چند رنگ‌آميزي پهناي باند در گراف مبتني بر اتاماتاي يادگير سلولي

علیرضا انعامي عراقي
دانشكده مهندسي كامپيوتر
دانشگاه آزاد اسلامي
فراهان ايران
alireza_enami@yahoo.com

جواد اكبري تركستاني
دانشكده مهندسي كامپيوتر
دانشگاه آزاد اسلامي
اراك ايران
j-akbari@iau-arak.ac.ir

محمدرضا ميبدي
دانشكده مهندسي كامپيوتر و فناوري اطلاعات
دانشگاه صنعتي امير كبير
تهران ايران
mmeybodi@aut.ac.ir

چكيده: در اين مقاله، الگوريتمي مبتني بر اتاماتاي يادگير سلولي نامنظم براي حل مسائل رنگ‌آميزي پهناي باند گراف و چند رنگ آميزي پهناي باند گراف پيشنهاد مي گردد. در الگوريتم پيشنهادي، ابتدا گراف ورودي تبديل به گرافهاي پايه مي گردد و سپس به هر يك از رئوس گراف، يك سلول متناظر مي شود و همچنين به هر سلول، يك اتاماتاي يادگير اختصاص مي يابد. هر يك از اتاماتاهاي يادگير، يك عمل از مجموعة اعمال خود را با توجه به بردار احتمال مربوطه انتخاب مي كند. اگر قدرمطلق تفاضل عمل انتخابي يک سلول نسبت به تمامي همسايگانش بزرگتر يا مساوي وزن يال مرتبط بين آن دو باشد؛ در اين صورت, به عمل انتخابي اين سلول پاداش داده مي شود و در غير اين صورت سلول جريمه مي شود. الگوريتم تا زماني ادامه مي يابد كه تمام سلولها پاداش بگيرند. الگوريتم پيشنهادي، با الگوريتمهاي موجود همچون ليم، پرستويچ و مالاگوتي مقايسه شده و طبق نتايج بدست آمده بر روي گرافهاي نمونه نشان داده مي شود كه الگوريتم پيشنهادي نتايج به مراتب بهتري را توليد مي كند.

كلمات كليدي: مسأله چند رنگ‌آميزي گراف، مسأله رنگ‌آميزي پهناي باند گراف، اتاماتاي يادگير سلولي.

۱- مقدمه

مسألة رنگ آميزي اصلي رئوس گراف(G=(V,E كه در آنV مجموعة رئوس و$E \subseteq [V]$ مجموعة يالهاي گرافG مي باشد؛ نگاشتي است بصورت $C:V \to S$ بطوري كه براي دو رأس همسايهٔ v و w داريم(C(v)≠C(w. اعضايS را رنگها تشكيل مي دهند. كوچكترين عدد صحيحk براي$C:V \to \{1,2,...,k\}$ در نگاشت G عدد رنگيG ناميده مي شود و با$\chi(G)$ نشان داده مي شود. يك گرافG ، k- رنگي ناميده مي شود اگر$\chi(G)=k$ و اگر$\chi(G)\leq k$ باشد، آنگاه G را k- رنگ پذير مي ناميم. يافتن عدد رنگي گراف براي گرافهاي k-رنگ‌پذير كه در آن $k \geq 3$ يك مسأله بغرنج مي‌باشد[۱]. رنگ آميزي مجاز عبارتست از انتساب يك رنگ به رئوس گراف؛ بطوري كه رئوس همسايه داراي رنگ متفاوتي باشند و رنگ آميزي بهينة گراف برابر با حداقل تعداد رنگ مورد نياز براي يك رنگ آميزي مجاز مي باشد.

در رنگ آميزي پهناي باند يك فاصله(وزن) d(i,j) براي هر يال $(i, j) \in E$ تعريف مي شود و مقدار قدرمطلق تفاضل بين رنگهاي اختصاص يافته به i و j بايستي حداقل مساوي با اين فاصله باشد: $|C(i) - C(j)| \geq d(i, j)$. در مسألة چند رنگ آميزي گراف يك وزن w(i)>0 براي هر نود $i \in V$ تعريف مي شود و آن تعداد رنگي است كه بايد به هر نود اختصاص يابد؛ بطوري كه براي هر $(i, j) \in E$ اشتراك مجموعه هاي رنگ اختصاص يافته به نودهاي i و j بايستي تهي باشد. مسألة چند رنگ آميزي پهناي باند تلفيق هر دو مسألة فوق است بدين صورت كه به هر رأس، بايستي w(i)>0 رنگ اختصاص يابد بطوري كه اشتراك مجموعه هاي رنگ اختصاص يافته به نودهاي همسايه تهي باشد و همچنين به هر يال يك فاصله منتسب شده است و مقدار قدرمطلق تفاضل بين رنگهاي اختصاص يافته به دو رأس همسايه، بايستي حداقل مساوي با فاصلة بين آن دو باشد. اين نوع رنگ آميزي براي مدل كردن بعضي از كاربردها مفيد است؛ براي مثال در مسئله انتساب كانال بطوري كه به هر ايستگاه يك يا چند كانال اختصاص يابد و همچنين براي جلوگيري از تداخل آنها تفاضلشان از حد معيني بيشتر باشد[۲،۳].

ليم و همكارانش[۴] يك روش براي حل رنگ آميزي اصلي گراف، رنگ آميزي پهناي باند گراف، چند رنگ آميزي گراف و چند رنگ آميزي پهناي باند گراف پيشنهاد كردند كه در آن تكنيكهاي تپه نوردي و SWO با هم تركيب شده بود، همچنين ليم و همكارانش در[۵] كارآيي روشهاي مكاشفه اي شامل SWO، جستجوي Tabu و تركيب آنها را براي رنگ آميزي پهناي باند گراف، چند رنگ آميزي گراف و چند رنگ آميزي پهناي باند گراف مورد مطالعه قرار دادند. پرستويچ در[۶] الگوريتمهاي جستجوي محلي را با برنامه نويسي مقيد تركيب كرد؛ بدين ترتيب با استفاده از اين روش، در رنگ آميزي پهناي باند و چند رنگ آميزي پهناي باند روي گرافهاي بزرگ، نتايج خوبي را توليد كرد. مالاگوتي و توت در[۷] يك روش تكاملي براي مسألة رنگ آميزي پهناي باند گراف ارائه كردند كه تركيب الگوريتم جستجوي Tabu با مدلهاي مديريت تراكم بود. او روش خود را با كمي تغيير روي مسألة چند رنگ آميزي پهناي باند گراف نيز اجرا كرد.

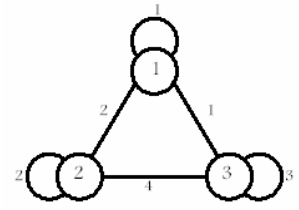
در اين مقاله، الگوريتمي مبتني بر اتاماتاي يادگير سلولي نامنظم براي حل مسائل رنگ‌آميزي پهناي باند و چند رنگ آميزي پهناي باند در گراف پيشنهاد مي گردد. الگوريتم پيشنهادي با الگوريتمهاي ارائه شده توسط ليم [۴،۵]، پرستويچ [۶] و مالاگوتي [۷] مقايسه مي گردد. نتايج آزمايشها نشان مي دهد كه الگوريتم پيشنهادي نتايج بهتري را توليد مي كند. ادامه مقاله به اين صورت سازمان‌دهي شده است: در بخش ۲ به معرفي اجمالي اتاماتاي يادگير سلولي نامنظم مي‌پردازيم. در

بخش ۳ الگوريتم پيشنهادي مبتني بر اتاماتاي يادگير سلولي نامنظم شرح داده مي‌شود و در بخش ۴ الگوريتم ارايه شده با الگوريتم‌هاي ليم، پرستويچ و مالاگوتي مقايسه مي‌گردد. بخش نهايي مقاله نتيجه‌گيري مي‌باشد.

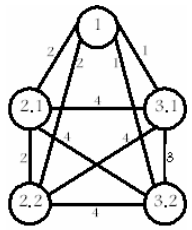
۲- اتاماتاي يادگير سلولي نامنظم: اتاماتاي يادگير سلولي نامنظم[۸]، يك اتاماتاي يادگير سلولي است با حذف اين محدوديت كه اتاماتاي يادگير سلولي در اين نوع، داراي ساختار شبكه اي نمي باشد. اين نوع اتاماتاي يادگير سلولي، براي كاربردهايي مثل شبكه هاي حسگر بيسيم، سيستمهاي شبكه اي آزاد و كاربردهاي مبتني بر گراف كه بر اساس يك شبكة مستطيلي نمي توانند مدل شوند، بسيار مؤثر است. يك اتاماتاي يادگير سلولي نامنظم، بصورت يك گراف بدون جهت تعريف مي شود؛ بطوري كه هر رأس آن متناظر با يك سلول است كه داراي يك اتاماتاي يادگير مي باشد. اتاماتاي يادگير كه در هر سلول وجود دارد، حالت(عمل) آن سلول را بر اساس بردار احتمال عمل مربوط به آن سلول، تعيين مي كند. شبيه اتاماتاي يادگير سلولي، قانوني وجود دارد كه اتاماتاي يادگير سلولي نامنظم، تحت آن عمل مي كند. قانون اتاماتاي يادگير سلولي و اعمال انتخاب شده بوسيلة اتاماتاهاي يادگير همسايه براي يك اتاماتاي يادگير خاص، بردار احتمال اعمال مربوط به آن اتاماتاي يادگير را بروز مي كند.

۳- الگوريتم‌هاي پيشنهادي براي حل مسأله رنگ‌آميزي گراف با استفاده از اتاماتاي يادگير سلولي

در الگوريتم پيشنهادي، ابتدا بايستي گراف ورودي، تبديل به گرافهاي پايه شود، بطوري كه هر رأس تنها يك رنگ مي گيرد. فرض كنيد در گراف شكل ۱-الف وزن رئوس و يالها برابر w(1)=1، w(2)=2، w(3)=2، d(1,1)=1، d(1,2)=2، d(1,3)=1، d(2,2)=2، d(2,3)=4 و d(3,3)=3 مي باشد. در اين صورت بعد از تبديل آن، گراف شكل ۱-ب بدست مي آيد، كه وزن تمامي نودها برابر يك است.



شكل۱-الف: گراف ورودي قبل از تبديل



شكل۱-ب: گراف ورودي بعد از تبديل

جهت نگاشتن يك گراف به اتاماتاي يادگير سلولي, ما از اتاماتاي يادگير سلولي نامنظم استفاده مي‌كنيم؛ براي اين منظور, به ازاي هر رأس از گراف, يك سلول از اتاماتا را در نظر مي‌گيريم و هر سلول در اتاماتاي يادگير سلولي با سلول ديگر همسايه است اگر و تنها اگر رأس متناظر با آن سلول در گراف مسأله با رأس متناظر با سلول ديگر, يال داشته و يا به عبارت ديگر مجاور باشد. تعداد اعمال هر يك از اتاماتاهاي يادگير در اتاماتاي يادگير سلولي برابر تعداد رنگ‌هاي مورد استفاده براي رنگ‌آميزي گراف مي‌باشد. مجموعه رنگ‌ها، مجموعه اعمال هر يك از اتاماتاهاي يادگير مي‌باشد. اتاماتاي يادگير در هر سلول از نوع L_{RP} با ضرايب پاداش و جريمه ۰/۰۱ مي‌باشد. در ابتدا احتمال انتخاب اعمال هر يك از اتاماتاهاي يادگير مساوي و برابر با يك تقسيم بر تعداد رنگ‌هاي مورد استفاده مي‌باشد.

در[۹] نشان داده شده است كه اگر Δ بزرگترين درجة يك رأس در گراف باشد در اين صورت χ تعداد رنگ‌هاي مورد نياز براي رنگ آميزي اصلي مجاز گراف كوچكتر و يا مساوي $\Delta+1$ مي‌باشد يعني $\chi \le \Delta + 1$. ما تعداد اعضاي مجموعة عمل در اين الگوريتم را برابر $(\Delta+1)\times\left(\underset{\forall(i,j)\in E}{Max}\left(d(i,j)\right)\right)$ قرار داديم كه در واقع حالت كلي و عمومي رنگ آميزي اصلي رئوس گراف است؛ چون در آنجا $\underset{\forall(i,j)\in E}{Max}\left(d(i,j)\right)=1$ مي باشد.

در اين الگوريتم، ابتدا گراف ورودي تبديل به گرافهاي پايه مي شود كه هر رأس تنها يك رنگ مي گيرد، همچنين از شرط $|C(i)-C(j)|\ge d(i,j)$ كه در آن C(i) و C(j) عمل(رنگ) منتسب به رئوس i و j و d(i,j) وزن يال بين i و j مي باشد؛ براي دادن جريمه و پاداش استفاده مي شود. الگوريتم بدين صورت است كه هر يك از اتاماتاهاي يادگير در اتاماتاي يادگير سلولي، يكي از اعمال خود را با توجه به بردار احتمال مربوطه انتخاب مي كند. اگر عمل انتخابي يك سلول, در شرط فوق صدق كند؛ به عمل انتخابي اين سلول پاداش داده مي شود، و در غير اين صورت سلول جريمه مي شود. الگوريتم تا زماني ادامه مي يابد كه تمام سلولها پاداش بگيرند. مراحل الگوريتم پيشنهادي را مي توان در گامهاي زير تشريح كرد:

گام اول: تبديل مسأله به مسألة رنگ آميزي اصلي گراف.

در اين گام بايستي به ازاي وزن هر رأس در گراف ورودي، به همان تعداد رأس كه با يكديگر همسايه مي باشند و همچنين بدون حلقه هستند در گراف جديد با وزن يك در نظر گرفت و وزن يال بين آنها برابر با وزن حلقة موجود بر روي رأس مورد نظر در گراف ورودي مي باشد. دو رأسي كه در گراف ورودي همسايه بودند، در گراف جديد نيز بايستي همسايه باشند بطوري كه وزن يالها بدون تغيير باقي مي ماند.

گام دوم: ساخت يك اتاماتاي يادگير سلولي نامنظم همريخت با گراف ورودي.

در اين گام به هر يك از رئوس گراف يك سلول متناظر مي شود و دو سلول در صورتي همسايه هستند كه رئوس متناظر آنها در گراف ورودي نيز همسايه باشند، همچنين به هر سلول يك اتاماتاي يادگير اختصاص مي يابد.

گام سوم: انتخاب تصادفي عملها توسط اتاماتاي يادگير هر سلول.

در اين گام هر يك از اتاماتاهاي يادگير يك عمل از مجموعة اعمال خود را با توجه به بردار احتمال مربوطه انتخاب مي كند.

گام چهارم: پاداش دادن و جريمه كردن عمل انتخابي اتاماتاها و بروز رساني بردار احتمالات.

اگر قدرمطلق تفاضل عمل انتخابي يک سلول نسبت به تمامي همسايگانش بزرگتر يا مساوي وزن يال مرتبط بين آن دو باشد؛ در اين صورت, به عمل انتخابي اين سلول پاداش داده مي شود و در غير اين صورت سلول جريمه مي شود.

گام پنجم: بررسي خاتمة الگوريتم.

در صورتي كه تمام سلولها پاداش بگيرند، الگوريتم خاتمه مي يابد و در غير اين صورت الگوريتم اجراي الگوريتم از گام سوم ادامه مي يابد.

شبه كد اين الگوريتم در شكل ۲ آورده شده است.

Algorithm CLA
Input : Graph G(V,E)
Output : The number of colors needs to be chosen for coloring the graph
Begin
Transfer problem to pure graph coloring
Construct an irregular CLA isomorphic to the input graph
Repeat
For all cells do in parallel
Each cell chooses one of its actions according to its action probability vector
If ($|c_i - c_j| \geq d_{(i,j)}$, for each $e_{(i,j)} \in E$) **then**
Reward the action chosen by automaton A_i
Else
Penalize the action chosen by automaton A_i
End if
Until all cells are rewarded by the random Environment
Return the number of used colors
End.

شكل۲- شبه كد الگوريتم پيشنهادي

۴- نتايج آزمايشات

براي اجراي الگوريتمها، يك كامپيوتر شخصي با پردازندة اينتل P4 2.4 GHz و با ۵۱۲ مگابايت حافظة اصلي و ويندوز XP مورد استفاده قرار گرفته است و روي نمونه هاي پيشنهاد شده در استاندارد DIMACS تست شده است[۱۰]. براي بدست آوردن نتايج از نمونه هاي GEOMn وGEOMnb (بطوري كه n نشان دهندة تعداد رئوس گراف است) استفاده كرديم. در اين گرافها، رئوس در يك شبكة۱۰۰۰۰*۱۰۰۰۰ بصورت تصادفي قرار گرفته اند و در صورتي كه به اندازة كافي به همديگر نزديك باشند، يك يال بين آنها برقرار مي شود. نمونه هاي GEOMn گرافهاي خلوتي مي باشند و GEOMnb گرافهاي متراكم تري در مقايسه با GEOMn مي باشند. نتايج حاصل از الگوريتم پيشنهادي با نتايج الگوريتمهاي ارائه شده توسط ليم[۴،۵]، پرستويچ[۶] و مالاگوتي[۷] مقايسه شده است. معيارهاي ارزيابي الگوريتمها، تعداد رنگهاي استفاده شده براي رنگ آميزي(C) و زمان اجرا بر حسب ثانيه(T) مي باشد. هر يك از نتايج كه در جدول ۱ و ۲ گزارش شده است، متوسط ۵۰ بار اجرا مي باشد. ستون آخر در جداول ۱ و ۲ (.diff) تفاضل بين تعداد رنگ بدست آمده توسط الگوريتم پيشنهادي و بهترين تعداد رنگ بدست آمده توسط الگوريتمهاي مورد مقايسه مي باشد.

در رنگ آميزي پهناي باند گراف همانگونه كه از نتايج آزمايشات مشهود است؛ اجراي الگوريتمها بر روي ۲۲ نمونة پيشنهاد شده در استاندارد DIMACS نشان مي دهد كه الگوريتم پيشنهادي تعداد رنگ را در ۱۶ مورد نسبت به بهترين تعداد رنگ در الگوريتمهاي پيشين كاهش داده است و در ۳ مورد تعداد رنگ تفاوتي نكرده است و در ۳ مورد تعداد رنگ را افزايش داده است. الگوريتم پيشنهادي نسبت به الگوريتم ليم و پرستويچ زمان اجراي ضعيفي دارد اما نسبت به الگوريتم مالاگوتي مخصوصا در تعداد رئوس بالا زمان اجرا را كاهش داده است.

در چند رنگ آميزي پهناي باند گراف همانگونه كه از نتايج آزمايشات مشهود است؛ اجراي الگوريتمها بر روي ۲۲ نمونة پيشنهاد شده در استاندارد DIMACS نشان مي دهد الگوريتم پيشنهادي تعداد رنگ را در ۹ مورد نسبت به بهترين تعداد رنگ در الگوريتمهاي پيشين كاهش داده است و در ۵ مورد تعداد رنگ تفاوتي نكرده است و در ۷ مورد تعداد رنگ را افزايش داده است. الگوريتم پيشنهادي در زمان اجرا نسبت به الگوريتمهاي ليم و مالاگوتي عملكرد خوبي دارد اما در برابر الگوريتم پرستويچ ضعيف عمل مي كند.

جدول۱- تعداد رنگ و مدت زمان لازم براي رنگ آميزي گراف به كمك الگوريتم‌هاي مختلف در مسألة رنگ آميزي پهناي باند گراف

Graph	*Proposed Algorithm*		*Lim [5]*		*Prestwich[7]*		*Malaguti[8]*		*Diff.*
	T	*C*	*T*	*C*	*T*	*C*	*T*	*C*	
GEOM20	82.13	9	1	21	0	21	0	21	-12
GEOM20b	83.75	13	0	14	0	13	0	13	0
GEOM30	85	16	0	29	0	28	0	28	-12
GEOM30b	85.72	18	0	26	0	26	0	26	-8
GEOM40	86.81	21	3	28	0	28	0	28	-7
GEOM40b	87.58	25	4	34	0	33	0	33	-8
GEOM50	87.9	26	5	28	0	28	0	28	-2
GEOM50b	88.92	38	7	38	0	35	0	35	3

GEOM60	89.44	27	1	34	0	33	0	33	-6
GEOM60b	90.46	40	5	46	0	43	29	41	-1
GEOM70	90.72	35	1	38	0	38	0	38	-3
GEOM70b	91.66	51	0	54	1	48	52	48	3
GEOM80	91.92	43	8	42	0	41	0	41	2
GEOM 80b	92.33	60	1	66	12	63	150	63	-3
GEOM90	93.43	45	1	46	3	46	0	46	-1
GEOM90b	94.4	63	20	77	2	72	1031	70	-7
GEOM100	94.71	48	33	51	0	50	2	50	-2
GEOM100b	95.54	73	9	83	15	73	597	73	0
GEOM 110	96.13	49	2	53	4	50	3	50	-1
GEOM 110b	96.95	78	17	88	2	79	676	78	0
GEOM 120	97.02	57	1	62	4	60	0	59	-2
GEOM 120b	97.93	81	4	98	9	86	857	84	-3

جدول۲- تعداد رنگ و مدت زمان لازم براي رنگ آميزي گراف به كمك الگوريتم‌هاي مختلف در مسألة چند رنگ آميزي پهناي باند گراف

Graph	*Proposed Algorithm*		*Lim [5]*		*Lim [6]*		*Prestwich[7]*		*Malaguti[8]*		*Diff.*
	T	*C*	*T*	*C*	*T*	*C*	*T*	*C*	*T*	*C*	
GEOM20	118.85	140	0	149	17	149	4	149	18	149	-9
GEOM20b	119.87	44	0	44	2	44	0	44	5	44	0
GEOM30	120.39	161	0	160	23	160	0	160	1	160	1
GEOM30b	121.41	76	0	77	7	77	0	77	0	77	-1
GEOM40	121.67	168	3	167	47	167	1	167	20	167	1
GEOM40b	122.61	74	8	76	10	74	4	74	1	74	0
GEOM50	122.87	227	41	224	77	224	1	224	1197	224	3
GEOM50b	124.01	84	53	87	15	87	1	86	197	83	1
GEOM60	124.38	258	46	258	96	258	77	258	139	258	0
GEOM60b	125.35	115	300	119	23	116	12	116	460	115	0
GEOM70	125.66	270	25	279	138	273	641	277	1413	272	-2
GEOM70b	126.49	118	136	124	30	121	55	119	897	117	1
GEOM80	127.08	380	4041	394	204	383	361	398	132	388	-3
GEOM80b	127.9	141	3230	145	39	141	37	141	1856	141	0
GEOM90	127.96	329	4095	335	248	332	44	339	4160	332	-3
GEOM90b	128.96	142	648	157	46	157	303	147	1750	144	-2
GEOM100	129.3	403	631	413	311	404	7	424	3283	410	-1
GEOM100b	129.87	157	4893	172	55	170	367	159	3699	156	1
GEOM 110	130.39	384	577	389	368	383	43	392	2344	383	1
GEOM 110b	131	209	12	210	68	206	5	208	480	206	3
GEOM 120	131.58	395	1825	409	408	402	9	417	2867	396	-1
GEOM 120b	132.43	190	869	201	97	199	3	196	3292	191	-1

۵- نتيجه گيري

در اين مقاله الگوريتمي براي حل دو نوع از مسائل رنگ‌آميزي گراف با عنوان رنگ آميزي پهناي باند گراف و چند رنگ آميزي پهناي باند گراف با استفاده از اتاماتاي يادگير سلولي نامنظم و با الگوريتم يادگيري L_{RP} پيشنهاد گرديد. الگوريتم پيشنهادي با الگوريتم‌هاي ارائه شده توسط ليم و پرستويچ و مالاگوتي مقايسه شد كه بر طبق نتايج به‌دست آمده الگوريتم پيشنهادي در مسألة رنگ آميزي پهناي باند نسبت به الگوريتم هاي فوق‌الذكر تعداد رنگ را كاهش مي دهد و زمان اجرا را نيز بهبود مي بخشد و در مسألة چند رنگ آميزي پهناي باند، تقريبا همان نتايج الگوريتم هاي فوق را در تعداد رنگ، اما در زمان كمتر بدست مي آورد.

مراجع

[1] R. Karp, "Reducibility among Combinatorial Problems", Complexity of computer computations, pp. 85-104, 1972.

[2] W. Hale, "Frequency Assignment: Theory and Applications", in Proceedings of the IEEE, Vol. 68, pp. 1497-1514, 1980.

[3] R. Opsut and F. Roberts, "On the Fleet Maintenance, Mobile Radio Frequency, Task Assignment, and Traffic Phasing Problems," in The Theory and Applications of Graphs, Wiley, New York, pp. 479-492, 1981.

[4] A. Lim, X. Zhang, Y. Zhu, "A Hybrid Methods for the Graph Coloring and its Related Problems", in: Proceedings of MIC2003: The Fifth Metaheuristic International Conference, Kyoto, Japan, 2003.

[5] A. Lim, Q. Lou, B. Rodrigues, Y. Zhu, "Heuristic Methods for Graph Coloring Problems", in: Proceedings of the 2005 ACM Symposium on Applied Computing, Santa Fe, NM, pp. 933–939, 2005.

[6] S. Prestwich, "Generalized Graph Colouring by a Hybrid of Local Search and Constraint Programming", Technical Report, Cork Constraint Computation Center, Ireland, 2005.

[7] E. Malaguti and P. Toth ,"An Evolutionary Approach for Bandwidth Multicoloring Problems", European Journal of Operational Research, Vol. 189, pp. 638–651, 2008.

[8] M. Asnaashari and M.R. Meybodi, "Irregular Cellular Learning Automata and Its Application to Clustering in Sensor Networks", Proceedings of 1^{5th} Conference on Electrical Engineering (1^{5th} ICEE), Volume on Communication, Telecommunication Research Center, Tehran, Iran, May 15-17, 2007.

[9] R. Diestel, "Graph Theory", 3rd Edition, Springer-Verlag, New York, 2005.

[10] M.A. Trick, Computational symposium: Graph coloring and its generalizations, 2002. <http://mat.gsia.cmu.edu/COLOR02/>.