سیزدهمین کنفرانس مهندسی برق ایران

۲۲-۲۰ اردیبهشت ۱۳۸۴

الگوریتمی برای تولید نمودار ورونوی در اتوماتای سلولی دوبعدی

شهرام گلزاری
گروه برق و کامپیوتر
دانشگاه هرمزگان

محمدرضا میبدی
دانشکده مهندسی کامپیوتر
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

چکیده: در این مقاله الگوریتمی برای تولید نمودار ورونوی مبتنی بر اتوماتای سلولی (CA)و در مقیاس متریک L_2ارائه گردیده است. در این الگوریتم از هر یک از نقاط امواج دایره ای شکل با سرعت یکسان منتشر شده و از تقاطع امواج با یکدیگر نمودار ورونوی تولید می شود. الگوریتم ارائه شده ساده بوده و دارای محاسبات اندکی می باشد. در ضمن به علت استفاده نمودن از مقیاس متریک L_2 دارای کاربردهای فراوان می باشد. پیچیدگی زمانی این الگوریتم مستقل از تعداد نقاط بوده و نمودار ورونوی n نقطه را با استفاده از CA دو بعدی $m \times m$ در O(m) گام زمانی تولید می نماید.

کلمات کلیدی: اتوماتای سلولی، هندسه محاسباتی، نمودار ورونوی، الگوریتم موازی

۱-مقدمه

تولید نمودار ورونوی اولین بار توسط Georgii Voronoi در حدود یک قرن پیش مطرح و از آن به بعد الگوریتمهای متنوعی برای تولید نمودار ورونوی گزارش شده است. F.P. Preparata و M.I. Shamos در کتاب خود الگوریتمهای متنوعی برای حل این مسأله ارائه کرده اند[10]. H.Edelsbrunner نیز بسیاری از الگوریتمهای مطرح در این زمینه را جمع آوری و منتشر نموده است[4]. هر یک از الگوریتمهای گزارش شده از تکنیک خاصی برای تولید نمودار ورونوی استفاده می کنند. یکی از جالبترین الگوریتم ها، الگوریتم Fortune می باشد که با استفاده از تکنیک Sweepline نمودار ورونوی n نقطه را در $O(n \log n)$ تولید می نماید[5]. الگوریتم R.Klein با استفاده از روش تقسیم وغلبه نمودار ورونوی n نقطه را در زمان $O(n \log n)$می سازد[8].

برای تولید نمودار ورونوی بصورت موازی نیز الگوریتمهایی ارائه شده است. الگوریتم مطرح شده توسط Joeng وLee با استفاده از روش تقسیم و غلبه، نمودار ورونوی را بر روی یک ساختار مش دو بعدی از پردازنده ها با ابعاد $n \times n$ در O(n) تولید می کند[7]. B.Chazelle نیز با استفاده از آرایه های تپنده نمودار ورونوی را تولید نموده است[3].

امروزه نمودار ورونوی در موارد فراوانی از جمله مکانیابی منابع جدید، یافتن نزدیکترین همسایه، شبیه سازی رشد بلور، تقسیم بندی جنگل ها و یافتن مسیر رویات کاربرد دارد.

نمودار ورونوی مربوط به مجموعه نقاط S متعلق به فضای دو بعدی به صورت زیر تعریف می شود. به ازای هر نقطه s متعلق به S ، Vor(s,S) مجموعه نقاطی است که به نقطه s نزدیک تر است تا نقاط دیگر متعلق به S . مرز Vor(s,S) یک چندضلعی محدب را مشخص می کند که به آن چند ضلعی ورونوی می

گرییم. حال اگر چندضلعیهای ورونوی را به ازای تمام نقاط متعلق به S بدست آوریم یک تقسیم بندی از صفحه بدست می آید که به آن نمودار ورونوی گفته می شود و آن را با نماد Vor(S) نشان می دهیم. اگر تعداد نقاط متعلق به S برابر n باشد نمودار ورونوی S شامل تعداد O(n) لبه و n چند ضلعی خواهد بود که تعدادی از این چند ضلعی ها محدود و تعداد دیگری نامحدود می باشند. در شکل۱ نمودار ورونوی نقاط S_0 تا S_5 نمایش داده شده است.

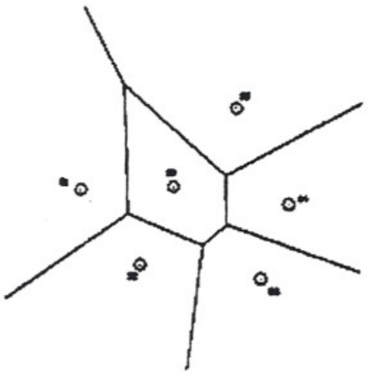
نمودار ورونوی تولید شده در فضای گسسته را نمودار ورونوی گسسته می نامیم. یک روش برای تولید نمودار ورونوی گسسته استفاده از CA می باشد. در مورد تولید نمودار ورونوی بر مبنای CA تا کنون الگوریتمهای زیادی گزارش نشده است. A.I.Adamatzky الگوریتمی ارائه داده است که با استفاده از یک CA دو بعدی $n \times n$، نمودار ورونوی را در متریک L_1 و در O(n) تولید می نماید[1]. P.Tzionas و همکاران برای حل مسأله دسته بندی الگو به روش نزدیکترین همسایه از CA دو بعدی استفاده نموده که راه حل آنها ساختاری شبیه به نمودار ورونوی را در متریک L_1 تولید می کند[11]. تا بحال الگوریتمی برای تولید نمودار ورونوی در CA دوبعدی و در مقیاس متریک L_2 (فاصله اقلیدسی) گزارش نشده است.

در این مقاله الگوریتمی ارائه می شود که با استفاده از یک ایده کاملاً ساده، نمودار ورونوی را در CA و با احتساب فاصله اقلیدسی تولید می کند. در این الگوریتم هر سلول CA محاسبات ساده ای را انجام داده و نیاز به انجام محاسبات پیچیده و مرتب نمودن فواصل و استفاده از تکنیکهای پیچیده ندارد. از لحاظ حافظه ای نیز هر سلول دارای متغیرهای حافظه ای اندکی بوده و در هر لحظه از زمان فقط به مقادیر حافظه ای خود و همسایگانش نیاز دارد. در ضمن به علت استفاده نمودن الگوریتم از فاصله اقلیدسی، ساختار تولید شده منطبق با واقعیت بوده و در عمل دارای کاربرد فراوان می باشد. این الگوریتم، نمودار ورونوی n نقطه را در یک CA دوبعدی $m \times m$ در O(m) گام زمانی تولید می نماید.

در ادامه در بخش ۲ مفاهیم مبنایی نظیر مدل اتوماتای سلولی و مفهوم عمودمنصف گسسته شرح داده می شود. ایده کلی الگوریتم در بخش ۳ بیان می شود و در بخش ۴ چگونگی انجام این ایده با استفاده از CA دو بعدی با همسایگی von Neumann شرح داده می شود.

۲-مفاهیم مبنایی

در این قسمت مفاهیم لازم برای تشریح الگوریتم ارائه می شود. ابتدا عمود منصف در فضای گسسته را تعریف خواهیم کرد و سپس شرح مختصری در مورد CA بیان می شود.



شکل۱ : نمودار ورونوی

۲-۱- عمود منصف گسسته

همانطور که ذکر شد نقاط روی مرز مشترک چندضلعیهای Vor(s_j,S) و Vor(s_j,S) فاصله شان تا s_i و s_j به یک اندازه است بنابراین روی عمود منصف پاره خط $s_i s_j$ قرار خواهند داشت. با توجه به آنکه در فضای گسسته همواره نمی توان نقاط متساوی الفاصله از دو نقطهٔ s_i و s_j را بدست آورد، لذا برای ارائه الگوریتم تعریف جدیدی از مفهوم عمود منصف در فضای گسسته ارائه خواهد شد.

برای تشریح مفهوم عمود منصف ابتدا ضروری است مفهوم فاصله بین دو نقطه روشن شود. در فضای دو بعدی به ازای عدد حقیقی $1 \le p \le \infty$ فاصله با متریک L_p بین دو نقطه A و B توسط فرمول زیر تعریف می شود:

$$d_p(A,B)=\sqrt[p]{|x_A-x_B|^p+|y_A-y_B|^p}$$

بنابراین طبق تعریف فوق فاصلهٔ اقلیدسی معادل فاصله با متریک L_2 می باشد. در ادامه هرجا سخن از فاصله به میان می آید منظور فاصلهٔ اقلیدسی یا فاصله با متریک L_2 می باشد.

حال با توجه به مفهوم فاصله، عمود منصف پاره خط AB مکان هندسی نقاطی از صفحه می باشد که فاصله آنها از دو نقطه A و B به یک اندازه است. واضح است که در فضای گسسته به علت گسستگی فضا همواره نمی توان نقاطی پیدا کرد که از دو نقطه مفروض به یک فاصله باشند. از این رو لازم است تعریف جدیدی از عمود منصف در فضای گسسته ارائه شود.

تعریف۱ : عمود منصف پاره خط محدود به نقاط A و B در فضای گسسته : مکان هندسی نقاطی از صفحه مانند M است که در رابطه زیر صدق نمایند[1]:

$$|d(A,M) - d(M,B)| \le 1$$

در این جا برای تولید نمودار ورونوی از تعریف جدید عمود منصف استفاده خواهیم نمود.

۲-۲-اتوماتای سلولی (CA)

CA، یک شبکه از سلولهای با حالت معین می باشد. تمامی سلولها در این شبکه دارای مجموعه حالات یکسانی بوده و در هر مرحله گسسته از زمان بصورت موازی حالت خود را تغییر می دهند. تغییرحالت یک سلول بر اساس قانون CA و با توجه به حالت فعلی همسایگان ان سلول انجام می گیرد.

توپولوژی ارتباطی سلولها در این شبکه ساده و بصورت محلی می باشد بدین معنی که هر سلول با سلولهای مجاور خویش در ارتباط است. سلولها در CA می توانند در شبکه ای با هر ابعادی قرار گیرند. دو نوع همسایگی مهم در CA دو بعدی عبارتند از همسایگی Moore و همسایگی von Neumann . در همسایگی Moore برای هر سلول هشت سلول همسایه و در همسایگی von Neumann چهار سلول همسایه در نظر گرفته می شود[9].CA دارای خواصی نظیر توازی، سادگی، ارتباطات محلی و نظم می باشد [9,14]. امروزه CA در زمینه های متعددی از جمله تولید الگوهای تصادفی، نظریه محاسبات، مدلسازی سیستم های فیزیکی و بیولوژیکی و محاسبات کاربردی مورد استفاده قرار گرفته است[2,6,9,12,13,14].

تعریف ارایه شده در زیر که در این مقاله بعنوان تعریف CA در نظر گرفته شده است، اصلاح شده تعریف اتوماتای میلی [6]می باشد.

CA یک ۷تایی به صورت $(Q, d, V, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda)$ می باشد که در آن:

۱- Q مجموعه حالاتی است که هر سلول می تواند اختیار کند.

۲- d ابعاد فضای سلولی را مشخص می نماید. اگر $d = 2$باشد در این صورت یک CA دو بعدی خواهیم داشت.

۳- برای هر سلول x در CA ، آرایه $V(x) = \{x+v_0, x+v_1, L, x+v_k\}$ مشخص کننده k+1 همسایه ای می باشد که بصورت مستقیم با سلول در ارتباطند.

۴- Σ الفبای ورودی CA می باشد.

۵- Δ الفبای خروجی CA می باشد.

۶- δ تابع انتقال است که بفرم $\delta : (Q \times \Sigma^n)^{k+1} \to Q$ می باشد. بر اساس تابع انتقال حالت بعدی هر سلول به حالت و مقادیر حافظه ای ورودی تمامی همسایگان ان سلول در مرحله فعلی بستگی دارد. n تعداد رجیسترهای ورودی و خروجی هر سلول است .

۷- λ رابطه مبدل است که زیر مجموعه متناهی از $(Q \times \Sigma^n)^{k+1} \times \Delta^n$ می باشد . این مبدل مقدار هر حافظه خروجی سلول را با توجه به حالت و مقادیر حافظه ای ورودی همسایگانش مشخص می سازد. در این جا هر سلول CA در همان حافظه هایی می نویسد که از آنها می خواند و در نتیجه $\Delta = \Sigma$ می باشد.

۳-ایده الگوریتم

می‌خواهیم نمودار ورونوی مربوط به مجموعه S شامل n نقطه s_1 تا s_n متعلق به فضای دو بعدی را بدست آوریم. به این منظور از هر یک از نقاط مجموعه S یک موج دایره‌ای شکل و با سرعت یکسان تولید می‌شود. این موجها در نقاطی یکدیگر را قطع خواهند نمود و پس از آن گسترش امواج متقاطع از نقطه تقاطع متوقف شده در حالی که گسترش امواج از نقاط دیگر ادامه می‌یابد. محل تقاطع این امواج تشکیل ساختاری خواهند داد که نشان می‌دهیم نمودار ورونوی نقاط متعلق به مجموعه S است.

این ساختار فضا را به n ناحیه متناظر با هر یک از نقاط s_1 تا s_n تقسیم می کند. به ازای $1 \le i \le n$ ناحیهٔ متناظر با نقطه s_i را$Vor(s_i, S)$ می نامیم. طبق تعریف نمودار ورونوی، برای اثبات این که ساختار فوق نمودار ورونوی است باید ثابت کنیم که به ازای تمام i‌ها $(1 \le i \le n)$، فاصله هر نقطه درون ناحیهٔ $Vor(s_i, S)$تا نقطه s_i کمتر از فاصله آن نقطه تا نقاط دیگر مجموعه S است. اثبات این مطلب نیز بسیار ساده است، زیرا واضح است که ناحیهٔ$Vor(s_i, S)$ توسط موج متناظر با نقطه s_i تولید شده است یعنی موج متناظر با s_i زودتر از بقیه موجها به نقاط درون $Vor(s_i, S)$رسیده است و از آنجا که موجها هم سرعتند می توان نتیجه گرفت که فاصله نقاط درون $Vor(s_i, S)$ تا نقطه s_i کمتر از فاصله این نقاط تا نقاط دیگر مجموعه S است. بنابراین ساختار فوق نمودار ورونوی می باشد.

۴- پیاده سازی الگوریتم توسط CA

در این قسمت نحوه پیاده سازی ایده فوق توسط CA دو بعدی و با همسایگی von Neumann تشریح می شود. به این منظور تعریف چند مفهوم ضروری است:

تعریف۲ : قابل دسترس بودن از مرتبه t نسبت به سلول مفروض :

• تمامی همسایه های سلول A نسبت به سلول A قابل دسترس از مرتبه یک می باشند.

• اگر سلول B قابل دسترس از مرتبه k نسبت به سلول A باشد، تمام همسایه های سلول B نسبت به سلول A قابل دسترس از مرتبه k+1 خواهند بود.

• اگر سلول B قابل دسترس از مرتبه n نسبت به سلول A باشد، آنگاه به ازای تمامی m های بزرگتر از n، سلول B قابل دسترس از مرتبه m نسبت به A نیز خواهد بود.

تعریف۳: دایره گسسته به شعاع r و مرکز A : مجموعه تمام نقاطی از فضای گسسته که فاصله اقلیدسی آنها از نقطه A کوچکتر یا مساوی r باشد.

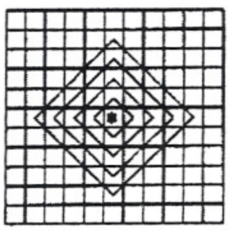
تعریف۴: گسترش دایره ای از سلول A و با سرعت v : فرض کنید هر سلول از CA بتواند یکی از حالتهای mark و unmark را بپذیرد. اگر در وضعیت اولیه، سلول A حالت mark و بقیه سلولها حالت unmark داشته باشند و با استفاده از قانون مناسب بتوان کاری کرد که در زمان t تنها تمامی سلولهای متعلق به دایره گسستهٔ با شعاع vt و مرکز A حالت mark بخود گیرند، آنگاه یک گسترش دایره ای از سلول A و با سرعت v خواهیم داشت. به شعاع دایره گسسته مربوطه در هر گام شعاع گسترش دایره ای می گوییم.

تعریف۵: عضویت در گسترش دایره ای: گوییم سلول B در زمان t عضو گسترش دایره ای از سلول A و با سرعت v است اگر متعلق به دایره گسسته به شعاع vt و مرکز A باشد.

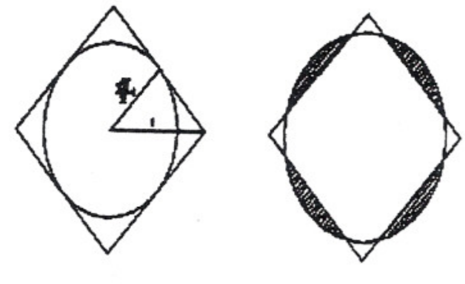
تعریف۶: مجاورت یک سلول نسبت به گسترش دایره ای مفروض: گوییم سلول A مجاور گسترش دایره ای مفروض است اگر سلول A عضو آن گسترش دایره ای نبوده ولی یکی از همسایگانش عضو آن گسترش دایره ای باشد.

بدیهی است که در زمان t، سلولهای غیر قابل دسترس از مرتبه t نسبت به سلول A نباید عضو گسترش دایره ای از سلول A و با سرعت v باشد. این مطلب مستلزم آن است که سرعت v از حد مشخصی فراتر نرود و بنابراین دارای مقدار بیشینه ای است. برای مشخص کردن این مقدار بیشینه می بایست مشخص شود در CA با همسایگی von Neumann چه سلولهایی قابل دسترس از مرتبه t هستند. با کمی تامل در می یابیم که سلولهای قابل دسترس از مرتبه t نسبت به سلول A در داخل یک لوزی به مرکز A قرار می گیرند که اندازه هر دو قطر آن 2t است(شکل ۲). از این پس t امین لوزی از این سری لوزیها را لوزی افزایشی با مرتبه t می نامیم. حال با توجه به اطلاعات فوق می توان مقدار بیشینه سرعت گسترش دایره ای را بدست آورد. از آنجا که در زمان t تمام سلولهای عضو گسترش دایره ای می بایست قابل دسترس از مرتبه t باشند تا بتوان در مدل CA آنها را Mark نمود، بنابراین در زمان t دایره گسسته حاصل از گسترش دایره ای می بایست محاط در لوزی افزایشی مرتبه t باشد(شکل۳- الف). در غیر این صورت تعدادی از سلولهای عضو گسترش دایره ای غیر قابل دسترس خواهند بود و لذا نمی توان آنها را Mark نمود(شکل۳-ب). با استفاده از روابط ساده ریاضی می توان نشان داد که شعاع دایره محاط برابر با $\frac{\sqrt{2}}{2}t$ است. بنابراین سرعت گسترش دایره ای برابر با $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است.

ایده کلی الگوریتم پیشنهادی برای بدست آوردن نمودار ورونوی گسسته با استفاده از CA به شرح زیر است: ابتدا نقاط s_1 تا s_n را بر روی CA نگاشت می کنیم به این صورت که سلولهایی از CA که مختصات آنها متناظر با نقاط مجموعه S بوده را سلول مبدأ نامیده و در وضعیت اولیه حالت تمامی سلولهای مبدأ را Mark(M) می کنیم. حالت سلولهای غیر مبدأ را نیز Unmark(U) می کنیم. متناظر با نقاط s_1 تا s_n به هر یک از سلولهای مبدأ یک id از ۱ تا n اختصاص داده می شود. سپس هر یک از سلولهای مبدأ در اطراف خود یک گسترش دایره ای با سرعت $\frac{\sqrt{2}}{2}$(مقدار بیشینه سرعت) ایجاد می کنند تا زمانی که این گسترشهای دایره ای با یکدیگر برخورد ننموده اند در هر مرحله تمام سلولهای عضو هر گسترش دایره ای دارای حالت M بوده و id متناظر با سلول مبدأ آن گسترش دایره ای را در یافت می کنند(شکل۴). حالت سلولهایی که درون هیچ گسترش دایره ای قرارنگرفته اند همچنان U باقی می ماند.

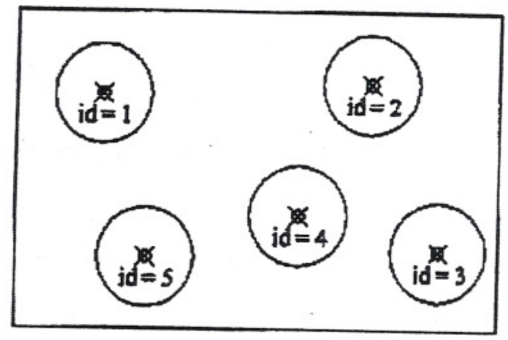


شکل ۲ : دسترس‌پذیری در همسایگی Von Neumann



الف ب

شکل ۳ : الف : تمام سلولهای عضو گسترش دایره‌ای قابل دسترس هستند.ب : سلولهای قسمت هاشورخورده غیر قابل دسترس هستند.



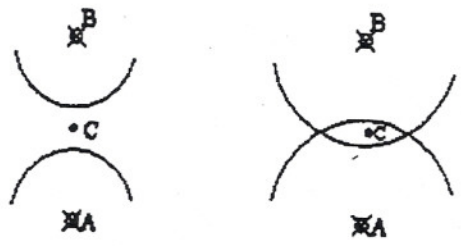
شکل ۴ :گسترشهای دایره‌ای از چند سلول مبدأ.

این گسترشهای دایره ای پس از چندی با یکدیگر برخورد خواهند نمود. محل برخورد گسترشهای دایره ای با رعایت ملاحظاتی تبدیل به مرز می شود(یعنی حالت سلولهای محل برخورد (Boundry(B) می شود). سلولهای با حالتB تا آخر کار B باقی خواهند ماند.

حال ببینیم در تحت چه شرایطی سلول تبدیل به مرز می شود. بدیهی است سلولی که در محل تلاقی دو گسترش دایره ای قرار گرفته در صورتی مجاز است تبدیل به مرز شود که بر روی عمود منصف پاره خط محدود به دو سلول مبدأ متناظر با این گسترشهای دایره ای قرار داشته باشند. در دو وضعیت سلول روی این عمود منصف قرار دارد و تبدیل به مرز می شود:

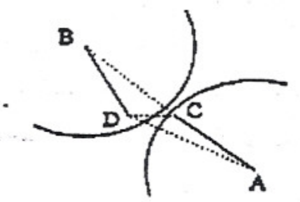
۱ـحالت سلول U باشد ولی در مجاورت دو گسترش دایره ای مختلف قرار داشته باشد(شکل۵ـالف). حال اگر در مرحلهٔ جدید، این سلول عضو هر دو گسترش دایره ای شود(شکل ۵ـب) می توان ثابت نمود که این سلول روی عمود منصف قراردارد و باید مرز شود.

قضیه۱: اگر سلول C مجاور با دو گسترش دایره ای به مرکز سلولهای مبدأ A وB باشد و در مرحله جدید عضو هر دو گسترش دایره ای شود آنگاه سلول C برروی عمودمنصف پاره خط محدود به سلولهای A وB قرار دارد.



الف ب

شکل۵ :الف : سلول C در مجاورت دو گسترش دایره‌ای قرار دارد.ب: هر دو گسترش دایره‌ای سلول C را می‌پوشانند و سلول C مرز می‌شود.



شکل۶ : سلول C بر روی عمود منصف AB قرار دارد.

اثبات: برای اثبات این مطلب کافی است ثابت کنیم اختلاف فاصله این سلول نسبت به دو سلول مبدأ کمتر از یک می باشد.همانطور که در شکل ۸ـالف مشاهده می شود سلول C در مرحله t عضو هیچ کدام از گسترشهای دایره ای نیست و لذا می توان نتیجه گرفت که $d(A,C) > \frac{\sqrt{2}}{2}t$ و $d(B,C) > \frac{\sqrt{2}}{2}t$ و در مرحله t+1 سلول C عضو هر دو گسترش دایره ای می شود و لذا خواهیم داشت $d(A,C) \le \frac{\sqrt{2}}{2}(t+1)$ و $d(B,C) \le \frac{\sqrt{2}}{2}(t+1)$. بنابراین d(A,C) وd(B,C) هر دو در بازهٔ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}t, \frac{\sqrt{2}}{2}(t+1)\right]$ قرار دارند. پس اختلاف این دو حداکثر می تواند $\frac{\sqrt{2}}{2}$ باشد که کمتر از یک است. پس سلول C روی عمود منصف قرار دارد و تبدیل به مرز می شود.

۲- اگر دو سلول همسایه عضو دو گسترش دایره ای مختلف باشند حداقل یکی از آنها بر روی عمود منصف قرار دارد و می بایست مرز شود.

قضیه۲:اگر در مرحلهٔ t سلول C عضو گسترش دایره ای به مرکز سلول مبدأ A باشد و سلول همسایه اش (سلول D) عضو گسترش دایره ای به مرکز سلول مبدأ B باشد و فاصله سلول C تا سلول A بیشتر یا مساوی فاصله سلول D تا سلول B باشد آنگاه

سلول C روی عمود منصف پاره خط محدود به سلولهای A و B قرار دارد.

اثبات: طبق شکل ۶ بنا بر رابطه اضلاع مثلث می توان نوشت :

$$d(B,C) - d(B,D) \le d(C,D) = 1$$

از طرفی طبق فرض قضیه داریم $d(B,D) \le d(A,C)$ و بنابراین داریم:

$$d(B,D) - d(A,C) \le 0$$

با جمع نمودن طرفین نامساویها خواهیم داشت

$$d(B,C) - d(A,C) \le 1$$

حال با توجه به این که $d(B,C) > d(A,C)$ می توان نوشت :

$$|d(B,C) - d(A,C)| \le 1$$

پس سلول C بر روی عمود منصف پاره خط محدود به سلولهای A و B قرار دارد.

بنا به قضیه فوق اگر دو سلول همسایه عضو دو گسترش دایره ای مختلف باشند در گام بعد آن که فاصله اش نسبت به سلول مبدأ متناظرش بیشتر است تبدیل به مرز می شود.

۴-۱- پیاده سازی مفهوم گسترش دایره ای توسط CA

در این قسمت نحوه پیاده سازی مفهوم گسترش دایره ای در CA دو بعدی با همسایگی von Neumann شرح داده می شود. برای این منظور در وضعیت اولیه سلول مبدأ حالت خود را به تمام همسایه های خود که دارای حالت U هستند، منتقل می کند. این همسایه ها به نوبه خود امتحان می کنند که آیا در مرحله جدید گسترش دایره ای با شعاع بزرگتر ($\frac{\sqrt{2}}{2}$) آنها را می پوشاند یا خیر. در صورت مثبت بودن جواب، حالت جدید سلول قرار گرفته در گسترش دایره ای M شده و در غیر این صورت حالت سلول بدون تغییر باقی خواهد ماند. در گام بعد با افزایش زمان شعاع گسترش دایره ای افزایش یافته و همسایه های M شده در گام قبلی در مورد همسایه های U خود (همسایه های با حالت U)عملی مشابه را انجام داده و این عمل تا نیل به نتیجه نهایی تکرار می شود.

پیشنهاد فوق برای پیاده سازی گسترش دایره ای در نگاه اول صحیح به نظر می رسد، لیکن با دقت بیشتر می توان اشکالاتی را در آن مشاهده نمود. اشکال این روش از آنجا ناشی می شود که هر چند روش فوق این نکته راتضمین می نماید که تمام سلولهای مارک شده در هر مرحله حتماً عضو گسترش دایره ای باشند ولی هیچ تضمینی وجود ندارد که تمام سلولهای درون گسترش دایره ای مارک شوند.

برای رفع این مشکل به حالتهای هر سلول علاوه بر M،U و B یک حالت دیگر نیز بنام Virtual Mark(V) اضافه می کنیم. حال سلولهای با حالت U که در همسایگی یک سلول با حالت M قرار دارند ولی در عضویت هیچ گسترش دایره ای قرار نمی گیرند حالت خود را از U به V تغییر می دهند. به این ترتیب در سناریوی جدید در گام اول چهار همسایه سلول مبدأ دارای حالت Vمی شوند. نقش سلولهای V به این صورت است که این سلولها در حقیقت توسط گسترش دایره ای پوشانده نشده اند و بنابراین مارک نمی باشند ولی برای همسایگان خویش نقش یک سلول مارک شده را بازی می کنند. در حقیقت سلولهای V برای خودشان بمنزله سلول U عمل می کنند ولی نزد همسایگانشان بعنوان سلول M عمل می کنند.

۴-۲- عضویت در گسترش دایره ای

حال باید دید که هر سلول چگونه می فهمد که در یک زمان خاص عضو گسترش دایره ای هست یا نه. برای انجام این کار کافیست هر سلول از دو چیز مطلع باشد یکی شعاع فعلی گسترش دایره ای و دیگری فاصله عمودی و افقی خودش از سلول مبدأ گسترش دایره ای. برای اطلاع از شعاع گسترش دایره ای، یک متغیر حافظه ای بنام Step برای تمام سلولها در نظر گرفته می شود. مقدار این متغیر در وضعیت اولیه CA برابر صفر بوده و در هر گام زمانی یک واحد به آن اضافه می شود. شعاع گسترش دایره ای در هر گام برابر با $\frac{\sqrt{2}}{2} \times \text{Step}$ خواهد بود.

۴-۳- ساختار هر سلول

با توجه به توضیحات فوق هر سلول دارای متغیرهای حافظه ای به شرح زیر می باشد:

• state : مقدار این حافظه می تواند یکی از مقادیر زیر باشد که حالت هر سلول را مشخص می کند.

• U(Unmark): سلولهایی که در هیچ گسترش دایره ای قرار ندارند.

• M(Mark): سلولهایی که در یک گسترش دایره ای قرار دارند.

• V(Virtualmark): سلولهایی که برای خود نقش U و برای سلولهای همسایه نقش M را ایفا می کنند.

• B(Boundry) : سلولهای مرزی (سلولهایی که در محل تقاطع دو گسترش دایره ای قرار دارند.)

• id : مقدار این حافظه متمایز کننده گسترشهای دایره ای مختلف می باشد. تمام سلولهای با حالت M یا V مربوط به یک گسترش دایره ای دارای یک id یکسان هستند. این id برابر با id سلول مبدأ گسترش دایره ای می باشد. سلول مبدأ در وضعیت اولیه id خود را دریافت می کند. مقدار id برای سلولهای با حالت U و B بی اهمیت است.

• step : مقدار این حافظه گام زمانی فعلی را مشخص می سازد. شعاع گسترش دایره ای در هر گام توسط این حافظه قابل محاسبه است. در مورد تمامی سلولها مقدار این حافظه در وضعیت اولیه برابر صفر بوده و در هر گام زمانی یک واحد به آن اضافه می شود.

• x,y : این حافظه ها مختصات سلول را در فضای گسسته مشخص می کنند. مقدار این حافظه ها در وضعیت اولیه برابر مختصات هر سلول بوده و در گامهای بعد بدون تغییر باقی می ماند.

• x_s, y_s : این حافظه ها مختصات سلول مبدأ هر گسترش دایره ای را مشخص می کنند. تمام سلولهای با حالت M یا V مربوط به یک گسترش دایره ای دارای x_s, y_s یکسان می باشند که برابر با مختصات سلول مبدأ متناظر با آن گسترش دایره ای است. مقدار این حافظه برای سلولهای با حالت U و B بی اهمیت است.

۴-۴- وضعیت اولیه CA

در وضعیت اولیه دو حالت برای هر سلول متصور است. یکی سلولهایی که متناظر با یکی از نقاط s_1 تا s_n هستند که به این سلولها، سلولهای مبدأ گفته می شود و دیگری سلولهای غیر مبدأ. سلولهای مبدأ همگی حالت M را دارا بوده و x_s, y_s در این سلولها برابر مختصات سلول می باشد. همچنین به ازای تمام i ها از یک تا n ، سلول مبدأ متناظر با p_i دارای id برابر با i می باشد.

بقیه سلولها حالت U را خواهند داشت و مقدار id, x_s, y_s برای آنها بی اهمیت است. در وضعیت اولیه برای تمامی سلولها اعم از مبدأ و غیر مبدأ مقدار x,y برابر مختصات آن سلولها بوده و همچنین مقدار Step نیز برای تمامی سلولها برابر صفر است.

۴-۵- وضعیت نهایی CA

پس از اتمام الگوریتم وضعیت نهایی بدین صورت است که تمام سلولها یا حالت M را خواهند داشت و یا حالت B . سلولهایی که حالت B دارند تشکیل نمودار ورونوی مربوط به نقاط مبدأ اولیه را خواهند داد.

۴-۶- قوانین CA

در این قسمت با توجه به توضیحات داده شده، قوانین مورد استفاده توسط هر سلول برای تولید نمودار ورونوی بیان می شود. به منظور قابل فهم بودن قوانین ابتدا مفاهیمی چند تعریف می شوند.

تعریف۷ : گسترش دایره ای iام : همان طور که گفته شد تمام سلولهای متعلق به یک گسترش دایره ای دارای id, x_s, y_s یکسان می باشند. گسترش دایره ای که سلولهایش دارای id = i می باشند راگسترش دایره ای iام می نامیم. مقدار x_s, y_s مربوطه را نیز مختصات مرکز گسترش دایره ای iام می نامیم.

تعریف۸ : مجاورت گسترش دایره ای iام با سلول A : گسترش دایره ای iام مجاور سلول A می باشد اگر حالت سلول U یا V باشد وحداقل یک سلول M یا V با id = i در همسایگی سلول A قرار داشته باشد.

حال با توجه به تعاریف ارائه شده می توان قوانین CA مورد نظر را بشرح زیر بیان نمود:

- در مورد سلولهای با حالت U یا V یکی از وضعیتهای زیر متصور است :
  - اگر تمام همسایگان سلول دارای حالت U باشند، آنگاه حالت سلول تغییر نمی کند.
  - اگر سلول در مجاورت حداقل یک گسترش دایره ای قرار داشته باشد و در گام جدید به عضویت هیچ کدام از گسترشهای دایره ای مجاور در نیاید، وضعیتهای زیر را خواهیم داشت:
    - سلول حداقل یک همسایه با حالت M داشته باشد، در این صورت حالت سلول V شده و به دلخواه مقادیر id, x_s, y_s مربوط به یکی از گسترشهای دایره ای مجاور را به خود می گیرد.
    - هیچ کدام از همسایه های سلول M نباشند، در این صورت حالت سلول تغییر نمی کند.

اگر سلول در مجاورت حداقل یک گسترش دایره ای قرار داشته باشد و در گام جدید تنها عضو یکی از گسترشهای دایره ای

مجاور شود، آنگاه سلول دارای حالت M شده و مقادیر id, x_s, y_s مربوط به آن گسترش دایره ای را بخود می گیرد.

- اگر سلول در مجاورت حداقل دو گسترش دایره ای قرار داشته باشد و در مرحله جدید عضو حداقل دو گسترش دایره ای مجاور شود، سلول دارای حالت B می شود.
- در مورد سلولهای با حالت M یکی از وضعیتهای زیر متصور است:
- اگر سلول در مجاورت هیچ گسترش دایره ای دیگری قرار نداشته باشد، حالت سلول بدون تغییر باقی می ماند.
- اگر سلول در همسایگی یک سلول دارای حالت M عضو یک گسترش دایره ای دیگر قرار داشته باشد، آنگاه با استفاده از مقادیر x, y, x_s, y_s مربوط به خود و همسایه اش، امتحان می کند که آیا فاصله اش تا سلول مبدأ متناظرش بیشتر یا مساوی فاصله سلول همسایه تا سلول مبدأ متناظر با سلول همسایه هست یا نه. در صورت مثبت بودن جواب حالت سلول B شده و در غیر این صورت سلول بدون تغییر باقی می ماند.
- اگر سلول در مجاورت بیش از یک گسترش دایره ای دیگر قرار بگیرد، در صورتی که قانون قبل در مورد یکی از گسترشهای دایره ای مجاور صدق نماید حالت سلول B شده و در غیر این صورت سلول بدون تغییر باقی می ماند.
- سلولهای با حالت B بدون تغییر باقی می مانند.
-

۴-۷-پیچیدگی الگوریتم

بدترین حالت الگوریتم از نظر زمانی حالتی است که تنها یک سلول مبدأ در یکی از گوشه های CA قرار داشته باشد. همانطور که ذکر شود الگوریتم زمانی به پایان می رسد که هیچ سلول با حالت U یا V در CA وجود نداشته باشد. بنابراین زمان اتمام الگوریتم در این حالت وقتی می باشد که گسترش دایره ای تمام قطر CA را بپوشاند. از آنجا که طول قطر CA با احتساب فاصله اقلیدسی برابر با $\sqrt{2}m$ و سرعت گسترش دایره ای برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ می باشد، 2m گام زمانی طول خواهد کشید تا هیچ سلول U یا V در CA باقی نماند و لذا پیچیدگی زمانی الگوریتم از O(m) می باشد. در نتیجه الگوریتم مورد نظر با استفاده از یک CA دوبعدی $m \times m$ در O(m) گام نمودار ورونوی n نقطه را بر حسب متریک L_2 تولید می نماید.

۵- نتیجه گیری

در این مقاله الگوریتمی برای تولید نمودار ورونوی بر حسب فاصله اقلیدسی و بر مبنای مدل محاسباتی CA ارائه شد. الگوریتم فوق ساده بوده و مدل مورد استفاده(CA) نیز موازی، محلی و منظم می باشد.. الگوریتم مورد نظر با استفاده از یک CA دوبعدی $m \times m$ با همسایگی von Neumann در O(m) گام نمودار ورونوی n نقطه را تولید می کند.

۶-مراجع

[1] A. I. Adamatzky, "*Voronoi-Like Partition of Lattice in Cellular Automata*," Mathematical and Computer Modeling, Vol. 23, No. 4, pp. 51-66, 1996.

[2] W. Burks, *Essays on Cellular Automata*, Urbana, IL: University of Illinois Press, 1970.

[3] B. Chazelle, "*Computational Geometry on a Systolic Chip*," IEEE Transaction on Computers, C-33, pp. 774-785, 1984.

[4]. Edelsbrunner, *Algorithms in Computational Geometry*, Springer-Verlag, 1987.

[5] S. Fortune, "*A Sweepline Algorithm for Voronoi Diagrams*," Algorithmica, Vol. 2, pp. 153-174, 1987.

[6] L. Gordillo, and V. Luna, "*Parallel Sort on a Linear Array of Cellular Automata*, " IEEE Transaction on Computers, pp. 1904-1910, 1994.

[7] C. S. Jeong, and D.T. Lee, "*Parallel Geometric Algorithms on a Mesh-Connected Computers*," Algorithmica, Vol. 5, pp. 155-177, 1990.

[8] R. Klein, "*Abstract Voronoi Diagrams and Their Applications*," Computational Geometry and its Applications(CG'88), Wurzburg, pp. 148-157, 1988.

[9] N. Packard, "*Two-Dimensional Cellular Automata*," Journal of Statistical Physics, Vol.30, pp. 901-942, 1985.

[10] F. P. Preparata, and M. I. Shamos, *Computational Geometry*: An Introduction, Springer-Verlag, 1985.

[11] P. Tzionas, P. Tsalides, and A. Thanailakis, "*A New Cellular Automaton-Based, Nearest Neighbor Pattern Classifier and Its VLSI Implementation*," IEEE Transaction on VLSI Systems, Vol. 2, No. 3, 1994.

[12] S. Wolfram, "*Statistical Mechanics of Cellular Automata*," Review of Modern Physics, Vol. 55, pp. 601-644, 1983.

[13] S. Wolfram, "*Computation Theory of Cellular Automata*," Commmication in Mathematical Physics, Vol. 96, pp. 15-57, 1984.

[14] S. Wolfram, *Theory and Applications of Cellular Automata*, Singapore: World Scientific, 1986.