

## چند رنگ آمیزی پهنای باند در گراف مبتنی بر اتاماتای یادگیر سلولی

محمدرضا میبدی

دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

تهران ایران

mmeybodi@aut.ac.ir

جواد اکبری ترکستانی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه آزاد اسلامی

اراک ایران

j-akbari@iau-arak.ac.ir

علیرضا انعامی عراقی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه آزاد اسلامی

فراهان ایران

alireza\_enami@yahoo.com

**چکیده:** در این مقاله، الگوریتمی مبتنی بر اتاماتای یادگیر سلولی نامنظم برای حل مسائل رنگ آمیزی پهنای باند گراف و چند رنگ آمیزی پهنای باند گراف پیشنهاد می گردد. در الگوریتم پیشنهادی، ابتدا گراف ورودی تبدیل به گرافهای پایه می گردد و سپس به هر یک از رؤوس گراف، یک سلول متناظر می شود و همچنین به هر سلول، یک اتاماتای یادگیر اختصاص می یابد. هر یک از اتاماتاهای یادگیر، یک عمل از مجموعه اعمال خود را با توجه به بردار احتمال مربوطه انتخاب می کند. اگر قدرمطلق تفاضل عمل انتخابی یک سلول نسبت به تمامی همسایگانش بزرگتر یا مساوی وزن یال مرتبط بین آن دو باشد؛ در این صورت، به عمل انتخابی این سلول پاداش داده می شود و در غیر این صورت سلول جریمه می شود. الگوریتم تا زمانی ادامه می یابد که تمام سلولها پاداش بگیرند. الگوریتم پیشنهادی، با الگوریتمهای موجود همچون لیم، پرستویچ و مالاگوتی مقایسه شده و طبق نتایج بدست آمده بر روی گرافهای نمونه نشان داده می شود که الگوریتم پیشنهادی نتایج به مراتب بهتری را تولید می کند.

**کلمات کلیدی:** مسئله چند رنگ آمیزی گراف، مسئله رنگ آمیزی پهنای باند گراف، اتاماتای یادگیر سلولی.

بایستی حداقل مساوی با فاصله بین آن دو باشد. این نوع رنگ آمیزی برای مدل کردن بعضی از کاربردها مفید است؛ برای مثال در مسئله انتساب کانال بطوری که به هر ایستگاه یک یا چند کانال اختصاص یابد و همچنین برای جلوگیری از تداخل آنها تفاضلشان از حد معینی بیشتر باشد [۲،۳].

لیم و همکارانش [۴] یک روش برای حل رنگ آمیزی اصلی گراف، رنگ آمیزی پهنای باند گراف، چند رنگ آمیزی گراف و چند رنگ آمیزی پهنای باند گراف پیشنهاد کردند که در آن تکنیکهای تپه نوردی و SWO با هم ترکیب شده بود، همچنین لیم و همکارانش در [۵] کارایی روشهای مکاشفه ای شامل SWO، جستجوی Tabu و ترکیب آنها را برای رنگ آمیزی پهنای باند گراف، چند رنگ آمیزی گراف و چند رنگ آمیزی پهنای باند گراف مورد مطالعه قرار دادند. پرستویچ در [۶] الگوریتمهای جستجوی محلی را با برنامه نویسی مفید ترکیب کرد؛ بدین ترتیب با استفاده از این روش، در رنگ آمیزی پهنای باند و چند رنگ آمیزی پهنای باند روی گرافهای بزرگ، نتایج خوبی را تولید کرد. مالاگوتی و توت در [۷] یک روش تکاملی برای مسئله رنگ آمیزی پهنای باند گراف ارائه کردند که ترکیب الگوریتم جستجوی Tabu با مدلهای مدیریت تراکم بود. او روش خود را با کمی تغییر روی مسئله چند رنگ آمیزی پهنای باند گراف نیز اجرا کرد.

در این مقاله، الگوریتمی مبتنی بر اتاماتای یادگیر سلولی نامنظم برای حل مسائل رنگ آمیزی پهنای باند و چند رنگ آمیزی پهنای باند در گراف پیشنهاد می گردد. الگوریتم پیشنهادی با الگوریتمهای ارائه شده توسط لیم [۴،۵]، پرستویچ [۶] و مالاگوتی [۷] مقایسه می گردد. نتایج آزمایشها نشان می دهد که الگوریتم پیشنهادی نتایج بهتری را تولید می کند. ادامه مقاله به این صورت سازمان دهی شده است: در بخش ۲ به معرفی اجمالی اتاماتای یادگیر سلولی نامنظم می پردازیم. در

### ۱- مقدمه

مسئله رنگ آمیزی اصلی رؤوس گراف  $G=(V,E)$  که در آن  $V$  مجموعه رؤوس و  $E \subseteq [V]$  مجموعه یالهای گراف  $G$  می باشد؛ نگاشتی است بصورت  $C:V \rightarrow S$  بطوری که برای دو رأس همسایه  $v$  و  $w$  داریم  $C(v) \neq C(w)$ . اعضای  $S$  را رنگها تشکیل می دهند. کوچکترین عدد صحیح  $k$  برای  $G$  در نگاشت  $C:V \rightarrow \{1,2,...,k\}$  عدد رنگی  $G$  نامیده می شود و با  $\chi(G)$  نشان داده می شود. یک گراف  $G$ ،  $k$ -رنگی نامیده می شود اگر  $\chi(G)=k$  و اگر  $\chi(G) \leq k$  باشد، آنگاه  $G$  را  $k$ -رنگ پذیر می نامیم. یافتن عدد رنگی گراف برای گرافهای  $k$ -رنگ پذیر که در آن  $k \geq 3$  یک مسئله بغرنج می باشد [۱]. رنگ آمیزی مجاز عبارتست از انتساب یک رنگ به رؤوس گراف؛ بطوری که رؤوس همسایه دارای رنگ متفاوتی باشند و رنگ آمیزی بهینه گراف برابر با حداقل تعداد رنگ مورد نیاز برای یک رنگ آمیزی مجاز می باشد.

در رنگ آمیزی پهنای باند یک فاصله (وزن)  $d(i,j)$  برای هر یال  $(i,j) \in E$  تعریف می شود و مقدار قدرمطلق تفاضل بین رنگهای اختصاص یافته به  $i$  و  $j$  بایستی حداقل مساوی با این فاصله باشد:  $|C(i) - C(j)| \geq d(i,j)$ . در مسئله چند رنگ آمیزی گراف یک وزن  $w(i) > 0$  برای هر نود  $i \in V$  تعریف می شود و آن تعداد رنگی است که باید به هر نود اختصاص یابد؛ بطوری که برای هر  $(i,j) \in E$  اشتراک مجموعه های رنگ اختصاص یافته به نودهای  $i$  و  $j$  بایستی تهی باشد. مسئله چند رنگ آمیزی پهنای باند تلفیق هر دو مسئله فوق است بدین صورت که به هر رأس، بایستی  $w(i) > 0$  رنگ اختصاص یابد بطوری که اشتراک مجموعه های رنگ اختصاص یافته به نودهای همسایه تهی باشد و همچنین به هر یال یک فاصله منتسب شده است و مقدار قدرمطلق تفاضل بین رنگهای اختصاص یافته به دو رأس همسایه،

برای رنگ آمیزی گراف می باشد. مجموعه رنگ ها، مجموعه اعمال هر یک از اتاماتای یادگیر می باشد. اتاماتای یادگیر در هر سلول از نوع LRP با ضرایب پاداش و جریمه ۰/۰۱ می باشد. در ابتدا احتمال انتخاب اعمال هر یک از اتاماتای یادگیر مساوی و برابر با یک تقسیم بر تعداد رنگ های مورد استفاده می باشد.

در [۹] نشان داده شده است که اگر  $\Delta$  بزرگترین درجه یک رأس در گراف باشد در این صورت  $\chi$  تعداد رنگ های مورد نیاز برای رنگ آمیزی اصلی مجاز گراف کوچکتر و یا مساوی  $\Delta+1$  می باشد یعنی  $\chi \leq \Delta+1$ . ما تعداد اعضای مجموعه عمل در این الگوریتم را برابر عمومی رنگ آمیزی اصلی رئوس گراف است؛ چون در آنجا  $Max_{(i,j) \in E} (d(i,j)) = 1$  می باشد.

در این الگوریتم، ابتدا گراف ورودی تبدیل به گرافهای پایه می شود که هر رأس تنها یک رنگ می گیرد، همچنین از شرط  $|C(i) - C(j)| \geq d(i,j)$  که در آن  $C(i)$  و  $C(j)$  عمل (رنگ) منتسب به رئوس  $i$  و  $j$  و  $d(i,j)$  وزن یال بین  $i$  و  $j$  می باشد؛ برای دادن جریمه و پاداش استفاده می شود. الگوریتم بدین صورت است که هر یک از اتاماتای یادگیر در اتاماتای یادگیر سلولی، یکی از اعمال خود را با توجه به بردار احتمال مربوطه انتخاب می کند. اگر عمل انتخابی یک سلول، در شرط فوق صدق کند؛ به عمل انتخابی این سلول پاداش داده می شود، و در غیر این صورت سلول جریمه می شود. الگوریتم تا زمانی ادامه می یابد که تمام سلولها پاداش بگیرند. مراحل الگوریتم پیشنهادی را می توان در گامهای زیر تشریح کرد:

**گام اول:** تبدیل مسئله به مسئله رنگ آمیزی اصلی گراف.

در این گام بایستی به ازای وزن هر رأس در گراف ورودی، به همان تعداد رأس که با یکدیگر همسایه می باشند و همچنین بدون حلقه هستند در گراف جدید با وزن یک در نظر گرفت و وزن یال بین آنها برابر با وزن حلقه موجود بر روی رأس مورد نظر در گراف ورودی می باشد. دو رأسی که در گراف ورودی همسایه بودند، در گراف جدید نیز بایستی همسایه باشند بطوری که وزن یالها بدون تغییر باقی می ماند.

**گام دوم:** ساخت یک اتاماتای یادگیر سلولی نامنظم همریخت با گراف ورودی.

در این گام به هر یک از رئوس گراف یک سلول متناظر می شود و دو سلول در صورتی همسایه هستند که رئوس متناظر آنها در گراف ورودی نیز همسایه باشند، همچنین به هر سلول یک اتاماتای یادگیر اختصاص می یابد.

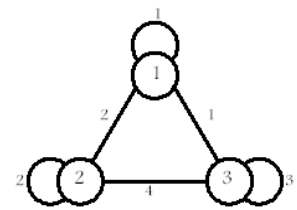
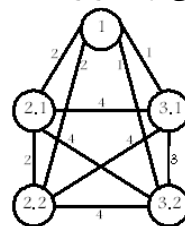
**گام سوم:** انتخاب تصادفی عملها توسط اتاماتای یادگیر هر سلول.

بخش ۳ الگوریتم پیشنهادی مبتنی بر اتاماتای یادگیر سلولی نامنظم شرح داده می شود و در بخش ۴ الگوریتم ارایه شده با الگوریتم های لیم، پرستویچ و مالاگوتی مقایسه می گردد. بخش نهایی مقاله نتیجه گیری می باشد.

**۲- اتاماتای یادگیر سلولی نامنظم:** اتاماتای یادگیر سلولی نامنظم [۸]، یک اتاماتای یادگیر سلولی است با حذف این محدودیت که اتاماتای یادگیر سلولی در این نوع، دارای ساختار شبکه ای نمی باشد. این نوع اتاماتای یادگیر سلولی، برای کاربردهایی مثل شبکه های حسگر بیسیم، سیستم های شبکه ای آزاد و کاربردهای مبتنی بر گراف که بر اساس یک شبکه مستطیلی نمی توانند مدل شوند، بسیار مؤثر است. یک اتاماتای یادگیر سلولی نامنظم، بصورت یک گراف بدون جهت تعریف می شود؛ بطوری که هر رأس آن متناظر با یک سلول است که دارای یک اتاماتای یادگیر می باشد. اتاماتای یادگیر که در هر سلول وجود دارد، حالت (عمل) آن سلول را بر اساس بردار احتمال عمل مربوط به آن سلول، تعیین می کند. شبیه اتاماتای یادگیر سلولی، قانونی وجود دارد که اتاماتای یادگیر سلولی نامنظم، تحت آن عمل می کند. قانون اتاماتای یادگیر سلولی و اعمال انتخاب شده بوسیله اتاماتای یادگیر همسایه برای یک اتاماتای یادگیر خاص، بردار احتمال اعمال مربوط به آن اتاماتای یادگیر را بروز می کند.

**۳- الگوریتم های پیشنهادی برای حل مسأله رنگ آمیزی گراف با استفاده از اتاماتای یادگیر سلولی**

در الگوریتم پیشنهادی، ابتدا بایستی گراف ورودی، تبدیل به گرافهای پایه شود، بطوری که هر رأس تنها یک رنگ می گیرد. فرض کنید در گراف شکل ۱-الف وزن رئوس و یالها برابر  $w(1)=1$ ،  $w(2)=2$ ،  $w(3)=2$ ،  $d(1,1)=1$ ،  $d(1,2)=2$ ،  $d(1,3)=1$ ،  $d(2,2)=2$ ،  $d(2,3)=4$  و  $d(3,3)=3$  می باشد. در این صورت بعد از تبدیل آن، گراف شکل ۱-ب بدست می آید، که وزن تمامی نودها برابر یک است.



شکل ۱-الف: گراف ورودی قبل از تبدیل / شکل ۱-ب: گراف ورودی بعد از تبدیل

جهت نگاشتن یک گراف به اتاماتای یادگیر سلولی، ما از اتاماتای یادگیر سلولی نامنظم استفاده می کنیم؛ برای این منظور، به ازای هر رأس از گراف، یک سلول از اتاماتا را در نظر می گیریم و هر سلول در اتاماتای یادگیر سلولی با سلول دیگر همسایه است اگر و تنها اگر رأس متناظر با آن سلول در گراف مسئله با رأس متناظر با سلول دیگر، یال داشته و یا به عبارت دیگر مجاور باشد. تعداد اعمال هر یک از اتاماتای یادگیر در اتاماتای یادگیر سلولی برابر تعداد رنگ های مورد استفاده



استفاده قرار گرفته است و روی نمونه های پیشنهاد شده در استاندارد DIMACS تست شده است [۱۰]. برای بدست آوردن نتایج از نمونه های GEOMn و GEOMnb (بطوری که n نشان دهنده تعداد رؤس گراف است) استفاده کردیم. در این گرافها، رؤس در یک شبکه  $10000 \times 10000$  بصورت تصادفی قرار گرفته اند و در صورتی که به اندازه کافی به همدیگر نزدیک باشند، یک یال بین آنها برقرار می شود. نمونه های GEOMn گرافهای خلوتی می باشند و GEOMnb گرافهای متراکم تری در مقایسه با GEOMn می باشند. نتایج حاصل از الگوریتم پیشنهادی با نتایج الگوریتمهای ارائه شده توسط لیم [۴،۵]، پرستویچ [۶] و مالاگوتی [۷] مقایسه شده است. معیارهای ارزیابی الگوریتمها، تعداد رنگهای استفاده شده برای رنگ آمیزی (C) و زمان اجرا بر حسب ثانیه (T) می باشد. هر یک از نتایج که در جدول ۱ و ۲ گزارش شده است، متوسط ۵۰ بار اجرا می باشد. ستون آخر در جداول ۱ و ۲ (diff.) تفاضل بین تعداد رنگ بدست آمده توسط الگوریتم پیشنهادی و بهترین تعداد رنگ بدست آمده توسط الگوریتمهای مورد مقایسه می باشد.

در رنگ آمیزی پهنای باند گراف همانگونه که از نتایج آزمایشات مشهود است؛ اجرای الگوریتمها بر روی ۲۲ نمونه پیشنهاد شده در استاندارد DIMACS نشان می دهد که الگوریتم پیشنهادی تعداد رنگ را در ۱۶ مورد نسبت به بهترین تعداد رنگ در الگوریتمهای پیشین کاهش داده است و در ۳ مورد تعداد رنگ تفاوتی نکرده است و در ۳ مورد تعداد رنگ را افزایش داده است. الگوریتم پیشنهادی نسبت به الگوریتم لیم و پرستویچ زمان اجرای ضعیفی دارد اما نسبت به الگوریتم مالاگوتی مخصوصا در تعداد رؤس بالا زمان اجرا را کاهش داده است. در چند رنگ آمیزی پهنای باند گراف همانگونه که از نتایج آزمایشات مشهود است؛ اجرای الگوریتمها بر روی ۲۲ نمونه پیشنهاد شده در استاندارد DIMACS نشان می دهد الگوریتم پیشنهادی تعداد رنگ را در ۹ مورد نسبت به بهترین تعداد رنگ در الگوریتمهای پیشین کاهش داده است و در ۵ مورد تعداد رنگ تفاوتی نکرده است و در ۷ مورد تعداد رنگ را افزایش داده است. الگوریتم پیشنهادی در زمان اجرا نسبت به الگوریتمهای لیم و مالاگوتی عملکرد خوبی دارد اما در برابر الگوریتم پرستویچ ضعیف عمل می کند.

در این گام هر یک از اتاماتهای یادگیر یک عمل از مجموعه اعمال خود را با توجه به بردار احتمال مربوطه انتخاب می کند.

**گام چهارم:** پاداش دادن و جریمه کردن عمل انتخابی اتاماتها و بروز رسانی بردار احتمالات.

اگر قدممطلق تفاضل عمل انتخابی یک سلول نسبت به تمامی همسایگانش بزرگتر یا مساوی وزن یال مرتبط بین آن دو باشد؛ در این صورت، به عمل انتخابی این سلول پاداش داده می شود و در غیر این صورت سلول جریمه می شود.

**گام پنجم:** بررسی خاتمه الگوریتم.

در صورتی که تمام سلولها پاداش بگیرند، الگوریتم خاتمه می یابد و در غیر این صورت الگوریتم اجرای الگوریتم از گام سوم ادامه می یابد.

شبه کد این الگوریتم در شکل ۲ آورده شده است.

```

Algorithm CLA
Input : Graph G(V,E)
Output : The number of colors needs to be chosen for coloring the graph

Begin
  Transfer problem to pure graph coloring
  Construct an irregular CLA isomorphic to the input graph
Repeat
  For all cells do in parallel
    Each cell chooses one of its actions according to its action probability vector
    If  $(|c_i - c_j| \geq d_{(i,j)}, \text{ for each } e_{(i,j)} \in E)$  then
      Reward the action chosen by automaton  $A_i$ 
    Else
      Penalize the action chosen by automaton  $A_i$ 
    End if
  Until all cells are rewarded by the random Environment
  Return the number of used colors
End.
  
```

شکل ۲- شبه کد الگوریتم پیشنهادی

#### ۴- نتایج آزمایشات

برای اجرای الگوریتمها، یک کامپیوتر شخصی با پردازنده اینتل P4 2.4 GHz و با ۵۱۲ مگابایت حافظه اصلی و ویندوز XP مورد

جدول ۱- تعداد رنگ و مدت زمان لازم برای رنگ آمیزی گراف به کمک الگوریتمهای مختلف در مسأله رنگ آمیزی پهنای باند گراف

Graph	Proposed Algorithm		Lim [4]		Prestwich[6]		Malaguti[7]		Diff.
	T	C	T	C	T	C	T	C	
GEOM20	82.13	9	1	21	0	21	0	21	-12
GEOM20b	83.75	13	0	14	0	13	0	13	0
GEOM30	85	16	0	29	0	28	0	28	-12
GEOM30b	85.72	18	0	26	0	26	0	26	-8
GEOM40	86.81	21	3	28	0	28	0	28	-7
GEOM40b	87.58	25	4	34	0	33	0	33	-8
GEOM50	87.9	26	5	28	0	28	0	28	-2
GEOM50b	88.92	38	7	38	0	35	0	35	3
GEOM60	89.44	27	1	34	0	33	0	33	-6



GEOM60b	90.46	40	5	46	0	43	29	41	-1
GEOM70	90.72	35	1	38	0	38	0	38	-3
GEOM70b	91.66	51	0	54	1	48	52	48	3
GEOM80	91.92	43	8	42	0	41	0	41	2
GEOM 80b	92.33	60	1	66	12	63	150	63	-3
GEOM90	93.43	45	1	46	3	46	0	46	-1
GEOM90b	94.4	63	20	77	2	72	1031	70	-7
GEOM100	94.71	48	33	51	0	50	2	50	-2
GEOM100b	95.54	73	9	83	15	73	597	73	0
GEOM 110	96.13	49	2	53	4	50	3	50	-1
GEOM 110b	96.95	78	17	88	2	79	676	78	0
GEOM 120	97.02	57	1	62	4	60	0	59	-2
GEOM 120b	97.93	81	4	98	9	86	857	84	-3

جدول ۲- تعداد رنگ و مدت زمان لازم برای رنگ آمیزی گراف به کمک الگوریتم‌های مختلف در مسأله چند رنگ آمیزی پهنای باند گراف

Graph	Proposed Algorithm		Lim [4]		Lim [5]		Prestwich[6]		Malaguti[7]		Diff.
	T	C	T	C	T	C	T	C	T	C	
GEOM20	118.85	140	0	149	17	149	4	149	18	149	-9
GEOM20b	119.87	44	0	44	2	44	0	44	5	44	0
GEOM30	120.39	161	0	160	23	160	0	160	1	160	1
GEOM30b	121.41	76	0	77	7	77	0	77	0	77	-1
GEOM40	121.67	168	3	167	47	167	1	167	20	167	1
GEOM40b	122.61	74	8	76	10	74	4	74	1	74	0
GEOM50	122.87	227	41	224	77	224	1	224	1197	224	3
GEOM50b	124.01	84	53	87	15	87	1	86	197	83	1
GEOM60	124.38	258	46	258	96	258	77	258	139	258	0
GEOM60b	125.35	115	300	119	23	116	12	116	460	115	0
GEOM70	125.66	270	25	279	138	273	641	277	1413	272	-2
GEOM70b	126.49	118	136	124	30	121	55	119	897	117	1
GEOM80	127.08	380	4041	394	204	383	361	398	132	388	-3
GEOM80b	127.9	141	3230	145	39	141	37	141	1856	141	0
GEOM90	127.96	329	4095	335	248	332	44	339	4160	332	-3
GEOM90b	128.96	142	648	157	46	157	303	147	1750	144	-2
GEOM100	129.3	403	631	413	311	404	7	424	3283	410	-1
GEOM100b	129.87	157	4893	172	55	170	367	159	3699	156	1
GEOM 110	130.39	384	577	389	368	383	43	392	2344	383	1
GEOM 110b	131	209	12	210	68	206	5	208	480	206	3
GEOM 120	131.58	395	1825	409	408	402	9	417	2867	396	-1
GEOM 120b	132.43	190	869	201	97	199	3	196	3292	191	-1

Phasing Problems," in The Theory and Applications of Graphs, Wiley, New York, pp. 479-492, 1981.

## ۵- نتیجه گیری

- [4] A. Lim, X. Zhang, Y. Zhu, "A Hybrid Methods for the Graph Coloring and its Related Problems", in: Proceedings of MIC2003: The Fifth Metaheuristic International Conference, Kyoto, Japan, 2003.
- [5] A. Lim, Q. Lou, B. Rodrigues, Y. Zhu, "Heuristic Methods for Graph Coloring Problems", in: Proceedings of the 2005 ACM Symposium on Applied Computing, Santa Fe, NM, pp. 933-939, 2005.
- [6] S. Prestwich, "Generalized Graph Colouring by a Hybrid of Local Search and Constraint Programming", Technical Report, Cork Constraint Computation Center, Ireland, 2005.
- [7] E. Malaguti and P. Toth, "An Evolutionary Approach for Bandwidth Multicoloring Problems", European Journal of Operational Research, Vol. 189, pp. 638-651, 2008.
- [8] M. Asnaashari and M.R. Meybodi, "Irregular Cellular Learning Automata and Its Application to Clustering in Sensor Networks", Proceedings of 1<sup>5th</sup> Conference on Electrical Engineering (1<sup>5th</sup> ICEE), Volume on Communication, Telecommunication Research Center, Tehran, Iran, May 15-17, 2007.
- [9] R. Diestel, "Graph Theory", 3<sup>rd</sup> Edition, Springer-Verlag, New York, 2005.
- [10] M.A. Trick, Computational symposium: Graph coloring and its generalizations, 2002. <<http://mat.gsia.cmu.edu/COLOR02/>>.

در این مقاله الگوریتمی برای حل دو نوع از مسائل رنگ آمیزی گراف با عنوان رنگ آمیزی پهنای باند گراف و چند رنگ آمیزی پهنای باند گراف با استفاده از اتاماتای یادگیر سلولی نامنظم و با الگوریتم یادگیری LRP پیشنهاد گردید. الگوریتم پیشنهادی با الگوریتم‌های ارائه شده توسط لیم و پرستویچ و مالاگوتی مقایسه شد که بر طبق نتایج به دست آمده الگوریتم پیشنهادی در مسأله رنگ آمیزی پهنای باند نسبت به الگوریتم‌های فوق‌الذکر تعداد رنگ را کاهش می دهد و زمان اجرا را نیز بهبود می بخشد و در مسأله چند رنگ آمیزی پهنای باند، تقریباً همان نتایج الگوریتم‌های فوق را در تعداد رنگ، اما در زمان کمتر بدست می آورد.

## مراجع

- [1] R. Karp, "Reducibility among Combinatorial Problems", Complexity of computer computations, pp. 85-104, 1972.
- [2] W. Hale, "Frequency Assignment: Theory and Applications", in Proceedings of the IEEE, Vol. 68, pp. 1497-1514, 1980.
- [3] R. Opsut and F. Roberts, "On the Fleet Maintenance, Mobile Radio Frequency, Task Assignment, and Traffic