



یافتن درخت پوشای مینیمم در گرافهای تصادفی با استفاده از اتماتاهاهای یادگیر

محمد رضا مبیدی

دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات

دانشگاه صنعتی امیرکبیر تهران ایران

mmeybodi@aut.ac.ir

مهدي قربعلي پور درو

دانشکده مهندسي کامپيوتر و فناوري اطلاعات

دانشگاه صنعتي اميركبير تهران ايران

ghorbalipoor@aut.ac.ir

c_e باشد گوییم که گراف G یک گراف قطعی است. در صورتیکه وزن هر یال $e \in E$ به طور قطع معلوم نباشد و دارای وزن احتمالی با متغیر تصادفی X_e وتابع چگالی احتمال f_e باشد، گراف را تصادفی می نامیم. توجه کنید که گراف قطعی حالت خاصی از گراف تصادفی است که در آن برای هر یال $e \in E$ رابطه $f_e(X_e) = c_e$ برقرار است. در گراف تصادفی G معمولاً فرض می شود که متغیرهای تصادفی X_e ها نسبت به هم مستقل می باشند. در این مقاله نیز ما این فرض را در نظر می گیریم. متغیر تصادفی X_T را نشان دهنده وزن درخت فرآگیر T از گراف G در نظر می گیریم و آنرا مجموع متغیرهای تصادفی نشان دهنده وزن یالهای موجود در T تعریف می کنیم، یعنی اگر $\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$ یالهای درخت فرآگیر T باشند در

$$X_T = \sum_{i=1}^{n-1} X_{e_i}.$$

در حالتی که وزن یالها قطعی باشد الگوریتمهای حریصانه ای چون کروسکال(۱۹۵۶)، پریم-دایجکسترا (پریم ۱۹۵۷، دایجکسترا ۱۹۵۹) و سولین(بروفکا) (سولین ۱۹۷۷) ارائه شده است که در اصل مشهورترین الگوریتمهای ارائه شده برای حل مساله درخت فرآگیر مینیمم یعنی یافتن درخت فرآگیر چون T از G با کمترین مجموع وزن، می باشند [2]. نسخه موازی شده این الگوریتمها نیز ارائه شده است: پیچیدگی نسخه موازی شده الگوریتم کروسکال با $p = [\log m]$ پردازنده برابر با $O(m)$ می باشد. پیچیدگی الگوریتم پریم با p پردازنده که به صورت hypercube آرایش شده اند برابر است با $q(n^2/p) + q(n \log p)$ و پیچیدگی نسخه موازی شده الگوریتم سولین با p پردازنده برابر است با $[2] O(\log n(n^2/p + n/p + n + p))$.

حال حالتی را در نظر بگیرید که وزن یالها احتمالی باشند. فرض کنید که $X = \{T_1, T_2, \dots, T_M\}$ کلاس همه درختهای مختلف G باشد. در صورتیکه گراف G گرافی کامل باشد بنا به فرمول کیلی داریم $|X| = n^{n-2}$ ، در نتیجه در حالت کلی خواهیم داشت $|X| \leq n^{n-2}$. در طوری در نظر می گیریم که برای هر $T \in X$ ، مقدار امید ریاضی $T^* \in X$ کوچکتر مساوی امید ریاضی X_T باشد یعنی

چکیده: در این مقاله یک الگوریتم مبتنی بر اتماتاهاهای یادگیر برای یافتن درخت پوشای مینیمم با کمترین هزینه مورد انتظار در گرافهای تصادفی ارائه شده است. فرض بر این است که تابع توزیع وزن یالها از قبل شناخته شده نیست و فقط به نمونه های توزیع یالها دسترسی داریم. هدف یافتن چنین درختی با حداقل تعداد نمونه گیری از یالهای گراف می باشد. در الگوریتم پیشنهادی در هر تکرار اتماتای یادگیر یالی از گراف را برای نمونه گیری نامزد می کند و سپس بر اساس تحلیل آماری مشخص می شود که آیا از آن یال باید نمونه گرفته شود یا نه. به منظور ارزیابی الگوریتم پیشنهادی، تعداد نمونه های گرفته شده توسط الگوریتم پیشنهادی با تعداد نمونه های مورد نیاز به روش نمونه گیری استاندارد مقایسه شده است. نتایج آزمایشی نشان داده که تعداد نمونه های گرفته شده توسط الگوریتم پیشنهادی به مرتب کمتر از تعداد نمونه های گرفته شده به روش نمونه گیری استاندارد می باشد.

واژه های کلیدی: گراف تصادفی، درخت پوشای مینیمم، اتماتای یادگیر.

- معرفی

درخت فرآگیر مینیمم یک گراف وزندار، درخت فرآگیر است که بین همه درختهای فرآگیر آن گراف دارای کمترین وزن باشد. وزن تخصیص داده شده به یک یال می تواند هزینه یال، زمان پیمایش یال، طول یا غیره بنا به محتوای مورد نظر باشد. درختهای فرآگیر مینیمم دارای کاربردهای فراوانی در طراحی سیستمهای فیزیکی می باشند. همچنین در کاربردهایی نظیر آنالیز خوش بندی امارات¹، شناسایی گفتار و پردازش تصاویر مورد استفاده هستند [1]. در این مقاله می خواهیم الگوریتمی برای یافتن درخت فرآگیر مینیمم در گرافهای تصادفی ارائه دهیم.

گراف همبند و غیر جهتدار $G = \langle V, E \rangle$ که در آن V مجموعه رئوس گراف با $|V| = n$ و E مجموعه یالهای گراف با $|E| = m$ را در نظر بگیرید. در صورتیکه وزن هر یال $e \in E$ به احتمال یک برابر ثابت

¹ Statistical cluster analysis



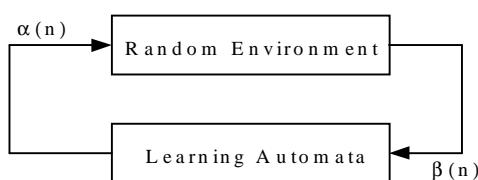
اتوماتای یادگیر و اتوماتای یادگیر توزیع شده برای حل مسائل مختلفی به طور موفقیت آمیز به کار رفته است، مساله های کوتاهترین مسیر بین دو راس [7]، بین یک راس و سایر راسها [8] و بین هر دو راس دلخواه [9] در یک گراف تصادفی از جمله این کارهای است.

در این مقاله یک الگوریتم مبتنی بر اتوماتاهای یادگیر به منظور یافتن درخت پوشای مینیمم در یک گراف تصادفی که در آن تابع توزیع وزن یالهای گراف تصادفی از قبل شناخته شده نمی باشد و فقط نمونه هایی از توزیع وزنها در اختیار می باشد ارائه شده است. در الگوریتم پیشنهادی در هر تکرار اتوماتای یادگیر یالی از گراف را برای نمونه گیری نامزد می کند و سپس بر اساس کمی تجزیه و تحلیل آماری مشخص می شود که آیا از آن یال باید نمونه گرفته شود یا نه. با انتخاب مناسب پارامترهای اتوماتاهای یادگیر الگوریتم پیشنهادی قادر است که درخت پوشای مینیمم را با احتمالی نزدیک ۱ پیدا کند. به اینجا این الگوریتم پیشنهادی با تعداد نمونه های گرفته شده توسط الگوریتم مقایسه شده است. نتایج آزمایشی نشان داده که تعداد نمونه های گرفته شده توسط الگوریتم پیشنهادی به مراتب کمتر از تعداد نمونه های گرفته شده به روش نمونه گیری استاندارد می باشد.

ادامه مقاله به صورت زیر سازماندهی شده است. در بخش ۲ اتوماتای یادگیر معرفی شده و الگوریتم یادگیری خطی برای این نوع اتوماتا بیان شده است. در بخش ۳ الگوریتم پیشنهادی برای یافتن درخت پوشای مینیمم در گرافهای تصادفی ارائه شده و در بخش ۴ نتایج حاصل از آزمایشات ارائه گردیده و بخش آخر نیز نتیجه گیری مقاله می باشد.

۲- اتوماتای یادگیر

اتوماتای یادگیر یک مدل انتزاعی است که تعداد محدودی عمل را می تواند انجام دهد. هر عمل انتخاب شده توسط محیطی احتمالی ارزیابی شده و پاسخی به اتوماتای یادگیر داده می شود. اتوماتای یادگیر از این پاسخ استفاده نموده و عمل خود را برای مرحله بعد انتخاب می کند. شکل ۱ ارتباط بین اتوماتای یادگیر و محیط را نشان می دهد.



شکل ۱: ارتباط بین اتوماتای یادگیر و محیط

محیط را می توان توسط سه تایی $E \equiv \{a, b, c\}$ نشان داد که در آن $a \equiv \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ مجموعه ورودیهای $b \equiv \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ مجموعه خروجیهای

$\forall T \in G, T \neq T^*(E(X_T) \leq E(X_{T^*}))$. هدف ما در این مقاله یافتن T^* می باشد با این فرض که هیچکدام از توابع f_e برای ما شناخته شده نیستند و فقط نمونه ایی از توزیع f_e را داریم. T^* را درخت فراگیر مینیمم می گوییم.

قرار می دهیم $g = \min_{T_{e|x}} \{X_T\}$. مساله ای که در اکثر مقاله ها مورد بررسی قرار گرفته است یافتن تقریبی از امید ریاضی و تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی g می باشد. توجه کنید که در حالت کلی $E(g) \leq E(T^*)$ و برای گرافهای قطعی $g = T^*$ می باشد. Kulkarni [3] با استفاده از نتایجی از نجیرهای مارکف با زمان پیوسته، تابع چگالی احتمال g را در حالتی که X_e ها مستقل از هم و به طور یکسان به صورت نمایی توزیع شده اند را مورد بررسی قرار داد. سپس Jain و Mamer [4] مساله را در حالتی که X_e ها مستقل از هم ولی به صورتهای مختلف توزیع شده اند را مورد بررسی قرار دادند. تعدادی از نویسندها حالتی را در نظر گرفته اند که X_e ها مستقل و به صورت متغیرهای تصادفی گستته مشخص شده اند (ولی Jacobson و Alexopoulos [5] روشی از پارسیشن بنده را برای محاسبه و به دست آوردن باندی برای مقادیر خاص توزیع g در گرافهایی با X_e های مستقل و به طور گستته توزیع شده ولی نه الزاماً به طور یکسان توزیع شده اند) که g را در حالتیکه $E(g)$ در حالتیکه $E(g)$ و $E(g)$ در حالتیکه $E(g)$ باشند به دست آورده اند. همچنین اینها نشان دادند که محاسبه دقیق مقادیر توزیع g ، مساله ای $NP-Hard$ می باشد. Shier و Huston [6] باندهای بالا و بایین مناسبی برای $E(g)$ در حالتیکه $E(g)$ در حالتیکه $E(g)$ تصادفی مستقل گستته باشند به دست آورده اند. همچنین این دو مؤلف در [1] برای حالتی که X_e ها مستقل و هر کدام تعداد متساهم مقادیر گستته دارند، رابطه بین MST های مختلف در حالیکه وزن يالها تعییر می کند را مورد بررسی قرار داده اند.

مساله درخت پوشای مینیمم یکی از مسایل بهینه سازی کلاسیک د ر شبکه های ارتباطی است که به عنوان راه حلی موثر در مسیر یابی های چند پخشی مورد استفاده قرار می گیرد. با توجه به آنکه مشخصه های شبکه های ارتباطی عموماً مشخصه هایی تصادفی، غیر قابل پیش بینی و تغییرپذیر با زمان هستند بنابراین به کار گیری درخت پوشای کمینه در موضوعات ارتباطی شبکه های کامپیوتری باستی مبتنی بر مشخصه های تصادفی شبکه های مذکور بررسی شود. هنگامی که در یک شبکه تصادفی وزن هر یک از یالهای گراف یک متغیر تصادفی گستته با مؤلفه های آماری نامعین باشد تعیین درخت پوشای کمینه کار چندان آسانی نمی باشد. در این شرایط عامل یادگیر باستی در یک محیط غیر قطعی و نامعین طی یک فرایند یادگیری پویا و تکرار پذیر نسبت به شناسایی مشخصه های آماری محیط و توزیع حاکم بر وزن یالهای گراف اقدام نماید و بر اساس توزیع و متوسط وزنی یالها، درخت پوشای کمینه را شناسایی نماید.



زمانیکه b مساوی صفر باشد، الگوریتم را L_{RI}^{III} می نامیم.

۳- الگوریتم پیشنهادی

قبل از ارائه الگوریتم ابتدا قضیه آماری زیر را که یکی از ارکان الگوریتم را تشکیل می دهد بیان می کنیم که از [10] گرفته شده است.

قضیه: اگر \bar{x} مقدار میانگین یک نمونه تصادفی به اندازه n از جامعه ای نرمال با واریانس معلوم d^2 باشد آنگاه

$$p\left(\bar{x} - z_{a/2} \cdot \frac{d}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + z_{a/2} \cdot \frac{d}{\sqrt{n}}\right) = 1 - a \quad (3)$$

اگر Z متغیر تصادفی نرمال استاندارد باشد، $z_{a/2} \cdot d/2 = a$

باید توجه نمود که بنا به قضیه حد مرکزی می توان از قضیه بالا برای نمونه های تصادفی از جامعه های غیر نرمال نیز استفاده کرد مشروط بر آنکه تعداد نمونه ها حداقل $30 \geq n$ باشد یعنی در این حالت به جای d نیز می توانیم مقدار انحراف معیار نمونه ای را قرار دهیم. اگر در رابطه بالا $z_{a/2} \cdot d/2 = a$ را به ترتیب برابر با 1.96 ، 2.58 و 4 قرار دهیم آنگاه احتمال متناظر به ترتیب برابر خواهد بود با 0.9999 ، 0.9902 ، 0.9500 و 0.9096 .

فرض کنید که تعدادی یال با وزنهای تصادفی داریم که از هر یال حداقل 30 نمونه گرفته ایم و میانگین نمونه ای و واریانس نمونه ای را حساب کرده ایم. حال اگر یالی بین این یالها پیدا شود که مقدار $\bar{x} + z_{a/2} \cdot \frac{d}{\sqrt{n}}$ آن کوچکتر مساوی مقدار $\bar{x} - z_{a/2} \cdot \frac{d}{\sqrt{n}}$ بقیه یالها باشد آنگاه حداقل به احتمال $1 - a$ می توان گفت که مقدار مورد انتظار وزن آن کوچکتر مساوی مقدار مورد انتظار وزن بقیه یالهast. با این ایده الگوریتم پیشنهادی خود را شرح می دهیم.

ابتدا یک شبکه از اتوماتاهای یادگیر متناظر با گراف مساله ایجاد می کنیم به این صورت که هر راس را به یک اتوماتی یادگیر مجهز می کنیم که اقدامهای آن متناظر با انتخاب یالهای متصل به آن راس است.

مراحل الگوریتم پیشنهادی به شرح زیر است:

گام ۱. از هر یال گراف تصادفی 30 نمونه می گیریم و میانگین نمونه ای و واریانس نمونه ای آن را حساب می کنیم.

گام ۲. با استفاده از میانگینهای نمونه ای به دست آمده در گام ۱، درخت پوشای مینیمم اولیه را به دست می آوریم که همان درخت پوشای مینیمم فعلی ما می باشد.

گام ۳. یکی از اتوماتاهای یادگیر به تصادف فعال می شود تا یکی از یالهای موجود در درخت پوشای فعلی را برای نمونه گیری کاندیدا کند، این یال را با Ec نشان می دهیم. (توجه کنید که اقدامهایی از اتوماتا که متناظر با انتخاب یالی از گراف است که

و $c = \{c_1, c_2, \dots, c_r\}$ مجموعه احتمالهای جریمه می باشد. هر

گاه b مجموعه دو عضوی باشد، محیط از نوع P می باشد. در چنین محیطی $b_1 = 1$ به عنوان جریمه و $b_2 = 0$ به عنوان پاداش در نظر گرفته می شود. در محیط از نوع Q ، $b(n)$ می تواند به طور گستره یک مقدار از مقدادر محدود در فاصله $[0, 1]$ و در محیط از نوع S $b(n)$ متغیر تصادفی در فاصله $[0, 1]$ است. a_i احتمال اینکه عمل c_i نتیجه نامطلوب داشته باشد می باشد. در محیط ایستا مقدادر c_i بدون تغییر می مانند، حال آنکه در محیط غیر ایستا این مقدادر در طی زمان تغییر می کنند. اتوماتاهای یادگیر به دو گروه با ساختار ثابت و با ساختار متغیر تقسیم بندی میگردند. در ادامه به شرح مختصری درباره اتوماتای یادگیر با ساختار متغیر که در این مقاله از آنها استفاده شده است می پردازیم.

اتوماتای یادگیر با ساختار متغیر: یک اتوماتای یادگیر با ساختار متغیر توسط ۴ تایی $\{a, b, p, T\}$ نشان داده می شود که در آن $a \equiv \{a_1, a_2, L, a_r\}$ مجموعه عملهای اتوماتا، $b \equiv \{b_1, b_2, L, b_m\}$ مجموعه ورودیهای اتوماتا، $p \equiv \{p_1, p_2, L, p_r\}$ بردار احتمال انتخاب هر یک از عملهای a و $p(n+1) = T[a(n), b(n), p(n)]$ الگوریتم یادگیری می باشد. در این نوع از اتوماتاهای، اگر عمل a_i در مرحله n ام انتخاب شود و پاسخ مطلوب از محیط دریافت نماید، احتمال $p_i(n)$ افزایش یافته و سایر احتمالها کاهش می یابند. و برای پاسخ نامطلوب احتمال $p_i(n)$ کاهش یافته و سایر احتمالها افزایش می یابند. در هر حال، تغییرات به گونه ای صورت می گیرد تا حاصل جمع $p_i(n)$ ها همواره ثابت و مساوی یک باقی بماند. الگوریتم زیر یک نمونه از الگوریتمهای یادگیری خطی برای اتوماتای یادگیر با ساختار متغیر می باشد.

الف- پاسخ مطلوب

$$\begin{aligned} p_i(n+1) &= (1-a)p_i(n) + a \\ p_j(n+1) &= (1-a)p_j(n) \quad \forall j \neq i \end{aligned} \quad (1)$$

ب- پاسخ نامطلوب

$$\begin{aligned} p_i(n+1) &= (1-b)p_i(n) \\ p_j(n+1) &= (1-b)p_j(n) + \frac{b}{r-1} \quad \forall j \neq i \end{aligned} \quad (2)$$

در روابط فوق، پارامتر پاداش و a پارامتر پاداش و b پارامتر جریمه می باشد. با توجه به مقدادر a و b سه حالت را می توان در نظر گرفت. زمانیکه a و b با هم برابر باشند، الگوریتم را L_{RP}^I می نامیم. زمانیکه a از b خیلی کوچکتر باشد، الگوریتم را L_{RP}^{II} می نامیم.



پاداش اتوماتا) کوچکتر یا $z_{a/2}$ را بزرگتر در نظر بگیریم دقت همگرایی الگوریتم بالاتر می‌رود ولی در عوض نیاز به نمونه‌گیری بیشتری داریم.

۴- نتایج آزمایشی

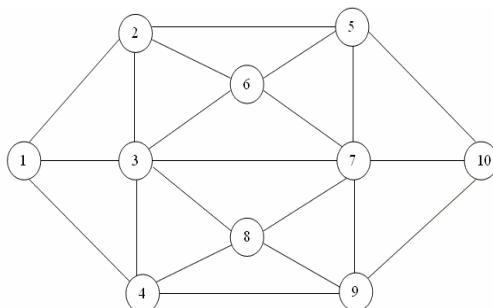
ابتدا به قضیه زیر توجه کنید [11].

قضیه: فرض کنید x_1, x_2, \dots, x_n دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان باشند، بگونه‌ای که $\mu = E(x_i) = \sigma^2 = Var(x_i)$. با فرض آنکه متوسط \bar{m} با اطمینان $1 - \delta$ در بازه $\bar{x} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}\delta}$ قرار داشته باشد. آنگاه بازاء هر مقدار دلخواه و به قدر کافی کوچک برای ϵ ، وجود دارد n_0 ای بگونه‌ای که بازاء تمامی مقادیر $n \geq n_0$ خواهیم داشت:

$$\forall \epsilon \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad p\{|\bar{x}_n - \bar{m}| > \epsilon\} \leq 1 - \delta \quad (4)$$

برای بدست آوردن تعداد نمونه‌گیری مورد نیاز از هر یال گراف تصادفی G ، طوری که بتوان با احتمال $1 - \delta$ تضمین کرد که انحراف میانگین نمونه‌های اخذ شده از یال گراف از مقدار مورد انتظار وزن آن یال کمتر از ϵ باشد (خطای نمونه‌گیری خوانده می‌شود) می‌توانیم از قضیه بالا استفاده کنیم. این روش را نمونه‌گیری استاندارد می‌نامیم.

گراف تصادفی که برای آزمایش در نظر گرفته ایم از منبع [7] اقتباس شده و نمودار آن در شکل ۲ وتابع توزیع احتمال وزن یالهای گراف در جدول ۳ آمده است. این گراف از این جهت که مقدار مورد انتظار(امید ریاضی) وزن یالهای آن بسیار نزدیک به هم هستند که کار شناسایی درخت فراگیر مینیمم را دشوار می‌کند انتخاب شده است.



شکل ۲: گراف تصادفی G

ابتدا به کمک روش نمونه‌گیری استاندارد حداقل تعداد نمونه‌های مورد نیاز از هر یال، به گونه‌ای که متوسط نمونه‌های اخذ شده با احتمال (اطمینان) $1 - \delta$ در بازه $(\bar{x} - \epsilon, \bar{x} + \epsilon)$ قرار داشته باشد، تعیین می‌گردد. سپس تعداد نمونه‌گیریهای مورد نیاز در این روش با تعداد نمونه‌های اخذ شده توسط الگوریتم پیشنهادی مقایسه می‌گردد

در درخت پوشای مینیمم فعلی وجود ندارد را غیرفعال در نظر می‌گیریم.)

گام ۴. Ec از درخت پوشای مینیمم فعلی حذف می‌شود تا دو زیردرخت ایجاد شود. کلیه یالهایی که می‌توانند این دو زیردرخت را به هم اتصال دهند را در مجموعه ConnectionSet می‌ریزیم.

گام ۵. اگر مجموعه ConnectionSet بیش از یک عضو داشته باشد به Ec می‌رویم در غیر این صورت تنها عضو مجموعه را که است به درخت پوشای مینیمم فعلی اضافه می‌کنیم و بدون آن که نمونه‌ای از این یال بگیریم به انتخاب اتوماتای فعال شده پاداش می‌دهیم و به گام ۷ می‌رویم.

گام ۶. بین یالهای مجموعه ConnectionSet یالی را می‌یابیم که دارای کمترین مقدار میانگین نمونه‌ای باشد که آن را با Emin نشان می‌دهیم.

حالت اول: اگر $Emin$ همان Ec باشد به انتخاب اتوماتای فعال شده پاداش می‌دهیم و در صورتی که یالی در مجموعه ConnectionSet موجود باشد که مقدار $\frac{d}{\sqrt{n}} - z_{a/2}$ آن کوچکتر از مقدار $\frac{d}{\sqrt{n}} + z_{a/2}$ یال Ec باشد از یال Ec نمونه می‌گیریم و مقدار میانگین نمونه‌ای و واریانس نمونه‌ای آن را به روز می‌کنیم. آنگاه به گام ۷ می‌رویم.

حالت دوم: اگر $Emin$ متفاوت از Ec باشد انتخاب اتوماتای فعال شده را جریمه می‌کنیم و در صورتی که مقدار $\frac{d}{\sqrt{n}} - z_{a/2}$ یال $Emin$ بزرگتر از مقدار $\frac{d}{\sqrt{n}} + z_{a/2}$ یال Ec نمونه می‌گیریم و مقدار میانگین نمونه‌ای آن را به Emin می‌کنیم، یال Ec را به روز می‌کنیم. آنگاه به گام ۷ می‌رویم.

گام ۷. برای هر اتوماتای یادگیر موجود در شبکه مجموع احتمالات اقدامهای متناظر با انتخاب یالهای موجود در درخت پوشای مینیمم فعلی حساب می‌شود. سپس این مجموعه را در هم ضرب می‌کنیم که آن را احتمال انتخاب درخت پوشای مینیمم فعلی می‌نماییم. اگر این احتمال از مقدار آستانه‌ای بیشتر باشد و یا تعداد تکرارها از عدد از قبل تعیین شده ای بیشتر باشد الگوریتم خاتمه می‌یابد در غیر این صورت به گام ۳ می‌رویم.

در پیاده سازیهایی که ما انجام دادیم مقدار $z_{a/2}$ را برابر با $1,96$ ، مقدار آستانه احتمال را برابر با $0,95$ و حداقل تعداد تکرارهای الگوریتم را 50000 در نظر گرفتیم. توجه داشته باشید که هر چه مقدار a (پارامتر



شده از گراف (AvgGraphSamples)، تعداد متوسط نمونه های گرفته شده از درخت فرآیندی که الگوریتم به آن همگرا شده (AvgTreeSamples) و تعداد دفعات همگرا شده به درخت فرآیندی (ConvRuns) را در جدول ۲ آورده ایم. الگوریتم زمانی خاتمه می یابد که احتمال انتخاب درخت فرآیندی انتخاب شده در یک تکرار به بیش از ۰.۹۵ برسد.

جدول ۲: متوسط تعداد نمونه های گرفته شده و درصد همگرایی در الگوریتم پیشنهادی

Learning Parameter	AvgGraph Samples	AvgTree Samples	ConvRuns
0.002	12103	5869	100
0.003	9961	4758	99
0.004	8486	4019	98
0.006	6664	3141	97
0.008	5261	2384	95
0.01	4693	2128	90
0.02	3061	1312	81
0.04	2101	847	72
0.06	1728	692	66
0.08	1503	620	64
0.10	1394	557	58
0.20	997	415	50
0.30	894	357	44
0.40	831	324	43
0.50	807	338	41

نمودار ۱ تعداد نمونه های مورد نیاز الگوریتم پیشنهادی را در مقایسه با تعداد نمونه های مورد نیاز در روش نمونه گیری استاندارد نشان می دهد. این مقایسه حاکی از آن است که تعداد نمونه گیری های انجام گرفته توسط الگوریتم پیشنهادی به مرتبه کمتر از تعداد نمونه گیری های انجام شده به روش استاندارد می باشد.

و نشان داده می شود که تعداد نمونه گیری های انجام گرفته توسط الگوریتم پیشنهادی به مرتبه کمتر از تعداد نمونه گیری های انجام شده به روش استاندارد می باشد.

در تمامی آزمایشات مقدار $0.001 = 4$ در نظر گرفته شده است. بازه اطمینان بین 99% تا 95% تغییر داده شده و برای هر مقدار تعداد نمونه های مورد نیاز از یالها تعیین گردیده است. به ازای هر کدام از مقادیر اطمینان مجموع کل نمونه های گرفته شده از گراف محاسبه شده است. جدول ۱ این اطلاعات را نشان می دهد. این جدول تعداد نمونه های مورد نیاز از گراف را در نمونه گیری استاندارد نشان می دهد.

جدول ۱: متوسط تعداد کل نمونه ها در نمونه گیری استاندارد

Confidence Interval	Total Number of Samples
50	5105
55	5065
60	5398
65	5304
70	5747
75	5522
80	5595
85	6050
90	6844
92.5	7062
95	7632
97.5	9181
99	12797

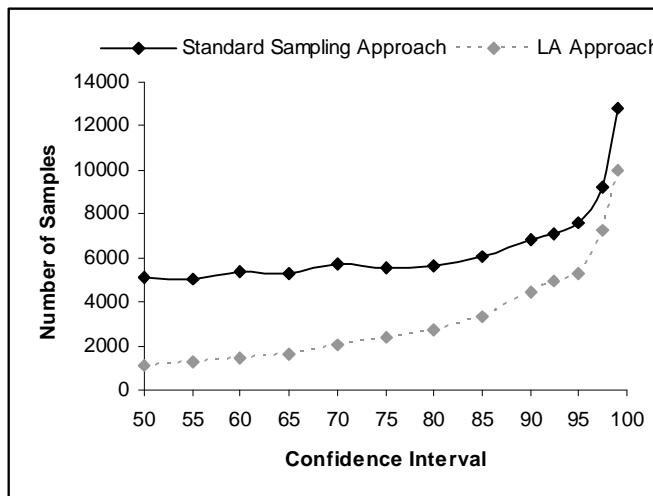
در الگوریتم پیشنهادی برای کلیه اتوماتا های یادگیر موجود در شبکه مقدار پارامتر پاداش را برابر در نظر گرفتیم و از الگوریتم یادگیری L_{R-I} استفاده کردیم. به ازای مقادیر مختلف پاداش، الگوریتم پیشنهادی را ۱۰۰ بار اجرا کردیم و تعداد متوسط کل نمونه های گرفته

جدول ۳: تابع توزیع احتمال وزن یالهای گراف G

Edge	Length				Probability			
(1, 2)	3.00	5.30	7.40	9.40	0.20	0.20	0.30	0.30
(1, 3)	3.50	6.20	7.90	8.50	0.30	0.30	0.20	0.20
(1, 4)	4.20	16.10	6.90	8.90	0.20	0.30	0.20	0.30
(2, 3)	9.50	2.30	3.60	4.50	0.20	0.20	0.30	0.30
(2, 5)	2.60	4.10	5.50	9.00	0.20	0.20	0.40	0.20
(2, 6)	5.80	7.00	8.50	9.60	0.30	0.30	0.20	0.20
(3, 4)	2.10	3.20	4.50	6.80	0.20	0.20	0.30	0.30
(3, 6)	6.80	7.70	8.50	9.60	0.40	0.10	0.10	0.40
(3, 7)	6.50	7.20	8.30	9.40	0.50	0.20	0.20	0.10

(3.8)	5.90	7.80	8.60	9.90	0.40	0.30	0.10	0.20
(4.8)	7.00	8.00	8.80	9.40	0.40	0.20	0.20	0.20
(4.9)	1.10	2.20	3.50	4.30	0.20	0.30	0.40	0.10
(5.6)	0.60	1.50	3.90	5.80	0.20	0.20	0.30	0.30
(5.7)	3.200	4.80	6.70	8.20	0.20	0.20	0.30	0.30
(5.	6.30	7.80	8.40	9.10	0.20	0.20	0.40	0.20
(6.0)	2.10	4.80	6.60	7.50	0.20	0.40	0.20	0.20
(7.8)	1.60	2.80	5.20	6.00	0.20	0.30	0.30	0.20
(7.9)	3.50	4.00	5.00	7.70	0.20	0.30	0.30	0.20
(7.	1.60	3.40	8.200	9.30	0.20	0.20	0.20	0.40
(8.0)	1.70	4.90	6.50	7.80	0.10	0.20	0.40	0.30
(9.	4.60	6.40	7.600	8.90	0.40	0.10	0.20	0.30

10)


نمودار ۱ : مقایسه بین تعداد نمونه های گرفته شده توسط الگوریتم پیشنهادی و روش نمونه گیری استاندارد

- [1] Hutson, K., Shier, D., "Minimum spanning trees in networks with varying edge weights", *Annals of Operations Research*, Vol. 146, No. 1, pp. 3-18, 2006.
- [2] Ahrabian, H., Nowzari-Dalini, A., "Parallel Algorithms for Minimum Spanning Tree Problem", *Intern. J. Computer Math.*, Vol. 79, No. 4, pp. 441-448, 2002.
- [3] Kulkarni, V. G., "Minimum Spanning Trees in Undirected Networks with Exponentially Distributed Arc Weights", *Networks*, Vol. 16, pp. 111-124, 1986.
- [4] Jain, and Mamer, J. W., "Approximations for the Random Minimal Spanning Tree with Application to Network Provisioning", *Operations Research*, Vol. 36, pp. 575-584, 1988.
- [5] Alexopoulos and Jacobson, J., "State Space Partition Algorithms for Stochastic Systems with Applications to Minimum Spanning Trees", *Networks*, Vol. 35, pp. 118-138, 2000.
- [6] Hutson, K., Shier, D., "Bounding Distributions for the Weight of a Minimum Spanning Tree in Stochastic

۵- نتیجه گیری

در این مقاله ابتدا مساله درخت فراگیر مینیمم در گرافهای تصادفی شرح داده شد و سپس یک الگوریتم مبتنی بر اثباتی یادگیر برای یافتن درخت فراگیر مینیمم در یک گراف تصادفی ارائه شد. به منظور ارزیابی الگوریتم پیشنهادی، تعداد نمونه های گرفته شده توسط این الگوریتم با تعداد نمونه های موردنیاز به روش نمونه گیری استاندارد مقایسه گردید و نشان داده شد که تعداد نمونه های گرفته شده توسط الگوریتم پیشنهادی به مراتب از تعداد نمونه های گرفته شده به روش نمونه گیری استاندارد کمتر است.

مراجع



- [9] Misra, S., Oommen, B. J., "An Efficient Dynamic Algorithm for Maintaining All-Pairs Shortest Paths in Stochastic Networks", *IEEE Transactions on Computers*, Vol. 55, No. 6, June 2006.
- [10] Freund, J. E., *Mathematical Statistics*, Fifth Edition, Prentice-Hall, 1992.
- [11] Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, Third Edition, New York, McGraw-Hill, 1991.
- [7] Beigy, H., Meybodi, M. R., "Utilizing Distributed Learning Automata to Solve Stochastic Shortest Path Problems", *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, Vol. 14, No. 5, pp. 591-615, 2006.
- [8] Misra, S., Oommen, B. J., "Dynamic Algorithms for the Shortest Path Routing Problem: Learning Automata-based Solutions", *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, Vol. SMC-35(B), pp. 1179-1192, June 2005.

ⁱ Linear Reward Penalty

ⁱⁱ Linear Reward Epsilon Penalty

ⁱⁱⁱ Linear Reward Inaction