال عمل مربوط به آن سلول، تعیین می‌کند. شبیه اتماتای یادگیر سلولی، قانونی وجود دارد که اتماتای یادگیر سلولی و اعمال انتخاب شده بوسیله اتماتاهای یادگیر همسایه برای یک اتماتای یادگیر خاص، بردار احتمال اعمال مربوط به آن اتماتای یادگیر را بروز می‌کند.

۳- الگوریتم‌های پیشنهادی برای حل مسئله رنگ آمیزی گراف با استفاده از اتماتای یادگیر سلولی

در الگوریتم پیشنهادی، ابتدا با استفاده از گراف ورودی، تبدیل به گرافهای پایه شود، بطوری که هر رأس تنها یک رنگ می‌گیرد. فرض کنید در گراف شکل ۱-الف وزن رئوس و یالها برابر $w(1)=1$, $w(2)=2$, $w(3)=2$, $d(1,2)=2$, $d(1,3)=1$, $d(2,1)=1$, $d(2,3)=3$ و $d(3,1)=4$ می‌باشد. در این صورت بعد از تبدیل آن، گراف شکل ۱-ب بدست می‌آید، که وزن تمامی نودها برابر یک است.



شکل ۱-الف: گراف ورودی قبل از تبدیل
جهت نگاشتن یک گراف به اتماتای یادگیر سلولی، ما از اتماتای یادگیر سلولی نامنظم استفاده می‌کنیم؛ برای این منظور، به ازای هر رأس از گراف، یک سلول از اتمات را در نظر می‌گیریم و هر سلول در اتماتای یادگیر سلولی با سلول دیگر همسایه است اگر و تنها اگر رأس متناظر با آن سلول در گراف مسئله با رأس متناظر با سلول دیگر، یال داشته و یا به عبارت دیگر مجاور باشد. تعداد اعمال هر یک از اتماتاهای یادگیر در اتماتای یادگیر سلولی برابر تعداد رنگ‌های مورد استفاده



استفاده قرار گرفته است و روی نمونه های پیشنهاد شده در استاندارد DIMACS تست شده است [۱۰]. برای بدست آوردن نتایج از نمونه های GEOMnb و GEOMn (بطوری که n نشان دهنده تعداد رئوس گراف است) استفاده کردیم. در این گرافها، رئوس در یک شبکه 10000×10000 بصورت تصادفی قرار گرفته اند و در صورتی که به اندازه کافی به همدیگر نزدیک باشند، یک یال بین آنها برقرار می شود. نمونه های GEOMn گرافهای خلوتی می باشند و GEOMnb گرافهای متراکم تری در مقایسه با GEOMn می باشند. نتایج حاصل از الگوریتم پیشنهادی با نتایج الگوریتمهای ارائه شده توسط لیم [۴,۵]، پرسنیوچ [۶] و مالاگوتی [۷] مقایسه شده است. معیارهای ارزیابی الگوریتمها، تعداد رنگهای استفاده شده برای رنگ آمیزی (C) و زمان اجرا بر حسب ثانیه (T) می باشد. هر یک از نتایج که در جدول ۱ و ۲ گزارش شده است، متوسط ۵۰ بار اجرا می باشد. ستون آخر در جداول ۱ و ۲ (diff.) تفاضل بین تعداد رنگ بدست آمده توسط الگوریتم پیشنهادی و بهترین تعداد رنگ بدست آمده توسط الگوریتمهای مورد مقایسه می باشد.

در رنگ آمیزی پهنانی باند گراف همانگونه که از نتایج آزمایشات مشهود است، اجرای الگوریتمها بر روی ۲۲ نمونه پیشنهاد شده در استاندارد DIMACS نشان می دهد که الگوریتم پیشنهادی تعداد رنگ را در ۱۶ مورد نسبت به بهترین تعداد رنگ در الگوریتمهای پیشین کاهش داده است و در ۳ مورد تعداد رنگ تفاوتی نکرده است و در ۳ مورد تعداد رنگ را افزایش داده است. الگوریتم پیشنهادی نسبت به الگوریتم لیم و پرسنیوچ زمان اجرای ضعیفی دارد اما نسبت به الگوریتم مالاگوتی مخصوصا در تعداد رئوس بالا زمان اجرا را کاهش داده است. در چند رنگ آمیزی پهنانی باند گراف همانگونه که از نتایج آزمایشات مشهود است، اجرای الگوریتمها بر روی ۲۲ نمونه پیشنهاد شده در استاندارد DIMACS نشان می دهد الگوریتم پیشنهادی تعداد رنگ را در ۹ مورد نسبت به بهترین تعداد رنگ در الگوریتمهای پیشین کاهش داده است و در ۵ مورد تعداد رنگ تفاوتی نکرده است و در ۷ مورد تعداد رنگ را افزایش داده است. الگوریتم پیشنهادی در زمان اجرا نسبت به الگوریتمهای لیم و مالاگوتی عملکرد خوبی دارد اما در برابر الگوریتم پرسنیوچ ضعیف عمل می کند.

جدول ۱- تعداد رنگ و مدت زمان لازم برای رنگ آمیزی گراف به کمک الگوریتمهای مختلف در مسأله رنگ آمیزی پهنانی باند گراف

Graph	Proposed Algorithm		Lim [4]	Prestwich[6]		Malaguti[7]		Diff.
	T	C		T	C	T	C	
GEOM20	82.13	9	1	21	0	21	0	21
GEOM20b	83.75	13	0	14	0	13	0	13
GEOM30	85	16	0	29	0	28	0	28
GEOM30b	85.72	18	0	26	0	26	0	26
GEOM40	86.81	21	3	28	0	28	0	28
GEOM40b	87.58	25	4	34	0	33	0	33
GEOM50	87.9	26	5	28	0	28	0	28
GEOM50b	88.92	38	7	38	0	35	0	35
GEOM60	89.44	27	1	34	0	33	0	33

در این گام هر یک از اتماتاهای یادگیر یک عمل از مجموعه اعمال خود را با توجه به بردار احتمال مربوطه انتخاب می کند.

گام چهارم: پاداش دادن و جریمه کردن عمل انتخابی اتماتها و بروز رسانی بردار احتمالات.

اگر قدرمطلق تفاضل عمل انتخابی یک سلول نسبت به تمامی همسایگانش بزرگتر یا مساوی وزن یال مرتبط بین آن دو باشد؛ در این صورت، به عمل انتخابی این سلول پاداش داده می شود و در غیر این صورت سلول جریمه می شود.

گام پنجم: بررسی خاتمه الگوریتم.
در صورتی که تمام سلولها پاداش بگیرند، الگوریتم خاتمه می یابد و در غیر این صورت الگوریتم اجرای الگوریتم از گام سوم ادامه می یابد.

شبه کد الگوریتم در شکل ۲ آورده شده است.

Algorithm CLA

Input : Graph G(V,E)

Output : The number of colors needs to be chosen for coloring the graph

Begin

Transfer problem to pure graph coloring

Construct an irregular CLA isomorphic to the input graph

Repeat

For all cells do in parallel

Each cell chooses one of its actions according to its action probability vector

If ($|c_i - c_j| \geq d_{(i,j)}$, for each $e_{(i,j)} \in E$) **then**

Reward the action chosen by automaton A_i

Else

Penalize the action chosen by automaton A_i

End if

Until all cells are rewarded by the random

Environment

Return the number of used colors

End.

شکل ۲- شبکه کد الگوریتم پیشنهادی

۴- نتایج آزمایشات

برای اجرای الگوریتمها، یک کامپیوتر شخصی با پردازنده اینتل P4 2.4 GHz و با ۵۱۲ مگابایت حافظه اصلی و ویندوز XP مورد



GEOM60b	90.46	40	5	46	0	43	29	41	-1
GEOM70	90.72	35	1	38	0	38	0	38	-3
GEOM70b	91.66	51	0	54	1	48	52	48	3
GEOM80	91.92	43	8	42	0	41	0	41	2
GEOM 80b	92.33	60	1	66	12	63	150	63	-3
GEOM90	93.43	45	1	46	3	46	0	46	-1
GEOM90b	94.4	63	20	77	2	72	1031	70	-7
GEOM100	94.71	48	33	51	0	50	2	50	-2
GEOM100b	95.54	73	9	83	15	73	597	73	0
GEOM 110	96.13	49	2	53	4	50	3	50	-1
GEOM 110b	96.95	78	17	88	2	79	676	78	0
GEOM 120	97.02	57	1	62	4	60	0	59	-2
GEOM 120b	97.93	81	4	98	9	86	857	84	-3

جدول ۲- تعداد رنگ و مدت زمان لازم برای رنگ آمیزی گراف به کمک الگوریتم‌های مختلف در مسئله چند رنگ آمیزی پهنه‌ی باند گراف

Graph	Proposed Algorithm		Lim [4]		Lim [5]		Prestwich[6]		Malaguti[7]		Diff.
	T	C	T	C	T	C	T	C	T	C	
GEOM20	118.85	140	0	149	17	149	4	149	18	149	-9
GEOM20b	119.87	44	0	44	2	44	0	44	5	44	0
GEOM30	120.39	161	0	160	23	160	0	160	1	160	1
GEOM30b	121.41	76	0	77	7	77	0	77	0	77	-1
GEOM40	121.67	168	3	167	47	167	1	167	20	167	1
GEOM40b	122.61	74	8	76	10	74	4	74	1	74	0
GEOM50	122.87	227	41	224	77	224	1	224	1197	224	3
GEOM50b	124.01	84	53	87	15	87	1	86	197	83	1
GEOM60	124.38	258	46	258	96	258	77	258	139	258	0
GEOM60b	125.35	115	300	119	23	116	12	116	460	115	0
GEOM70	125.66	270	25	279	138	273	641	277	1413	272	-2
GEOM70b	126.49	118	136	124	30	121	55	119	897	117	1
GEOM80	127.08	380	4041	394	204	383	361	398	132	388	-3
GEOM80b	127.9	141	3230	145	39	141	37	141	1856	141	0
GEOM90	127.96	329	4095	335	248	332	44	339	4160	332	-3
GEOM90b	128.96	142	648	157	46	157	303	147	1750	144	-2
GEOM100	129.3	403	631	413	311	404	7	424	3283	410	-1
GEOM100b	129.87	157	4893	172	55	170	367	159	3699	156	1
GEOM 110	130.39	384	577	389	368	383	43	392	2344	383	1
GEOM 110b	131	209	12	210	68	206	5	208	480	206	3
GEOM 120	131.58	395	1825	409	408	402	9	417	2867	396	-1
GEOM 120b	132.43	190	869	201	97	199	3	196	3292	191	-1

Phasing Problems," in The Theory and Applications of Graphs, Wiley, New York, pp. 479-492, 1981.

- [4] A. Lim, X. Zhang, Y. Zhu, "A Hybrid Methods for the Graph Coloring and its Related Problems", in: Proceedings of MIC2003: The Fifth Metaheuristic International Conference, Kyoto, Japan, 2003.
- [5] A. Lim, Q. Lou, B. Rodrigues, Y. Zhu, "Heuristic Methods for Graph Coloring Problems", in: Proceedings of the 2005 ACM Symposium on Applied Computing, Santa Fe, NM, pp. 933-939, 2005.
- [6] S. Prestwich, "Generalized Graph Colouring by a Hybrid of Local Search and Constraint Programming", Technical Report, Cork Constraint Computation Center, Ireland, 2005.
- [7] E. Malaguti and P. Toth , "An Evolutionary Approach for Bandwidth Multicoloring Problems", European Journal of Operational Research, Vol. 189, pp. 638-651, 2008.
- [8] M. Asnaashari and M.R. Meybodi, "Irregular Cellular Learning Automata and Its Application to Clustering in Sensor Networks", Proceedings of 1st Conference on Electrical Engineering (1st ICEE), Volume on Communication, Telecommunication Research Center, Tehran, Iran, May 15-17, 2007.
- [9] R. Diestel, "Graph Theory", 3rd Edition, Springer-Verlag, New York, 2005.
- [10] M.A. Trick, Computational symposium: Graph coloring and its generalizations, 2002. <<http://mat.gsia.cmu.edu/COLOR02/>>.

۵- نتیجه گیری

در این مقاله الگوریتمی برای حل دو نوع از مسائل رنگ آمیزی گراف با عنوان رنگ آمیزی پهنه‌ی باند گراف و چند رنگ آمیزی پهنه‌ی باند گراف با استفاده از اثباتاتی یادگیر سلوالی نامنظم و با الگوریتم یادگیری L_{RP} پیشنهاد گردید. الگوریتم پیشنهادی با الگوریتم‌های ارائه شده توسط لیم و پرستویچ و مالاگوتی مقایسه شد که بر طبق نتایج به دست آمده الگوریتم پیشنهادی در مسئله رنگ آمیزی پهنه‌ی باند نسبت به الگوریتم‌های فوق الذکر تعداد رنگ را کاهش می دهد و زمان اجرا را نیز بهبود می بخشد و در مسئله چند رنگ آمیزی پهنه‌ی باند، تقریبا همان نتایج الگوریتم‌های فوق را در تعداد رنگ، اما در زمان کمتر بدست می آورد.

مراجع

- [1] R. Karp, "Reducibility among Combinatorial Problems", Complexity of computer computations, pp. 85-104, 1972.
- [2] W. Hale, "Frequency Assignment: Theory and Applications", in Proceedings of the IEEE, Vol. 68, pp. 1497-1514, 1980.
- [3] R. Opsut and F. Roberts, "On the Fleet Maintenance, Mobile Radio Frequency, Task Assignment, and Traffic