سوال:

a) $x_1(t) = e^{-4t}\, u(t)$

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-4t} u(t)|^2\, dt = \overbrace{\int_{-\infty}^{0} |e^{-4t} \underbrace{u(t)}_{0}|^2 dt}^{0} + \int_{0}^{\infty} |e^{-4t} \underbrace{u(t)}_{1}|^2 dt$$

$$= \int_0^\infty |e^{-4t}|^2 dt = \int_0^\infty e^{-8t} dt = -\frac{1}{8} e^{-8t}\Big|_0^\infty = 0 - \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}$$

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |e^{-8t} u(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \times \frac{1}{8} = 0$$

b) $x_2(t) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{3\pi}{4} t\right)$

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{1}{2} \sin\left(\frac{3\pi}{4} t\right)\right|^2 dt = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1-\cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right)}{2}\right| dt = \frac{1}{8} \int_{-\infty}^{\infty} 1 - \cos\left(\frac{3\pi}{2} t\right) dt$$

$$= \frac{1}{8}\left(t - \frac{2}{3\pi} \sin\left(\frac{3\pi}{2}t\right)\right)\Big|_{-\infty}^{\infty} = \infty$$

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left|\frac{1}{2} \sin\left(\frac{3\pi}{4}t\right)\right|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\, \frac{1}{8}\left(t - \frac{2}{3\pi} \sin\left(\frac{3\pi}{2}t\right)\right)\Big|_{-T}^{T}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{16T}\left(2T - \frac{4}{3\pi} \sin\left(\frac{3\pi}{2}T\right)\right) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{8}\left(1 - \frac{2\sin\left(\frac{3\pi}{2}T\right)}{3\pi T}\right)$$

$$= \frac{1}{8} - \lim_{T\to\infty} \frac{2\sin\left(\frac{3\pi}{2}T\right)}{3\pi T} = \frac{1}{8} - 0 = \frac{1}{8}$$

C) $x_3[n] = \sin(n)\, u[9-n^2]$

$$E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\sin(n) u[9-n^2]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{-4} |\sin(n) \underbrace{u(9-n^2)}_{0}|^2 + \sum_{n=-3}^{3} |\sin(n) \underbrace{u(9-n^2)}_{1}|^2$$

$$+ \sum_{n=4}^{+\infty} |\sin(n) \underbrace{u(9-n^2)}_{0}|^2 = \sum_{n=-3}^{3} |\sin(n)|^2 = \sin^2(-3) + \sin^2(-2) + \sin^2(-1) + \sin^2(0) +$$

$$\sin^2(1) + \sin^2(2) + \sin^2(3) = 2\sin^2(1) + 2\sin^2(2) + 2\sin^2(3) + 2\underbrace{\sin^2(0)}_{0}$$

$$= 2\left(\sin^2(1) + \sin^2(2) + \sin^2(3)\right) = 2(0.7080 + 0.8268 + 0.0199) \simeq 3.1096$$

$$P_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |\sin(n) u(9-n^2)|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{3.1096}{2N+1} = 0$$

D) $x_4[n] = \frac{3}{2} \cos(n^2)$

$$E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\frac{3}{2}\cos(n^2)\right|^2 = \infty$$

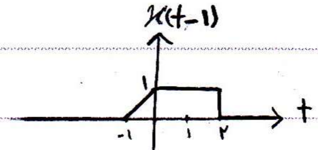
$$P_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \left|\frac{3}{2}\cos(n^2)\right|^2 \sim \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \left|\frac{3}{2} \times 1\right|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{2N+1}{2N+1} \times \frac{9}{4}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{9}{4} = \frac{9}{4}$$

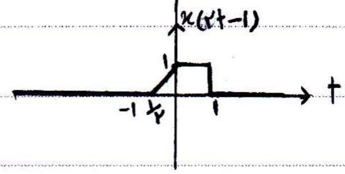
س۲:

a) $x(2t-1)$

$t \to t-1$

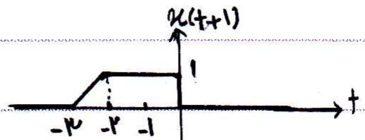


$t \to 2t$

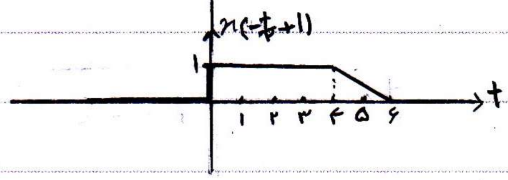


b) $x(-\frac{t}{2}+1)$

$t \to t+1$

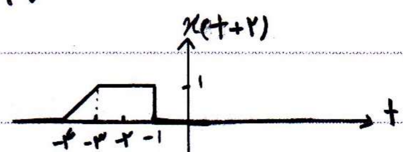


$t \to -\frac{t}{2}$

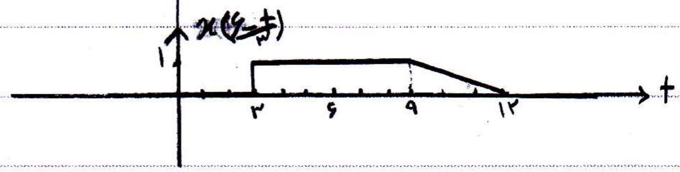


c) $x(\frac{6-t}{3}) = x(2-\frac{t}{3})$

$t \to t+2$



$t \to -\frac{t}{3}$



س۳:

a) $x(t) = e^{-5t}\sin(t)u(t)$

$Ev\{x(t)\} = \frac{1}{2}(e^{-5t}\sin(t)u(t) + e^{5t}\sin(-t)\,u(-t)) = \frac{1}{2}(e^{-5t}\sin(t)u(t) - e^{5t}\sin(t)u(-t))$

$Od\{x(t)\} = \frac{1}{2}(e^{-5t}\sin(t)u(t) - e^{5t}\sin(-t)\,u(-t)) = \frac{1}{2}(e^{-5t}\sin(t)u(t) + e^{5t}\sin(t)\,u(t))$

b) $x(t) = e^{-3|t|}\cos(t)$

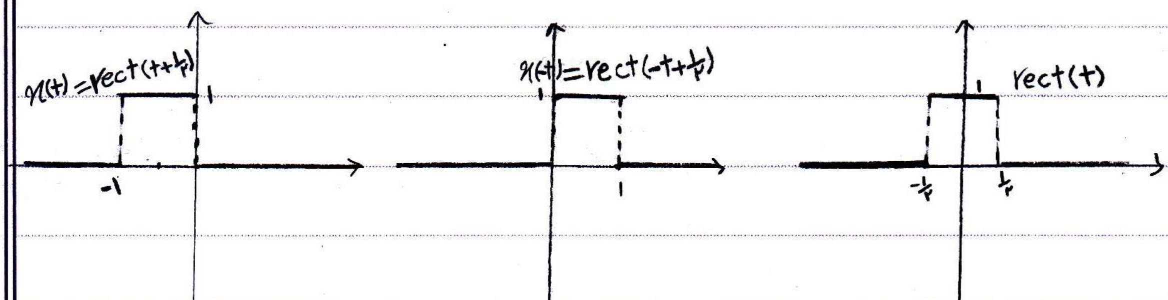
$$Ev\{x(t)\} = \frac{1}{2}\left(e^{-3|t|}\cos(t) + e^{-3|-t|}\cos(-t)\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-3|t|}\cos(t) + e^{-3|t|}\cos(t)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(2e^{-3|t|}\cos(t)\right) = e^{-3|t|}\cos(t)$$

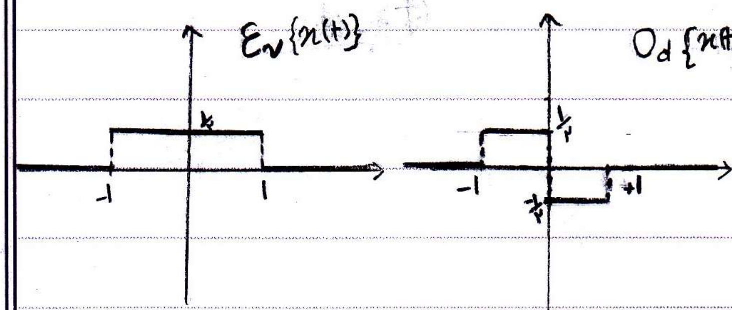
$$Od\{x(t)\} = \frac{1}{2}\left(e^{-3|t|}\cos(t) - e^{-3|-t|}\cos(-t)\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-3|t|}\cos(t) - e^{-3|t|}\cos(t)\right)$$
$$= \frac{1}{2}(0) = 0$$

C) $x(t) = \Pi(t + \frac{1}{2})$

$$Ev\{x(t)\} = \frac{1}{2}\left(rect(t+\tfrac{1}{2}) + rect(-t+\tfrac{1}{2})\right) = \frac{1}{2}\left(u(t+1) - u(t) + u(1-t) - u(-t)\right)$$

$$Od\{x(t)\} = \frac{1}{2}\left(rect(t+\tfrac{1}{2}) - rect(-t+\tfrac{1}{2})\right) = \frac{1}{2}\left(u(t+1) - u(t) - u(1-t) + u(-t)\right)$$





س ۴:

a) $x(t) = e^{j(2t + \frac{\pi}{10})}$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

دوره تناوب اصلی

$$x(t+\pi) = e^{j(2(t+\pi)+\frac{\pi}{10})} = e^{j(2t+\frac{\pi}{10})+j2\pi} = e^{j(2t+\frac{\pi}{10})} \times e^{j(2\pi)} = e^{j(2\pi+\frac{\pi}{10})}(\underbrace{\cos(2\pi)}_{1} + \underbrace{j\sin(2\pi)}_{0}) = x(t)$$

متناوب است.

b) $x(t) = \sin^3(2t) = \frac{1}{4}\big(\underbrace{3\sin(2t)}_{T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi} - \underbrace{\sin(6t)}_{T_2 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}}\big)$

ک.م.م $\pi, \frac{\pi}{3} \Longrightarrow \pi$

$x(t+\pi) = \frac{1}{4}(3\sin(2(t+\pi)) - \sin(6(t+\pi))) = \frac{1}{4}(3\sin(2t+2\pi) - \sin(6t+6\pi))$

$= \frac{1}{4}(3\sin(2t) - \sin(6t)) = x(t)$ π یک دوره تناوب $\Longrightarrow$ متناوب است

$x(t+\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{4}(3\sin(2(t+\frac{\pi}{2})) - \sin(6(t+\frac{\pi}{2}))) = \frac{1}{4}(3\sin(2t+\pi) - \sin(6t+3\pi))$

$= \frac{1}{4}(-3\sin(2t) + \sin(6t)) \neq x(t) \Longrightarrow$ π دوره تناوب اصلی $\Rightarrow T_0 = \pi$

c) $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-|6t+n|}$

$x(t+T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-|6(t+T)+n|} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-|6t+\overbrace{6T+n}^{m}|} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-|6t+m|} = x(t)$ متناوب است.

$6T+n \in \mathbb{Z} \Longrightarrow T_0 = \frac{1}{6}$ دوره تناوب اصلی

d) $x[n] = 5\cos 3n$

$\omega_0 = 3 \qquad N = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{3}$ گویا نیست $\Longrightarrow$ دوره تناوب ندارد

e) $x[n] = \cos(\frac{3\pi n}{7} + 2)$

$\omega_0 = \frac{3\pi}{7} \qquad N = \frac{2\pi}{\frac{3\pi}{7}} = \frac{2\times 7}{3} = \frac{14}{3} \Longrightarrow T_0 = 14$

گویا است   دوره تناوب اصلی

متناوب است.

f) $x[n] = 1 + \frac{2}{3}\sin(\frac{5}{3}n)$

$\omega_0 = \frac{5}{3} \qquad N = \frac{2\pi}{\frac{5}{3}}$ گویا نیست $\Longrightarrow$ دوره تناوب ندارد.

س۵ :

1) $y[n] = x^2[n] + x[n] - x[n-1]$

2) $y[n] = x^2[n] + x[n] - x[n-1]$

3) $y[n] = (x[n] - x[n-1])^2 = x^2[n] + x^2[n-1] - 2x[n]x[n-1]$

4) $y[n] = x^2[n] - x^2[n-1]$

Date: .... Subject: ....

۵) $y[n] = 2(x[n] - x[n-1]) + x[n-1] - x[n-2] = 2x[n] - x[n-1] - x[n-2]$

۶) $y[n] = 2x[n] + x[n-1] - 2x[n-1] - x[n-2] = 2x[n] - x[n-1] - x[n-2]$

سیستم های ۱ و ۲ و سیستم های ۵ و ۶ معادل هستند.

سوال ۶:

1) $y[n] = x[n-n_0]$

- خطی بودن:

$y_1[n] = x_1[n-n_0]$

$y_2[n] = x_2[n-n_0]$

$x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n] \Rightarrow y_3[n] = x_3[n-n_0] = ax_1[n-n_0] + bx_2[n-n_0]$

$= ay_1[n] + by_2[n]$ ✓ خطی است (linear)

- علّی بودن: $y[1] = x[1-n_0] \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{Z} \; 1-n_0 > 1$ علّی نیست. (non-causal)

$n_0 = -1 \Rightarrow y[1] = x[2]$

- پایداری: $|x[n]| < a \Rightarrow |x[n-n_0]| < b \Rightarrow |y[n]| < b \Rightarrow$ پایدار است (Stable)

- تغییر ناپذیری با زمان: $x_1[n] \Rightarrow y_1[n] = x_1[n-n_0]$

$x_2[n] = x_1[n-K] \Rightarrow y_2[n] = x_2[n-n_0] = x_1[n-n_0-K]$

$y_1[n-K] = x_1[n-K-n_0] \Rightarrow y_1[n-K] = y_2[n]$ تغییرناپذیر با زمان است. (time-invarient)

- حافظه دار بودن: $y[1] = x[1-n_0] \longrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{Z} \; (1-n_0) \neq 1 \Rightarrow$ حافظه دار است (with memory)

$n_0 = -1 \Rightarrow y[1] = x[2]$

2) $y[n] = x[-n]$

- خطی بودن:

$y_1[n] = x_1[-n]$

$y_2[n] = x_2[-n]$

$x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n] \Rightarrow y_3[n] = ax_1[-n] + bx_2[-n]$

$= ay_1[n] + by_2[n]$ ✓ خطی است (linear)

- علّی بودن: $y[-2] = x[2] \Rightarrow$ علّی نیست (non-causal)

- پایداری: $|x[n]| < a \Rightarrow |x[-n]| < b \Rightarrow |y[n]| < b$ پایدار است. (Stable)

Kian King

- تغییرناپذیری با زمان: $x_1[n] \Rightarrow y_1[n] = x_1[-n]$

$x_2[n] = x_1[n-n_0] \Rightarrow y_2[n] = x_2[-n] = x_1[-n-n_0] = x_1[-(n+n_0)]$

$y_1[n-n_0] = x_1[-(n-n_0)] \Longrightarrow y_1[n-n_0] \neq y_2[n]$. تغییرناپذیر بازمان نیست.

(time-varying)

- حافظه دار بودن: $y[-2] = x[2] \Rightarrow$ حافظه دار است. (with memory)

۳) $y[n] = x[n] + 3u[n+1]$

- خطی بودن:

$y_1[n] = x_1[n] + 3u[n+1]$

$y_2[n] = x_2[n] + 3u[n+1]$

$x_3[n] = a x_1[n] + b x_2[n] \Rightarrow y_3[n] = x_3[n] + 3u[n+1] =$

$a x_1[n] + b x_2[n] + 3u[n+1] \neq a y_1[n] + b y_2[n]$ خطی نیست.

(nonlinear)

- علّی بودن: علّی است. (Causal)

- پایداری: $|x[n]| < a \Longrightarrow |x[n] + 3\overbrace{u[n+1]}^{\text{کراندار}}| < b \Rightarrow |y[n]| < b$. پایدار است.

(Stable)

- تغییرناپذیری در زمان: $x_1[n] \Rightarrow y_1[n] = x_1[n] + 3u[n+1]$

$x_2[n] = x_1[n-n_0] \Rightarrow y_2[n] = x_2[n] + 3u[n+1] = x_1[n-n_0] + 3u[n+1]$

$y_1[n-n_0] = x_1[n-n_0] + 3u[n-n_0+1] \Longrightarrow y_1[n-n_0] \neq y_2[n]$. تغییرناپذیر بازمان نیست.

(time-varying)

- حافظه دار بودن: بی حافظه است چون خروجی به ورودی در همان لحظه بستگی دارد.

(memoryless)

۴) $y[n] = e^{x[n]}$

- خطی بودن:

$y_1[n] = e^{x_1[n]}$

$y_2[n] = e^{x_2[n]}$

$x_3[n] = a x_1[n] + b x_2[n] \Rightarrow y_3[n] = e^{(a x_1[n] + b x_2[n])} \neq a y_1[n] + b y_2[n]$

خطی نیست. (nonlinear)

Date: Subject:

علّی بودن: علّی است. (Causal)

پایداری: $|x(n)|<a \Rightarrow |e^{a[n]}|<b \Rightarrow |y[n]|<b$ پایدار است (Stable)

تغییرناپذیر در زمان: $x_1[n] \Rightarrow y_1[n]=e^{x_1[n]}$

$x_2[n]=x_1[n-n_0] \Rightarrow y_2[n]=e^{x_2[n]}=e^{x_1[n-n_0]}$

$y_1[n-n_0]=e^{x_1[n-n_0]} \Rightarrow y_1[n-n_0]=y_2[n]$ تغییرناپذیر در زمان است.

(time-invarient)

حافظه دار بودن: بی حافظه است چون خروجی به ورودی در همان لحظه بستگی دارد.
(memoryless)

۵) $y[n]=n\,x[n]$

خطی بودن: $y_1[n]=n\,x_1[n]$

$y_2[n]=n\,x_2[n]$

$x_3[n]=a x_1[n]+b x_2[n] \Rightarrow y_3[n]=n\,x_3[n]=n(a x_1[n]+b x_2[n])$

$=a(n x_1[n])+b(n x_2[n])=a y_1[n]+b y_2[n]$ ✓ خطی است.
(linear)

علّی بودن: علّی است. (causal)

پایداری: $x[n]=1 \Rightarrow y[n]=n \Rightarrow y[\infty]=\infty \Rightarrow$ غیر پایدار است.
(non-stable)

تغییرناپذیری در زمان: $x_1[n] \Rightarrow y_1[n]=n\,x_1[n]$

$x_2[n]=x_1[n-n_0] \Rightarrow y_2[n]=n\,x_2[n]=n\,x_1[n-n_0]$

$y_1[n-n_0]=(n-n_0)x_1[n-n_0] \Rightarrow y_1[n-n_0] \neq y_2[n]$ تغییرناپذیر در زمان نیست.
(time-varying)

حافظه دار بودن: بی حافظه است. چون خروجی به ورودی در همان لحظه بستگی دارد.
(memoryless)

۶) $y(t)=x(t-2)+x(2-t)$

خطی بودن: $y_1(t)=x_1(t-2)+x_1(2-t)$ و $y_2(t)=x_2(t-2)+x_2(2-t)$

$x_3(t)=a x_1(t)+b x_2(t) \Rightarrow y_3(t)=a x_1(t-2)+b x_2(t-2)+a x_1(2-t)+b x_2(2-t)$

$=a(x_1(t-2)+x_1(2-t))+b(x_2(t-2)+x_2(2-t))=a y_1(t)+b y_2(t)$ ✓

خطی است.
(Linear)

$y(\frac{1}{2}) = x(-\frac{3}{2}) + x(\frac{3}{2})$ علّی بودن: علّی نیست. (noncausal)

پایداری: پایدار است. (Stable) $|x(t)|<a \Rightarrow |x(t-2)+x(2-t)|<b \Rightarrow |y(t)|<b$

تغییرناپذیر در زمان: $x_1(t) \Rightarrow y_1(t) = x_1(t-2) + x_1(2-t)$

$x_2(t) = x_1(t-t_0) \Rightarrow y_2(t) = x_2(t-2) + x_2(2-t) = x_1(t-2-t_0) + x_1(2-t-t_0)$

$y_1(t-t_0) = x_1((t-t_0)-2) + x_1(2-(t-t_0)) \Rightarrow y_1(t-t_0) \neq y_2(t)$ تغییرناپذیر در زمان نیست. (time_varying)

حافظه‌دار بودن: $y(\frac{1}{2}) = x(-\frac{3}{2}) + x(\frac{3}{2}) \Rightarrow$ حافظه‌دار است. (with memory)

۷) $y(t) = x(t)\cos(3t)$

خطی بودن: $y_1(t) = x_1(t)\cos(3t)$, $y_2(t) = x_2(t)\cos(3t)$

$x_3(t) = a x_1(t) + b x_2(t) \Rightarrow y_3(t) = x_3(t)\cos(3t) = (a x_1(t) + b x_2(t))\cos(3t)$

$= a x_1(t)\cos(3t) + b x_2(t)\cos(3t) = a y_1(t) + b y_2(t)$ ✓ خطی است. (linear)

علّی بودن: علّی است. (causal)

پایداری: پایدار است. (Stable) $|x(t)|<a \Rightarrow |x(t)\underset{}{\overset{\text{کران‌دار}}{\cos(3t)}}|<b \Rightarrow |y(t)|<b$

تغییرناپذیری با زمان: $x_1(t) \Rightarrow y_1(t) = x_1(t)\cos(3t)$

$x_2(t) = x_1(t-t_0) \Rightarrow y_2(t) = x_2(t)\cos(3t) = x_1(t-t_0)\cos(3t)$

$y_1(t-t_0) = x_1(t-t_0)\cos(3(t-t_0)) \Rightarrow y_1(t-t_0) \neq y_2(t)$ تغییرناپذیر در زمان نیست. (time_varying)

حافظه‌دار بودن: بی‌حافظه است. چون خروجی به ورودی در همان لحظه بستگی دارد. (memoryless)

۸) $y(t) = \int_{-\infty}^{3t} x(\tau)\,d\tau$

خطی بودن: $y_1(t) = \int_{-\infty}^{3t} x_1(\tau)\,d\tau$, $y_2(t) = \int_{-\infty}^{3t} x_2(\tau)\,d\tau$

$x_3(t) = a x_1(t) + b x_2(t) \Rightarrow y_3(t) = \int_{-\infty}^{3t} (a x_1(\tau) + b x_2(\tau))\,d\tau = \int_{-\infty}^{3t} a x_1(\tau)\,d\tau$

$+ \int_{-\infty}^{3t} b x_2(\tau)\,d\tau = a\int_{-\infty}^{3t} x_1(\tau)\,d\tau + b\int_{-\infty}^{3t} x_2(\tau)\,d\tau = a y_1(t) + b y_2(t)$ ✓

خطی است. (linear)

Date: .... Subject: ....

علّی بودن: علّی نیست. (non-causal) $y(1)=\int_{-\infty}^{2} x(\tau)d\tau \Rightarrow$ به ورودی در لحظات بعد وابسته است.

پایداری: $x(t)=1 \Rightarrow y(0)=\int_{-\infty}^{0} 1\times d\tau = x(\tau)\Big|_{-\infty}^{0} = 0-(-\infty)=\infty$

پایدار نیست. (non-stable)

تغییرناپذیری در زمان: $x_1(t)\Rightarrow y_1(t)=\int_{-\infty}^{2t} x_1(\tau)d\tau$

$x_2(t)=x_1(t-t_0)\Rightarrow y_2(t)=\int_{-\infty}^{2t} x_2(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{2t}x_1(\tau-t_0)d\tau$

$y_1(t-t_0)=\int_{-\infty}^{2(t-t_0)} x_1(\tau)d\tau \Rightarrow y_1(t-t_0)\neq y_2(t)$ تغییرناپذیر در زمان نیست.

(time-varying)

حافظه دار بودن: حافظه دار است. (with memory) $y(1)=\int_{-\infty}^{2}x(\tau)d\tau \Rightarrow$ به ورودی در لحظات بعد وابسته است.

۹) $y(t)=x(t/3)$

خطی بودن: $y_1(t)=x_1(t/3)$, $y_2(t)=x_2(t/3)$

$x_3(t)=ax_1(t)+bx_2(t)\Rightarrow y_3(t)=x_3(t/3)=ax_1(t/3)+bx_2(t/3)=ay_1(t)+by_2(t)$ ✓

خطی است. (linear)

علّی بودن: علّی نیست. (noncausal) $y(-9)=x(-\frac{9}{3})=x(-3) \Longrightarrow$

پایداری: پایدار است. (Stable) $|x(t)|<a \Rightarrow |x(t/3)|<b \Rightarrow |y(t)|<b$

تغییرناپذیر در زمان: $x_1(t)\Rightarrow y_1(t)=x_1(t/3)$

$x_2(t)=x_1(t-t_0)\Rightarrow y_2(t)=x_2(t/3)=x_1(t/3-t_0)$

$y_1(t-t_0)=x_1(\frac{t-t_0}{3}) \Rightarrow y_1(t-t_0)\neq y_2(t)$ تغییرناپذیر در زمان نیست.

(timevarying)

حافظه دار بودن: $y(1)=x(1/3) \Rightarrow$ حافظه دار است. (with memory)

س ۷: الف) $y(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-nT)$

$y_1(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(t)\delta(t-nT)$, $y_2(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(t)\delta(t-nT)$

$x_3(t)=ax_1(t)+bx_2(t)\Rightarrow y_3(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_3(t)\delta(t-nT)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(ax_1(t)+bx_2(t))\delta(t-nT)$

$=a\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(t)\delta(t-nT)+b\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(t)\delta(t-nT)=ay_1(t)+by_2(t)$ ✓ خطی است.

(linear)

Date: .... Subject: ....

ب)

$$x_1(t) \Rightarrow y_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t-nT)$$

$$x_2(t) = x(t-t_0) \Rightarrow y_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(t)\,\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(t-t_0)\,\delta(t-nT)$$

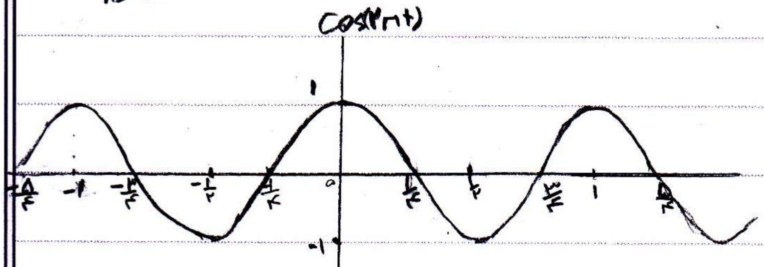
$$y_1(t-t_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-t_0)\,\delta((t-t_0)-nT) \Rightarrow y_1(t-t_0) \neq y_2(t)$$

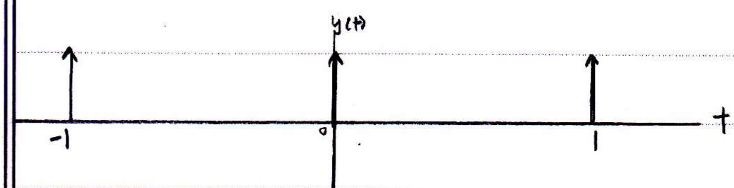
تغییرناپذیر در زمان نیست.

(time-varying)

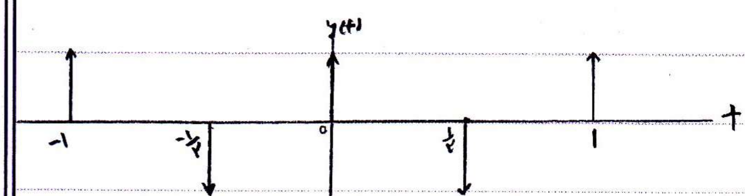
ج)

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(2\pi t)\,\delta(t-nT)$$

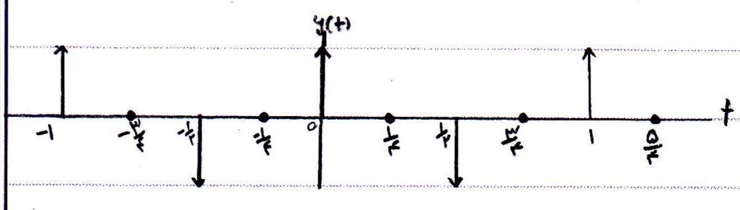




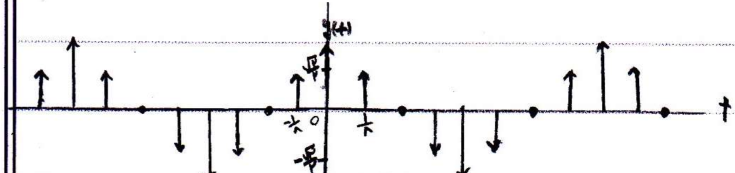
$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(2\pi t)\,\delta(t-n) \Leftarrow T=1$$



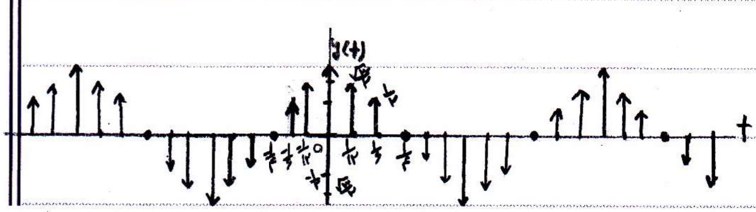
$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(2\pi t)\,\delta(t-\tfrac{n}{2}) \Leftarrow T=\tfrac{1}{2}$$



$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(2\pi t)\,\delta(t-\tfrac{n}{4}) \Leftarrow T=\tfrac{1}{4}$$



$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(2\pi t)\,\delta(t-\tfrac{n}{8}) \Leftarrow T=\tfrac{1}{8}$$

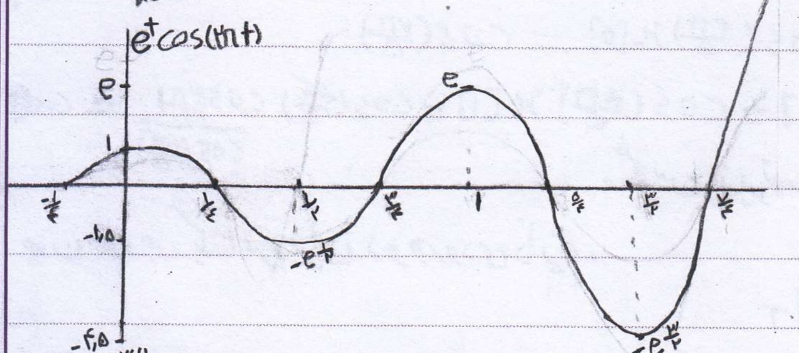


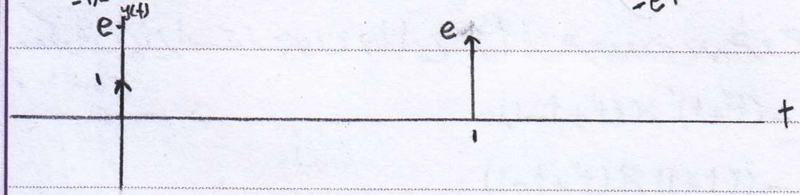
$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(2\pi t)\,\delta(t-\tfrac{n}{16}) \Leftarrow T=\tfrac{1}{16}$$

Date: .... Subject: ....

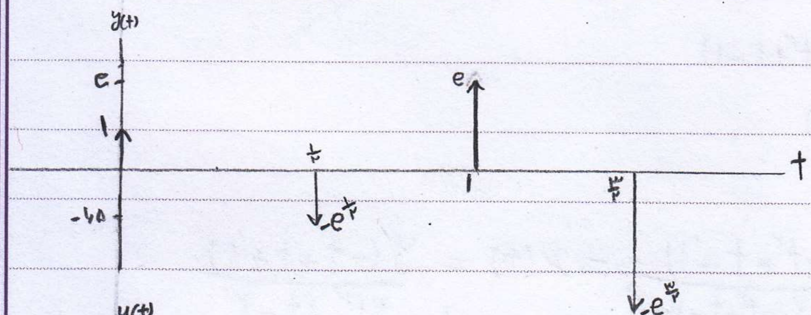
$$y(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{t}\cos(2\pi t)\,\delta(t-nT)$$

(2

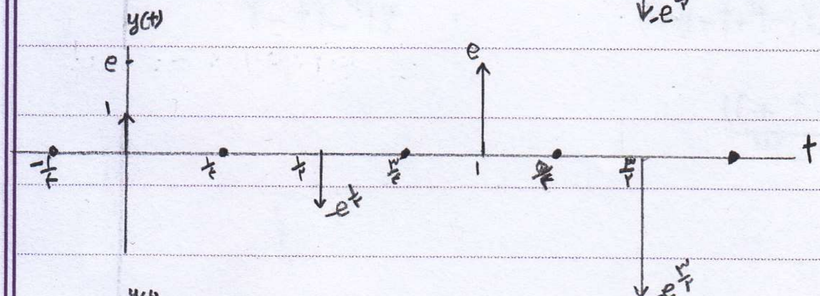




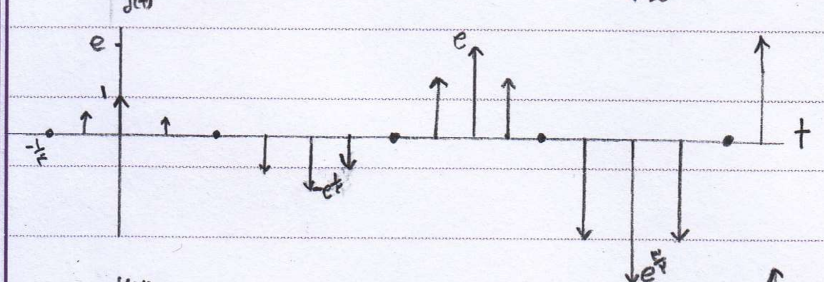
$$y(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{t}\cos(2\pi t)\,\delta(t-n) \Leftarrow T=1$$



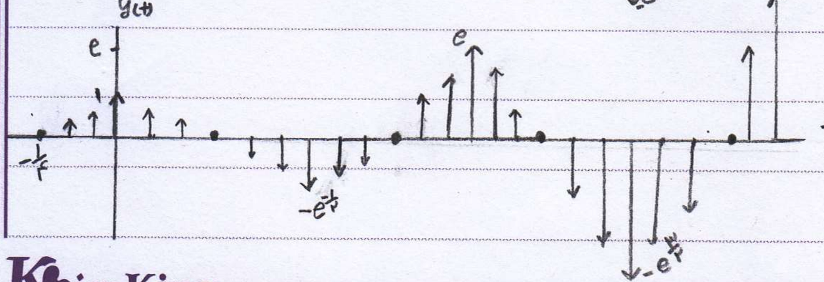
$$y(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{t}\cos(2\pi t)\,\delta(t-\tfrac{n}{2}) \Leftarrow T=\tfrac{1}{2}$$



$$y(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{t}\cos(2\pi t)\,\delta(t-\tfrac{n}{4}) \Leftarrow T=\tfrac{1}{4}$$



$$y(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{t}\cos(2\pi t)\,\delta(t-\tfrac{n}{8}) \Leftarrow T=\tfrac{1}{8}$$



$$y(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{t}\cos(2\pi t)\,\delta(t-\tfrac{n}{16}) \Leftarrow T=\tfrac{1}{16}$$

س۸:

a) $y[n]=\cos(\frac{2\pi}{5}n)\,x[n-1]$

$y_1[n]=y_2[n]\Rightarrow y_1[n]-y_2[n]=0\Rightarrow \cos(\frac{2\pi}{5}n)x_1[n-1]-\cos(\frac{2\pi}{5}n)x_2[n-1]=0$

$\Rightarrow \cos(\frac{2\pi}{5}n)(x_1[n-1]-x_2[n-1])=0$

$\xrightarrow[\times\frac{1}{\cos(\frac{2\pi}{5}n)}]{\cos(\frac{2\pi}{5}n)\neq 0} x_1[n-1]-x_2[n-1]=0\Rightarrow x_1[n-1]=x_2[n-1]$

پس معکوس پذیر است و برای هر $y(t)$، $x(t)$ منحصر به فردی وجود دارد.

$y[n]=\cos(\frac{2\pi}{5}n)\,x[n-1]$

$\Rightarrow \dfrac{y[n]}{\cos(\frac{2\pi}{5}n)}=x[n-1]$

$\Rightarrow \dfrac{y[n+1]}{\cos(\frac{2\pi}{5}(n+1))}=x[n]\longrightarrow W[n]=\dfrac{y[n+1]}{\cos(\frac{2\pi}{5}(n+1))}$:سیستم معکوس

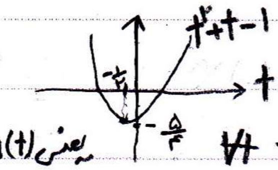
b) $y(t)=\int_{t^2+t}^{+\infty}x(\tau-1)\,d\tau$

$y_1(t)=y_2(t)\Rightarrow y_1(t)-y_2(t)=\int_{t^2+t}^{+\infty}x_1(\tau-1)\,d\tau-\int_{t^2+t}^{+\infty}x_2(\tau-1)\,d\tau=0$

$\Rightarrow \int_{t^2+t}^{+\infty}(x_1(\tau-1)-x_2(\tau-1))\,d\tau=0$

$\xRightarrow{\tau-1=m} \int_{t^2+t-1}^{+\infty}\underbrace{(x_1(m)-x_2(m))}\,dm=0$

یعنی $x_1(t)$ و $x_2(t)$ برابر نباشند ⟸ می تواند صفر نشود.



$\forall t\quad t^2+t-1\geq -\frac{5}{4}$

مثال نقض: $x_1(t)=e^{-t}$, $x_2(t)=\begin{cases}e^{-t} & t\geq-\frac{5}{4}\\ 0 & t<-\frac{5}{4}\end{cases}$

$y_1(t)=\int_{t^2+t}^{\infty}e^{-(\tau-1)}\,d\tau=-\frac{1}{e}e^{-\tau}\Big|_{t^2+t}^{\infty}=0+e^{-(t^2+t-1)}\quad\forall t$

$y_2(t)=\int_{t^2+t}^{\infty}e^{-(\tau-1)}\,d\tau=-\frac{1}{e}e^{\tau}\Big|_{t^2+t}^{\infty}=0+e^{-(t^2+t-1)}\quad\forall t$

$\Rightarrow y_1(t)=y_2(t)\Longrightarrow$ معکوس پذیر نیست.