

## $p-l-k$ 重ドーナツグラフの格子直線描画

佐野 由人<sup>†1</sup> 三浦 一之<sup>†1</sup>

平面グラフ  $G$  の各点が整数格子の格子点上に配置され、 $G$  の各辺が互いに交差しない直線分として描かれる描画を  $G$  の格子直線描画という。任意の平面グラフ  $G$  は  $(n-2) \times (n-2)$  の大きさの整数格子内に格子直線描画できることが知られている<sup>3)</sup>Sch90。ここで  $n$  は  $G$  の点数である。一方、入力グラフにある種の制約があるならば、より小さな面積の格子内に格子直線描画できることが予想される。本論文では、まず 4 連結  $p-l-k$  重ドーナツグラフ  $G$  の定義を与える。さらに、4 連結  $p-l-k$  重ドーナツグラフ  $G$  は、 $\{\lceil \frac{(l-2)n}{4(l+k-5)} \rceil + 2(k-2)\} \times (2k-1)$ 、すなわち  $O(n)$  の面積の整数格子内に格子直線描画かつ格子凸描画できることを示すとともに、そのような描画を求める線形時間アルゴリズムを与える。また、5 連結  $p-l-k$  重ドーナツグラフ  $G$  の定義を与える。さらに、5 連結  $p-l-k$  重ドーナツグラフ  $G$  は、 $\{\lceil \frac{(l-2)n}{2(2l+k-7)} \rceil + 2(k-3)\} \times (2k-1)$  の面積の整数格子内に格子直線描画できることを示すとともに、そのような描画を求める線形時間アルゴリズムを与える。

## Straight-Line Grid Drawings of $p-l-k$ Doughnut Graphs

YUITO SANO<sup>†1</sup> and KAZUYUKI MIURA<sup>†1</sup>

A straight-line grid drawing of a plane graph  $G$  is a drawing of  $G$  on the plane so that all vertices of  $G$  are put on plane grid points and all edges are drawn as straight line segments between their endpoints without edge-intersection. It is known that every plane graph  $G$  has a straight-line grid drawing on an  $(n-2) \times (n-2)$  grid if  $G$  has  $n$  vertices. On the other hands, a restricted class of graphs may have a more compact straight-line grid drawing. In this paper, we define a “four-connected  $p-l-k$  doughnut graph” and give a linear-time algorithm to find a straight-line grid drawing of the four-connected  $p-l-k$  doughnut graph on a  $\{\lceil \frac{(l-2)n}{4(l+k-5)} \rceil + 2(k-2)\} \times (2k-1)$  grid, that is  $O(n)$ . Furthermore, we define a “five-connected  $p-l-k$  doughnut graph” and give a linear-time algorithm to find a straight-line grid drawing of the five-connected  $p-l-k$  doughnut graph on a  $\{\lceil \frac{(l-2)n}{2(2l+k-7)} \rceil + 2(k-3)\} \times (2k-1)$  grid, that is  $O(n)$ .

### 1. 序 論

いくつかの点とそれらを結ぶ辺の集合をグラフといい、そのグラフを可視化したものをグラフ描画という。グラフ描画は、その幅広い応用性から、近年人々の強い関心を集めており、与えられたグラフをよりきれいに見やすく描画する問題であるグラフ描画問題に関して、様々な研究がなされている。本研究では、グラフ描画の分野で広く研究されている格子直線描画を扱う。

グラフは目的や用途に合わせて適切な大きさに描画することが求められる。特に与えられたグラフ  $G$  を可能な限り小さく描画する問題は、理論的にも応用的にも極めて興味深く、多数の研究が行われている。本研究では、 $O(n)$  の面積で描画可能なグラフクラスの拡張を目的とする。本論文ではグラフ  $G$  の点の数を  $n$  で表す。また、大きさ  $W \times H$  の整数格子は  $W+1$  本の垂直線分と  $H+1$  本の水平線分およびそれらの交点からなり、その外周は矩形であるとする。 $W$  は整数格子の幅、 $H$  は高さと呼ばれる。

$G$  の点数を  $n$  とし、 $n$  は 3 以上とする。全ての平面グラフ  $G$  は直線描画を持つことが知られている<sup>2)6)7)</sup>。また、 $n \geq 3$  の頂点の全ての平面グラフは、 $(n-2) \times (n-2)$  の大きさの整数格子上に格子直線描画できることが知られている<sup>3)5)</sup>。さらに、 $n \geq 3$  なる平面グラフで、格子直線描画するために、少なくとも  $\lceil \frac{2(n-1)}{3} \rceil \times \lceil \frac{2(n-1)}{3} \rceil$  の大きさの整数格子が必要なものが存在することが知られている<sup>1)3)</sup>。このように、一般的な平面グラフの格子直線描画には、少なくとも  $\Omega(n^2)$  の面積の格子が必要となるが、グラフの制限をより厳しくすることによって、必要な整数格子の面積はより小さくて済むと予想される。例えば、5 連結  $p$ -ドーナツグラフは、 $\{(n/4)+1\} \times 5$  の大きさの整数格子内に格子直線描画でき<sup>4)</sup>、そのドーナツグラフを一般化した 5 連結  $p-k$  重ドーナツグラフは、 $\{n/(2k-2)+(2k-5)\} \times (2k-1)$  の大きさの整数格子内に格子直線描画できことが知られている<sup>8)</sup>。 $k$  は定数とみなせるので、描画に必要な面積は  $O(n)$  である<sup>8)</sup>。また、5 連結  $p-k$  重ドーナツグラフをさらに拡張した 5 連結  $p-l-k$  重ドーナツグラフは、 $l=5, 6, 7$  のとき、 $O(n)$  の面積で格子直線描画できことが知られている<sup>9)</sup>。さらに、5 連結  $p-k$  重ドーナツグラフを 4 連結に拡張した 4 連結  $p-k$  重ドーナツグラフと、4 連結  $p-k$  重ドーナツグラフを拡張した 4 連結  $p-l-k$  重ドーナツグラフの  $l=5, 6, 7$  のときもまた、 $O(n)$  の面積で格子直線描画できことが知られ

<sup>†1</sup> 福島大学 理工学群 共生システム理工学類  
Faculty of Symbiotic Systems Science, Fukushima University

ている<sup>8)10)</sup>.しかし,  $l \geq 8$ なる5連結  $p-l-k$ 重ドーナツグラフと4連結  $p-l-k$ 重ドーナツグラフが  $O(n)$ の面積で格子直線描画できるかは知られていない.

本論文では, 4連結  $p-l-k$ 重ドーナツグラフと, 5連結  $p-l-k$ 重ドーナツグラフの一般的な定義を与えるとともに,  $l$ と  $k$ の拡張方法を与える.さらに, それぞれのドーナツグラフが  $O(n)$ の面積で格子直線描画できることを示すとともに, そのような描画を求める線形時間アルゴリズムを与える.本論文の結果は,  $O(n)$ の面積で格子直線描画できるグラフのクラスを拡張したものである.

本論文の構成は以下の通りである.第2節では用語の定義と説明を行う.第3節では4連結  $p-l-k$ 重ドーナツグラフの定義を与えるとともに,  $l$ と  $k$ の拡張方法および描画アルゴリズムの説明を行う.第4節では5連結  $p-l-k$ 重ドーナツグラフの定義を与えるとともに,  $l$ と  $k$ の拡張方法および描画アルゴリズムの説明を行う.第5節は結論である.

## 2. 準備

本節では, 本論文で扱う様々な用語の定義を与えるとともに, いくつかの既知の補題を与える.

グラフ  $G = (V, E)$  は, いくつかの点の集合  $V$  と, それらを結ぶ辺の集合  $E$  から構成される.また, グラフ描画とは与えられたグラフを可視化したものである.図??(a)にグラフの例を示す.  $G$  の点数を  $n$  とし, 辺数を  $m$  とする. グラフ  $G$  は多重辺や自己ループのない単純グラフであり, しかも連結であるとする.各辺が互いに交差しないように平面に描画したグラフを平面グラフという. グラフ  $G$  の任意の  $k-1$  点を取り除いてできるグラフが連結であるとき,  $G$  は  $k$ 連結であるといふ.点  $v$  に接続する辺の本数を  $v$ の次数といい,  $d(v)$  と書く.全ての点が外面上にあるグラフを1-外平面グラフといふ.  $k$ -外平面グラフとは外面上の点を全て取り除くと  $k-1$ -外平面グラフとなるグラフである.  $G = G_k$  を  $k$ -外平面グラフとし,  $G_k$  の外面上の点を全て取り除いてできる  $k-1$ -外平面グラフを  $G_{k-1}$  と書く.  $1 \leq i \leq k$ なる各  $i$ に対して  $G_i$  が2連結であるならば,  $G_k$ を2連結  $k$ -外平面グラフといふ.点  $v$ の座標を  $P(v)$ と書く.また, 平面グラフ  $G$ の描画で, 各点が格子点上に配置され, 各辺が交差のない直線分で描かれた描画を  $G$ の格子直線描画といふ.

### 2.1 $p$ -3重ドーナツグラフ

本節では,<sup>4)</sup>で与えられている  $p$ -3重ドーナツグラフの定義を与える.

$p$ を4以上の整数とし,  $G$ を5連結平面グラフとする.  $G$ が以下の条件(d1)-(d4)を満足するとき,  $G$ を  $p$ -3重ドーナツグラフといふ.

- (d1) 頂点の数が  $p$ 個の互いに素な面をちょうど2つ持ち, 残りの面は全て三角形である.
- (d2)  $n = 4p$ である.
- (d3)  $G$ の全ての点  $v$ に対して  $d(v)=5$ である.
- (d4)  $G$ は3-外平面グラフである.

図1(a)に  $p$ -3重ドーナツグラフ ( $p=4$ )の例を示す.以下の補題が知られている.

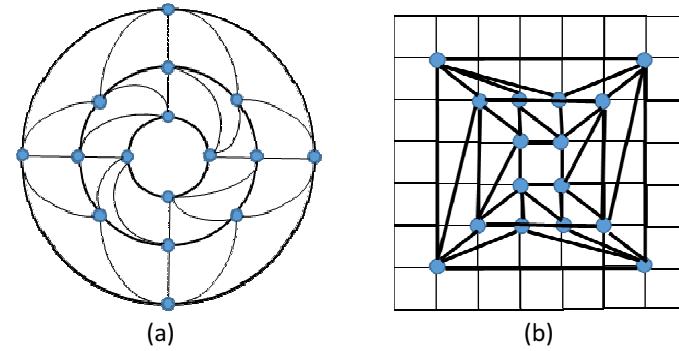


図1 (a)  $p$ -3重ドーナツグラフ  $G(p=4)$ , (b)  $G$ の格子直線描画.

補題2.1<sup>4)</sup>  $G$ を  $p$ -3重ドーナツグラフとする.このとき  $G$ は  $((n/4)+1) \times 5$ の大きさの整数格子内に格子直線描画できる(図1(b)参照.).

### 2.2 4連結 $p-k$ 重ドーナツグラフ

本節では,<sup>8)</sup>で与えられている4連結  $p-k$ 重ドーナツグラフの定義を与える.

$p$ を4以上の整数とし,  $k$ を2以上の整数とし,  $G$ を4連結平面グラフとする.  $G$ が以下の条件( $d_k^4-1$ および $(d_k^4-2)$ )を満足するとき,  $G$ を4連結  $p-k$ 重ドーナツグラフといふ.  
( $d_k^4-1$ )  $G$ は, それぞれが  $p$ 角形である点素な面を2つもち, 3角形の面を  $2p$ 個もつ.更

に残りの面は全て4角形である。

- ( $d_k^4$ -2)  $G$  は、( $d_k^4$ -1) の条件を満足する最少の点数をもつグラフである。  
 また、 $G$  が4連結  $p$ - $k$  重ドーナツグラフであるならば、以下の3つの性質 ( $p_k^4$ -1), ( $p_k^4$ -2)  
 および ( $p_k^4$ -3) を満足する。  
 ( $p_k^4$ -1)  $n = 2(k-1)p$  である。  
 ( $p_k^4$ -2)  $G$  の全ての点  $v$  に対して  $d(v)=4$  である。  
 ( $p_k^4$ -3)  $G$  は2連結  $k$ -外平面グラフである。

図2(a)に4連結  $p$ - $k$  重ドーナツグラフ  $G$  と  $G$  の例を示す。以下の補題が知られている。

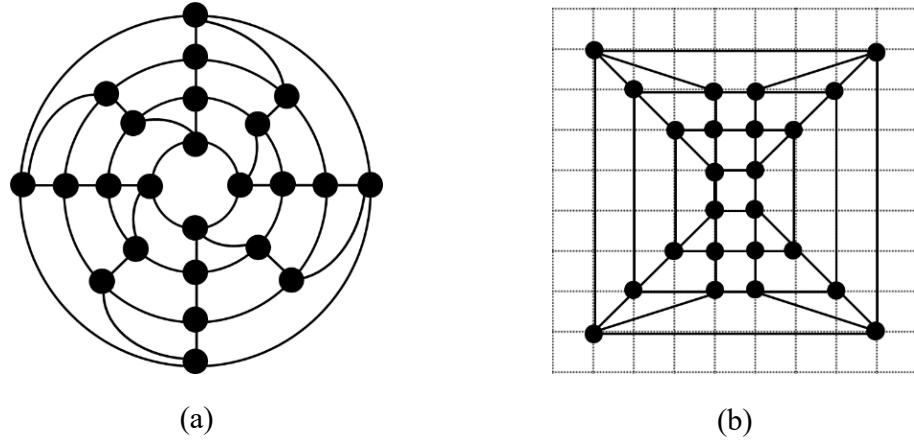


図2 (a) 4連結  $p$ - $k$  重ドーナツグラフ  $G(p=4, k=4)$ , (b)  $G$  の格子直線描画。

**補題 2.2**<sup>8)</sup>  $G$  を4連結  $p$ - $k$  重ドーナツグラフとする。このとき  $G$  は  $\{(n/(2k-2)) + 2k - 5\} \times (2k-1)$  の大きさの整数格子内に格子直線描画できる(図2(b)参照。)。

### 2.3 5連結 $p$ - $k$ 重ドーナツグラフ

本節では、<sup>8)</sup> で与えられている5連結  $p$ - $k$  重ドーナツグラフの定義を与える。

$p$  を4以上の整数とし、 $k$  を3以上の整数とし、 $G$  を5連結平面グラフとする。 $G$  が以下の条件 ( $d_k$ -1) および ( $d_k$ -2) を満足するとき、 $G$  を5連結  $p$ - $k$  重ドーナツグラフという。

- ( $d_k$ -1) 頂点の数が  $p$  個の互いに素な面をちょうど2つ持ち、頂点の数が4個の面をちょうど  $(k-3)p$  個持ち、残りの面は全て三角形である。

( $d_k$ -2)  $G$  は、( $d_k$ -1) の条件を満足する最少の点数を持つグラフである。

また、 $G$  が5連結  $p$ - $k$  重ドーナツグラフであるならば、以下の3つの性質 ( $p_k$ -1), ( $p_k$ -2)  
 および ( $p_k$ -3) を満足する。

( $p_k$ -1)  $n = 2(k-1)p$  である。

( $p_k$ -2)  $G$  の全ての点  $v$  に対して  $d(v)=5$  である。

( $p_k$ -3)  $G$  は2連結  $k$ -外平面グラフである。

図3(a)に5連結  $p$ - $k$  重ドーナツグラフ ( $p=4, k=6$ ) の例を示す。以下の補題が知られている。

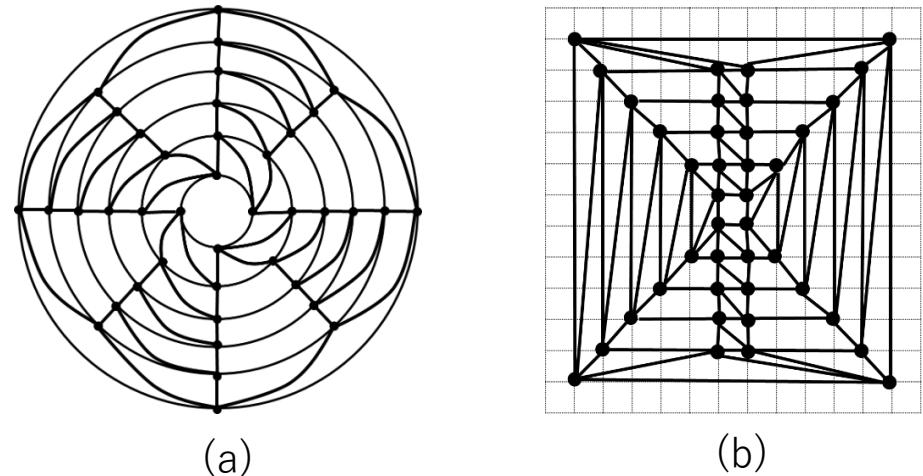


図3 (a) 5連結  $p$ - $k$  重ドーナツグラフ  $G(p=4, k=6)$ , (b)  $G$  の格子直線描画。

**補題 2.3**<sup>8)</sup>  $G$  を5連結  $p$ - $k$  重ドーナツグラフとする。このとき  $G$  は  $\{n/(2k-2) + (2k-5)\} \times (2k-1)$  の大きさの整数格子内に格子直線描画できる(図3(b)参照。)。

### 2.4 4連結 $p$ - $l$ - $k$ 重ドーナツグラフ ( $l=5, 6, 7$ )<sup>10)</sup>

本節では、<sup>10)</sup> で与えられている4連結  $p$ - $l$ - $k$  重ドーナツグラフの定義を与える。ここで、 $l$  は  $p$  頂点の面を除いた面の中で頂点の数が最大のものの頂点数を指す。

$p$  を4以上の整数とし、 $k$  を3以上の整数とし、 $G$  を4連結平面グラフとする。 $G$  が以下の条件 ( $d_l^4$ -1) および ( $d_l^4$ -2) を満足するならば、 $G$  を4連結  $p$ - $l$ - $k$  重ドーナツグラフという。

( $d_l^4$ -1)  $G$  は、それぞれが  $p$  角形である点素な面を 2 つもち、 $l$  角形の面をもち、残りの面は 3 角形、4 角形、…、 $l-1$  角形のいずれかである。

( $d_l^4$ -2)  $G$  は、( $d_l^4$ -1) の条件を満足する最少の点数をもつグラフである。

また、 $G$  が 4 連結  $p-l-k$  重ドーナツグラフであるならば、以下の性質 ( $p_l^4$ -1) および ( $p_l^4$ -2) を満足する。

( $p_l^4$ -1)  $G$  の全ての点  $v$  に対して  $d(v)=4$  である。

( $p_l^4$ -2)  $G$  は 2 連結  $k$ -外平面グラフである。

図 4(a) に 4 連結  $p-l-k$  重ドーナツグラフ  $G$  の例を示す。以下の補題が知られている。

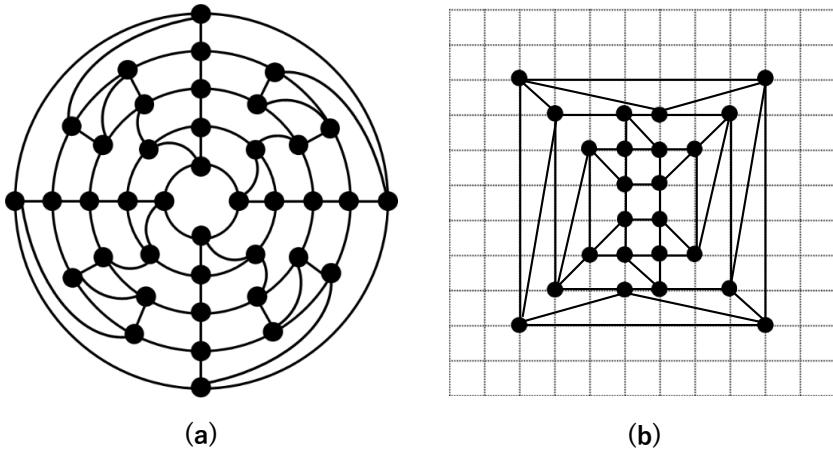


図 4 (a) 4 連結  $p-l-k$  重ドーナツグラフ  $G(p=4, l=5, k=5)$ , (b)  $G$  の格子直線描画。

補題 2.4<sup>10)</sup>  $G$  を 4 連結  $p-5-k$  重ドーナツグラフとする。このとき  $G$  は  $\{(n/(2k-2)) + (2k-5)\} \times (2k-1)$  の大きさの整数格子内に格子直線描画できる(図 4(b) 参照)。

補題 2.5<sup>10)</sup>  $G$  を 4 連結  $p-6-k$  重ドーナツグラフとする。このとき  $G$  は  $\{(n/2k) + (2k-5)\} \times (2k-1)$  の大きさの整数格子内に格子直線描画できる。

補題 2.6<sup>10)</sup>  $G$  を 4 連結  $p-7-k$  重ドーナツグラフとする。このとき  $G$  は、 $\{(n/(2k+2)) + (2k-5)\} \times (2k-1)$  の大きさの整数格子内に格子直線描画できる。

## 2.5 5 連結 $p-l-k$ 重ドーナツグラフ ( $l=5, 6, 7$ )<sup>9)</sup>

本節では、<sup>9)</sup> で与えられている 5 連結  $p-l-k$  重ドーナツグラフの定義を与える。ここで、 $l$

は  $p$  頂点の面を除いた面の中で頂点の数が最大のものの頂点数を指す。

$p$  を 4 以上の整数とし、 $k$  を 3 以上の整数とし、 $G$  を 5 連結平面グラフとする。 $G$  が以下の条件 ( $d_l^5$ -1) および ( $d_l^5$ -2) を満足するならば、 $G$  を 5 連結  $p-l-k$  重ドーナツグラフという。

( $d_l^5$ -1)  $G$  は、それぞれが  $p$  角形である点素な面を 2 つもち、 $l$  角形の面をもち、残りの面は 3 角形、4 角形、…、 $p-1$  角形のいずれかである。

( $d_l^5$ -2)  $G$  は、( $d_l^5$ -1) の条件を満足する最少の点数をもつグラフである。

また、 $G$  が 5 連結  $p-l-k$  重ドーナツグラフであるならば、以下の性質 ( $p_l^5$ -1) および ( $p_l^5$ -2) を満足する。

( $p_l^5$ -1)  $G$  の全ての点  $v$  に対して  $d(v)=5$  である。

( $p_l^5$ -2)  $G$  は 2 連結  $k$ -外平面グラフである。

図 5(a) に 5 連結  $p-l-k$  重ドーナツグラフ  $G$  の例を示す。以下の補題が知られている。

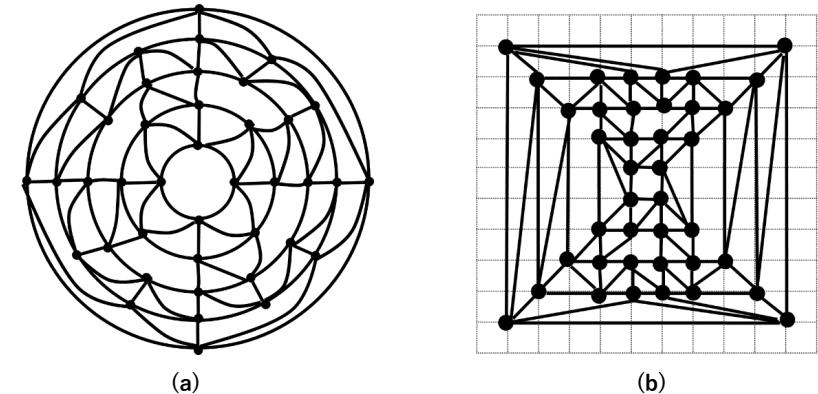


図 5 (a) 5 連結  $p-l-k$  重ドーナツグラフ  $G(p=4, l=5, k=5)$ , (b)  $G$  の格子直線描画。

補題 2.7<sup>9)</sup>  $G$  を 5 連結  $p-5-k$  重ドーナツグラフとする。このとき  $G$  は  $(\lceil \frac{3n}{4k} \rceil + 3) \times (2k-1)$  の大きさの整数格子内に格子直線描画できる(図 5(b) 参照)。

補題 2.8<sup>9)</sup>  $G$  を 5 連結  $p-6-k$  重ドーナツグラフとする。このとき  $G$  は  $(\lceil \frac{3n}{4(k+1)} \rceil + 7) \times (2k-1)$  の大きさの整数格子内に格子直線描画できる。

補題 2.9<sup>9)</sup>  $G$  を 5 連結  $p-7-k$  重ドーナツグラフとする。このとき  $G$  は、 $p \leq 10$  のとき

$(\lceil \frac{3n}{4(k+4)} \rceil + 13) \times (2k - 1)$ ,  $11 \leq p$  のとき  $(\lceil \frac{5n}{4(k+4)} \rceil + 3) \times (2k - 1)$  の大きさの整数格子内に格子直線描画できる。

### 3. 4 連結 $p-l-k$ 重ドーナツグラフ

本節では,<sup>10)</sup> で与えられている 4 連結  $p-l-k$  重ドーナツグラフとは異なる 4 連結  $p-l-k$  重ドーナツグラフの定義を与えるとともに、描画アルゴリズムについても説明する。ここで、 $l$  は  $p$  頂点の面を除いた面の中で頂点の数が最大のものの頂点数を指す。まず、3.1 節において 4 連結  $p-l-k$  重ドーナツグラフの定義を与える。次に、3.2 節において 4 連結  $p-l-k$  重ドーナツグラフの構成法を与える。最後に 3.3 節において 4 連結  $p-l-k$  重ドーナツグラフの格子直線描画を求める線形時間アルゴリズムを与える。

#### 3.1 4 連結 $p-l-k$ 重ドーナツグラフ

本節では、4 連結  $p-l-k$  重ドーナツグラフの定義を与える。 $p$ ,  $k$  を 4 以上の整数、 $l$  を 5 以上の整数とし、 $G$  を 4 連結平面グラフとする。 $G$  が以下の条件  $(d_l^4-k)$  を満足するとき、 $G$  を 4 連結  $p-l-k$  重ドーナツグラフという。

$(d_l^4-k)$   $G$  は、 $p$  角形である点素な面をちょうど 2 つもち、 $l$  角形の面を  $2p$  個もち、4 角形の面を  $2(k-3)p$  個もつ。さらに残りの面は全て 3 角形である。

また、 $G$  が 4 連結  $p-l-k$  重ドーナツグラフであるならば、以下の 3 つの性質、 $(p_l^4-k-1)$ ,  $(p_l^4-k-2)$ , および、 $(p_l^4-k-3)$  を満足する。

$(p_l^4-k-1)$   $G$  の全ての点  $v$  に対して  $d(v) = 4$  である。

$(p_l^4-k-2)$   $G$  は 2 連結  $k$ -外平面グラフである。

$(p_l^4-k-3)$   $n = 2(l+k-5)p$  である。

図 6 に 4 連結  $p-l-k$  重ドーナツグラフ  $G(p=4, l=5, k=4)$  と  $G$  の格子直線描画の例を示す。

#### 3.2 4 連結 $p-l-k$ 重ドーナツグラフの構成法

本節では、4 連結  $p-l-k$  重ドーナツグラフの構成法を与える。まず 3.2.1 節において  $k$  に関する構成法を与える。次に 3.2.2 節において  $l$  に関する構成法を与える。

##### 3.2.1 $k$ に関する構成法

本節では、<sup>10)</sup> の構成法を基に、 $6 \leq k$  なる  $k$  に対して、4 連結  $p-l-(k-1)$  重ドーナツグラフから 4 連結  $p-l-k$  重ドーナツグラフを構成する手法を与える。なお、 $k=4$  の場合については図 6(a) に、 $k=5$  の場合については図 7(a) にそれぞれ示す。4 連結  $p-l-(k-1)$  重ドーナツグラフの  $k-1$  個の階層について、内側から順に第 1 階層、第 2 階層、…、第  $k-1$  階層と呼ぶことにする。

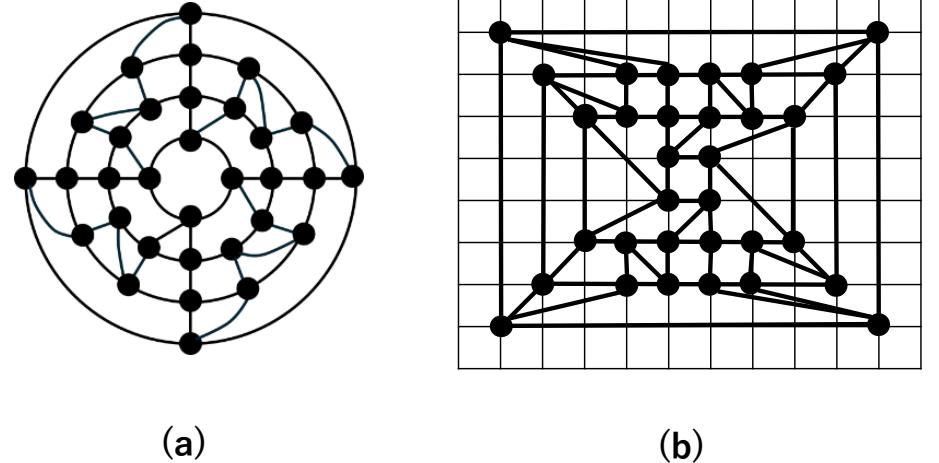


図 6 (a) 4 連結  $p-l-k$  重ドーナツグラフ  $G(p=4, l=5, k=4)$ , (b)  $G$  の格子直線描画。

まず、図 7 の (a), (b) のように、4 連結  $p-l-(k-1)$  重ドーナツグラフの第  $(k-2)$  階層をコピーし、階層の数を  $k$  個とする。次に、各階層ごとの各点に対して、次のように名前をつける。

**第 1 階層:** 第 1 階層上の任意の 1 点を  $d_1^{(1)}$  とし、 $d_1^{(1)}$  から反時計回りに  $d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \dots, d_p^{(1)}$  と名前をつける。

**第 2 階層:** 第 2 階層上にある  $d_1^{(1)}$  の隣接点で左側にあるものを  $d_1^{(2)}$  とし、 $d_1^{(2)}$  から反時計回りに  $d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \dots, d_{(l-2)p}^{(2)}$  と名前をつける。

**第 3 階層:** 第 3 階層上にある  $d_1^{(2)}$  の隣接点で左側にあるものを  $d_1^{(3)}$  とし、 $d_1^{(3)}$  から反時計回りに  $d_1^{(3)}, d_2^{(3)}, \dots, d_{(l-2)p}^{(3)}$  と名前をつける。

**第 4 階層から第  $(k-1)$  階層:**  $5 \leq k$  のとき、 $4 \leq i \leq k-1$  なる各  $i$  に対し、第  $i$  階層上にある  $d_1^{(i-1)}$  の隣接点で左側にあるものを  $d_1^{(i)}$  とし、 $d_1^{(i)}$  から反時計回りに  $d_1^{(i)}, d_2^{(i)}, \dots, d_{2p}^{(i)}$  と名前をつける。

**第  $k$  階層:** 第  $k$  階層上にある  $d_1^{(k-1)}$  の隣接点で左側にあるものを  $d_1^{(k)}$  とし、 $d_1^{(k)}$  から反時計回りに  $d_1^{(k)}, d_2^{(k)}, \dots, d_p^{(k)}$  と名前をつける。

第  $k-2$  階層と第  $k-1$  階層の各点に対して、次のように辺を接続する。まず、 $1 \leq i \leq 2p$  なる各  $i$  に対し、点  $d_i^{(k-2)}$  と点  $d_i^{(k-1)}$  を辺で接続する。このように辺を接続することにより

構成されるグラフを  $G$  としよう。このとき、第  $k-2$  階層と第  $k-1$  階層の間に、頂点の数が 4 個の面がちょうど  $2p$  個増えるので、 $G$  が条件  $(d_l^4-k)$  を満足することは容易にわかる。従って、 $G$  は 4 連結  $p-l-k$  重ドーナツグラフである。もちろん、 $G$  が性質  $(p_l^4-k-1)$ ,  $(p_l^4-k-2)$ , および、 $(p_l^4-k-3)$  を満足することも容易にわかる。図 7 に  $p=4$  のときの 4 連結  $p-l-k$  重ドーナツグラフの  $k$  に関する構成法の流れを示す。

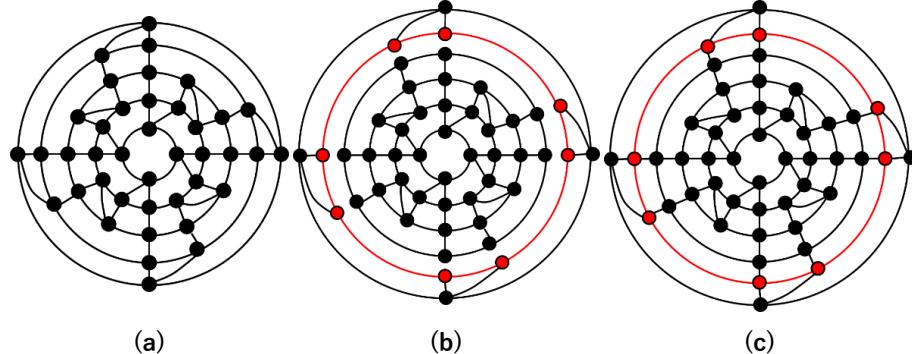


図 7 4 連結  $p-l-k$  重ドーナツグラフ  $G$  の  $k$  に関する構成法。

### 3.2.2 $l$ に関する構成法

本節では、 $6 \leq l$  なる  $l$  に対して、4 連結  $p-(l-1)-k$  重ドーナツグラフから 4 連結  $p-l-k$  重ドーナツグラフを構成する手法を与える。4 連結  $p-(l-1)-k$  重ドーナツグラフの  $k$  個の階層について、内側から順に第 1 階層、第 2 階層、…、第  $k$  階層と呼ぶことにする。また、3.2.1 節と同様にして各点に名前をつける。

**Step1:**  $1 \leq i \leq p$  なる各  $i$  に対し、辺  $(d_{i(l-2)}^{(3)}, d_{i(l-3)}^{(2)})$  を削除する。

**Step2:**  $1 \leq i \leq p$  なる各  $i$  に対し、 $d_{i(l-2)}^{(2)}$  と  $d_{i(l-3)}^{(2)}$  の間および  $d_{i(l-2)}^{(3)}$  と  $d_{i(l-3)}^{(3)}$  の間にそれぞれ点を 1 つ追加する。

**Step3** 2 層と 3 層の各点に対し 3.2.1 節と同様にして改めて名前をつける。

**Step4**  $1 \leq i \leq p$  なる各  $i$  に対し、辺  $(d_{i(l-2)}^{(3)}, d_{i(l-3)}^{(2)}), (d_{i(l-3)}^{(3)}, d_{i(l-4)}^{(2)})$  を追加する。

このように構成されるグラフを  $G$  としよう。このとき、第 2 階層と第 3 階層の間に、頂点の数が  $p$  個増え、 $(l-1)$  角形が  $l$  角形となる。よって  $G$  が条件  $(d_l^4-k)$  を満足することは容易にわかる。従って、 $G$  は 4 連結  $p-l-k$  重ドーナツグラフである。もちろん、 $G$  が性質  $(p_l^4-k-1)$ ,

$(p_l^4-k-2)$ , および、 $(p_l^4-k-3)$  を満足することも容易にわかる。図 8 に  $p=4$  のときの 4 連結  $p-l-k$  重ドーナツグラフの  $l$  に関する構成法の流れを示す。

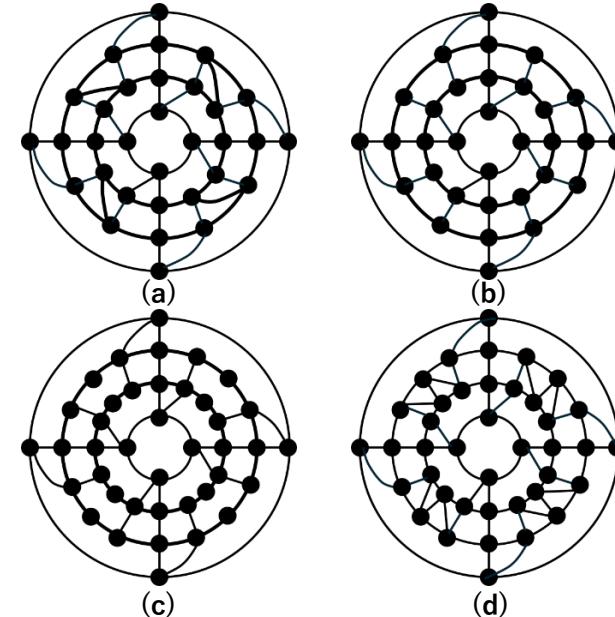


図 8 4 連結  $p-l-k$  重ドーナツグラフ  $G$  の  $l$  に関する構成法。

### 3.3 4 連結 $p-l-k$ 重ドーナツグラフの格子直線描画アルゴリズム

本節では、4 連結  $p-l-k$  重ドーナツグラフの格子直線描画を求める線形時間アルゴリズムを与える。なお、本アルゴリズムでは点の座標の決め方についてのみ説明する。与えられた各点の座標から対応する描画を求めるのは容易である。

#### アルゴリズム

**Step1:** 第 1 階層の各点  $d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \dots, d_p^{(1)}$  を次のように配置する。

まず  $d_1^{(1)}, d_{\lceil \frac{p}{2} \rceil}^{(1)}, d_{\lceil \frac{p}{2} \rceil+1}^{(1)}$ , 及び  $d_p^{(1)}$  の各点について、 $p(d_1^{(1)}) = (\lceil \frac{(l-2)p}{4} \rceil - \lceil \frac{p}{4} \rceil + k - 2, k - 1)$ ,  $p(d_{\lceil \frac{p}{2} \rceil}^{(1)}) = (x(d_1^{(1)}) + \lceil \frac{p}{2} \rceil - 1, k - 1)$ ,  $p(d_{\lceil \frac{p}{2} \rceil+1}^{(1)}) = (x(d_{\lceil \frac{p}{2} \rceil}^{(1)}), k)$ ,

$p(d_p^{(1)}) = (x(d_1^{(1)}), k)$  とそれぞれ配置する. 次に,  $2 \leq i \leq \lceil \frac{p}{2} \rceil - 1$  なる各  $i$  に対して,  $p(d_i^{(1)}) = (x(d_{i-1}^{(1)}) + 1, k-1)$  と配置する.

更に,  $p-1 \geq i \geq \lceil \frac{p}{2} \rceil + 2$  なる各  $i$  に対して,  $p(d_i^{(1)}) = (x(d_{i+1}^{(1)}) + 1, k)$  と配置する.

**Step2:** 第 2 階層の各点  $d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \dots, d_{(l-2)p}^{(2)}$  を次のように配置する.

まず  $d_1^{(2)}, d_{\lfloor \frac{(l-2)p}{2} \rfloor}^{(2)}, d_{\lfloor \frac{(l-2)p}{2} \rfloor + 1}^{(2)}, d_{(l-2)p}^{(2)}$  の各点について,  $p(d_1^{(2)}) = (k-2, k-2)$ ,  $p(d_{\lfloor \frac{(l-2)p}{2} \rfloor}^{(2)}) = (x(d_1^{(2)}) + \lceil \frac{(l-2)p}{2} \rceil - 1, k-2)$ ,  $p(d_{\lfloor \frac{(l-2)p}{2} \rfloor + 1}^{(2)}) = (x(d_{\lfloor \frac{(l-2)p}{2} \rfloor}^{(2)}) + 1, k+1)$ ,  $p(d_{(l-2)p}^{(2)}) = (d_1^{(2)}, k+1)$  とそれぞれ配置する.

次に,  $2 \leq i \leq \lfloor \frac{(l-2)p}{2} \rfloor - 1$  なる各  $i$  に対して,  $p(d_i^{(2)}) = (x(d_{i-1}^{(2)}) + 1, k-2)$  と配置する.

更に,  $(l-2)p-1 \geq i \geq \lfloor \frac{(l-2)p}{2} \rfloor + 2$  なる各  $i$  に対して,  $p(d_i^{(2)}) = (x(d_{i+1}^{(2)}) + 1, k+1)$  と配置する.

**Step3:** 第 3 階層の各点  $d_1^{(3)}, d_2^{(3)}, \dots, d_{(l-2)p}^{(3)}$  を次のように配置する.

まず  $d_1^{(3)}, d_{\lfloor \frac{(l-2)p}{2} \rfloor}^{(3)}, d_{\lfloor \frac{(l-2)p}{2} \rfloor + 1}^{(3)}, d_{(l-2)p}^{(3)}$  の各点について,  $p(d_1^{(3)}) = (k-3, k-3)$ ,  $p(d_{\lfloor \frac{(l-2)p}{2} \rfloor}^{(3)}) = (x(d_{\lfloor \frac{(l-2)p}{2} \rfloor}^{(2)}) + 1, k-3)$ ,  $p(d_{\lfloor \frac{(l-2)p}{2} \rfloor + 1}^{(3)}) = (x(d_{\lfloor \frac{(l-2)p}{2} \rfloor}^{(2)}) + 2, k+2)$ ,  $p(d_{(l-2)p}^{(3)}) = (x(d_1^{(3)}), k+2)$  とそれぞれ配置する.

次に,  $2 \leq i \leq \lfloor \frac{(l-2)p}{2} \rfloor - 1$  なる各  $i$  に対して,  $p(d_i^{(3)}) = (x(d_i^{(2)}), k-3)$  と配置する.

更に,  $(l-2)p-1 \geq i \geq \lfloor \frac{(l-2)p}{2} \rfloor + 2$  なる各  $i$  に対して,  $p(d_i^{(3)}) = (x(d_i^{(2)}), k+2)$  と配置する.

**Step4:**  $k$  が 5 以上の整数であるとき,  $4 \leq j \leq k-1$  なる各  $j$  に対して, 第  $j$  階層の各点  $d_1^{(j)}, d_2^{(j)}, \dots, d_{2p}^{(j)}$  を次のように配置する.

まず  $d_1^{(j)}, d_p^{(j)}, d_{p+1}^{(j)}, d_{2p}^{(j)}$  の各点について,  $p(d_1^{(j)}) = (k-j, k-j)$ ,  $p(d_p^{(j)}) = (x(d_{\lfloor \frac{(l-2)p}{2} \rfloor}^{(j)}) + (j-3), k-j)$ ,  $p(d_{p+1}^{(j)}) = (x(d_p^{(j)}), k+j-1)$ ,  $p(d_{2p}^{(j)}) = (x(d_1^{(j)}), k+j-1)$  とそれぞれ配置する.

次に,  $2 \leq i \leq p-1$  なる各  $i$  に対して,  $p(d_i^{(j)}) = (x(d_{\lceil \frac{(l-2)p}{4} \rceil}^{(j)}) - \lceil \frac{(p-2)}{2} \rceil + i-1, k-j)$  と配置する.

更に,  $2p-1 \geq i \geq p+2$  なる各  $i$  に対して,  $p(d_i^{(j)}) = (x(d_{2p+1-i}^{(j)}), k+j-1)$  と配置する.

**Step5:** 第  $k$  階層の各点  $d_1^{(k)}, d_2^{(k)}, \dots, d_p^{(k)}$  を次のように配置する.

まず  $d_1^{(k)}, d_{\lceil \frac{p}{2} \rceil}^{(k)}, d_{\lceil \frac{p}{2} \rceil + 1}^{(k)}, d_p^{(k)}$  の各点について,  $p(d_1^{(k)}) = (0, 0)$ ,  $p(d_{\lceil \frac{p}{2} \rceil}^{(k)}) = (\lceil \frac{(l-2)p}{2} \rceil +$

$2k-5, 0)$ ,  $p(d_{\lceil \frac{p}{2} \rceil + 1}^{(k)}) = (x(d_{\lceil \frac{p}{2} \rceil}^{(k)}), 2k-1)$ ,  $p(d_p^{(k)}) = (x(d_1^{(k)}), 2k-1)$  とそれぞれ配置する.

次に,  $2 \leq i \leq \lceil \frac{p}{2} \rceil - 1$  なる各  $i$  に対して,  $p(d_i^{(k)}) = (x(d_i^{(1)}), 0)$  と配置する.

更に,  $p-1 \geq i \geq \lceil \frac{p}{2} \rceil + 2$  なる各  $i$  に対して,  $p(d_i^{(k)}) = (x(d_i^{(1)}), 2k-1)$  と配置する.

このアルゴリズムの実行例を, 図 9 に示す. アルゴリズムの点の配置の仕方により, 辺の交差が生じないことは容易にわかる. 従って, アルゴリズムにより得られた描画は格子直線描画である. 更に, 性質  $(p_l^4-k-3)$  より  $n = 2(l+k-5)p$  であるので, 得られた描画の幅は  $\lceil \frac{(l-2)n}{4(l+k-5)} \rceil + 2(k-2)$  であり, 高さは  $(2k-1)$  であることも容易にわかる. また, アルゴリズムの実行時間は明らかに線形時間である. よって次の定理が成り立つ.

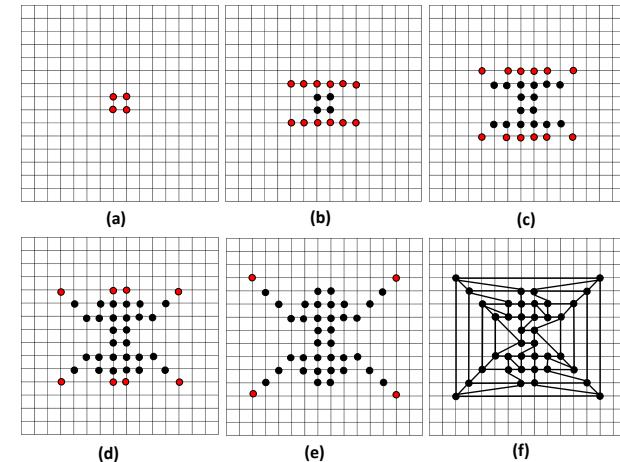


図 9 4 連結  $p-l-k$  重ドーナツグラフ  $G$  の格子直線描画アルゴリズムの流れ.

**定理3.1**  $G$  を 4 連結  $p-l-k$  重ドーナツグラフとする. このとき  $G$  は  $\{\lceil \frac{(l-2)n}{4(l+k-5)} \rceil + 2(k-2)\} \times (2k-1)$  の大きさの整数格子内に格子直線描画できる.

#### 4. 5 連結 $p-l-k$ 重ドーナツグラフ

本節では,<sup>9)</sup> で与えられている 5 連結  $p-l-k$  重ドーナツグラフとは異なる 5 連結  $p-l-k$  重

ドーナツグラフの定義を与えるとともに、描画アルゴリズムについても説明する。ここで、 $l$ は $p$ 頂点の面を除いた面の中で頂点の数が最大のものの頂点数を指す。まず、4.1節において5連結 $p-l-k$ 重ドーナツグラフの定義を与える。次に、4.2節において5連結 $p-l-k$ 重ドーナツグラフの構成法を与える。最後に4.3節において5連結 $p-l-k$ 重ドーナツグラフの格子直線描画を求める線形時間アルゴリズムを与える。

#### 4.1 5連結 $p-l-k$ 重ドーナツグラフ

本節では、4連結 $p-l-k$ 重ドーナツグラフの定義を与える。 $p$ を4以上の整数、 $l, k$ を5以上の整数とし、 $G$ を5連結平面グラフとする。 $G$ が以下の条件 $(d_l^5-k)$ を満足するとき、 $G$ を5連結 $p-l-k$ 重ドーナツグラフという。

$(d_l^5-k)$   $G$ は、 $p$ 角形である点素な面をちょうど2つもち、 $l$ 角形の面を $2p$ 個もち、4角形の面を $(k-3)p$ 個もつ。さらに残りの面は全て3角形である。

また、 $G$ が5連結 $p-l-k$ 重ドーナツグラフであるならば、以下の3つの性質、 $(p_l^5-k-1)$ 、 $(p_l^5-k-2)$ 、および、 $(p_l^5-k-3)$ を満足する。

$(p_l^5-k-1)$   $G$ の全ての点 $v$ に対して $d(v) = 5$ である。

$(p_l^5-k-2)$   $G$ は2連結 $k$ -外平面グラフである

$(p_l^5-k-3)$   $n = 2(2l + k - 7)p$ である。

図10に5連結 $p-l-k$ 重ドーナツグラフ $G(p=4, l=5, k=6)$ と $G$ の格子直線描画の例を示す。

#### 4.2 5連結 $p-l-k$ 重ドーナツグラフの構成法

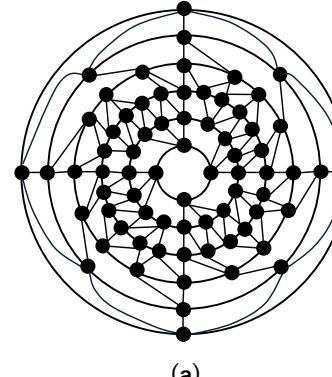
本節では、5連結 $p-l-k$ 重ドーナツグラフの構成法を与える。まず4.2.1節において $k$ に関する構成法を与える。次に4.2.2節において $l$ に関する構成法を与える。

##### 4.2.1 $k$ に関する構成法

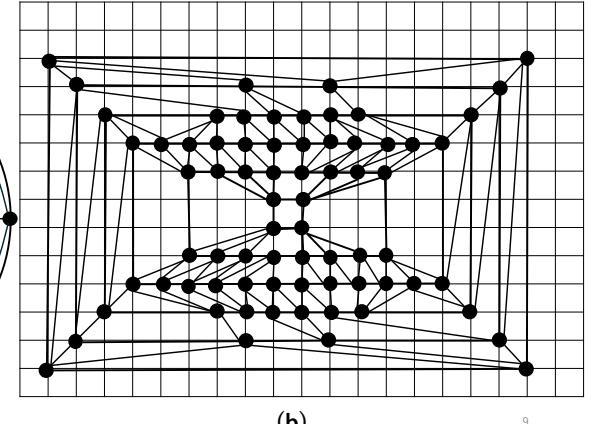
本節では、<sup>9)</sup>の構成法を参考にして、 $7 \leq k$ なる $k$ に対して、5連結 $p-l-(k-1)$ 重ドーナツグラフから5連結 $p-l-k$ 重ドーナツグラフを構成する手法を与える。なお、 $k=5$ の場合については図12(a)に、 $k=6$ の場合については図10(a)にそれぞれ示す。5連結 $p-l-(k-1)$ 重ドーナツグラフの $k-1$ 個の階層について、内側から順に第1階層、第2階層、…、第 $k-1$ 階層と呼ぶこととする。

まず、図7の(a), (b)のように、5連結 $p-l-(k-1)$ 重ドーナツグラフの第 $(k-2)$ 階層をコピーし、階層の数を $k$ 個とする。次に、各階層ごとの各点に対して、次のように名前をつける。

**第1階層:** 第1階層上の任意の1点を $d_1^{(1)}$ とし、 $d_1^{(1)}$ から反時計回りに $d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \dots, d_p^{(1)}$ と名前をつける。



(a)



(b)

図10 (a) 5連結 $p-l-k$ 重ドーナツグラフ $G(p=4, l=5, k=6)$ 、(b)  $G$ の格子直線描画。

**第2階層:** 第2階層上にある、 $d_1^{(1)}$ の隣接点で最も右にあるものを $d_1^{(2)}$ とし、 $d_1^{(2)}$ から反時計回りに $d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \dots, d_{(l-1)p}^{(2)}$ と名前をつける。

**第3階層:** 第3階層上にある、 $d_1^{(2)}$ の隣接点で右にあるものを $d_1^{(3)}$ とし、 $d_1^{(3)}$ から反時計回りに $d_1^{(3)}, d_2^{(3)}, \dots, d_{2(l-2)p}^{(3)}$ と名前をつける。

**第4階層:** 第4階層上にある、 $d_1^{(3)}$ の隣接点で右にあるものを $d_1^{(4)}$ とし、 $d_1^{(4)}$ から反時計回りに $d_1^{(4)}, d_2^{(4)}, \dots, d_{(l-1)p}^{(4)}$ と名前をつける。

**第5階層から $(k-1)$ 階層:**  $6 \leq k$ のとき、 $5 \leq i \leq k-1$ なる各 $i$ に対し、第 $i$ 階層上にある、 $d_1^{(i-1)}$ の隣接点で右にあるものを $d_1^{(i)}$ とし、 $d_1^{(i)}$ から反時計回りに $d_1^{(i)}, d_2^{(i)}, \dots, d_{2p}^{(i)}$ と名前をつける。

**第 $k$ 階層:** 第 $k$ 階層上にある、 $d_1^{(k-1)}$ の隣接点で右にあるものを $d_1^{(k)}$ とし、 $d_1^{(k)}$ から反時計回りに $d_1^{(k)}, d_2^{(k)}, \dots, d_p^{(k)}$ と名前をつける。

第 $k-2$ 階層と第 $k-1$ 階層の各点に対して、次のように辺を接続する。まず、 $1 \leq i \leq 2p$ なる各 $i$ に対し、点 $d_i^{(k-2)}$ と点 $d_i^{(k-1)}$ を辺で接続する。次に、 $1 \leq i \leq p$ なる各 $i$ に対し、点 $d_{2i}^{(k-2)}$ と点 $d_{(2i-1)}^{(k-1)}$ を辺で接続する。このように辺を接続することにより構成されるグラフを $G$ としよう。このとき、第 $k-2$ 階層と第 $k-1$ 階層の間に、頂点の数が4個の面がちょうど $p$ 個、頂点の数が3個の面がちょうど $2p$ 個増えるので、 $G$ が条件 $(d_l^5-k)$ を満足することになる。

とは容易にわかる。従って、 $G$  は 5 連結  $p-l-k$  重ドーナツグラフである。もちろん、 $G$  が性質  $(p_l^5-k-1)$ ,  $(p_l^5-k-2)$ , および,  $(p_l^5-k-3)$  を満足することも容易にわかる。図 11 に  $p=4$  のときの 5 連結  $p-l-k$  重ドーナツグラフの  $k$  に関する構成法の流れを示す。

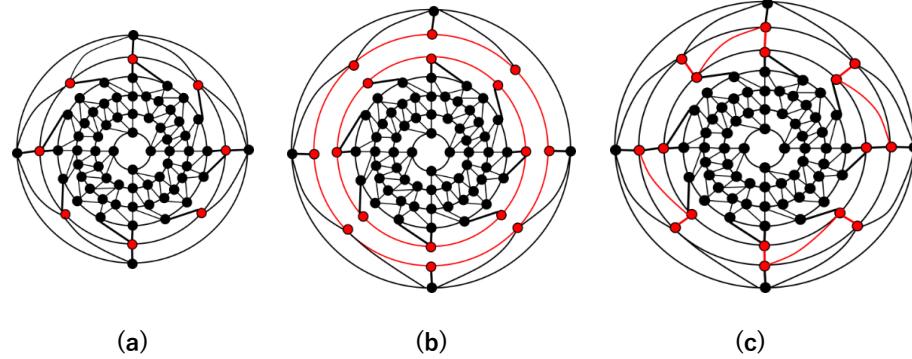


図 11 5 連結  $p-l-k$  重ドーナツグラフ  $G$  の  $k$  に関する構成法。

#### 4.2.2 $l$ に関する構成法

本節では、 $6 \leq l$  なる  $l$  に対して、5 連結  $p-(l-1)-k$  重ドーナツグラフから 5 連結  $p-l-k$  重ドーナツグラフを構成する手法を与える。5 連結  $p-(l-1)-k$  重ドーナツグラフの  $k$  個の階層について、内側から順に第 1 階層、第 2 階層、…、第  $k$  階層と呼ぶこととする。また、4.2.1 節と同様にして各点に名前をつける。

**Step1:**  $1 \leq i \leq p$  なる各  $i$  に対し、辺  $(d_{i(2l-6)}^{(3)}, d_{i(l-1)}^{(2)})$ ,  $(d_{i(l-2)}^{(4)}, d_{i(2l-5)}^{(3)})$  を削除する。

**Step2:**  $1 \leq i \leq p$  なる各  $i$  に対し、 $d_{i(l-1)}^{(2)}$  と  $d_{i(l-2)}^{(2)}$  の間、 $d_{i(l-1)}^{(4)}$  と  $d_{i(l-2)}^{(4)}$  の間にそれぞれ点を 1 つ、 $d_{i(2l-5)}^{(3)}$  と  $d_{i(2l-6)}^{(3)}$  の間にそれぞれ点を 2 つ追加する。

**Step3** 2 層、3 層、4 層の各点に対して 4.2.1 節と同様にして改めて名前をつける。

**Step4**  $1 \leq i \leq p$  なる各  $i$  に対し、辺  $(d_{i(2l-6)}^{(3)}, d_{i(l-1)}^{(2)})$ ,  $(d_{i(2l-6)}^{(3)}, d_{i(l-2)}^{(2)})$ ,  $(d_{i(2l-7)}^{(3)}, d_{i(l-2)}^{(2)})$ ,  $(d_{i(2l-8)}^{(3)}, d_{i(l-2)}^{(2)})$ ,  $(d_{i(l-2)}^{(4)}, d_{i(2l-5)}^{(3)})$ ,  $(d_{i(l-2)}^{(4)}, d_{i(2l-6)}^{(3)})$ ,  $(d_{i(l-2)}^{(4)}, d_{i(2l-7)}^{(3)})$ ,  $(d_{i(l-3)}^{(4)}, d_{i(2l-7)}^{(3)})$  を追加する。

このように構成されるグラフを  $G$  としよう。このとき、第 2 階層と第 4 階層の間に頂点の数が  $p$  個増え、第 3 階層の間に頂点の数が  $2p$  個増えるため、 $(l-1)$  角形が  $l$  角形となる。よって  $G$  が条件  $(d_l^5-k)$  を満足することは容易にわかる。従って、 $G$  は 5 連結  $p-l-k$  重ドーナツ

グラフである。もちろん、 $G$  が性質  $(p_l^5-k-1)$ ,  $(p_l^5-k-2)$ , および,  $(p_l^5-k-3)$  を満足することも容易にわかる。図 12 に  $p=4$  のときの 5 連結  $p-l-k$  重ドーナツグラフの  $l$  に関する構成法の流れを示す。

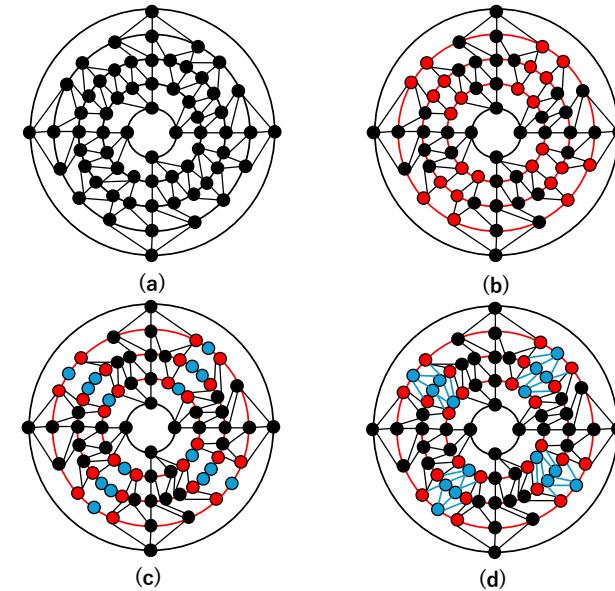


図 12 5 連結  $p-l-k$  重ドーナツグラフ  $G$  の  $l$  に関する構成法。

#### 4.3 5 連結 $p-l-k$ 重ドーナツグラフの格子直線描画アルゴリズム

本節では、5 連結  $p-l-k$  重ドーナツグラフの格子直線描画を求める線形時間アルゴリズムを与える。なお、本アルゴリズムでは点の座標の決め方についてのみ説明する。与えられた各点の座標から対応する描画を求めるのは容易である。

##### アルゴリズム

**Step1:** 第 1 階層の各点  $d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \dots, d_p^{(1)}$  を次のように配置する。

まず  $d_1^{(1)}, d_{\lceil \frac{p}{2} \rceil}^{(1)}, d_{\lceil \frac{p}{2} \rceil+1}^{(1)}$ , 及び  $d_p^{(1)}$  の各点について、 $p(d_1^{(1)}) = (\lceil \frac{(l-2)p}{2} \rceil - \lceil \frac{p}{4} \rceil + k - 3, k - 1)$ ,  $p(d_{\lceil \frac{p}{2} \rceil}^{(1)}) = (x(d_1^{(1)}) + \lceil \frac{p}{2} \rceil - 1, k - 1)$ ,  $p(d_{\lceil \frac{p}{2} \rceil+1}^{(1)}) = (x(d_{\lceil \frac{p}{2} \rceil}^{(1)}), k)$ ,

$p(d_p^{(1)}) = (x(d_1^{(1)}), k)$  とそれぞれ配置する.

次に,  $2 \leq i \leq \lceil \frac{p}{2} \rceil - 1$  なる各  $i$  に対して,  $p(d_i^{(1)}) = (x(d_{i-1}^{(1)}) + 1, k - 1)$  と配置する.

更に,  $p - 1 \geq i \geq \lceil \frac{p}{2} \rceil + 2$  なる各  $i$  に対して,  $p(d_i^{(1)}) = (x(d_{i+1}^{(1)}) + 1, k)$  と配置する.

**Step2:** 第 2 階層の各点  $d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \dots, d_{\lceil \frac{(l-2)p}{2} \rceil}^{(2)}$  を次のように配置する.

まず  $d_1^{(2)}, d_{\lceil \frac{(l-2)p}{2} \rceil}^{(2)}, d_{\lfloor \frac{(l-2)p}{2} \rfloor + 1}^{(2)}, d_{\lceil \frac{(l-2)p}{2} \rceil + 1}^{(2)}$  の各点について,  $p(d_1^{(2)}) = (\lceil \frac{(l-2)p}{2} \rceil - \lceil \frac{(l-1)p}{4} \rceil + k - 3, k - 2)$ ,  $p(d_{\lceil \frac{(l-2)p}{2} \rceil}^{(2)}) = (x(d_1^{(2)}) + \lceil \frac{(l-1)p}{2} \rceil - 1, k - 2)$ ,  $p(d_{\lfloor \frac{(l-2)p}{2} \rfloor + 1}^{(2)}) = (x(d_{\lfloor \frac{(l-1)p}{2} \rfloor}^{(2)}), k + 1)$ ,  $p(d_{\lceil \frac{(l-2)p}{2} \rceil + 1}^{(2)}) = (d_1^{(2)}, k + 1)$  とそれぞれ配置する.

次に,  $2 \leq i \leq \lfloor \frac{(l-1)p}{2} \rfloor - 1$  なる各  $i$  に対して,  $p(d_i^{(2)}) = (x(d_{i-1}^{(2)}) + 1, k - 2)$  と配置する.

更に,  $(l - 1)p - 1 \geq i \geq \lfloor \frac{(l-1)p}{2} \rfloor + 2$  なる各  $i$  に対して,  $p(d_i^{(2)}) = (x(d_{i+1}^{(2)}) + 1, k + 1)$  と配置する.

**Step3:** 第 3 階層の各点  $d_1^{(3)}, d_2^{(3)}, \dots, d_{\lceil \frac{(l-2)p}{2} \rceil}^{(3)}$  を次のように配置する.

まず  $d_1^{(3)}, d_{\lceil \frac{(l-2)p}{2} \rceil}^{(3)}, d_{\lfloor \frac{(l-2)p}{2} \rfloor + 1}^{(3)}, d_{\lceil \frac{(l-2)p}{2} \rceil + 1}^{(3)}$  の各点について,  $p(d_1^{(3)}) = (k - 3, k - 3)$ ,  $p(d_{\lceil \frac{(l-2)p}{2} \rceil}^{(3)}) = (x(d_1^{(3)}) + \lceil \frac{(l-2)p}{2} \rceil - 1, k - 3)$ ,  $p(d_{\lfloor \frac{(l-2)p}{2} \rfloor + 1}^{(3)}) = (x(d_{\lfloor \frac{(l-1)p}{2} \rfloor}^{(3)}), k + 2)$ ,  $p(d_{\lceil \frac{(l-2)p}{2} \rceil + 1}^{(3)}) = (x(d_1^{(3)}), k + 2)$  とそれぞれ配置する.

次に,  $2 \leq i \leq (l - 2)p - 1$  なる各  $i$  に対して,  $p(d_i^{(3)}) = (x(d_{i-1}^{(3)}) + 1, k - 3)$  と配置する.

更に,  $2(l - 2)p - 1 \geq i \geq (l - 2)p + 2$  なる各  $i$  に対して,  $p(d_i^{(3)}) = (x(d_{i+1}^{(3)}) + 1, k + 2)$  と配置する.

**Step4:** 第 4 階層の各点  $d_1^{(4)}, d_2^{(4)}, \dots, d_{\lceil \frac{(l-1)p}{2} \rceil}^{(4)}$  を次のように配置する.

まず  $d_1^{(4)}, d_{\lceil \frac{(l-1)p}{2} \rceil}^{(4)}, d_{\lfloor \frac{(l-1)p}{2} \rfloor + 1}^{(4)}, d_{\lceil \frac{(l-1)p}{2} \rceil + 1}^{(4)}$  の各点について,  $p(d_1^{(4)}) = (k - 4, k - 4)$ ,  $p(d_{\lceil \frac{(l-1)p}{2} \rceil}^{(4)}) = (x(d_{\lceil \frac{(l-2)p}{2} \rceil}^{(3)}) + 1, k - 4)$ ,  $p(d_{\lfloor \frac{(l-1)p}{2} \rfloor + 1}^{(4)}) = (x(d_{\lfloor \frac{(l-1)p}{2} \rfloor}^{(3)}), k + 3)$ ,  $p(d_{\lceil \frac{(l-1)p}{2} \rceil + 1}^{(4)}) = (d_1^{(4)}, k + 3)$  とそれぞれ配置する.

次に,  $2 \leq i \leq \lfloor \frac{(l-1)p}{2} \rfloor - 1$  なる各  $i$  に対して,  $p(d_i^{(4)}) = (x(d_i^{(2)}) + 1, k - 4)$  と配置する.

更に,  $(l - 1)p - 1 \geq i \geq \lfloor \frac{(l-1)p}{2} \rfloor + 2$  なる各  $i$  に対して,  $p(d_i^{(4)}) = (x(d_i^{(2)}), k + 3)$  と配置する.

**Step5:**  $k$  が 6 以上の整数であるとき,  $5 \leq j \leq k - 1$  なる各  $j$  に対して, 第  $j$  階層の各点

$d_1^{(j)}, d_2^{(j)}, \dots, d_{2p}^{(j)}$  を次のように配置する.

まず  $d_1^{(j)}, d_p^{(j)}, d_{p+1}^{(j)}, d_{2p}^{(j)}$  の各点について,  $p(d_1^{(j)}) = (k - j, k - j)$ ,  $p(d_p^{(j)}) =$

$(x(d_{\lfloor \frac{(l-1)p}{2} \rfloor}^{(4)}) + j - 4, k - j)$ ,  $p(d_{p+1}^{(j)}) = (x(d_p^{(j)}), k + j - 1)$ ,  $p(d_{2p}^{(j)}) = (x(d_1^{(j)}), k + j - 1)$  とそれぞれ配置する.

次に,  $2 \leq i \leq p - 1$  なる各  $i$  に対して,  $p(d_i^{(j)}) = (x(d_{\lceil \frac{(l-2)p}{2} \rceil}^{(3)}) - \lceil \frac{(p-2)}{2} \rceil + i - 1, k - j)$  と配置する.

更に,  $2p - 1 \geq i \geq p + 2$  なる各  $i$  に対して,  $p(d_i^{(j)}) = (x(d_{2p+1-i}^{(j)}), k + j - 1)$  と配置する.

**Step6:** 第  $k$  階層の各点  $d_1^{(k)}, d_2^{(k)}, \dots, d_p^{(k)}$  を次のように配置する.

まず  $d_1^{(k)}, d_{\lceil \frac{p}{2} \rceil}^{(k)}, d_{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor + 1}^{(k)}, d_p^{(k)}$  の各点について,  $p(d_1^{(k)}) = (0, 0)$ ,  $p(d_{\lceil \frac{p}{2} \rceil}^{(k)}) = (\lceil \frac{(l-2)p}{2} \rceil + 2k - 7, 0)$ ,  $p(d_{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor + 1}^{(k)}) = (x(d_{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor}^{(k)}), 2k - 1)$ ,  $p(d_p^{(k)}) = (x(d_1^{(k)}), 2k - 1)$  とそれぞれ配置する.

次に,  $2 \leq i \leq \lceil \frac{p}{2} \rceil - 1$  なる各  $i$  に対して,  $p(d_i^{(k)}) = (x(d_i^{(1)}), 0)$  と配置する.

更に,  $p - 1 \geq i \geq \lceil \frac{p}{2} \rceil + 2$  なる各  $i$  に対して,  $p(d_i^{(k)}) = (x(d_i^{(1)}), 2k - 1)$  と配置する.

このアルゴリズムの実行例を, 図 13 に示す. アルゴリズムの点の配置の仕方により, 辺の交差が生じないことは容易にわかる. 従って, アルゴリズムにより得られた描画は格子直線描画である. 更に, 性質  $(p_i^5 - k - 3)$  より,  $n = 2(2l + k - 7)p$  であるので, 得られた描画の幅は  $\lceil \frac{(l-2)n}{2(2l+k-7)} \rceil + 2(k - 3)$  であり, 高さは  $(2k - 1)$  であることも容易にわかる. また, アルゴリズムの実行時間は明らかに線形時間である. よって次の定理が成り立つ.

**定理 4.1**  $G$  を 5 連結  $p-l-k$  重ドーナツグラフとする. このとき  $G$  は  $\{\lceil \frac{(l-2)n}{2(2l+k-7)} \rceil + 2(k - 3)\} \times (2k - 1)$  の大きさの整数格子内に格子直線描画できる.

## 5. 結論

本論文では, 4 連結  $p-k$  重ドーナツグラフを拡張した 4 連結  $p-l-k$  重ドーナツグラフの定義と, 5 連結  $p-k$  重ドーナツグラフを拡張した 5 連結  $p-l-k$  重ドーナツグラフの定義を与えるとともに, 任意の  $l$  と  $k$  に対するそれぞれの構成法を与えた. さらに, それぞれのドーナツグラフが  $O(n)$  の面積で格子直線描画できることを示すとともに, そのような描画を求める線形時間アルゴリズムを与えた.

今後の課題としては,  $O(n)$  の面積で描画可能なグラフの更なる拡張が挙げられる.

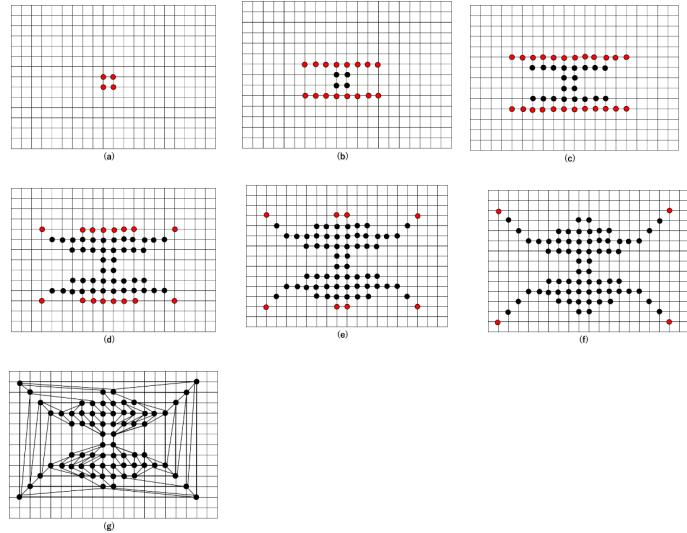


図 13 5 連結  $p-l-k$  重ドーナツグラフ  $G$  の格子直線描画アルゴリズムの流れ.

## 参考文献

- 1) M. Chrobak and S. Nakano, Minimum-width grid drawings of a plane graphs, Computational Geometry: Theory and Applications, 11, pp. 29-54, 1998.
- 2) I. Fary, On Straight line representation of planar graphs, Acta Scientiarum Mathematicarum, Szeged, 11, pp. 229-233, 1948.
- 3) H. de Fraysseix, J. Pach and R. Pollack, How to draw a planar graph on a grid. Combinatorica, 10, pp. 41-51, 1990.
- 4) M. R. Karim and M. S. Rahman, Four-connected spanning subgraphs of doughnut graphs, Proceedings of Workshop on Algorithms and Computation, 2008, Lect. Notes in Computer Science, Springer, 4931, pp. 132-143, 2008.
- 5) W. Schnyder, Embedding planar graphs on the grid, Proceedings of First ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, San Francisco, pp. 138-148, 1990.
- 6) K. S. Stein, Convex maps, Proceedings of the American Mathematical Society, 2, pp. 464-466, 1951.
- 7) K. Wagner, Bemerkungen zum vierfarbenproblem, Jägerber. Deutsch. Math.-Verien., 46, pp. 26-32, 1936.
- 8) 添田知宏, 三浦一之, 一般化ドーナツグラフの格子直線描画, 電子情報通信学会論文誌 D Vol. J101-D No. 3 pp. 494-501, 2018.
- 9) 斎藤元樹, ドーナツグラフのグラフクラスの拡張に関する研究, 福島大学卒業論文, 2021.
- 10) 五十嵐輝, ドーナツグラフの格子直線描画に関する研究, 福島大学大学院修士論文, 2023.