حل مسأله رنگ‌آميزي در گراف با استفاده از اتوماتاي يادگير سلولي

مهدي عنايت زارع
مجتمع آموزشي عالي جنديشاپور
دزفول ايران
menayat@jsu.ac.ir

محمدرضا ميبدي
دانشگاه صنعتي اميركبير
دانشكده مهندسي كامپيوتر و فناوري اطلاعات، تهران، ايران
mmeybodi@aut.ac.ir

چكيده: مسأله رنگ‌آميزي گراف عبارت است از انتساب k رنگ به رأس‌هاي يك گراف به‌صورتي‌كه هيچ دو رأس مجاور در گراف داراي رنگ يكساني نباشند. كمترين تعداد رنگي كه بتوان يك گراف را با آن تعداد رنگ, رنگ‌آميزي كرد, عدد رنگي گراف ناميده مي‌شود. مسأله رنگ‌آميزي گراف از جمله مسايل NP-complete مي‌باشد و به همين دليل الگوريتم‌هاي تقريبي متعددي براي آن طراحي شده است. در اين مقاله با استفاده از اتوماتاي يادگير سلولي نامنظم سه الگوريتم تقريبي براي حل مسأله رنگ‌آميزي گراف پيشنهاد مي‌شود. الگوريتم‌هاي تقريبي پيشنهادي با الگوريتم‌هاي تقريبي بلام, كارگر و هالپرين مقايسه شده است. طبق آزمايش‌هاي انجام گرفته الگوريتم‌هاي پيشنهادي نتايج بهتري را در مقايسه با الگوريتم‌هاي فوق‌الذكر توليد مي‌كنند.

واژه هاي كليدي: رنگ‌آميزي گراف، الگوريتم‌هاي تقريبي, اتوماتاي يادگير سلولي.

۱- مقدمه

رنگ‌آميزي گراف $G=(V,E)$ كه در آن V مجموعه رأس‌ها و E مجموعه يال‌هاي گراف G مي‌باشند, عبارت است از انتساب k رنگ به رأس‌هاي گراف G. رنگ‌آميزي را مجاز مي‌ناميم, اگر رنگ‌هاي منتسب به هيچ دو رأس مجاوري يكسان نباشند. كمترين تعداد رنگي كه بتوان يك گراف را با آن تعداد رنگ, رنگ‌آميزي كرد عدد رنگي گراف ناميده مي‌شود. يافتن عدد رنگي گراف براي گراف‌هاي k-رنگ‌پذير كه در آن $k \geq 3$ يك مسأله بغرنج[1] مي‌باشد[۱].

مسأله رنگ‌آميزي گراف داراي كاربردهاي فراواني از جمله مسايل زمان‌بندي, مسأله تخصيص ثبات, حل معادلات ديفرانسيل با مشتقات جزيي, الگوريتم‌هاي موازي گاوس-سايدل براي حل معادلات جبري غير خطي و استخراج قسمت‌هاي موازي الگوريتم‌ها مي‌باشد.[۲]. با توجه به اين‌كه در اكثر كاربردهاي رنگ‌آميزي گراف, يافتن يك راه‌حل نزديك به بهينه نيز كافي است, الگوريتم‌هاي تقريبي فراواني براي رنگ‌آميزي گراف از جمله الگوريتم‌هاي ويگدرسون[۳], برگر[۴], بلام[۲], كارگر[۵] و هالپرين[۶] گزارش شده است. در اين مقاله سه الگوريتم بر اساس اتوماتاي يادگير سلولي نامنظم براي حل مسأله رنگ‌آميزي گراف پيشنهاد مي‌گردد. الگوريتم‌هاي پيشنهادي با الگوريتم‌هاي تقريبي بلام, كارگر و هالپرين مقايسه مي‌گردد. تا آنجا كه نگارندگان اين مقاله اطلاع دارند تا به حال الگوريتمي با تضمين كارايي (نسبت تعداد رنگ‌هاي به‌دست آمده توسط الگوريتم به عدد رنگي گراف) بالاتر از الگوريتم هالپرين گزارش نشده است[۶]. نتايج آزمايش‌ها نشان مي‌دهد كه دو الگوريتم از الگوريتم‌هاي پيشنهادي داراي نتايج بهتري در مقايسه با الگوريتم‌هاي تقريبي بلام, كارگر و هالپرين مي‌باشد. ادامه مقاله به اين صورت سازمان‌دهي شده است: در بخش‌هاي ۲ تا ۴ به‌ترتيب به معرفي اجمالي اتوماتاي سلولي، اتوماتاهاي يادگير و اتوماتاي يادگير سلولي مي‌پردازيم. در بخش ۵ الگوريتم‌هاي پيشنهادي مبتني بر اتوماتاي يادگير سلولي نامنظم شرح داده مي‌شود و در بخش ۶ الگوريتم‌هاي ارايه شده با الگوريتم‌هاي بلام, كارگر و هالپرين مقايسه مي‌گردد. بخش نهايي مقاله نتيجه‌گيري مي‌باشد.

۲- اتوماتاي سلولي

اتوماتاي سلولي (CA) [۷] در اواخر دهه ۱۹۴۰ توسط ون‌نيومن مطرح و پس از او توسط رياضي‌داني بنام اولام به عنوان مدلي براي بررسي رفتار سيستم‌هاي پيچيده پيشنهاد شد. اتوماتاي سلولي در حقيقت سيستم‌هاي ديناميكي گسسته‌اي هستند كه رفتارشان كاملاً بر اساس ارتباط محلي استوار است. در اتوماتاي سلولي، فضا بصورت يک شبكه تعريف مي‌گردد كه به هر خانه آن يک سلول گفته مي‌شود. زمان بصورت گسسته پيش مي‌رود و قوانين آن بصورت سرتاسري است كه از طريق آن در هر مرحله هر سلول، وضعيت جديد خود را با در نظر گرفتن همسايه‌هاي مجاور خود بدست مي‌آورد. قوانين اتوماتاي سلولي، نحوه تأثير پذيرفتن سلول از سلول‌هاي همسايه خود را مشخص مي‌كند. يک سلول را همسايه سلول ديگر گوئيم هرگاه بتواند آن را در يک مرحله و بر اساس قانون حاكم تحت تأثير قرار دهد. در بدست آوردن وضعيت كنوني سلول علاوه بر وضعيت قبلي سلول‌هاي همسايه، مي‌توان وضعيت قبلي خود سلول را نيز دخالت داد.

در مدل‌سازي سيستم‌هاي فيزيكي و بيولوژيكي به‌وسيله اتوماتاي سلولي، گاهي لازم است كه قوانين را بصورت احتمالي در نظر بگيريم. رفتار احتمالي را مي‌توان به عنوان نويز در سيستم تعبير نمود. يكي از اشكالات اتوماتاي سلولي، تعيين فرم قطعي قوانين مورد نياز براي يک كاربرد خاص است. راه‌حل‌هاي متفاوتي در برخورد با اين مشكلات به نظر مي‌رسد. يكي از اين راه‌حل‌ها حركت به‌سمتي است كه به نحوي خود ابزار با گذشت زمان بتواند قوانين مناسب را استخراج كند.

[1] NP-Complete

۳- اتوماتاي يادگير

اتوماتاي يادگير[۸]، ماشيني است كه مي‌تواند تعدادي متناهي عمل را انجام دهد. هر عمل انتخاب شده توسط يک محيط احتمالي ارزيابي مي‌شود و نتيجه ارزيابي در قالب پاسخي مثبت يا منفي به اتوماتا داده مي‌شود و اتوماتا از اين پاسخ در انتخاب عمل بعدي تاثير مي‌گيرد. هدف نهايي اين است كه اتوماتا ياد بگيرد تا از بين اعمال خود بهترين عمل را انتخاب كند. بهترين عمل، عملي است كه احتمال دريافت پاداش از محيط را به حداكثر برساند.

اتوماتاي يادگير با ساختار متغير را مي‌توان توسط چهارتايي (α, β, p, T) نشان داد كه $\alpha = \{\alpha_1,...,\alpha_r\}$ مجموعه عمل‌هاي اتوماتا، $\beta = \{\beta_1,...,\beta_m\}$ مجموعه ورودي‌هاي اتوماتا، $p = \{p_1,.., p_r\}$ بردار احتمال انتخاب هريک از عمل‌ها و $p(n+1) = T[\alpha(n), \beta(n), p(n)]$ الگوريتم يادگيري مي‌باشد. الگوريتم زير يک نمونه از الگوريتم‌هاي يادگيري خطي است. فرض كنيد عمل α_i در مرحله n ام انتخاب شود.

- پاسخ مطلوب

$$\begin{aligned} p_i(n+1) &= p_i(n) + a[1 - p_i(n)] \\ p_j(n+1) &= (1-a)\,p_j(n) \qquad \forall j \quad j \neq i \end{aligned} \tag{۱}$$

- پاسخ نامطلوب

$$\begin{aligned} p_i(n+1) &= (1-b)\,p_i(n) \\ p_j(n+1) &= (b/r-1) + (1-b)\,p_j(n) \quad \forall j \quad j \neq i \end{aligned} \tag{۲}$$

در روابط بالا، a پارامتر پاداش و b پارامتر جريمه مي‌باشند. با توجه به مقادير a و b سه حالت زير را مي‌توان در نظر گرفت. زماني‌كه a و b با هم برابر باشند، الگوريتم را L_{RP} مي‌ناميم، زماني‌كه b از a خيلي كوچكتر باشد، الگوريتم را $L_{R\varepsilon P}$ مي‌ناميم و زماني‌كه b مساوي صفر باشد الگوريتم را L_{RI} مي‌ناميم[۹].

٤- اتوماتاي يادگير سلولي

بسياري از مسايل را نمي‌توان با استفاده از يک اتوماتاي يادگير تنها حل كرد, بلكه قدرت اصلي اتوماتاي يادگير زماني آشكار مي‌شود كه آنها به‌صورت دسته‌جمعي به‌كار روند. با توجه به اين مسأله و ضعف‌هاي عنوان شده براي اتوماتاي سلولي، با تركيب دو مدل اتوماتاي سلولي و اتوماتاهاي يادگير، مدل جديدي با نام اتوماتاي يادگير سلولي (CLA) ايجاد گرديد[۱۰]. در واقع يك اتوماتاي يادگير سلولي, يك اتوماتاي سلولي است كه هر سلول آن به يك يا چند اتوماتاي يادگير مجهز شده است. تعريف رسمي اتوماتاي يادگير سلولي در [۱۱] آمده است.

عمل‌كرد اتوماتاي يادگير سلولي را مي‌توان به شرح زير بيان كرد. در هر لحظه هر اتوماتاي يادگير در اتوماتاي يادگير سلولي يك عمل از مجموعه اعمال خود را انتخاب مي‌كند. اين عمل مي‌تواند بر اساس مشاهدات قبلي و يا به صورت تصادفي انتخاب شود. عمل انتخاب شده با توجه به اعمال انتخاب شده توسط سلول‌هاي همسايه و قانون حاكم بر اتوماتاي يادگير سلولي پاداش داده و يا جريمه مي‌شود. با توجه به اينكه عمل انتخاب شده پاداش گرفته و يا جريمه شده است, اتوماتا رفتار خود را تصحيح كرده و ساختار داخلي اتوماتا به‌هنگام مي‌گردد. معمولاً عمل بروزرساني تمام اتوماتاها به صورت همزمان انجام مي‌شود. بعد از بروزرساني، هر اتوماتا در اتوماتاي يادگير سلولي دوباره يك عمل از مجموعه اعمال خود را انتخاب كرده و انجام مي‌دهد. فرآيند انتخاب عمل و دادن پاداش و يا جريمه تا زماني كه سيستم به حالت پايدار برسد و يا يك معيار از قبل تعريف شده‌اي برقرار شود, ادامه مي‌يابد. عمل به‌هنگام‌سازي ساختار اتوماتاهاي موجود در اتوماتاي يادگير سلولي توسط الگوريتم يادگيري انجام مي‌شود.

اتوماتاي يادگير سلولي را يكنواخت مي‌گوييم، اگر براي تمام سلول‌ها، تابع همسايگي، قانون محلي و اتوماتاهاي يادگير يكسان باشند در غير اين صورت اتوماتاي يادگير سلولي غيريكنواخت ناميده مي‌شود. در صورتي‌كه اتصالات بين اتوماتاهاي يادگير منظم (مانند آرايه يك بعدي و يا ارايه دو بعدي) نباشد به آن اتوماتاي يادگير سلولي نامنظم[۱۴] گفته مي‌شود. اگر بروزرساني سلول‌ها به صورت همگام براي تمامي سلول‌ها صورت بگيرد، اتوماتاي يادگير سلولي، اتوماتاي يادگير سلولي همگام و در غير اين صورت اتوماتاي يادگير سلولي ناهمگام[۱۲] [۱۶] ناميده مي‌شود. براي بعضي از كاربردهاي اتوماتاي يادگير سلولي مي‌توان به [۱۶-۱۰] مراجعه نمود.

۵- الگوريتم‌هاي پيشنهادي براي حل مسأله رنگ‌آميزي گراف با استفاده از اتوماتاي يادگير سلولي

در اين بخش سه الگوريتم براي حل مسأله رنگ‌آميزي گراف پيشنهاد مي‌گردد. براي هر سه الگوريتم در ابتدا يك اتوماتاي يادگيرسلولي همگام غيريكنواخت نامنظم متناظر با گراف مسأله ايجاد مي‌شود. تعداد اعمال هر يك از اتوماتاهاي يادگير در اتوماتاي يادگير سلولي برابر تعداد رنگ‌هاي مورد نظر مي‌باشد. مجموعه رنگ‌ها, مجموعه اعمال هر يك از اتوماتاهاي يادگير مي‌باشد. شماره هر سلول در اتوماتاي يادگير سلولي شماره رأس متناظر با آن سلول در گراف مسأله مي‌باشد(از ۱ تا n). اتوماتاي يادگير در هر سلول از نوع L_{RP} با ضريب پاداش و جريمه ۰,۰۱ مي‌باشد. در ابتدا احتمال انتخاب اعمال هر يك از اتوماتاهاي يادگير مساوي و برابر با يك تقسيم بر تعداد رنگ‌هاي مورد استفاده مي‌باشد.

الگوريتم پيشنهادي اول**(CLA-1)**: در هر مرحله از الگوريتم پيشنهادي اول هر يك از اتوماتاهاي يادگير در اتوماتاي يادگير سلولي يكي از اعمال (رنگ) خود را كه برابر با تعداد رأس هاي گراف (n) مي‌باشد انتخاب مي‌كند. اگر رنگ انتخابي براي يك سلول متفاوت با رنگ‌هاي انتخابي براي سلول‌هاي همسايه باشد در اين صورت به رنگ انتخابي اين سلول بر طبق الگوريتم يادگيري L_{RP} پاداش داده مي‌شود, ولي اگر رنگ انتخاب شده توسط يك سلول توسط بعضي از

همسايگانش نيز انتخاب شده باشد در اين صورت سلول مورد نظر و همسايگانش هر يك عدد تصادفي توليد مي‌كنند. در صورتي‌كه عدد تصادفي سلول از اعداد تصادفي تمام همسايگانش بزرگتر باشد, دراين صورت عمل انتخاب شده توسط اين سلول پاداش مي‌گيرد و اگر عدد تصادفي سلول از عدد تصادفي حتي يك سلول كوچكتر باشد عمل انتخابي جريمه مي‌گردد. الگوريتم زماني خاتمه مي‌يابد كه در يك مرحله هيچ سلولي جريمه نشود.

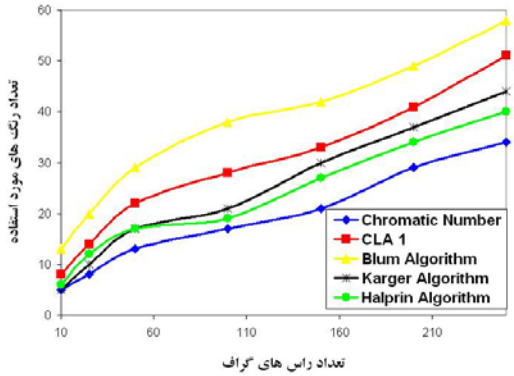
الگوريتم پيشنهادي دوم(**CLA-2**): در [۱۷] نشان داده شده است كه اگر Δ بزرگترين درجه يك رأس در گراف باشد, در اين صورت تعداد رنگ‌هاي مورد نياز براي رنگ آميزي مجاز گراف كوچكتر و يا مساوي $\Delta+1$ مي‌باشد. تفاوت الگوريتم ۱ با الگوريتم ۲ در اين است كه در الگوريتم ۲ تعداد اعمال هر يك از اتوماتاهاي يادگير در اتوماتاي يادگير سلولي برابر $\Delta+1$ قرار داده شده است.

الگوريتم پيشنهادي سوم(**CLA-3**): الگوريتم ۳ همان الگوريتم ۲ مي‌باشد با اين تفاوت كه در الگوريتم ۳ براي پاداش دادن و يا جريمه كردن يك سلول كه رنگ انتخابي آن با رنگ‌هاي انتخابي سلول‌هاي همسايه‌اش يكسان است, از درجه رأس متناظر با آن سلول استفاده مي‌شود. بدين‌صورت كه اگر رنگ انتخاب شده توسط يك سلول توسط بعضي از همسايگانش انتخاب شده باشد, آنگاه آن سلول فقط در صورتي پاداش مي‌گيرد كه درجه آن سلول (رأس متناظر با آن سلول) از درجه تمام سلول‌هاي همسايه كه همرنگ با آن سلول هستند, بيشتر باشد و در غير اين‌صورت سلول جريمه مي‌شود.

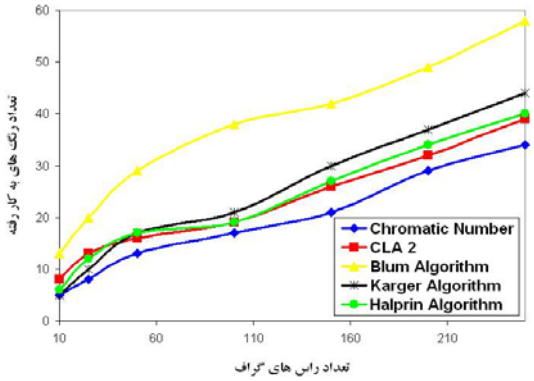
٦- نتايج آزمايش‌ها

گراف‌هاي مورد بررسي گراف‌هاي موجود درمجموعه استاندارد DIMACS [۱۸] مي‌باشند كه يال‌هاي آنها به‌صورت تصادفي و با احتمال ۰,۵ انتخاب شده‌اند. نتايج حاصل از الگوريتم‌هاي پيشنهادي با نتايج الگوريتم‌هاي بلام[۲], كارگر[۵] و هالپرين[۶] مقايسه شده است. معيارهاي مقايسه تعداد رنگ‌هاي استفاده شده براي رنگ‌آميزي و زمان اجرا بر حسب ثانيه مي‌باشد. براي اجراي الگوريتم‌ها يك كامپيوتر شخصي با پردازنده اينتل P4 2.4GHz و با ۵۱۲ مگابايت حافظه اصلي مورد استفاده قرار گرفته است. هر يك از نتايج كه در نمودارهاي ۱ تا ۶ گزارش شده است, متوسط ۵۰ بار اجرا مي‌باشد.

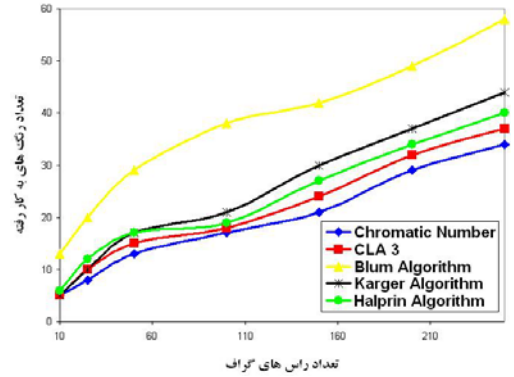
همان‌گونه كه نمودارها نشان مي‌دهد الگوريتم پيشنهادي اول از نظر تعداد رنگ‌هاي مورد استفاده از الگوريتم بلام بهتر و از دو الگوريتم كارگر و هالپرين بدتر عمل مي‌كند ولي در مقابل از نظر زمان اجرا از الگوريتم‌هاي كارگر و هالپرين بهتر عمل كرده است. الگوريتم‌هاي پيشنهادي دوم و سوم در مقايسه با الگوريتم‌هاي بلام, كارگر و هالپرين تعداد رنگ‌هاي كمتري براي رنگ‌آميزي گراف به‌كار مي‌برند. از بين الگوريتم‌هاي دوم و سوم، الگوريتم سوم داراي نتايج بهتري است ولي در مقابل از نظر زمان اجرا بدتر از الگوريتم بلام عمل مي‌كند. الگوريتم‌هاي پيشنهادي دوم و سوم در مقايسه با الگوريتم‌هاي كارگر و هالپرين تا هنگامي‌كه تعداد رأس‌هاي گراف كمتر از ۱۰۰ باشد نسبتاً بهتر عمل مي‌كنند ولي با بالا رفتن تعداد رأس‌هاي گراف, كارايي خود را از دست مي‌دهند و زمان اجراي بيشتري را طلب مي‌كنند.



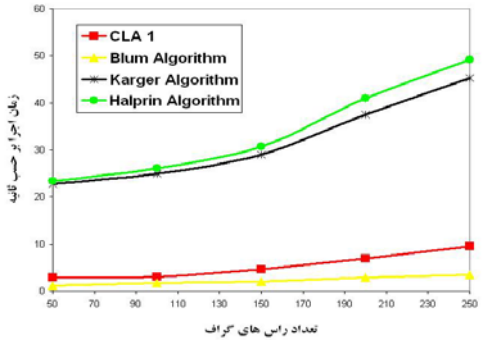
شكل ۱- مقايسه الگوريتم پيشنهادي اول با الگوريتم‌هاي بلام, كارگر و هالپرين بر حسب تعداد رنگ‌هاي مورد استفاده



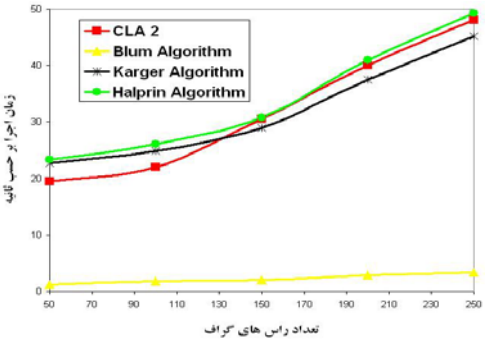
شكل ۲- مقايسه الگوريتم پيشنهادي دوم با الگوريتم‌هاي بلام, كارگر و هالپرين بر حسب تعداد رنگ‌هاي مورد استفاده



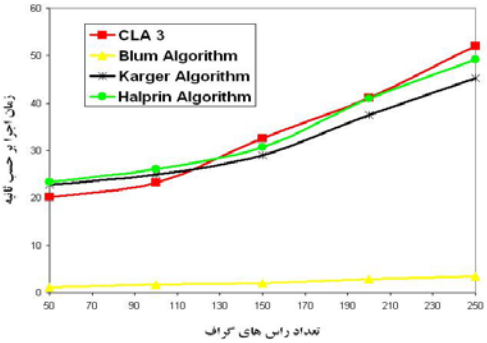
شكل ۳- مقايسه الگوريتم پيشنهادي سوم با الگوريتم‌هاي بلام, كارگر و هالپرين بر حسب تعداد رنگ‌هاي مورد استفاده



شکل ۴- مقايسه الگوريتم پيشنهادي اول با الگوريتم‌هاي بلام, كارگر و هالپرين بر اساس زمان اجرا بر حسب ثانيه



شکل ۵- مقايسه الگوريتم پيشنهادي دوم با الگوريتم‌هاي بلام, كارگر و هالپرين بر اساس زمان اجرا بر حسب ثانيه



شکل ٦- مقايسه الگوريتم پيشنهادي سوم با الگوريتم‌هاي بلام, كارگر و هالپرين بر اساس زمان اجرا بر حسب ثانيه

۷- نتيجه گيري

در اين مقاله سه الگوريتم براي حل مسأله رنگ‌آميزي گراف با استفاده از اتوماتاي يادگير سلولي نامنظم پيشنهاد گرديد. الگوريتم‌هاي پيشنهادي با الگوريتم‌هاي تقريبي بلام, كارگر و هالپرين مقايسه شد كه بر طبق نتايج به‌دست آمده الگوريتم‌هاي پيشنهادي دوم و سوم نتايج بهتري را نسبت به الگوريتم‌هاي فوق‌الذكر توليد مي‌كنند.

سپاس‌گزاری: این کار تحقیقاتی توسط مرکز تحقیقات مخابرات ایران حمایت مالی شده است که از این طریق سپاس‌گزاری می‌گردد.

مراجع

[1] Karp, R., "Reducibility among combinatorial problems", Complexity of computer computations, pp. 85-104, 1972.

[2] Blum, A., "Algorithms for Approximate Graph Coloring", PhD. Thesis, Department of Electrical Engineering and Computer Science, Massachusetts Institute of Technology, 1991.

[3] Wigderson, A., "Improving the Performance Guarantee for Approximate Graph Coloring", Journal of the Association for Computing Machinery, Vol. 30, No. 4, pp. 729-735, 1983.

[4] Berger, B., Rompel, J., "A Better Performance Guarantee for Approximate Graph Coloring", Algorithmica, Vol. 5, No. 4, pp. 459-466, 1990.

[5] Karger, D., Motwani, R., Sudan, M., "Approximate Graph Coloring by Semidefinite Programming", Journal of the Association for Computing Machinery, Vol. 45, No. 2, pp. 246-265, 1998.

[6] Halperin, E., Nathaniel, R., Zwick, U., "Coloring k-Colorable Graphs Using Smaller Palettes", In Proceedings of SODA, pp. 319-326, 2001.

[7] S. Wolfram, "Cellular Automata", Los Alamos Science, Vol. 9, pp. 2-21, fall 1983.

[8] Narendra, K. S., Thathachar, M. A. L., "Learning Automata: An Introduction", Prentice Hall, 1989.

[9] Thathachar, M. A. L., Sastry, P. S., “Varieties of Learning Automata: An Overview”, IEEE Transaction on Systems, Man, and Cybernetics-Part B: Cybernetics, Vol. 32, No. 6, PP. 711-722, 2002.

[10] Meybodi, M. R., Beigy, H., Taherkhani, M., "Cellular Learning Automata and Its Applications", Journal of Science and Technology, University of Share, No. 25, pp.54-77, Autumn/Winter 2003-2004.

[11] Beigy, H., Meybodi, M. R., “A Mathematical Framework for Cellular Learning Automata”, Advanced in Complex Systems, Vol. 7, No. 3&4, pp. 294-319, 2004.

[12] Beigy, H., Meybodi, M. R. “Asynchronous Cellular Learning Automata”, In Proceedings of 10th Annual CSI Computer Conference o Iran, Telecommunication Research Center, Tehran, Iran, pp. 271-280, Feb. 2005.

[13] Beigy, H., Meybodi, M. R., “Open Synchronous Cellular Learning Automata”, In Proceedings of the 8th world Multi-conference on Systemic, Cybernetics and Informatics(SCI2004), pp. 9-15, Orlando, Florida, USA, July 2004.

[14] Asnaashari, M., Meybodi, M. R., "Irregular Cellular Learning Automata and Its Application to Clustering in Sensor Networks", Proceedings of 15th Conference on Electrical Engineering (15th ICEE), Volume on Communication, Telecommunication Research Center, Tehran, Iran, May 15-17, 2007.

[15] Beigy, H., Meybodi, M. R., "Open Synchronous Cellular Learning Automata", Advances in Complex Systems, 2007, to appear.

[16] Beigy, H., Meybodi, M. R., "Asynchronous Cellular Learning Automata", Automatica, Journal of International Federation of Automatic Control, 2007, to appear.

[17] Diestel, R., *Graph Theory*, 3rd Edition, Springer-Verlag, New York, 2005.

[18] http://cs.hbg.psu.edu/txn131/INSTANCES/graphcoloring.html.