

# الگوریتم EO- $\tau$ -H سلسله مراتبی

محمد رضا میبدی

دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات

دانشکاه صنعتی امیرکبیر

تهران ایران

[mmeybodi@aut.ac.ir](mailto:mmeybodi@aut.ac.ir)

آیدین خاتم نژاد پاکزاد

دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات

دانشکاه صنعتی امیرکبیر

تهران ایران

[khatamnejad@gmail.com](mailto:khatamnejad@gmail.com)

توزيع احتمال وابسته به پارامتر  $\tau$  انجام می‌شود؛ این انتخاب به شکلی است که اجزا با شایستگی کمتر با احتمال بیشتری انتخاب می‌شوند. از مزایای الگوریتم EO- $\tau$  می‌توان به داشتن تنها یک پارامتر برای تنظیم و همچنین ساختار بسیار ساده آن اشاره کرد. انتخاب یکی از اجزای جواب و تعویض مقدار آن با مقداری جدید همواره به نتایج بهتر و مناسب‌تری منجر نشده و در بسیاری از موارد موجب دور شدن الگوریتم و جواب‌های آن از جواب بهینه مساله می‌شود. در این موارد تضمینی وجود ندارد که الگوریتم با اعمال تغییراتی در جهت معکوس حرکت کرده و مجدداً به جواب‌های مطلوب قبلی بازگردد. در این مقاله نسخه EO- $\tau$  سلسله مراتبی به منظور کاهش تاثیر منفی مشکل مطرح شده پیشنهاد می‌شود. در این الگوریتم به جای استفاده از تنها یک جواب و بهبود آن، از آرایه‌ای از جواب‌ها استفاده می‌شود. در هر مرحله از این الگوریتم، آرایه‌ای از جواب‌ها استخراج (جواب تعویضی) و با جواب جدیدی که توسط الگوریتم EO- $\tau$  به نام الگوریتم EO- $\tau$  سلسله مراتبی به منظور ارزیابی می‌شود. در روی مسائل متعددی از قبیل فروشنده دوره گرد و دو تکه کردن گراف آزمایش گردیده. مقایسه نتایج بدست امده با نتایج بدست آمده برای الگوریتم EO- $\tau$  حاکی از برتری الگوریتم پیشنهادی دارد.

الگوریتم EO- $\tau$  انجام می‌شود. دلیل نام‌گذاری این الگوریتم به نام الگوریتم EO- $\tau$  سلسله مراتبی، استفاده از از الگوریتم EO- $\tau$  در دو سطح (انتخاب جواب تعویضی و انتخاب جزء تعویضی) می‌باشد. به منظور ارزیابی و مقایسه الگوریتم‌های EO- $\tau$  و EO سلسله مراتبی از دو مساله فروشنده دوره گرد و دو تکه کردن گراف استفاده شده است. نتایج حاصل از مقایسه این دو الگوریتم نشان‌دهنده برتری الگوریتم پیشنهادی می‌باشد.

ادامه مقاله بین صورت سازماندهی شده است: در بخش ۲ الگوریتم EO- $\tau$  و مفاهیم پایه‌ای آن شرح داده می‌شود. سپس در بخش ۳ الگوریتم جدید EO- $\tau$  سلسله مراتبی معرفی می‌شود. مسائل آزمایشی و چگونگی حل آنها توسط الگوریتم‌ها در بخش ۴ و نتایج حاصل از اجرای الگوریتم بر روی این مسائل و مقایسه آنها در بخش ۵ ارائه می‌شوند. بخش ۶ به نتیجه‌گیری اختصاص دارد.

**چکیده:** الگوریتم EO- $\tau$  نسخه‌ای از الگوریتم تکاملی EO می‌باشد که برای حل مسائل بهینه‌سازی مورد استفاده قرار می‌گیرد. این الگوریتم برای تولید جواب‌های بهتر، در هر مرحله یکی از اجزای آخرین جواب ایجاد شده را با توجه به شایستگی محلی آن انتخاب و مقدار آن را با مقداری جدید جایگزین می‌کند. البته این عملیات همواره به بهبود جواب منتهی نشده و در بسیاری از موارد منجر به دور شدن از جواب بهینه مساله می‌شود. در این مقاله نسخه جدیدی از الگوریتم EO- $\tau$  به نام الگوریتم EO- $\tau$  سلسله مراتبی پیشنهاد می‌گردد. در این الگوریتم به جای استفاده از تنها یک جواب و بهبود آن، از آرایه‌ای از جواب‌ها استفاده می‌شود. در هر مرحله از این الگوریتم یکی از جواب‌های آرایه انتخاب و با جواب جدیدی که توسط الگوریتم EO- $\tau$  ایجاد می‌شود جایگزین می‌شود. انتخاب جواب‌ها با توجه به شایستگی آنها و توسط الگوریتم EO- $\tau$  انجام می‌شود. به منظور ارزیابی الگوریتم پیشنهادی بر روی مسائل متعددی از قبیل فروشنده دوره گرد و دو تکه کردن گراف آزمایش گردیده. مقایسه نتایج بدست امده با نتایج بدست آمده برای الگوریتم EO- $\tau$  حاکی از برتری الگوریتم پیشنهادی دارد.

**کلمات کلیدی:** بهینه‌سازی حدی، اتماتاها می‌یادگیر، الگوریتم EO- $\tau$ ، مسائل بهینه‌سازی

## ۱. مقدمه

الگوریتم EO- $\tau$  یک الگوریتم تکاملی جدید است که بر اساس ویژگی بحران‌های خود سازماندهی عمل می‌کند. این الگوریتم که شکل تکامل یافته الگوریتم EO می‌باشد برای حل مسائل بهینه‌سازی استفاده شده و جواب‌های مطلوبی ارائه داده است. این الگوریتم برخلاف بسیاری از الگوریتم‌های تکاملی که در هر لحظه از چندین جواب تشکیل شده‌اند تنها از یک جواب (جزء تعویضی) و جایگزین شده و در هر مرحله آن را بهبود می‌دهد. بهبود جواب در این الگوریتم با انتخاب یکی از اجزای جواب (جزء تعویضی) و جایگزین کردن مقدار آن با مقداری جدید انجام می‌شود. انتخاب جزء تعویضی با توجه به شایستگی اجزا (شایستگی محلی) و یک

## ۲. معرفی الگوریتم EO- $\tau$

در این بخش از مقاله به ترتیب بحران خود سازمانده، مدل بک-اسنپن، الگوریتم بهینه‌سازی حدی و سپس الگوریتم EO- $\tau$  به اختصار شرح داده می‌شوند.

عددی اتفاقی مقداردهی می‌شوند. سپس تا توقف الگوریتم در هر مرحله، سلولی که کمترین شایستگی را دارد (در صورتی که چندین سلول با کمترین شایستگی وجود داشته باشد) کی از آنها به صورت اتفاقی انتخاب می‌شود) به همراه سلول‌های چپ و راست آن مجدداً به صورت اتفاقی مقداردهی می‌شوند. توقف الگوریتم می‌تواند به صورت دستی انجام شود و یا با تعریف آستانه‌ای به خود الگوریتم محول شود. اگر در مرحله جاری، مجموعه‌ای از کوچکترین شایستگی در هر کدام از مراحل قبل را تشکیل دهیم، بزرگترین عضو این مجموعه شایستگی بحرانی نامیده می‌شود. واضح است که شایستگی بحرانی همواره مقدار ثابتی ندارد و در طول اجرا به صورت صعودی تغییر پیدا می‌کند. آزمایش‌هایی که بر روی این مدل انجام شده است نشان می‌دهد که شایستگی بحرانی دارای حدی برابر  $0,667$  است که با گذشت زمان به سمت آن میل می‌کند.

**الگوریتم بهینه‌سازی حدی<sup>۶</sup>:** در الگوریتم بهینه‌سازی حدی [۳] که به اختصار EO نامیده می‌شود، خانه‌های آرایه مدل بک-اسنپن برابر اجزای جواب مساله قرار داده می‌شوند. در هر مرحله (تکرار حلقه اصلی الگوریتم) با انتخاب ضعیفترین جزء و جایگزینی آن با مقداری دیگر، جواب بهبود داده می‌شود. در این الگوریتم برخلاف مدل بک-اسنپن، تغییر یک جزء (گونه در مدل بک-اسنپن)، اجزای همسایه آن تغییر داده نمی‌شوند. مشخص‌ترین تفاوت الگوریتم EO و دیگر الگوریتم‌های اکتشافی نظیر الگوریتم ژنتیک، نیاز الگوریتم به دانستن شایستگی اجزای مختلف جواب (شایستگی محلی) علاوه بر شایستگی کلی جواب است. در واقع این ویژگی الگوریتم EO، هسته مرکزی و عامل کار آن است. الگوریتم EO برای حل مسائلی نظیر تقسیم گراف به دو زیر گراف، رنگ آمیزی گراف با سه رنگ و فروشنده دوره‌گرد مورد استفاده قرار گرفته و جواب‌های مطلوبی ارائه داده است.

**الگوریتم EO- $\tau$ :** هرچند الگوریتم EO جواب‌های مطلوبی برای مسائل به کار گرفته شده ارائه می‌دهد، با این احتمال گرفتار شدن آن در نقاط بهینه محلی زیاد است. برای حل این مشکل الگوریتم EO با پارامتر  $\tau$  یا به اختصار EO- $\tau$  پیشنهاد گردید [۳]. در این الگوریتم، برای پیدا کردن جزء تعویضی، ابتدا اجزای جواب به صورت صعودی بر اساس شایستگی مرتب می‌شوند. سپس به هر جزء با توجه به مکان آن در فهرست مرتب شده ( $n$ ) احتمالی متناسب با  $(P(n))$  (رابطه ۲) نسبت داده شده و در انتهای یکی از اجزا با توجه به این احتمال‌ها انتخاب می‌شود. انتخاب جزء تعویضی به این روش موجب می‌شود تا

**بحran‌های خود سازمانده:** بحران خود سازمانده [۱][۲] یکی از ویژگی‌های سیستم‌های طبیعی است که بسیاری از رفتارهای پیچیده این سیستم‌ها را توصیف می‌کند. این مفهوم اولین بار توسط بک<sup>۱</sup> برای توصیف رفتار مدل توده شن معرفی شد. در حال حاضر از این مفهوم در شبیه‌سازی و پیش‌بینی زلزله و رانش زمین، شبیه‌سازی آتش‌سوزی در جنگل‌ها، بررسی انتشار بیماری‌ها، تغییرات آب و هوا و بررسی بازار خرید و فروش کالاهای استفاده می‌شود. سیستم‌هایی که دارای ویژگی بحران خود سازمانده هستند معمولاً از یک حالت پایدار شروع به کار کرده و در طول زمان به یک نقطه بحرانی<sup>۲</sup> نزدیک می‌شوند. در این نقطه، کوچکترین تغییری در وضعیت، باعث می‌شود که سیستم با یک رفتار سریع و وسیع که با نام بهمن<sup>۳</sup> شناخته می‌شود، خود را به یک حالت پایدار برساند. این سیستم‌ها تا مرز آشفتگی رفته ولی توسط بهمن به حالت عادی بر می‌گردند. تعداد و وسعت بهمن‌ها از قانون توان<sup>۴</sup> پیروی می‌کند:

$$P = ax^b \quad (1)$$

در این رابطه  $x$  وسعت بهمن (با توجه به نوع سیستم می‌تواند واحدهای مختلفی داشته باشد)،  $a$  و  $b$  مقادیر ثابت که برای هر سیستم به صورت جداگانه تعریف می‌شود و  $P$  تعداد دفعات وقوع بهمن است. به عنوان مثال اگر زمین لرزه را به عنوان بهمن در نظر بگیریم، تعداد زمین لرزه‌ها با بزرگی‌های مختلف از این قانون پیروی می‌کند.

**مدل بک-اسنپن<sup>۵</sup>:** مدل بک-اسنپن مدلی برای نمایش تکامل گونه‌های موجودات است که بر اساس مفهوم بحران خود سازمانده ایجاد شده است. این مدل از آرایه‌ای از سلول‌ها تشکیل شده است که در آن هر سلول نماینده یک گونه جانوری است؛ ابتدا و انتهای آرایه سلول‌ها در کنار هم قرار دارند به نحوی که آرایه صورت یک حلقه در می‌آید. در این مدل به هر گونه جانوری یک شایستگی اختصاص داده می‌شود که نشان دهنده شایستگی و مقدار تطابق آن با محیط است؛ این شایستگی به صورت عددی در  $[0,1]$  در هر سلول نگهداری می‌شود. روش کار الگوریتم مدل بک-اسنپن به این صورت است که در ابتدا همه سلول‌ها با

<sup>1</sup> Bak

<sup>2</sup> Critical Point

<sup>3</sup> Avalanche

<sup>4</sup> Power Law

<sup>5</sup> Bak-Sneppen Model

در این رابطه  $n$  مکان جواب در فهرست مرتب شده جوابها می‌باشد.

$$P(n) \sim n^{-\tau} \quad (3)$$

تنها تفاوت بین انتخاب جواب تعویضی در الگوریتم پیشنهادی و انتخاب جزء تعویضی در الگوریتم  $\tau$ -EO به نحوه مرتب کردن جوابها و اجزای جواب در این الگوریتمها بر می‌گردد؛ در الگوریتم  $\tau$ -EO قبل از انتخاب جزء تعویضی، اجزا بر اساس شایستگی محلی آنها به صورت صعودی مرتب می‌شوند تا اجزا با شایستگی کمتر با احتمال بیشتری انتخاب شوند در حالی که در الگوریتم جدید برای انتخاب جواب تعویضی جوابها به صورت نزولی مرتب می‌شوند. دلیل این امر این است که الگوریتم با تمرکز بر روی جوابها با شایستگی بیشتر که با احتمال بیشتری در مسیر مناسب قرار دارند مسیر خود را انتخاب کند.

$$\begin{array}{c} \text{---EO} \\ \tau-\text{EO} \qquad \qquad \qquad ( ) \\ \tau-\text{EO} \end{array}$$

استفاده از الگوریتم  $\tau$ -EO برای.

انتخاب جواب تعویضی این ویژگی را دارد که در صورت بدتر شدن جواب پس از تغییر و کم شدن شایستگی آن، جواب در فهرست مرتب شده جوابها به مکان‌های پایین‌تری رفته و در نتیجه در مراحل بعد با احتمال کمتری انتخاب می‌شود. این رفتار به نوعی معادل تشخیص مسیر اشتباه توسط الگوریتم و تغییر مسیر است. نکته دیگری که در این روش انتخاب وجود دارد، فراموش نشدن جواب‌های ضعیفتر (جواب‌ها با شایستگی کمتر) است؛ در این روش هر چند جواب‌های ضعیف با احتمال بسیار کمی انتخاب می‌شوند ولی در هر صورت فراموش نشده و اگر در صورت انتخاب شدن به شکل مطلوبی بهبود پیدا کنند در مراحل بعد با احتمال بیشتری انتخاب می‌شوند.

با توجه به مطالب بیان شده، شکل کلی الگوریتم  $\tau$ -EO سلسله مراتبی به صورت زیر خواهد بود:

۱. مقداردهی اولیه
۲. تولید بردار جواب‌ها به طول پارامتر جمعیت
۳. تولید جواب‌های اولیه برای بردار جواب‌ها
۴. محاسبه شایستگی جواب‌ها
۵. مرتب کردن جواب‌ها بر اساس شایستگی آنها به صورت نزولی
۶. انتخاب یکی از جواب‌ها با توجه به توزیع احتمال رابطه  $3$  (جواب تعویضی)
۷. محاسبه شایستگی اجزای جواب تعویضی با توجه به مساله
۸. مرتب کردن اجزای جواب بر اساس شایستگی آنها به صورت صعودی

الگوریتم  $\tau$ -EO بتواند از بسیاری از نقاط بهینه محلی که الگوریتم  $EO$  در آنها گرفتار می‌شود فرار کند.

$$P(n) \sim n^{-\tau} \quad (2)$$

الگوریتم  $\tau$ -EO مانند الگوریتم  $EO$ ، برای حل مسائلی نظری تقسیم گراف به دو زیر گراف، رنگ آمیزی گراف با سه رنگ و فروشنده دوره‌گرد به کار گرفته شده است و جواب‌های بهتری در مقایسه با الگوریتم مادر خود  $EO$  تولید کرده است. همچنان نتایج بدست آمده توسط این الگوریتم چه از نظر دقیق و چه از نظر سرعت رسیدن به جواب کاملاً قابل رقابت با نتایج بدست آمده توسط الگوریتم‌هایی مانند  $SA^1$  و الگوریتم ژنتیک نشان داده است.

### ۳. الگوریتم پیشنهادی

الگوریتم  $\tau$ -EO برای تولید جواب‌های جدید در هر مرحله یکی از اجزای آخرین جواب تولید شده را با توجه به توزیع احتمال رابطه ۲ انتخاب و سپس مقدار آن را با مقداری جدید جایگزین می‌کند. این روش تولید جواب همواره مناسب نبوده و در بسیاری از موارد موجب دور شدن از جواب بهینه مساله می‌شود. از طرف دیگر تضمینی وجود ندارد که الگوریتم پس از تولید جواب جدید، مجدداً و به سرعت به جواب‌های بهتر قبلی بازگردد. الگوریتم پیشنهادی که آنرا الگوریتم  $\tau$ -EO سلسله مراتبی مینامیم به جای استفاده از تنها یک جواب و بهبود آن در هر مرحله، از مجموعه‌ای از جواب‌ها استفاده می‌کند. در الگوریتم پیشنهادی، ابتدا آرایه‌ای از جواب‌ها با طولی برابر با پارامتر جدید جمعیت ایجاد شده و تمام خانه‌های آن با یک جواب اولیه مقداردهی می‌شوند. در هر مرحله از اجرای الگوریتم (در هر اجرای حلقه) یکی از این جواب‌ها انتخاب شده (جواب تعویضی) و توسط الگوریتم  $\tau$ -EO بهبود پیدا می‌کند. در انتهای هر مرحله نیز جواب جدید، جایگزین جواب انتخاب شده در آرایه می‌شود. به عبارت دیگر اگر فرض کنیم که الگوریتم  $\tau$ -EO با تغییر جواب در مسیری به سمت جواب بهینه حرکت می‌کند، الگوریتم  $\tau$ -EO سلسله مراتبی در هر لحظه از چندین مسیر تشكیل شده است که در هر مرحله یکی از آنها را انتخاب و دنبال می‌کند. برای انتخاب جواب تعویضی در الگوریتم جدید از روش انتخاب جزء تعویضی در الگوریتم  $\tau$ -EO استفاده شده است؛ به این ترتیب که در ابتدای هر مرحله جواب‌ها بر اساس شایستگی آنها مرتب شده و سپس با استفاده از یکتابع توزیع احتمال - شبیه رابطه ۲ - یکی از آنها انتخاب می‌شود. تابع توزیع احتمال استفاده شده برای انتخاب جواب تعویضی توسط پارامتر جدید  $T$  تعریف می‌شود؛ این تابع توزیع رابطه  $3$  نمایش داده شده است.

استفاده از رابطه  $\alpha_i \leq N - 1$  و  $\beta_i \leq 1$  در این رابطه است. در صورتی که شهر  $i$  ام در جواب مجاور نزدیکترین همسایه‌ها خود قرار گرفته باشد، مقدار  $\lambda_i$  کمترین مقدار ممکن و برابر ۱ خواهد شد.

$$\lambda_i = \frac{3}{\alpha_i + \beta_i} \quad (4)$$

به این ترتیب بعد از مشخص شدن روش محاسبه شایستگی اجزای جواب، می‌توان در هر مرحله با استفاده از توزیع احتمال رابطه ۲ جزء تعویضی را تعیین کرد. مرحله بعد در پیاده‌سازی الگوریتم EO- $\tau$  برای حل مساله فروشنده دوره‌گرد، مشخص کردن روش تغییر مقدار جزء تعویضی یا به عبارت بهتر تعیین چگونگی تغییر همسایگی‌های شهر انتخاب شده است. در [۶] بعد از آنکه شهر (جزء) تعویضی با استفاده از توزیع احتمال رابطه ۲ انتخاب شد، دورترین همسایه شهر در جواب (یکی از دو شهر مجاور) انتخاب و با یکی دیگر از همسایه‌های شهر جایگزین می‌شود. شهر جایگزین شونده به صورت اتفاقی و با توجه به توزیع احتمال  $P(n) \sim n^{-\tau}$  از بین فهرست مرتب شده شهرهای همسایه انتخاب می‌شود.

از آنجایی که جزیيات پیاده‌سازی الگوریتم EO- $\tau$  برای حل مساله فروشنده دوره‌گرد در [۶] مشخص نشده است، پیاده‌سازی صورت گرفته از این الگوریتم در مقامه حاضر - که به منظور مقایسه الگوریتم‌ها انجام شده است - کاملاً منطبق بر پیاده‌سازی این مرجع نیست. این مساله موجب می‌شود که مقادیر معرفی شده برای پارامتر  $\tau$  در این مرجع، نیز مناسب پیاده‌سازی جدید نباشد و در نتیجه این پارامتر باید مجدداً محاسبه شود. به این منظور مقدار بهینه پارامتر  $\tau$  برای مجموعه مسائل آزمایشی مجدداً محاسبه شده و مقداری برابر  $2,6$  برای آن بدست آمده است.

## ۴-۲. حل مساله فروشنده دوره‌گرد توسط الگوریتم EO- $\tau$ سلسله مراتبی

برای حل مساله فروشنده دوره‌گرد توسط الگوریتم EO- $\tau$  سلسله مراتبی از پیاده‌سازی الگوریتم EO- $\tau$  برای حل این مساله استفاده شده و تغییرات لازم در آن اعمال شده است؛ از آنجایی که ساختار کلی این دو الگوریتم کاملاً شبیه به هم می‌باشد و تنها مراحل ابتدایی و انتهایی حلقه اصلی این دو الگوریتم با هم تفاوت دارد، روش محاسبه شایستگی و همچنین تغییر مقدار جزء تعویضی برای هر دو الگوریتم یکسان در نظر گرفته شده است.

قبل از بررسی رفتار الگوریتم EO- $\tau$  سلسله مراتبی، باید مقادیر مناسب برای پارامترهای آن محاسبه شود. به این منظور از مجموعه نمونه‌های مساله فروشنده دوره‌گرد برای پیدا کردن

۹. انتخاب یکی از اجزای جواب با استفاده از توزیع احتمال

رابطه ۲ (جزء تعویضی)

۱۰. انتخاب مقدار جدید برای جزء تعویضی با توجه به مساله

۱۱. جایگزین کردن مقدار جدید جزء تعویضی و تولید جواب جدید

۱۲. جایگزین کردن جواب جدید به جای جواب تعویضی

۱۳. محاسبه شایستگی جواب جدید

۱۴. اجرای مرحله ۵ تا توقف الگوریتم

۱۵. برگرداندن بهترین جواب

## ۴. مسائل آزمایشی و روش حل آنها

برای ارزیابی کارایی الگوریتم EO- $\tau$  سلسله مراتبی و مقایسه آن با روش EO- $\tau$  از دو مساله بفرنج فروشنده دوره‌گرد<sup>۱</sup> و دو تکه کردن گراف<sup>۲</sup> استفاده شده است. هدف در مساله فروشنده دوره‌گرد پیدا کردن کوتاه‌ترین دور همیلتونی در یک است. نمونه‌هایی از مساله<sup>۳</sup> که برای مقایسه عملکرد الگوریتم‌ها استفاده شده‌اند از مرجع [۴] آورده شده‌اند؛ این مجموعه شامل نمونه‌های استانداردی از مساله فروشنده دوره‌گرد می‌باشند. در مساله دو تکه کردن گراف نیز هدف، تقسیم کردن گراف به دو قسمت است به شکلی که اولاً تعداد گره‌های دو قسمت برابر (در صورت زوج بودن تعداد گره‌های گراف) باشد و یا اختلافی برابر ۱ (در صورت فرد بودن تعداد گره‌های گراف) داشته باشند و ثانیاً تعداد یال‌های بین دو قسمت کمترین مقدار ممکن باشد. نمونه‌های استفاده شده برای مقایسه عملکرد الگوریتم‌ها در حل این مساله از مرجع [۵] آورده شده‌اند.

### ۴-۱. حل مساله فروشنده دوره‌گرد توسط EO- $\tau$

در پیاده‌سازی الگوریتم EO- $\tau$  برای حل مساله فروشنده دوره‌گرد در [۶]، از فاصله شهر با همسایه‌های آن در جواب استفاده می‌شود. در این روش برای محاسبه شایستگی شهر  $i$  ام، ابتدا فهرستی از تمامی همسایه‌های آن در گراف تشکیل می‌شود. سپس این فهرست بر اساس فاصله شهرها با شهر مورد نظر به صورت صعودی مرتب می‌شود؛ به این ترتیب نزدیکترین همسایه شهر در مکان اول فهرست قرار خواهد گرفت. پس از مرتب شدن فهرست همسایگی‌ها، مکان دو همسایه شهر مورد نظر که در جواب قبل و بعد از شهر قرار دارند در این فهرست مشخص شده و با دو مقدار  $\alpha_i$  و  $\beta_i$  شناخته می‌شوند. بعد از این مرحله شایستگی شهر (جزء)  $i$  ام که با مقدار  $\lambda_i$  مشخص می‌شود با

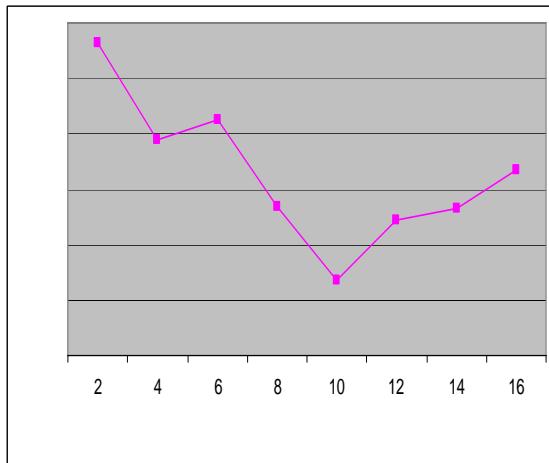
<sup>1</sup> Traveling Salesman Problem

<sup>2</sup> Graph Bi-Partitioning

<sup>3</sup> Problem Instances

$$\lambda_i = \frac{g_i}{g_i + b_i} \quad (5)$$

در این رابطه  $i$  معرف تعداد اتصالات "خوب" گره  $i$  ام (اتصالات به گره‌های هم تکه گره  $i$  ام) و  $b_i$  تعداد اتصالات "بد" گره  $i$  ام (اتصالات به گره‌های قرار گرفته در تکه غیر از تکه گره  $i$  ام) می‌باشد. لازم به ذکر است که در این روش در صورتی که گره اتصالی نداشته باشد، شایستگی آن برابر ۱ در تظر گرفته می‌شود. روش تغییر مقدار جزء تعویضی در این مساله به این صورت است که در هر مرحله بعد از انتخاب گره (جزء) تعویضی، گره دیگری با توجه به توزیع احتمال رابطه ۲ از تکه دیگر (تکه‌ای که گره تعویضی در آن قرار ندارد) انتخاب شده و سپس تکه‌های این دو گره با هم تعویض می‌شود؛ به این ترتیب تعداد گره‌های تکه‌های گراف همواره ثابت می‌ماند.



نمودار ۲ : تغییرات عملکرد الگوریتم EO- $\tau$  سلسله مراتبی نسبت به تغییرات پارامتر جمعیت برای مساله فروشنده دوره‌گرد (پارامتر  $T$  برابر ۱۰ می‌باشد)

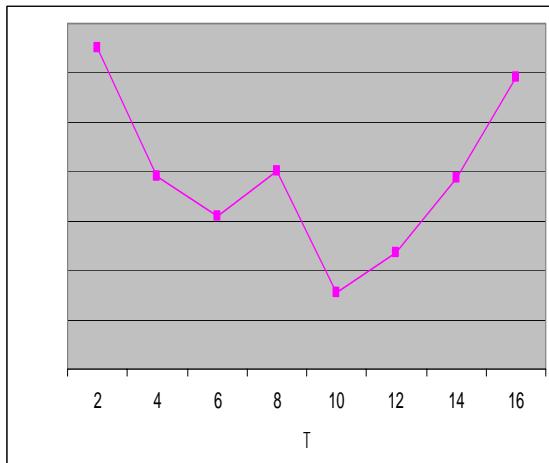
به علت اینکه پیاده‌سازی اشاره شده در مراجع مورد استفاده (مراجع [۷] و [۸]) با جزئیات کافی ارائه نشده است، پیاده‌سازی انجام شده از الگوریتم EO- $\tau$  در پژوهه حاضر کاملاً با پیاده‌سازی مورد استفاده در مراجع یکسان نیست. بنابراین مقدار پارامتر  $\tau$  که کاملاً به نحوه پیاده‌سازی وابسته است با مقدار اشاره شده در این مراجع تفاوت خواهد داشت. به این منظور مقدار بهینه این پارامتر برای پیاده‌سازی انجام شده مجدداً محاسبه شده است و مقداری برابر ۱,۸۵ برای آن بدست آمده است.

#### ۴-۴. حل مساله دو تکه گراف توسط الگوریتم EO- $\tau$ سلسله مراتبی

پیاده‌سازی الگوریتم EO- $\tau$  برای حل مساله دو تکه گراف پایه پیاده‌سازی الگوریتم EO- $\tau$  سلسله مراتبی برای حل این مساله می‌باشد؛ در این پیاده‌سازی تغییری در متن حلقه اصلی الگوریتم EO- $\tau$  داده نشده و تنها بخش‌هایی به ابتدا و انتهای

مقدار بهینه پارامترها استفاده شده است. برای انجام این کار، ابتدا مقدار پارامتر  $\tau$  به منظور مقایسه دو الگوریتم EO- $\tau$  و EO- $\tau$  بهترین مقدار این پارامتر برای الگوریتم اعمال شده برابر ۲,۶ است. سپس رفتار الگوریتم به ازای مقادیر مختلف دو پارامتر دیگر (جمعیت و  $T$ ) برای یافتن بهترین مقدار این دو پارامتر بررسی شد. در این بررسی الگوریتم به ازای مقادیر مختلف پارامترها، به تعداد ۱۰ مرتبه بر روی نمونه‌های آزمایشی اجرا و مجموع جواب‌های بدست آمده برای مقایسه مورد استفاده قرار گرفته است؛ کمترین مجموع جواب نشان‌دهنده مقدار بهینه پارامترها می‌باشد.

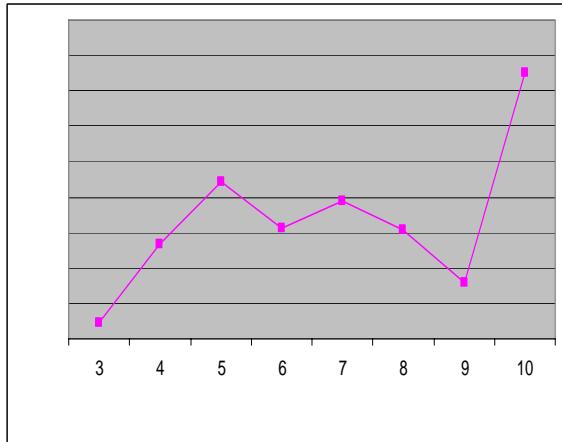
نتیجه بررسی برای یافتن مقادیر بهینه پارامترها نشان داد که مقدار ۱۰ برای هر دوی این پارامترها به بهترین جواب‌ها منتهی می‌شود. نمودار ۱ نشان‌دهنده مجموع جواب‌های الگوریتم EO- $\tau$  سلسله مراتبی برای مقادیر مختلف پارامتر  $T$  به ازای مقدار ۱۰ برای پارامتر جمعیت می‌باشد. همچنین نمودار ۲ مجموع جواب‌های تولید شده توسط الگوریتم EO- $\tau$  سلسله مراتبی را به ازای مقادیر مختلف پارامتر جمعیت و مقدار ۱۰ برای پارامتر  $T$  نشان می‌دهد.



نمودار ۱ : تغییرات عملکرد الگوریتم EO- $\tau$  سلسله مراتبی نسبت به تغییرات پارامتر  $T$  برای مساله فروشنده دوره‌گرد (پارامتر جمعیت برابر ۱۰ می‌باشد)

#### ۴-۳. حل مساله دو تکه گراف توسط EO- $\tau$

برای حل مساله دو تکه گراف توسط EO- $\tau$  نیز همانند حل مساله فروشنده دوره‌گرد توسط این الگوریتم لازم است که دو جزء اصلی الگوریتم EO- $\tau$  با توجه به مساله تعیین شوند. در پیاده‌سازی انجام شده از الگوریتم EO برای حل این مساله که در مراجع [۷] و [۸] معرفی شده‌اند، شایستگی اجزای جواب از رابطه ۵ محاسبه می‌شود:



نمودار ۴ : تغییرات عملکرد الگوریتم  $H-\tau$ -EO نسبت به تغییرات پارامتر جمعیت برای مساله دو تکه کردن گراف (پارامتر  $T$  برابر ۴ می باشد)

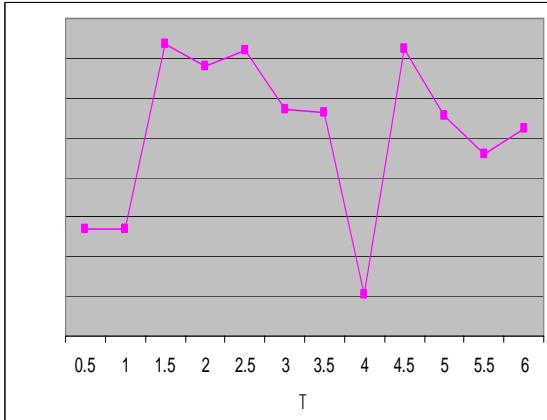
## ۵. نتایج آزمایشات

برای مقایسه الگوریتم  $H-\tau$ -EO سلسله مراتبی و الگوریتم  $\tau$ -EO در حل مساله فروشنده دوره گرد از مجموعه مسائل آزمایشی معرفی شده در بخش ۴ استفاده شده است. در این بررسی مقدار پارامتر  $\tau$  برای هر دو الگوریتم برابر ۲ عیار نظر گرفته شده است. پارامترهای جمعیت و  $T$  الگوریتم  $H-\tau$ -EO سلسله مراتبی نیز بر اساس مقادیر محاسبه شده در بخش قبل قابل برابر ۱۰ قرار داده شده‌اند. جدول ۱ نتایج آماری حاصل از اجرای الگوریتم‌های  $H-\tau$ -EO سلسله مراتبی و  $\tau$ -EO بر روی نمونه مسائل آزمایشی در ۱۰ مرتبه اجرا را نمایش می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود هر چند کمترین مقادیر اجرایها متعلق به جواب الگوریتم  $H-\tau$ -EO است با این حال میانگین جواب‌های تولید شده توسط الگوریتم  $H-\tau$ -EO سلسله مراتبی تقریباً در تمامی موارد کمتر از الگوریتم  $\tau$ -EO می‌باشد.

همچنین برای مقایسه دو الگوریتم  $H-\tau$ -EO سلسله مراتبی و الگوریتم  $\tau$ -EO برای حل مساله دو تکه کردن گراف نیز از مجموعه مسائل آزمایشی معرفی شده در بخش ۴ استفاده شده است. به این منظور پارامتر  $\tau$  هر دوی این الگوریتم‌ها برابر ۱,۸۵ قرار داده شده و پارامترهای جمعیت و  $T$  الگوریتم  $H-\tau$ -EO سلسله مراتبی به ترتیب برابر ۳ و ۴ قرار داده شده‌اند؛ این مقادیر در بخش قبل و با توجه به عملکرد الگوریتم با مقادیر مختلف این پارامترها بدست آمدند. جدول ۲ نتایج آماری حاصل از جواب‌های بدست آمده از ۱۰ مرتبه اجرای الگوریتم‌ها بر روی مسائل آزمایشی را نمایش می‌دهد. این جدول نشان دهنده برتری کامل الگوریتم  $H-\tau$ -EO سلسله مراتبی بر الگوریتم  $\tau$ -EO است.

این حلقه اضافه می‌شوند؛ در نتیجه نحوه محاسبه شایستگی اجزای جواب و تغییر مقدار جزء تعویضی همانند الگوریتم  $H-\tau$ -EO خواهد بود. همچنین در این پیاده‌سازی تغییری در مرحله جایگزین کردن جواب جدید به جای جواب تعویضی (مرحله ۱۲ الگوریتم) اعمال شده است؛ به این ترتیب قبل از جایگزین شدن مقدار قدیمی جواب تعویضی با جواب جدید، این مقدار (جواب قدیمی) به صورت اتفاقی جایگزین یکی دیگر از جواب‌های آرایه می‌شود.

برای محاسبه مقدار بهینه پارامترهای الگوریتم  $H-\tau$ -EO سلسله مراتبی در حل مساله دو تکه کردن گراف، ابتدا به منظور مقایسه الگوریتم‌های  $H-\tau$ -EO و  $\tau$ -EO سلسله مراتبی و مشاهده تاثیر تغییرات اعمال شده، پارامتر  $\tau$  برابر ۱,۸۵ (بهترین مقدار این پارامتر در الگوریتم  $H-\tau$ -EO) قرار داده شده است. سپس با بررسی رفتار الگوریتم به ازای مقادیر مختلف دو پارامتر جمعیت و  $T$  مقدار بهینه آنها محاسبه شده است؛ در این بررسی، الگوریتم به ازای مقدار مختلف پارامترها به تعداد ۱۰ مرتبه بر روی نمونه‌های آزمایشی مساله دو تکه کردن گراف اجرا و مجموع جواب‌ها تولید شده محاسبه شده است. مقادیری از پارامترها که کمترین مجموع جواب را تولید کرده باشند به عنوان مقدار بهینه پارامترها در نظر گرفته می‌شوند. با توجه به این بررسی مقدار ۳ برای پارامتر جمعیت و مقدار ۴ برای پارامتر  $T$  به عنوان مقدار بهینه پارامترها بدست آمد. نمودار ۳ رفتار الگوریتم  $H-\tau$ -EO سلسله مراتبی را به ازای مقادیر مختلف پارامتر  $T$  و مقدار ۳ برای پارامتر جمعیت نمایش می‌دهد. همچنین نمودار ۴ رفتار الگوریتم را به ازای مقادیر مختلف پارامتر جمعیت و مقدار ۴ برای پارامتر  $T$  نشان می‌دهد.



نمودار ۳ : تغییرات عملکرد الگوریتم  $H-\tau$ -EO نسبت به تغییرات پارامتر  $T$  برای مساله دو تکه کردن گراف (پارامتر جمعیت برابر ۳ می باشد)

## مراجع

- [1] [http://en.wikipedia.org/wiki/Self-organized\\_criticality](http://en.wikipedia.org/wiki/Self-organized_criticality)
- [2] Per Bak, Tang, C. and Wiesenfeld, K., "Self-organized Criticality", Physical Review A, Vol. 38, No. 1, 1988.
- [3] Boettcher, S. and Percus,A. G., "Extremal Optimization: An Evolutionary Local-Search Algorithm", <http://arxiv.org/abs/cs.NE/0209030>.
- [4]<http://www.iwr.uni-heidelberg.de/groups/comopt/software/TSPLIB95/>.
- [5] <http://staffweb.cms.gre.ac.uk/~c.walshaw/partition/>.
- [6] Boettcher, S. and Percus, A. G., "Extremal Optimization: Methods Derived from Co-Evolution", GECCO-99: Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference, 1999.
- [7] Boettcher, S., "Extremal Optimization of Graph Partitioning at the Percolation Threshold", Physics A, Vol 32, No.28, pp.5201-5211, 1999.
- [8] Boettcher, S. and Percus, A. G., "Extremal Optimization for Graph Partitioning", Physical Review E, Vol. 64, pp. 114-121, 2001.

## ۶. نتیجه گیری

در این مقاله نسخه جدیدی از الگوریتم  $\tau$ -EO به نام الگوریتم  $\tau$ -EO سلسله مراتبی پیشنهاد گردید. در این الگوریتم به جای استفاده از تنها یک جواب و بهبود آن در هر مرحله، از آرایه‌ای از جواب‌ها استفاده شده است. در هر مرحله از الگوریتم  $\tau$ -EO سلسله مراتبی، ابتدا یکی از این جواب‌ها انتخاب شده (جواب تعویضی) و توسط الگوریتم  $\tau$ -EO به منظور بهبود پیدا کردن تغییر پیدا می‌کند؛ انتخاب جواب تعویضی با توجه به شایستگی آنها و توسط الگوریتم  $\tau$ -EO انجام می‌شود. بررسی‌های انجام شده بر روی الگوریتم  $\tau$ -EO سلسله مراتبی و مقایسه آن با الگوریتم  $\tau$ -EO که بر روی دو مساله بفرنچ فروشنده دوره گرد و دو تکه کردن گراف انجام شده است نشان دهنده برتری الگوریتم  $\tau$ -EO سلسله مراتبی بر الگوریتم پایه  $\tau$ -EO می‌باشد.

**سپا سگزاری:** این کار تحقیقاتی توسط مرکز تحقیقات مخابرات ایران حمایت مالی شده است که از این طریق سپاسگزاری می‌گردد.

نام گراف	میانگین		بیشینه		کمینه	
	H- $\tau$ -EO	$\tau$ -EO	H- $\tau$ -EO	$\tau$ -EO	H- $\tau$ -EO	$\tau$ -EO
A280	2782.3	2860.17	2810	3281	2720	2685
Berlin52	8397.4	8490.61	9103	9257	8151	7888
Burma14	3324.3	3331.59	3336	3472	3323	3323
CH130	7718.7	8032.51	8948	9457	7158	6983
CH150	8882.2	8877.39	9766	10615	7900	7454
EIL101	706.5	711.11	745	791	657	651
EIL76	575.8	580.03	600	633	548	549
GR202	49548.2	50223.22	53277	54625	46710	46615
GR66	399423.7	400485.4	410189	439334	388890	370356
GR96	61847.1	63278.73	64486	74763	59704	57983
KroA100	27705.3	27775.62	30950	34002	24787	23621
Pcb442	88217.2	92217.98	99772	113634	77126	75533
PR1002	340524.5	340594.6	350396	365298	328887	307220
TSP225	4872.1	4978.3	5389	5810	4572	4269
Ulysses22	7199.2	7275	7344	7646	7115	7014

جدول ۱: مقایسه الگوریتم  $\tau$ -EO سلسله مراتبی و  $\tau$ -EO در حل مساله فروشنده دوره گرد

نام گراف	میانگین		بیشینه		کمینه	
	H-τ-EO	τ-EO	H-τ-EO	τ-EO	H-τ-EO	τ-EO
3elt	262.8	273.6	283	292	231	256
4elt	855.9	901.7	888	952	834	813
Add20	904.4	926.4	1007	996	769	784
Add32	71.3	76.2	88	106	45	47
Crack	221.9	223.3	225	230	220	221
CS4	858.8	858.9	873	866	849	851
CTI	992.5	1046.4	1021	1068	967	1030
Data	261	260.1	261	261	261	252
FE_4elt2	308.2	314	316	319	302	307
FE_Sphere	510	510	510	510	510	510
UK	49.9	60.2	55	65	47	57
Whitaker3	136	138.5	140	143	134	135
Wing_nodal	3175.9	3249.9	3298	3390	3100	3150

جدول ۲ : مقایسه الگوریتم τ-EO سلسله مراتبی و EO-τ در حل مساله دو تکه کردن گراف